

φάσματος προκύπτουν από τις διαφορές των μέσων τιμών κατά μήκος των γραμμών και των στηλών της εικόνας, στο φάσμα εμφανίζονται ακμές της εικόνας σε διάφορες αναλύσεις.

Τέλος, η ανακατασκευασμένη εικόνα του Σχήματος 5.34(δ) έχει προκύψει με τον 2D-IDHT αφού έχουμε πρώτα μηδενίσει όλους τους συντελεστές που βρίσκονται εκτός της περιοχής [0:50,0:50].

Το πρόγραμμα για το παράδειγμα αυτό δίνεται στο Σχήμα 5.35.

```
clc, close all, clear all
I = imread('Nikos.png');
figure(1), imshow(I)
title(' Αρχική Εικόνα');
I=double(I);
[M,N]=size(I)
H = haAar2(N);
y = H*I*H';
z=log(abs(y)+0.001);
figure (2), imshow(y,[0 255])
title(' Μορφή του μετασχηματισμού
Haar')
colormap('gray');
figure (3), surf(z);
SHADING INTERP , colormap('jet');
title(' Μορφή του log(|V|+0.001) ')
y(50:512,50:512)=0;
ani = H'*y*H;
im=uint8(ani);
figure (4)
imshow(im);
title(' Ανακατασκευή της εικόνας')
```

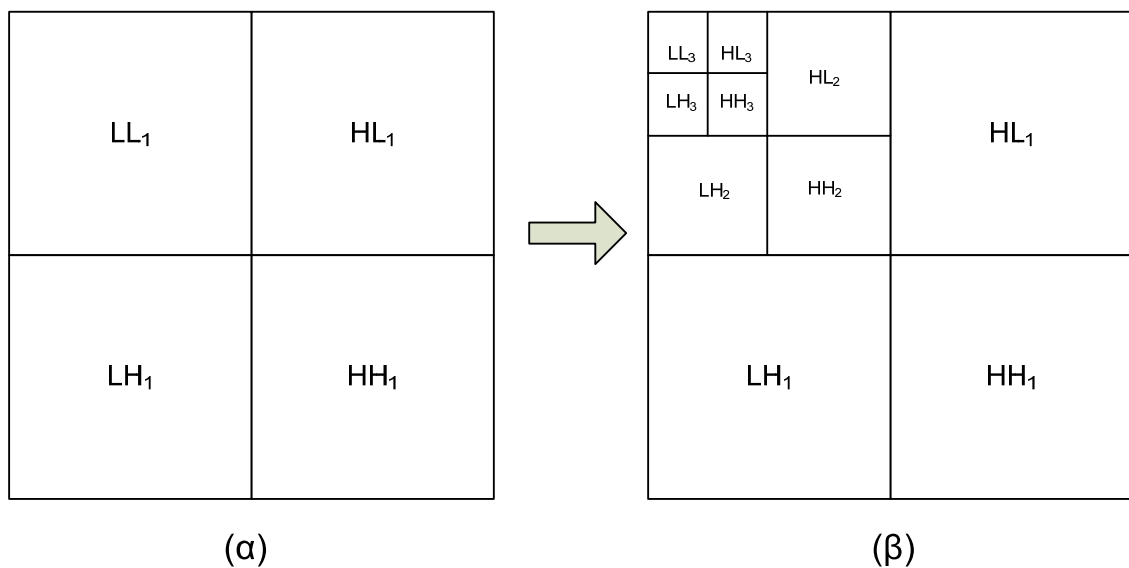
**Σχήμα 5.35** Πρόγραμμα για το παράδειγμα 5.10.

### 5.8.3 Ανάλυση πολλαπλής διακριτικής ικανότητας

Η κύρια ιδέα της ανάλυσης κυματιδίων είναι να αναλυθεί μια συνάρτηση σε διαφορετικές κλίμακες. Το μητρικό κυματίδιο χρησιμοποιείται για να κατασκευαστούν τα κυματίδια στις διαφορετικές κλίμακες και να μετατοπιστεί κατάλληλα κάθε ένα από αυτά. Το αποτέλεσμα της

παραπάνω διαδικασίας εξαρτάται από πόσο ταιριάζει το κυματίδιο που προκύπτει την προς ανάλυση συνάρτηση. Τα κυματίδια στις διαφορετικές κλίμακες παράγουν διαφορετικά αποτελέσματα. Μια τεχνική που εφαρμόζεται στην περίπτωση αυτή είναι η ανάλυση πολλαπλής διακριτικής ικανότητας (multiresolution analysis) που αναπτύχθηκε από τους Mallat και Meyer [MALL89], [MEYE88]. Η βασική ιδέα της θεωρίας αυτής είναι να ομαδοποιηθούν όλοι οι συντελεστές του μετασχηματισμού κυματιδίων για μια δεδομένη κλίμακα, να προσδιοριστεί το “ταίριασμα” τους και αυτό να επαναληφτεί για όλες τις κλίμακες.

Η θεωρία αυτή έχει βρει την εφαρμογή της στις ψηφιακές εικόνες. Στη συνέχεια, θα περιγράψουμε το πως έχει βρει εφαρμογή η θεωρία αυτή με τον μετασχηματισμό Haar. Ο υπολογισμός γενικά ενός διδιάστατου μετασχηματισμού κυματιδίου (2D Wavelet Transform - 2D-WT) μπορεί να γίνει με διάφορους τρόπους [SALO04]. Εδώ θα περιγράψουμε τη μορφή της Πυραμίδας (Pyramid decomposition) που φαίνεται στο Σχήμα 5.36 και με εφαρμογή στον μετασχηματισμό Haar.



**Σχήμα 5.36** Διάσπαση σε μορφή πυραμίδας. (α) Πρώτο επίπεδο αποσύνθεσης. (β) Αποσύνθεση σε τρία επίπεδα.

Υπολογιστικά εργαζόμαστε ως εξής. Όπως αναλύθηκε παραπάνω, μπορούμε να δεχτούμε ότι ο  $H_2$  πίνακας Haar της σχέσης (5.124) αντιστοιχεί, ως προς την πρώτη του γραμμή  $[1 \ 1]$ , με ένα χαμηλοπερατό

φίλτρο, ενώ η δεύτερη γραμμή [1 -1] με ένα υπερπερατό. Ας θεωρήσουμε λοιπόν μια εικόνα διαστάσεων  $N \times N$  όπου  $N = 2^k$ . Για παράδειγμα, ας θεωρήσουμε την  $8 \times 8$  εικόνα του Σχήματος 5.37(α). Αρχικά, χωρίζουμε σε δυάδες εικονοστοιχείων κάθε γραμμή και κάθε στήλη της εικόνας. Κατόπιν εφαρμόζουμε γραμμή-γραμμή πρώτα χαμηλοπερατό και μετά υπερπερατό φιλτράρισμα. Στην πράξη βρίσκουμε τις μέσες τιμές και τις διαφορές ανά δύο των στοιχείων. Έτσι, από το χαμηλοπερατό φιλτράρισμα παίρνουμε τις τιμές που αποτυπώνονται στις τέσσερις πρώτες στήλες της εικόνας του Σχήματος 5.37(β). Οι υπόλοιπες τέσσερις στήλες αντιστοιχούν στην εφαρμογή του υπερπερατού φίλτρου. Στη συνέχεια, στις στήλες της εικόνας του Σχήματος 5.37(β) επαναλαμβάνουμε την παραπάνω διαδικασία του χαμηλοπερατού και υπερπερατού φιλτραρίσματος. Έτσι παίρνουμε την εικόνα του Σχήματος 5.37(γ) η οποία είναι χωρισμένη ουσιαστικά σε τέσσερις περιοχές τις  $LL_1$ ,  $LH_1$ ,  $HL_1$  και  $HH_1$ . Η περιοχή  $LL_1$  περιέχει τις χαμηλές συχνότητες της εικόνας και συνεπώς τις σημαντικότερες πληροφορίες αυτής. Αντίθετα η εικόνα  $HH_1$  περιέχει τις υψηλές συχνότητες και όπως παρατηρούμε αποτελείται από πολλά μηδενικά. Οι άλλες δύο περιοχές περιέχουν ένα συνδυασμό από χαμηλές και υψηλές συχνότητες. Από πλευράς ενέργειας, για το συγκεκριμένο παράδειγμα έχουμε τις τιμές

