ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ Ι

Αν $u = u(x)$, **τότε**

$(u^{m+1})' = (m+1)u^m u'$ $\qquad$ $\int u^m u' dx = \frac{u^{m+1}}{m+1} + c$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$ $\qquad$ $\int \frac{u'}{u} dx = \ln x + c$

$(e^u)' = e^u u'$ $\qquad$ $\int e^u u' dx = e^u + c$

$(a^u)' = a^u \ln a \cdot u'$ $\qquad$ $\int a^u u' dx = \frac{a^u}{\ln a} + c$

$(\eta\mu u)' = \sigma\upsilon\nu u \cdot u'$ $\qquad$ $\int \sigma\upsilon\nu u \cdot u' dx = \eta\mu u + c$

$(\sigma\upsilon\nu u)' = -\eta\mu u \cdot u'$ $\qquad$ $\int \eta\mu u \cdot u' dx = -\sigma\upsilon\nu u + c$

$(\varepsilon\phi u)' = \frac{u'}{\sigma\upsilon\nu^2 u}$ $\qquad$ $\int \frac{u'}{\sigma\upsilon\nu^2 u} dx = \varepsilon\phi u + c$

$(\sigma\phi u)' = -\frac{u'}{\eta\mu^2 u}$ $\qquad$ $\int \frac{u'}{\eta\mu^2 u} dx = -\sigma\phi u + c$

$(\tau o\xi\eta\mu u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$ $\qquad$ $\int \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}} dx = \tau o\xi\eta\mu u + c$

$(\tau o\xi\sigma\upsilon\nu u)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$ $\qquad$ $\int \frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}} dx = \tau o\xi\sigma\upsilon\nu u + c$

$(\tau o\xi\varepsilon\phi u)' = \frac{u'}{1+u^2}$ $\qquad$ $\int \frac{u'}{1+u^2} dx = \tau o\xi\varepsilon\phi u + c$

$(\tau o\xi\sigma\phi u)' = -\frac{u'}{1+u^2}$ $\qquad$ $\int \frac{-u'}{1+u^2} dx = \tau o\xi\sigma\phi u + c$

1. ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ ΚΑΤΑ ΠΑΡΑΓΟΝΤΕΣ

Αν $u = u(x)$, $v = v(x)$ **είναι δύο συναρτήσεις του** x **με συνεχείς παραγώγους τότε**

$$\int uv' dx = uv - \int u' v dx \quad \text{ή} \quad \int u dv = uv - \int v du$$

2. ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ ΑΠΛΩΝ ΡΗΤΩΝ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ

$$\int \frac{A}{(x-a)} dx = A \ln|x-a| + c$$

$$\int \frac{A}{(x-a)^n} dx = A \frac{(x-a)^{-n+1}}{-n+1} + c$$

$$\int \frac{Ax+B}{(\alpha x^2 + \beta x + \gamma)^n} dx, \quad n = 1,2,3...$$

Αν $\beta^2 - 4\alpha\gamma \prec 0$ **τότε** $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha\left[x^2 + \dfrac{\beta}{\alpha}x + \gamma\right] = \alpha\left[\left(x^2 + \dfrac{\beta}{2\alpha}\right)^2 + \dfrac{4\alpha\gamma - \beta^2}{4\alpha^2}\right]$.

Θέτουμε $x + \dfrac{\beta}{\alpha} = t$.

3. ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ ΡΗΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

$\dfrac{f(x)}{g(x)}$ $\left(f(x), g(x)\right.$ **είναι πολυώνυμα όπου βαθμός** $f(x) \prec$ **βαθμός** $\left.g(x)\right)$.

Αν $g(x) = (x-\lambda)(x-\mu)^3(ax^2+\beta x+\gamma)(a_1x^2+\beta_1 x+\gamma_1)^2$ **τότε**

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{x-\lambda} + \frac{B}{x-\mu} + \frac{\Gamma}{(x-\mu)^2} + \frac{\Delta}{(x-\mu)^3} + \frac{Ex+Z}{\alpha x^2+\beta x+\gamma} + \frac{Hx+\Theta}{\alpha_1 x^2+\beta_1 x+\gamma_1} + \frac{Ix+K}{(\alpha_1 x^2+\beta_1 x+\gamma_1)^2}.$$

4. ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ ΡΗΤΗΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗΣ ΤΟΥ ημx και συνx $\int \Re(\eta\mu x, \sigma\upsilon\nu x)dx$.

i) **Θέτουμε** $\varepsilon\phi\dfrac{x}{2} = t$, **οπότε** $x = 2\tau o\xi\varepsilon\phi t,\ dx = 2\dfrac{dt}{1+t^2},\ \eta\mu x = \dfrac{2t}{1+t^2},\ \sigma\upsilon\nu x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$.

ii) **Αν** $\Re(\eta\mu x, \sigma\upsilon\nu x) = \Re(-\eta\mu x, -\sigma\upsilon\nu x)$, **θέτουμε** $\varepsilon\phi x = t,\quad dx = \dfrac{dt}{1+t^2}$,

$\eta\mu^2 x = \dfrac{t^2}{1+t^2},\ \sigma\upsilon\nu^2 x = \dfrac{1}{1+t^2}$

iii) **Αν** $\Re(\eta\mu x, \sigma\upsilon\nu x) = -\Re(-\eta\mu x, \sigma\upsilon\nu x)$, **θέτουμε** $\sigma\upsilon\nu x = t$.

iv) **Αν** $\Re(\eta\mu x, \sigma\upsilon\nu x) = -\Re(\eta\mu x, -\sigma\upsilon\nu x)$, **θέτουμε** $\eta\mu x = t$.

5. ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ ΤΗΣ ΜΟΡΦΗΣ $\int \Re\left(x, \left(\dfrac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}\right)^{\frac{p_1}{q_1}}, \ldots, \left(\dfrac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}\right)^{\frac{p_n}{q_n}}\right)dx$.

Αν το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των $|q_1|, |q_2|, |q_3|, \ldots, |q_n|$ **είναι q, θέτουμε** $\dfrac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta} = t^q$.

6. ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ ΤΗΣ ΜΟΡΦΗΣ $\int x^l(\alpha+\beta x^m)^n dx$.

Θέτουμε $x^m = t$, **οπότε** $I = \dfrac{1}{m}\int t^{\frac{l+1-m}{m}}(\alpha+\beta t)^n dt$, **που είναι ολοκλήρωμα της μορφής**

$I = \dfrac{1}{m}\int t^{\lambda}(\alpha+\beta t)^n dt$, **(θέσαμε** $\dfrac{l+1-m}{m} = \lambda$**)**.

i) **Αν** $\lambda \in \mathbb{Z}$ **και** $n = \dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ **θέτουμε** $\alpha + \beta t = u^{|q|}$.

i) Αν $\lambda = \dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ και $n \in \mathbb{Z}$ θέτουμε $t = u^{|q|}$.

ii) Αν $\lambda = \dfrac{p_1}{q_1} \in \mathbb{Q}$, $n = \dfrac{p_2}{q_2} \in \mathbb{Q}$ και $(\lambda + n) \in \mathbb{Z}$ θέτουμε $\dfrac{\alpha + \beta t}{t} = u^{|q_2|}$.

7. ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ ΤΗΣ ΜΟΡΦΗΣ $\int \Re(x, \sqrt{a^2 - x^2}) \cdot dx, \quad a \succ 0, \quad |x| \prec a.$

Θέτουμε $x = a\eta\mu t, \ t \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right).$

8. ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ ΤΗΣ ΜΟΡΦΗΣ $\int \Re(x, \sqrt{x^2 - a^2}) \cdot dx, \quad a \succ 0, \quad |x| \succ a.$

Θέτουμε $x = \dfrac{a}{\sigma\upsilon\nu t}, \ t \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right).$

9. ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ ΤΗΣ ΜΟΡΦΗΣ $\int \Re(x, \sqrt{x^2 + a^2}) \cdot dx, \quad a \succ 0.$

Θέτουμε $x = a\varepsilon\phi t, \ t \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right).$

10. ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ ΤΗΣ ΜΟΡΦΗΣ $\int \Re(x, \sqrt{\alpha x^2 + \beta x + \gamma}) \cdot dx.$

i) Αν $a \succ 0$ θέτουμε $\sqrt{ax^2 + \beta x + \gamma} = \begin{cases} t \pm \sqrt{a}x \\ \sqrt{a}(t \pm x). \end{cases}$

ii) Αν $a \succ 0$ και $\Delta \prec 0 \Rightarrow \sqrt{\alpha x^2 + \beta x + \gamma} = \sqrt{\alpha\left[\left(x + \dfrac{\beta}{2\alpha}\right)^2 + \dfrac{4\alpha\gamma - \beta^2}{4\alpha^2}\right]} = \sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{X^2 + k^2}$,

όπου $X = \left(x + \dfrac{\beta}{2\alpha}\right)$ και $k^2 = \dfrac{4\alpha\gamma - \beta^2}{4\alpha^2}$.

iii) Αν $a \prec 0$ και $\Delta \succ 0 \Rightarrow \sqrt{ax^2 + \beta x + \gamma} = \sqrt{(-a)}\sqrt{\dfrac{\beta^2 - 4\alpha\gamma}{4\alpha^2} - \left(x + \dfrac{\beta}{2\alpha}\right)^2} = \sqrt{-\alpha}\sqrt{k^2 - X^2}$

όπου $X = \left(x + \dfrac{\beta}{2\alpha}\right)$ και $k^2 = \dfrac{\beta^2 - 4\alpha\gamma}{4\alpha^2}$.

iv) Αν $\gamma \succ 0$ θέτουμε $\sqrt{\alpha x^2 + \beta x + \gamma} = xt + \sqrt{\gamma}$.

v) Αν $\Delta \succ 0$ θέτουμε $\sqrt{\alpha x^2 + \beta x + \gamma} = (x - \lambda)t$,

όπου λ, μ είναι πραγματικές ρίζες του πολυωνύμου $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = a(x - \lambda)(x - \mu)$.

11. ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ ΤΗΣ ΜΟΡΦΗΣ $\int \Re(e^{\mu_1 x}, \ldots, e^{\mu_n x}) \cdot dx.$

Θέτουμε $e^x = t$.

11. ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΟΡΙΣΜΕΝΩΝ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΩΝ

ΕΜΒΑΔΟΝ

I. Αν $f: I=[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής συνάρτηση στο I, τότε το εμβαδόν του τόπου που περικλείεται από την καμπύλη $y=f(x)$, τις ευθείες $x=\alpha$, $x=\beta$ και άξονα $X'OX$ δίνεται από τον τύπο

$$E=\int_\alpha^\beta |f(x)|\cdot dx.$$

II. Αν $f,g: I=[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ είναι δύο συνεχείς συναρτήσεις και $\forall x_0\in[\alpha,\beta]$ η ευθεία $x=x_0$ τέμνει τις δύο καμπύλες $y_1=f(x)$, $y_2=g(x)$ σ'ένα μόνο σημείο, τότε το εμβαδόν του τόπου μεταξύ των δύο καμπύλων και των ευθειών $x=\alpha$, $x=\beta$ δίνεται από τον τύπο

$$E=\int_\alpha^\beta |f(x)-g(x)|\cdot dx.$$

<u>Σημείωση:</u> Το εμβαδόν του τόπου που περικλείεται από απλή κλειστή καμπύλη και αποτελείται από τις καμπύλες $y=f_1(x)$, $y=f_2(x)$, ορισμένες στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ δίνεται από τον τύπο

$$E=\int_\alpha^\beta |f_1(x)-f_2(x)|\cdot dx.$$

III. Αν η συνάρτηση $f: I=[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ ορίζεται με παραμετρική μορφή από τις συναρτήσεις

$$\begin{aligned} &x=x(t)\\ &y=y(t),\quad t\in[t_1,t_2]\end{aligned}$$

και οι $x'(t)$, $y'(t)$ είναι συνεχείς στο I, τότε το εμβαδόν του τόπου που περικλείεται από την καμπύλη $y=f(x)$, τις ευθείες $x=\alpha$, $x=\beta$ και άξονα $X'OX$ δίνεται από τον τύπο

$$E=\int_{t_1}^{t_2} |y(t)|\cdot x'(t)\cdot dt,\ \text{όπου}\ x(t_1)=\alpha,\ x(t_2)=\beta.$$

IV. Αν η καμπύλη c έχει εξίσωση $r=r(\theta)$ σε πολικές συντεταγμένες, τότε το εμβαδόν του τόπου που περικλείεται από την καμπύλη c και τις ημιευθείες $\theta=\theta_1$ και $\theta=\theta_2$ δίνεται από τον τύπο

$$E=\frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_1} r^2 d\theta.$$

ΟΓΚΟΣ ΣΤΕΡΕΟΥ ΑΠΟ ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΗ

I. Έστω $f: I=[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής συνάρτηση στο I, D ο τόπος που περικλείεται από την καμπύλη $y=f(x)$, τις ευθείες $x=\alpha$, $x=\beta$ και άξονα $X'OX$. Αν ο τόπος D στραφεί γύρω από τον άξονα $X'OX$ τότε ο όγκος του στερεού που σχηματίζεται δίνεται από τον τύπο

$$V=\pi\int_\alpha^\beta [f(x)]^2 dx.$$

II. Αν η συνάρτηση $f : I = [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ ορίζεται με παραμετρική μορφή από τις συναρτήσεις

$$x = x(t)$$
$$y = y(t), \quad t \in [t_1, t_2]$$

και οι $x'(t),\ y'(t)$ είναι συνεχείς στο I, τότε

$$V = \pi \int_{t_1}^{t_2} [y(t)]^2 \cdot x'(t) dt, \quad \text{όπου } x(t_1) = \alpha,\ x(t_2) = \beta.$$

III. Αν η εξίσωση της καμπύλης c σε πολικές συντεταγμένες είναι $r = r(\theta) : [\theta_1, \theta_2] \to \mathbb{R},\ r(\theta)$ είναι συνεχής στο διάστημα $[\theta_1, \theta_2]$ και D ο τόπος που περικλείεται από την καμπύλη c και τις ημιευθείες $\theta = \theta_1$ και $\theta = \theta_2$, τότε ο όγκος του στερεού που προκύπτει από περιστροφή του D γύρω από τον άξονα $X'OX$ είναι

$$V = \frac{2\pi}{3} \int_{\theta_1}^{\theta_2} r^3 \eta\mu\theta \cdot d\theta.$$

IV. Αν $f, g : I = [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ δύο συναρτήσεις συνεχείς στο $[\alpha, \beta]$. Αν D είναι ο τόπος που περικλείεται από τις καμπύλες f, g και τις ευθείες $x = \alpha,\ x = \beta$ τότε ο όγκος του στερεού που προκύπτει από περιστροφή του D γύρω από τον άξονα $X'OX$ είναι

$$V = \pi \int_{\alpha}^{\beta} \left| [f(x)]^2 - [g(x)]^2 \right| dx.$$