- Ενέργεια στην περιοχή  $LL_1 = 2587$
- Ενέργεια στην περιοχή  $LH_1 = 52$
- Ενέργεια στην περιοχή  $HL_1 = 12$
- Ενέργεια στην περιοχή  $HH_1 = 16$

Παρατηρούμε δηλαδή ότι πράγματι η σημαντικότερη πληροφορία της εικόνας παραμένει στην εικόνα  $LL_1$ . Για το σκοπό αυτό μπορούμε να επαναλάβουμε την παραπάνω διαδικασία κάνοντας διάσπαση τώρα στην εικόνα  $LL_1$ . Η διαδικασία αυτή μπορεί να επαναληφτεί αν το επιθυμούμε έως ότου η τελευταία  $LL$  εικόνα που θα προκύψει να έχει μόνον ένα εικονοστοιχείο. Στο Σχήμα 5.36(β) δείχνεται η διάσπαση σε τρία επίπεδα της πυραμίδας.

Η διαδικασία ταυτόχρονου φιλτραρίσματος με ένα κατωδιαβατό και ένα υπερπερατό φίλτρο καθώς και η υποδειγματοληψία στη συνέχεια των εικόνων που προκύπτουν, μπορεί να περιγραφεί ως η εφαρμογή ενός

filterbank δύο καναλιών, η δομή του οποίου δείχνεται στο Σχήμα 5.38. Επίσης, στο Σχήμα 5.39 δείχνεται ένα βήμα διάσπασης του διδιάστατου διακριτού μετασχηματισμού κυματιδίων (wavelets).

10 10 10 10 10 40 10 10	10 10 25 10	0 0 -30 0	10 10 25 10	0 0 -30 0	10 10 25 10	0 0 -30 0	15 15 22.5 15	0 0 -25 0
10 10 10 10 10 40 10 10	10 10 25 10	0 0 -30 0	10 10 25 10	0 0 -30 0	10 10 25 10	0 0 -30 0	10 10 25 10	0 0 -30 0
10 10 10 10 10 40 10 10	10 10 25 10	0 0 -30 0	10 10 25 10	0 0 -30 0	10 10 25 10	0 0 -30 0	10 10 25 10	0 0 -30 0
10 10 10 10 10 40 10 10	10 10 25 10	0 0 -30 0	10 10 25 10	0 0 -30 0	10 10 25 10	0 0 -30 0	10 10 25 10	0 0 -30 0
20 20 20 20 20 40 20 20	20 20 30 20	0 0 -20 0	20 20 30 20	0 0 -20 0	20 20 30 20	0 0 -20 0	0 0 0 0	0 0 0 0
10 10 10 10 10 40 10 10	10 10 25 10	0 0 -30 0	10 10 25 10	0 0 -30 0	10 10 25 10	0 0 -30 0	-10 -10 -5 -10	0 0 -10 0
10 10 10 10 10 40 10 10	10 10 25 10	0 0 -30 0	10 10 25 10	0 0 -30 0	10 10 25 10	0 0 -30 0	0 0 0 0	0 0 0 0

(α)

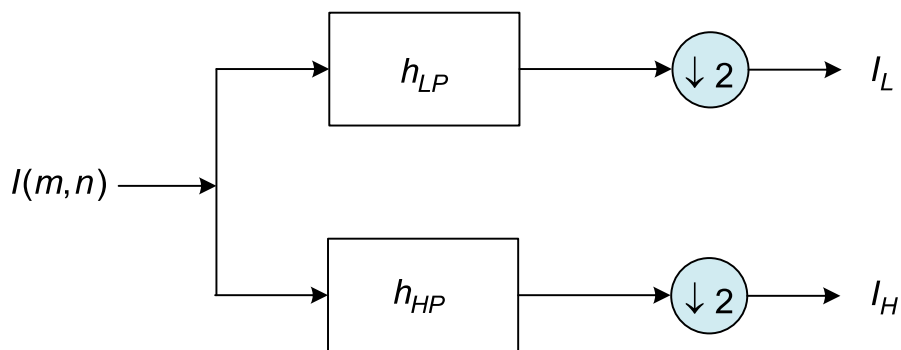
(β)

(γ)

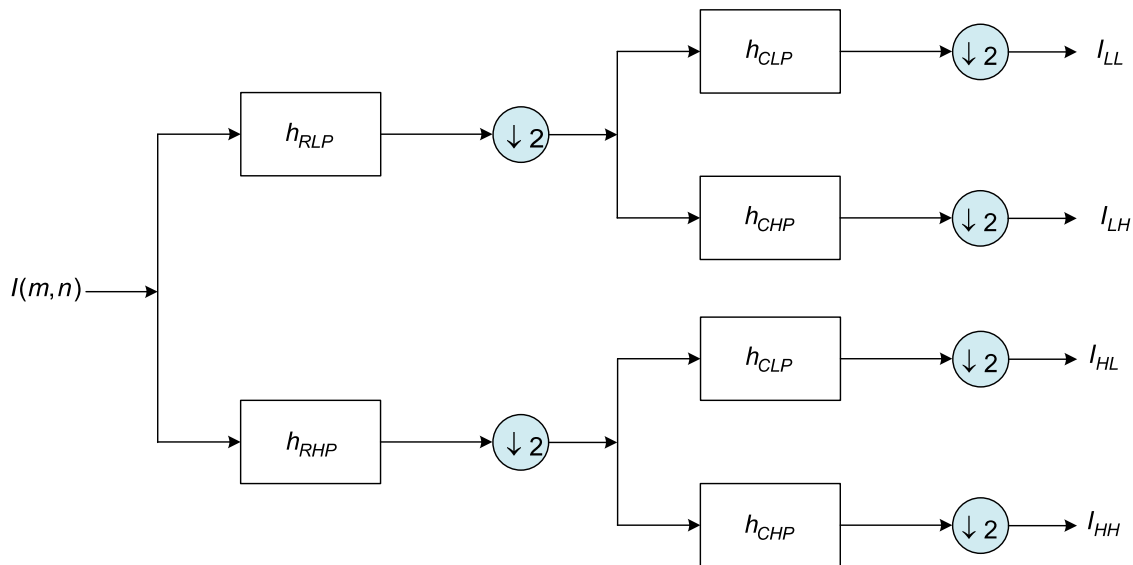


(δ)

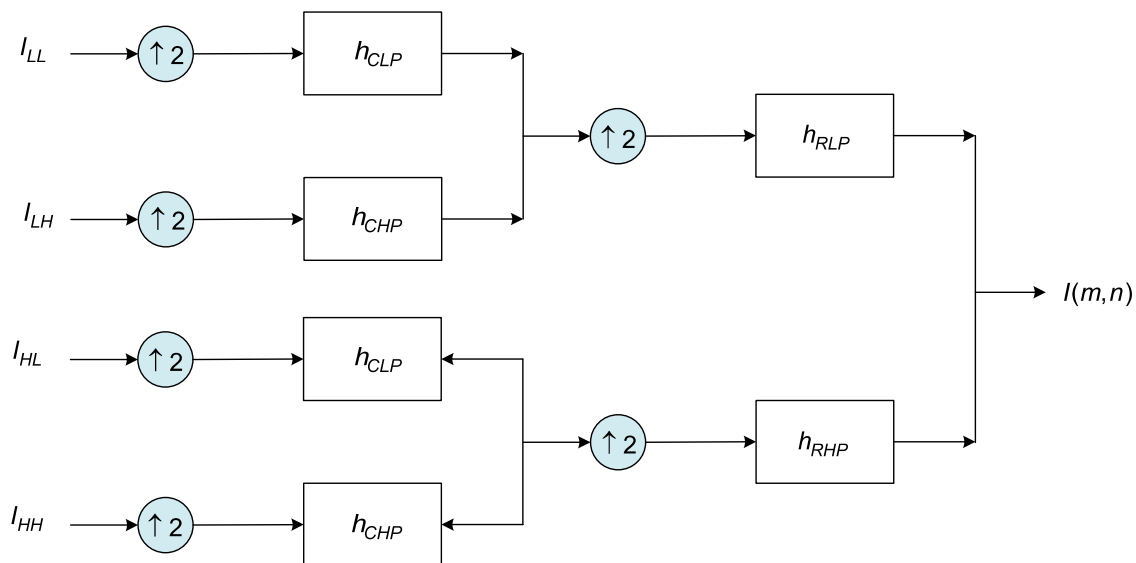
**Σχήμα 5.37** (α-γ) Αριθμητικό παράδειγμα διάσπασης μιας εικόνας 8×8 σε μορφή πυραμίδας. (δ) Οπτικά τα αποτελέσματα του παραδείγματος.



**Σχήμα 5.38** Δομή filterbank δύο καναλιών.



**Σχήμα 5.39** Ένα βήμα διάσπασης του 2D διακριτού μετασχηματισμού wavelet.



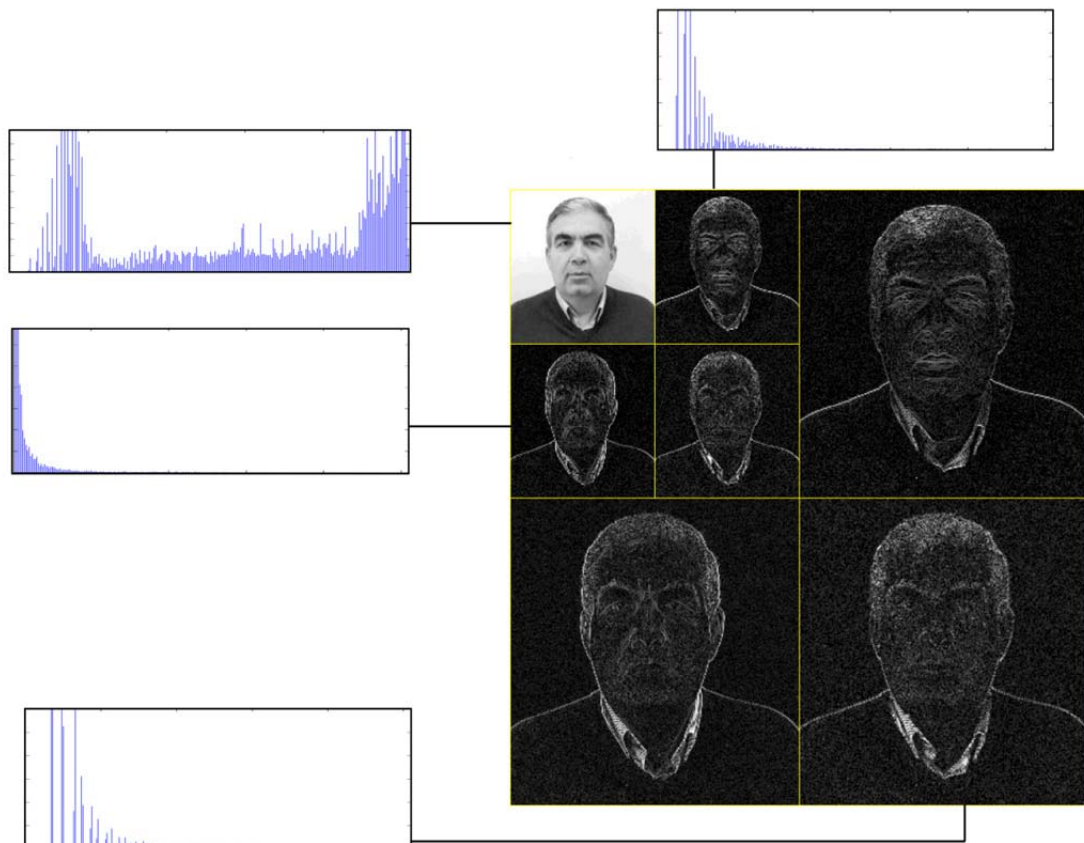
**Σχήμα 5.40** Ένα βήμα ανασύστασης του 2D διακριτού μετασχηματισμού wavelet.

Ο αντίστροφος μετασχηματισμός κυματιδίου Haar μπορεί να επιτευχθεί με τη χρήση αντίστροφης διαδικασίας από αυτήν της διάσπασης. Με στόχο η εικόνα που θα προκύψει από την ανασύνθεση να έχει διαστάσεις ίσες με αυτές της αρχικής εικόνας, εφαρμόζεται

υπερδειγματοληψία με παρεμβολή μηδενικών μεταξύ των τιμών. Στη συνέχεια, σε κάθε επανάληψη και σε κάθε υποεικόνα, εφαρμόζεται αντίστροφο χαμηλοπερατό και υψηλοπερατό φιλτράρισμα. Στην περίπτωση του μετασχηματισμού Haar τα αντίστροφα φίλτρα είναι τα ίδια που εφαρμόστηκαν κατά τη διάσπαση. Ένα γενικό σχήμα ανασύστασης ενός βήματος δείχνεται στο Σχήμα 5.40. Η βασική τεχνική στην κατηγορία αυτή καλείται δυαδική σύνθεση (Dyadic Synthesis Filter Bank).

### Παράδειγμα 5.11

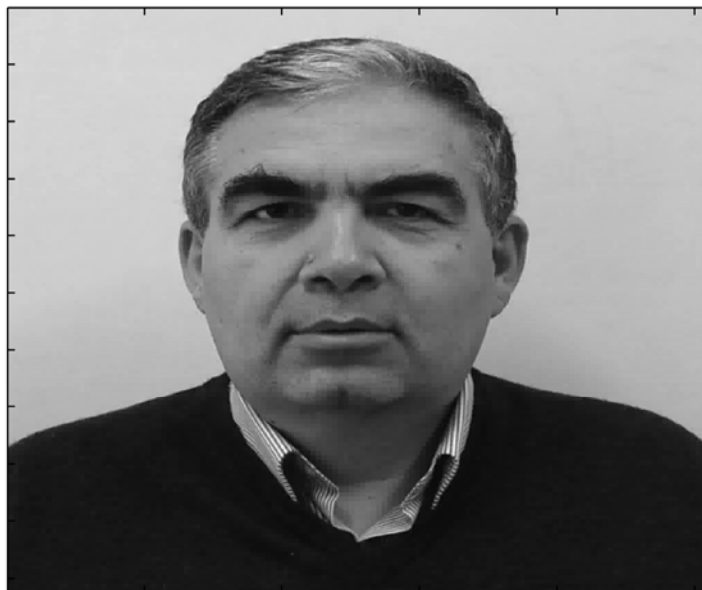
Στο Σχήμα 5.41 δείχνεται η εφαρμογή του Haar wavelet μετασχηματισμού με τη διάσπαση, σε μορφή πυραμίδας, μιας εικόνας σε δύο επίπεδα. Για την εύρεση των αποτελεσμάτων αυτών χρησιμοποιήθηκε η έτοιμη υλοποίηση του Matlab που περιλαμβάνεται στο πρόγραμμα wavemenu.



**Σχήμα 5.41** Παράδειγμα εφαρμογής μετασχηματισμού Haar σε μορφή πυραμίδας δύο επιπέδων.

Μπορούμε να παρατηρήσουμε τα ακόλουθα:

1. Εξαιρουμένης της εικόνας  $LL_3$  όπου έχουμε τις χαμηλές συχνότητες της εικόνας, όλες οι άλλες υποεικόνες έχουν παρόμοιο ιστόγραμμα. Λόγω της ύπαρξης στις υποεικόνες αυτές πολλών μηδενικών και τιμών φωτεινότητας κοντά στο μηδέν, τα ιστογράμμά τους έχουν μεγάλη συγκέντρωση κοντά στο μηδέν. Η ύπαρξη πολλών μηδενικών τιμών κάνει τις υποεικόνες αυτές κατάλληλες για συμπίεση.
2. Η εικόνα στο Σχήμα 5.41 δεν αποτυπώνει τον μετασχηματισμό Haar αν και τα χαμηλοπερατά και υψηπερατά φίλτρα υλοποιήθηκαν με τη βοήθεια του πίνακα Haar  $H_2$ . Το ίδιο σχήμα διάσπασης μπορεί να χρησιμοποιηθεί και με άλλους μετασχηματισμούς κυματιδίων.
3. Κάθε υποεικόνα αντιπροσωπεύει μια καθορισμένη περιοχή χωρικών συχνοτήτων της αρχικής εικόνας. Επιπλέον, πολλές από τις υποεικόνες παρουσιάζουν ευαισθησία ως προς κάποια κατεύθυνση. Αυτό συνδέεται άμεσα με το ότι οι υψηλές συχνότητες αναφέρονται κυρίως στις ακμές μια εικόνας. Για παράδειγμα, η υποεικόνα  $HL_1$  δίνει έμφαση σε πληροφορίες οριζόντιων ακμών.



**Σχήμα 5.42** Συμπίεση εικόνας με μετασχηματισμό κυματιδίου Haar.

Πρέπει να τονίσουμε ότι το κυματίδιο που χρησιμοποιήσαμε και το οποίο προέρχεται από τις συναρτήσεις Haar λόγω των ασυνεχειών που παρουσιάζει δεν είναι το καλύτερο δυνατό. Παρόλα αυτά, ο μετασχηματισμός κυματιδίου Haar, λόγω του ότι απαιτεί μόνον προσθήσεις και αφαιρέσεις, είναι πολύ γρήγορος και εύκολα υλοποιήσιμος.

Ο μετασχηματισμός κυματιδίου Haar και γενικά οι μετασχηματισμοί κυματιδίων έχουν βρει σημαντικές εφαρμογές στην ψηφιακή επεξεργασία εικόνας και video με κυριότερες την εξαγωγή χαρακτηριστικών υφής, τη σύντηξη (fusion) και τη συμπίεση. Για παράδειγμα, στο Σχήμα 5.42 δείχνεται η συμπίεση μιας εικόνας που επιτεύχθηκε και όπου η ενέργεια που παρέμεινε είναι 99.95% και όπου το 90.52% των συντελεστών του μετασχηματισμού κυματιδίου Haar έχουν μηδενιστεί.

#### 5.8.4 Υπολογισμός του 2D DWT μιας εικόνας με το Matlab

Ο υπολογισμός του διδιάστατου διακριτού μετασχηματισμού κυματιδίου (2D DWT) μιας εικόνας αποχρώσεων του γκρι μπορεί να γίνει με έτοιμες συναρτήσεις του Matlab και συγκεκριμένα με τις συναρτήσεις `dwt2` και `wavedec2`. Η `dwt2` μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την εύρεση του 2D DWT ενός μόνον επιπέδου. Αντίθετα, η `wavedec2` επιτρέπει τον προσδιορισμό του 2D DWT πολλαπλών επιπέδων.

Για τον υπολογισμό λοιπόν του ενός επιπέδου 2D DWT μιας εικόνας μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την εντολή

$$[A, H, V, D] = \text{dwt2}(\text{double}(\text{Image}), 'wname') \quad (5.129)$$

όπου *Image* είναι η εικόνα και το *'wname'* καθορίζει το είδος του κυματιδίου. Τα διαθέσιμα κυματίδια μπορούν να βρεθούν με την εντολή *waveletfamilies* και είναι αυτά που δίδονται στον Πίνακα 5.3.

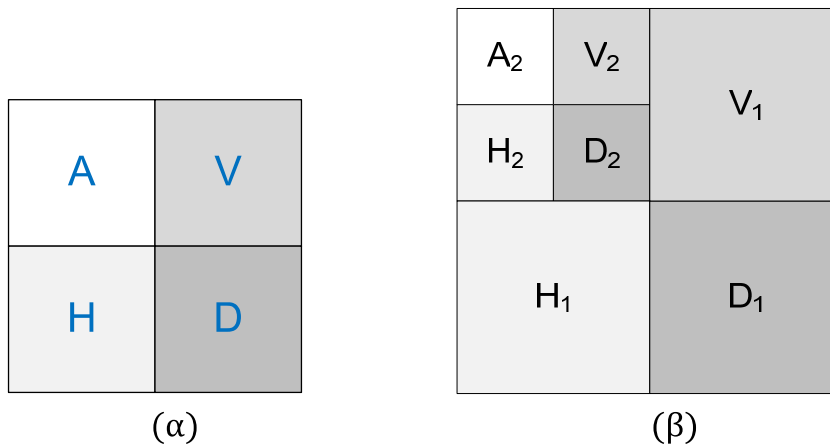
Αντίστροφος μετασχηματισμός υλοποιείται από την εντολή

$$\text{Image} = \text{idwt2}(A, H, V, D, 'wname') \quad (5.130)$$

Οι πίνακες *A, H, V, D* αφορούν τις τέσσερις υποεικόνες του πρώτου επιπέδου σύμφωνα με το Σχήμα 5.43(α). Ένα πρόγραμμα που επιτρέπει τον προσδιορισμό του 2D DWT ενός επιπέδου δείχνεται στο Σχήμα 5.44. Στο Σχήμα 5.45 παρουσιάζεται το αποτέλεσμα της εφαρμογής του προγράμματος σε μια εικόνα αποχρώσεων του γκρι. Είναι φανερό ότι



μπορούμε να επεκτείνουμε το πρόγραμμα αυτό για την περίπτωση έγχρωμων εικόνων. Το σχετικό πρόγραμμα είναι αυτό του Σχήματος 5.46 όπου μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι κάθε χρωματική συνιστώσα επεξεργάζεται ξεχωριστά και στο τέλος γίνεται η συνένωση των αποτελεσμάτων.



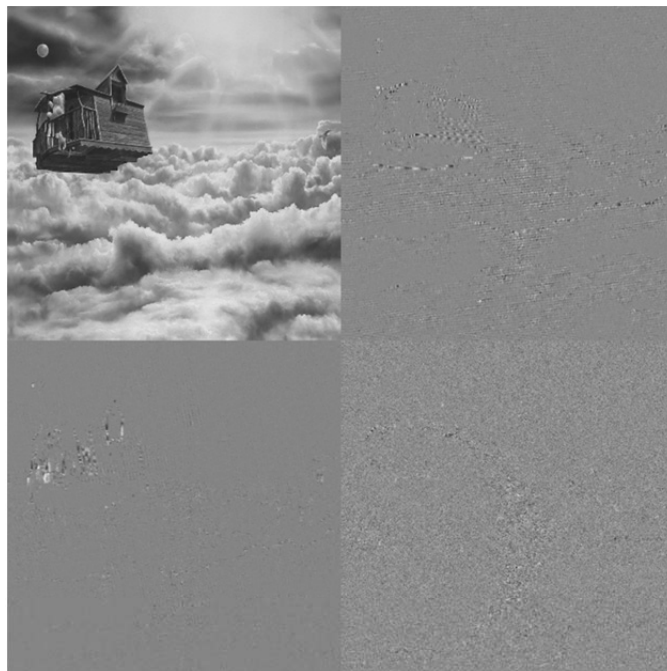
**Σχήμα 5.43** (α) 2D DWT ενός επιπέδου. (β) 2D DWT δύο επιπέδων.

**Πίνακας 5.3** Οικογένειες κυματιδίων.

Wavelet	<i>wfamily</i>	<i>wname</i>
Haar	<i>'haar'</i>	<i>'haar'</i>
Daubechies	<i>'db'</i>	<i>'db2', 'db3', ..., 'db45'</i>
Coiflets	<i>'coif'</i>	<i>'coif1', 'coif2', ..., 'coif5'</i>
Symlets	<i>'sym'</i>	<i>'sym2', 'sym3', ..., 'sym45'</i>
Discrete Meyer	<i>'dmey'</i>	<i>'dmey'</i>
Biorthogonal	<i>'bior'</i>	<i>'bior1.1', 'bior1.3', 'bior1.5', 'bior2.2', 'bior2.4', 'bior2.6', 'bior2.8', 'bior3.1', 'bior3.3', 'bior3.5', 'bior3.7', 'bior3.9', 'bior4.4', 'bior5.5', 'bior6.8'</i>
Reverse Biorthogonal	<i>'rbio'</i>	<i>'rbior1.1', 'rbior1.3', 'rbior1.5', 'rbior2.2', 'rbior2.4', 'rbior2.6', 'rbior2.8', 'rbior3.1', 'rbior3.3', 'rbior3.5', 'rbior3.7', 'rbior3.9', 'rbior4.4', 'rbior5.5', 'rbior6.8'</i>

```
Im = imread('a_gray.bmp');  
% Εφαρμογή του dwt2 με τη χρησιμοποίηση του κυματιδίου  
% db16 του Daubechies  
[A, H, V, D] = dwt2(double(Im), 'db16');  
% Προκειμένου να εμφανίσουμε τα αποτελέσματα ως εικόνες,  
% κλιμακώνουμε και μετατρέψουμε τις τιμές τους σε τιμές grayscale  
imA = make_image(A);imH = make_image(H);  
imV = make_image(V);imD = make_image(D);  
[M, N] = size(A);  
% Δημιουργούμε τώρα μια μεγαλύτερη εικόνα διαστάσεων (M*2, N*2)  
% η οποία θα απεικονίζει όλο το φάσμα,  
% δηλαδή και τους τέσσερις πίνακες imA,imH,imV,imD.  
Fasma = zeros(M*2, N*2, 'uint8');  
Fasma(1:M, 1:N) = imA;  
Fasma(1:M, N+1:N*2) = imH;  
Fasma(M+1:M*2, 1:N) = imV;  
Fasma(M+1:M*2, N+1:N*2) = imD;  
% Τέλος, απεικονίζεται ο πίνακας Fasma  
figure  
iptsetpref('ImshowBorder','tight');imshow(Fasma);  
title(' 2D DWT ενός επιπέδου');
```

**Σχήμα 5.44** Πρόγραμμα υπολογισμού του 2D DWT ενός επιπέδου.



**Σχήμα 5.45** Εύρεση του 2D DWT ενός επιπέδου μιας εικόνας.

```

x = imread('a_color.bmp');
% Εφαρμογή σε κάθε συνιστώσα του dwt2
[Ar, Hr, Vr, Dr] = dwt2(double(x(:,:,1)), 'db16');
[Ag, Hg, Vg, Dg] = dwt2(double(x(:,:,2)), 'db16');
[Ab, Hb, Vb, Db] = dwt2(double(x(:,:,3)), 'db16');
% Μετατροπή των τιμών στην κλίμακα [0,255]
imAr = make_image(Ar);imHr = make_image(Hr);
imVr = make_image(Vr);imDr = make_image(Dr);
imAg = make_image(Ag);imHg = make_image(Hg);
imVg = make_image(Vg);imDg = make_image(Dg);
imAb = make_image(Ab);imHb = make_image(Hb);
imVb = make_image(Vb);imDb = make_image(Db);
% Δημιουργία της μεγάλης εικόνας
[M, N] = size(imAr);Fasma = zeros(M*2, N*2, 3, 'uint8');
% Γέμισμα της εικόνας του φάσματος
Fasma(1:M, 1:N,1) = imAr;Fasma(1:M, 1:N,2) = imAg;
Fasma(1:M, 1:N,3) = imAb;
Fasma(1:M, N+1:N*2,1) = imHr;Fasma(1:M, N+1:N*2,2) = imHg;
Fasma(1:M, N+1:N*2,3) = imHb;
Fasma(M+1:M*2, 1:N,1) = imVr;Fasma(M+1:M*2, 1:N,2) = imVg;
Fasma(M+1:M*2, 1:N,3) = imVb;
Fasma(M+1:M*2, N+1:N*2,1) = imDr;Fasma(M+1:M*2, N+1:N*2,2) = imDg;
Fasma(M+1:M*2, N+1:N*2,3) = imDb;
%Τέλος, απεικονίζεται ο πίνακας Fasma
iptsetpref('imshowBorder','tight');imshow(Fasma);

```

**Σχήμα 5.46** Πρόγραμμα υπολογισμού του 2D DWT ενός επιπέδου.

#### 5.8.4.1 Ανάλυση πολλών επιπέδων - Η εντολή `wavedec2`

Για την εύρεση του 2D DWT πολλών επιπέδων μπορούμε φυσικά να χρησιμοποιήσουμε επαναληπτικά την εντολή `dwt2`. Όμως, το Matlab διαθέτει για το σκοπό αυτό τη συνάρτηση `wavedec2`. Η συνάρτηση αυτή συντάσσεται ως εξής

$$[C, S] = \text{wavedec2}(I, N, Lo\_D, Hi\_D) \quad (5.131)$$

όπου  $I$  η εικόνα (ή διδιάστατος πίνακας),  $N$  το πλήθος των επιπέδων και  $Lo\_D, Hi\_D$  φίλτρα αποσύνθεσης. Τα φίλτρα αυτά προσδιορίζονται με τη βοήθεια της συνάρτησης

$$[Lo\_D, Hi\_D, Lo\_R, Hi\_R] = \text{wfilters}(wname) \quad (5.132)$$

όπου  $wname$  το είδος του κυματιδίου (Πίνακας 5.3) ενώ τα φίλτρα  $Lo\_R, Hi\_R$  είναι τα δύο φίλτρα ανακατασκευής. Για παράδειγμα, τα φίλτρα για το κυματίδιο `'db2'` προσδιορίζονται από το πρόγραμμα του

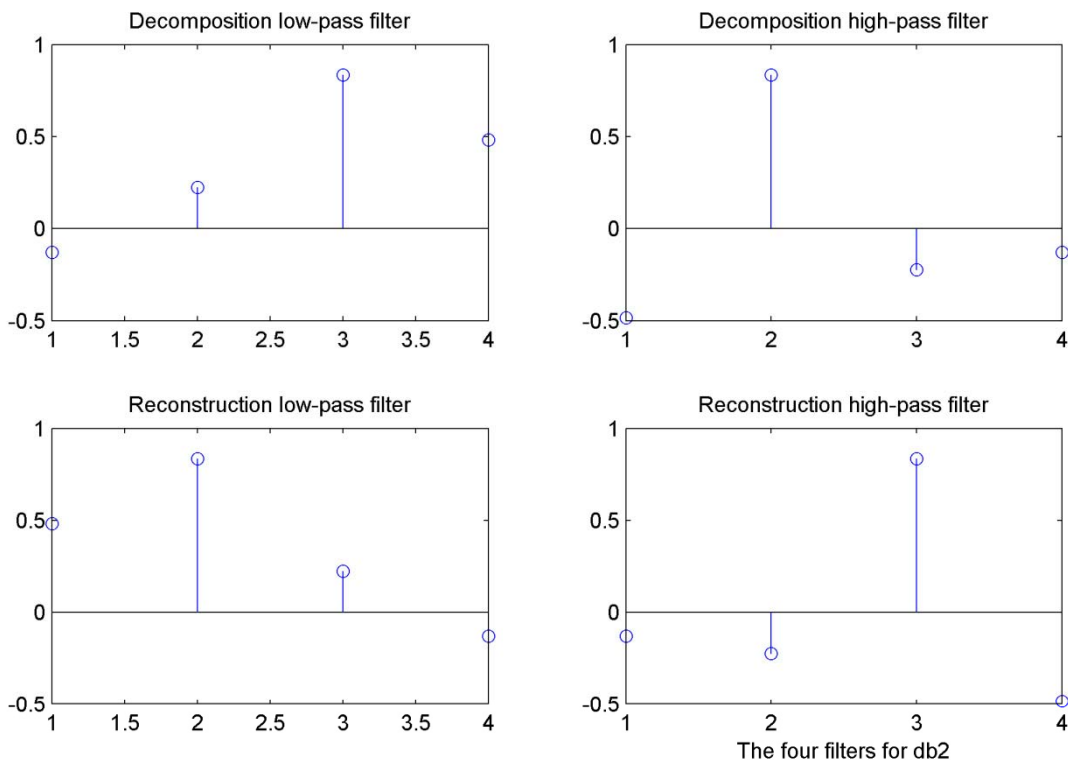
Σχήματος 5.47. Οι κρουστικές αποκρίσεις των φίλτρων (ουσιαστικά οι πίνακες που εισάγονται στη συνάρτηση *wavedec2*), όπως προκύπτει από το πρόγραμμα, δίδονται στο Σχήμα 5.48.

```

wname = 'db2'; % Όνομα κυματιδίου
% Υπολογισμός των φίλτρων αποσύνθεσης και
ανακατασκευής
[Lo_D,Hi_D,Lo_R,Hi_R] = wfilters(wname);
subplot(221); stem(Lo_D);
title('Decomposition low-pass filter');
subplot(222); stem(Hi_D);
title('Decomposition high-pass filter');
subplot(223); stem(Lo_R);
title('Reconstruction low-pass filter');
subplot(224); stem(Hi_R);
title('Reconstruction high-pass filter');
xlabel('The four filters for db2')

```

**Σχήμα 5.47** Υπολογισμός των φίλτρων αποσύνθεσης και ανακατασκευής.



**Σχήμα 5.48** Γραφική απεικόνιση των φίλτρων για το κυματίδιο db2.

Για την απλούστευση της παραπάνω διαδικασίας η συνάρτηση *wavedec2* χρησιμοποιείται συνήθως με την ακόλουθη μορφή

$$[C, S] = \text{wavedec2}(Im, N, 'wname') \quad (5.133)$$

όπου απλά το *'wname'* καθορίζει το κυματίδιο.

Ο πίνακας *C* περιέχει τους συντελεστές του μετασχηματισμού, δηλαδή όλους τους πίνακες  $A_1, H_1, V_1, D_1, H_2, V_2, D_2, \dots$ . Συγκεκριμένα, η δομή του *C* είναι η ακόλουθη

$$C = [A_N | H_N | V_N | D_N | \dots | H_{N-1} | V_{N-1} | D_{N-1} | \dots | H_1 | V_1 | D_1] \quad (5.134)$$

Η εξαγωγή του πίνακα  $A_N$  από τον πίνακα *C* μπορεί να γίνει με τις εντολές

$$A_N = \text{appcoef2}(C, S, 'wname', N) \quad (5.135)$$

$$\text{ή } A_N = \text{appcoef2}(C, S, Lo\_R, Hi\_R, N) \quad (5.136)$$

Οι υπόλοιποι πίνακες εξάγονται με τη βοήθεια της εντολής

$$[H_N, V_N, D_N] = \text{detcoef2}('all', C, S, N) \quad (5.137)$$

όπου *N* το επίπεδο των συντελεστών. Αν θέλουμε να εξάγουμε μόνον έναν πίνακα τότε αντικαθιστούμε το *'all'* με *'h'*, *'v'* ή *'d'*, αντίστοιχα.

Ο πίνακας *S* που προκύπτει από την *wavedec2* είναι βοηθητικός και περιέχει πληροφορίες για τις διαστάσεις των πινάκων. Συγκεκριμένα,

$$S(1, :) = \text{δίνει το μέγεθος της εικόνας } A_N$$

$S(i, :) = \text{δίνει το μέγεθος των πινάκων } H_{N-i+1}, V_{N-i+1}, D_{N-i+1} \text{ για } i = 2, \dots, N + 1 \text{ και } S(N + 2, :) = \text{size}(I).$

Σύμφωνα με τα παραπάνω, στο Σχήμα 5.49 δίνεται ένα πρόγραμμα υλοποίησης του 2D DWT δύο επιπέδων. Το αποτέλεσμα της εφαρμογής του προγράμματος αυτού σε μια εικόνα και για δύο επίπεδα ανάλυσης φαίνεται στο Σχήμα 5.50.

#### 5.8.4.2 Αντιστροφή του 2D DWT

Ο 2D DWT έχει βρει πολλές εφαρμογές στην ψηφιακή επεξεργασία εικόνας. Ενδεικτικά μπορούμε να αναφέρουμε το θέμα της συμπίεσης που είδαμε παραπάνω, η απαλοιφή θορύβου και η σύντηξη εικόνων (image fusion). Σ' όλες αυτές τις περιπτώσεις επεξεργαζόμαστε το φάσμα του μετασχηματισμού και κατόπιν πρέπει να ανασυνθέσουμε την εικόνα. Αυτό επιτυγχάνεται με τη βοήθεια του αντίστροφου μετασχηματισμού 2D IDWT. Έτσι λοιπόν, σε αντιστοίχιση με τη

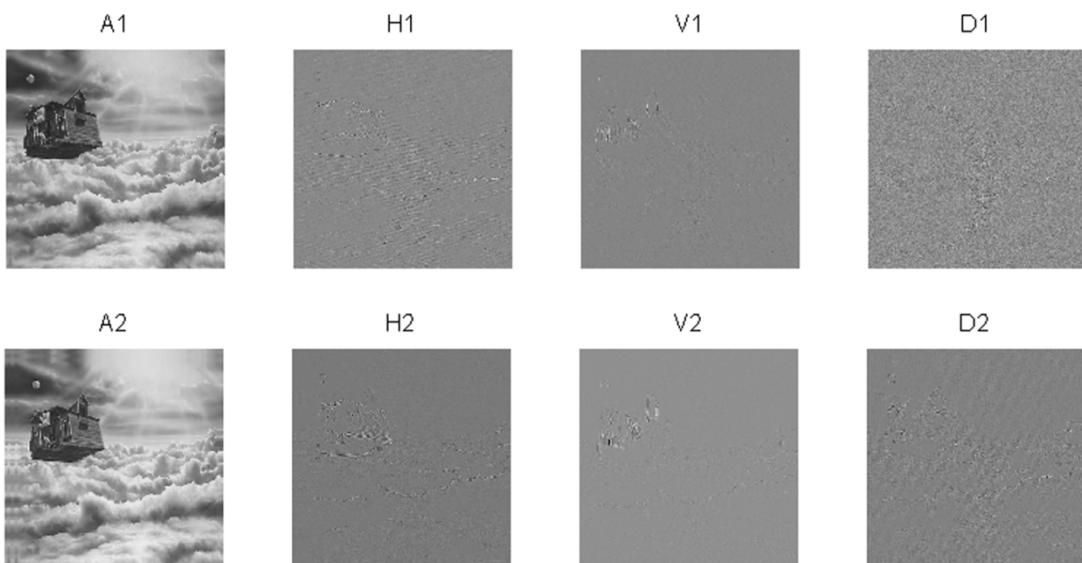
συνάρτηση  $dwt2$  υπάρχει η συνάρτηση  $idwt2$  που συνήθως καλείται με τις μορφές

$$I = idwt2(A,H,V,D,'wname') \quad (5.138)$$

$$I = idwt2(A,H,V,D,Lo\_R,Hi\_R) \quad (5.139)$$

```
Im=imread('a_gray.bmp');
N=2; % Υπολογισμός 2D DWT δύο επιπέδων
[C,S] = wavedec2(Im,N,'db16');
% Υπολογισμός συντελεστών 1ου επιπέδου
A1 = appcoef2(C,S,'db16',1);
[H1,V1,D1] = detcoef2('all',C,S,1);
% Υπολογισμός συντελεστών 2ου επιπέδου
A2 = appcoef2(C,S,'db16',N); [H2,V2,D2] =
detcoef2('all',C,S,N);
% Παρουσίαση των εικόνων 1ου και N επιπέδου
subplot(2,4,1);imshow(A1,[]);axis off;title('A1')
subplot(2,4,2);imshow(H1,[]);axis off;title('H1')
subplot(2,4,3);imshow(V1,[]);axis off;title('V1')
subplot(2,4,4);imshow(D1,[]);axis off;title('D1')
subplot(2,4,5);imshow(A2,[]);axis off;title('A2')
subplot(2,4,6);imshow(H2,[]);axis off;title('H2')
subplot(2,4,7);imshow(V2,[]);axis off;title('V2')
subplot(2,4,8);imshow(D2,[]);axis off;title('D2')
```

**Σχήμα 5.49** Υλοποίηση του 2D DWT δύο επιπέδων.



**Σχήμα 5.50** 2D DWT δύο επιπέδων μιας εικόνας.

Στην περίπτωση ανάλυσης πολλών επιπέδων και σε αντιστοίχιση πάλι με τη συνάρτηση *wavedec2* χρησιμοποιείται η συνάρτηση *waverec2* με τις ακόλουθες κύριες μορφές

$$X = \text{waverec2}(C, S, 'wname') \quad (5.140)$$

$$X = \text{waverec2}(C, S, Lo\_R, Hi\_R) \quad (5.141)$$

Όμως, αν οι πίνακες  $A, H, V, D$  τροποποιηθούν τότε είναι απαραίτητο να ξαναδημιουργηθεί ο πίνακας  $C$  και μετά να γίνει η αντιστροφή. Η διαδικασία αυτή εφαρμόζεται σε περιπτώσεις όπως η σύντηξη πληροφορίας εικόνων. Στο παράδειγμα που ακολουθεί αποσαφηνίζεται η μέθοδος αυτή.

### Παράδειγμα 5.12

Στο Σχήμα 5.51 υπάρχουν δύο εικόνες που απεικονίζουν το ίδιο πρόσωπο μόνον που υπάρχει θόλωση σε διαφορετικές περιοχές τους. Για την εξάλειψη της θόλωσης θα εφαρμόσουμε μια απλή τεχνική σύντηξης των εικόνων (image fusion) σύμφωνα με την οποία οι εικόνες αναλύονται αρχικά με τη βοήθεια του 2D DWT δύο επιπέδων. Στη συνέχεια, υπολογίζουμε τη μέση τιμή των τιμών των αντίστοιχων πινάκων και κατόπιν εφαρμόζουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό. Για το σκοπό αυτό είναι χρήσιμη η εντολή *reshape* και ο πίνακας  $S$ . Το Σχετικό πρόγραμμα είναι αυτό του Σχήματος 5.52 ενώ η εικόνα που προκύπτει είναι αυτή του Σχήματος 5.53.



Σχήμα 5.51 Οι δύο εικόνες πριν τη σύντηξη.

```

% Διάβασμα των δύο εικόνων
X1 = imread('Alloga_a.tif');
X2 = imread('Alloga_b.tif');
N=2;
[C1,S1]=wavedec2(X1,N,'db2');
[C2,S2]=wavedec2(X2,N,'db2');
% Υπολογισμός συντελεστών 1ου επιπέδου
A11 = appcoef2(C1,S1,'db2',1);
[H11,V11,D11] = detcoef2('all',C1,S1,1);
% Υπολογισμός συντελεστών 2ου επιπέδου
A12 = appcoef2(C1,S1,'db2',N);
[H12,V12,D12] = detcoef2('all',C1,S1,N);
% Υπολογισμός συντελεστών 1ου επιπέδου
A21 = appcoef2(C2,S2,'db2',1);
[H21,V21,D21] = detcoef2('all',C2,S2,1);
% Υπολογισμός συντελεστών 2ου επιπέδου
A22 = appcoef2(C2,S2,'db2',N);
[H22,V22,D22] = detcoef2('all',C2,S2,N);
% Fusion εικόνων
A1=0.5*(A11+A21);A2=0.5*(A12+A22);H1=0.5*(H11+H21);
H2=0.5*(H12+H22);
V1=0.5*(V11+V21);V2=0.5*(V12+V22);D1=0.5*(D11+D21);
D2=0.5*(D12+D22);
% Δημιουργία του πίνακα C
A2r=reshape(A2,1,S1(1,1)*S1(1,2));H2r=reshape(H2,1,
S1(1,1)*S1(1,2));
V2r=reshape(V2,1,S1(1,1)*S1(1,2));D2r=reshape(D2,1,
S1(1,1)*S1(1,2));
H1r=reshape(H1,1,S1(3,1)*S1(3,2));V1r=reshape(V1,1,
S1(3,1)*S1(3,2));
D1r=reshape(D1,1,S1(3,1)*S1(3,2));C=[A2r,H2r,V2r,D2
r,H1r,V1r,D1r];
Image1=waverec2(C,S1,'db2');
figure(1), imshow(Image1,[]);
title(' Τελική εικόνα μετά το fusion')

```

**Σχήμα 5.52** Πρόγραμμα για image fusion.





**Σχήμα 5.53** Τελική εικόνα μετά το fusion.

### **Παράδειγμα 5.13 Fusion τριών εικόνων**

Στο Παράδειγμα αυτό θα χρησιμοποιήσουμε την ανάλυση κυματιδίων και τη σύντηξη πληροφορίας προκειμένου να βελτιώσουμε την εμφάνιση από πλευράς οξύτητας μιας εικόνας. Για την εικόνα αυτή διαθέτουμε τρεις εκδόσεις της που λήφθηκαν σε διαφορετικές χρονικές στιγμές και με διαφορετικές συνθήκες περιβάλλοντος. Για παράδειγμα, στο Σχήμα 5.54 δείχνονται τρεις έγχρωμες εικόνες της ίδιας σκηνής που ελήφθησαν διαφορετικές χρονικές στιγμές.

Για την επίλυση του προβλήματος, μπορούμε να εργαστούμε σε έναν χρωματικό χώρο που διαχωρίζει την χρωματική με την αχρωματική πληροφορία. Ένας κατάλληλος τέτοιος χώρος έχει αποδειχτεί ότι είναι ο χώρος HSI. Αυτό το οποίο λοιπόν κάνουμε είναι να πάρουμε την I συνιστώσα κάθε εικόνας, να τη μετασχηματίσουμε με τον 2D DWT, να κάνουμε τη σύντηξη πληροφορία με τον κανόνα του μεγίστου για την I συνιστώσα. Αντίθετα, επιλέγουμε να πάρουμε τις χρωματικές πληροφορίες από τις H και S χρωματικές συνιστώσες της δεύτερης εικόνας. Τέλος, αντιστρέφουμε τον 2D DWT για να προκύψει η τελική βελτιωμένη εικόνα. Η εικόνα που προκύπτει φαίνεται στο Σχήμα 5.55 ενώ στο Σχήμα 5.56 δίδεται το σχετικό πρόγραμμα.



(α)

(β)



(γ)

**Σχήμα 5.54** Οι τρεις αρχικές εικόνες.



**Σχήμα 5.55** Μορφή τελικής εικόνας μετά το fusion.

```
clc;close all; clear all;
% Διάβασμα των 3 εικόνων
X1 =imread('venice_1.jpg');X2 =imread('venice_2.jpg');X3
=imread('venice_3.jpg');
% Μετατροπή από το RGB HSI
[H1,S1,I1]=rgbtohsi(X1);[H2,S2,I2]=rgbtohsi(X2);[H3,S3,I3]=rgbt
ohsi(X3);
% Καθορισμός κυματιδίου
wavetype='db6';
[C1,P1]=wavedec2(I1,2,wavetype);
[C2,P2]=wavedec2(I2,2,wavetype);
[C3,P3]=wavedec2(I3,2,wavetype);
% Υπολογισμός συντελεστών 1ου επιπέδου
[H11,V11,D11] = detcoef2('all',C1,P1,1);
[H21,V21,D21] = detcoef2('all',C2,P2,1);
[H31,V31,D31] = detcoef2('all',C3,P3,1);
% Υπολογισμός συντελεστών 2ου επιπέδου
A12 = appcoef2(C1,P1,wavetype,2);
A22 = appcoef2(C2,P2,wavetype,2);
A32 = appcoef2(C3,P3,wavetype,2);
[H12,V12,D12] = detcoef2('all',C1,P1,2);
[H22,V22,D22] = detcoef2('all',C2,P2,2);
[H32,V32,D32] = detcoef2('all',C3,P3,2);
% Fusion με τον κανόνα max
A2r=maxa(maxa(A12,A22),A32);
H2r=maxa(maxa(H12,H22),H32);
V2r=maxa(maxa(V12,V22),V32);
D2r=maxa(maxa(D12,D22),D32);
H1r=maxa(maxa(H11,H21),H31);
V1r=maxa(maxa(V11,V21),V31);
D1r=maxa(maxa(D11,D21),D31);
% Δημιουργία του πίνακα C
A2r=reshape(A2r,1,P1(1,1)*P1(1,2));
H2r=reshape(H2r,1,P1(1,1)*P1(1,2));
V2r=reshape(V2r,1,P1(1,1)*P1(1,2));
D2r=reshape(D2r,1,P1(1,1)*P1(1,2));
H1r=reshape(H1r,1,P1(3,1)*P1(3,2));
V1r=reshape(V1r,1,P1(3,1)*P1(3,2));
```

```

D1r=reshape(D1r,1,P1(3,1)*P1(3,2));
C=[A2r,H2r,V2r,D2r,H1r,V1r,D1r];
% Εφαρμογή 2D IDWT
I_new=waverec2(C,P1,wavetype);
% Μετάβαση από τα H,S, I σε εικόνα RGB
HSI=cat(3,H2,S2,I_new);
Final_Image=uint8(255*hsitorgb(HSI));
% Για σύγκριση, παίρνουμε παρόμοιο αποτέλεσμα
% αν χρησιμοποιήσουμε τη συνάρτηση wfusing του Matlab
N=2;
I12=wfusing(X1,X2,wavetype,N,'max','max');
Final_Image2=wfusing(I12,X3,wavetype,N,'max','max');
%
figure (4), imshow(Final_Image);title(' Τελική εικόνα μετά το
fusion')
figure (5), imshow(uint8(Final_Image2));title(' Τελική εικόνα μετά
to fusion 2')
imwrite(Final_Image,'Final_Image.tif','Resolution',300)
SF1=spatial_frequency(X1);SF2=spatial_frequency(X2);SF3=sp
atial_frequency(X3);
SF=spatial_frequency(Final_Image);
SF22=spatial_frequency(Final_Image2);
disp([' SF1=',num2str(SF1)]);disp([' SF2=',num2str(SF2)]);disp(['
SF3=',num2str(SF3)]);
disp([' SF of the new image=',num2str(SF)]);
disp([' SF22 of the new image=',num2str(SF22)]);

```

**Σχήμα 5.56** Πρόγραμμα για image fusion.

Πρέπει εδώ να σημειώσουμε ότι

(α) Στο Matlab υπάρχει έτοιμη η συνάρτηση

```
F_Image=wfusing(Image1,Image2,wavetype,N,'max','max');
```

Με την οποία μπορούμε να κάνουμε fusion δύο εικόνες καθορίζοντας το είδος του κυματιδίου και τους κανόνα σύντηξης. Δυστυχώς, δεν μπορεί να εφαρμοστεί η συνάρτηση αυτή για πολλές εικόνες.

(β) Υπάρχουν ορισμένοι δείκτες με τους οποίους μπορούμε να συγκρίνουμε εικόνες μεταξύ τους σε σχέση με την ποιότητά τους. Ορισμένοι βασικοί τέτοιοι δείκτες είναι οι ακόλουθοι:

**Χωρική Συχνότητα:** Για μια εικόνα  $F(i, j)$  διαστάσεων  $M \times N$  ορίζεται από τις σχέσεις

$$SF = \sqrt{(RF)^2 + (CF)^2} \quad (5.142)$$

όπου

$$RF = \sqrt{\frac{1}{MN} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=1}^{N-1} [F(m, n) - F(m, n-1)]^2} \quad (5.143)$$

$$CF = \sqrt{\frac{1}{MN} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=1}^{M-1} [F(m, n) - F(m-1, n)]^2} \quad (5.144)$$

είναι οι χωρικές συχνότητες γραμμής και στήλης της εικόνας, αντίστοιχα. Ο δείκτης αυτός προτάθηκε από τους Shutao κ.α [SJKW01] για τη μέτρηση της συνολικής “δραστηριότητας” (activity level) της εικόνας. Σχετίζεται δηλαδή με την ποσότητα των λεπτομερειών που περιέχεται σε μια εικόνα. Πρακτικά, όσο μεγαλύτερη είναι η χωρική συχνότητα τόσο μεγαλύτερη είναι η ευκρίνεια της εικόνας. Συνεπώς, η χωρική συχνότητα μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως ένας δείκτης καθαρότητας μιας εικόνας. Το πρόγραμμα υπολογισμού του SF δίδεται στο Σχήμα 5.57.

```
function [SF] = spatial_frequency(I)
% Υπολογισμός χωρικής συχνότητας
I=double(I);[M, N]=size(I); MN=M*N; s1=0;
for m=1:M, for n=2:N
    s1=s1+(I(m,n)-I(m,n-1))^2;
end, end
RF=sqrt(s1/MN); s2=0;
for n=1:N, for m=2:M
    s2=s2+(I(m,n)-I(m-1,n))^2;
end, end
CF=sqrt(s2/MN); SF=sqrt(RF*RF+CF*CF);
end
```

Σχήμα 5.57 Υπολογισμός χωρικής συχνότητας.

---

Στο συγκεκριμένο παράδειγμα ο δείκτης SF έλαβε την τελική τιμή 18.2082 ενώ οι τρεις εικόνες εισόδου έχουν τιμές SF

$$SF1=15.9035$$

$$SF2=15.436$$

$$SF3=6.6889$$

**Εντροπία:** Η εντροπία μιας εικόνας

$$H = - \sum_{n=0}^{255} p(n) \log_2 p(n) \quad \text{bits / pixel} \quad (5.145)$$

σχετίζεται με το ποσό της πληροφορίας που περιέχει η εικόνα. Έτσι, μια ευκρινής εικόνα χαρακτηρίζεται και από υψηλή εντροπία.

