Image Transformations

Έκφραση μίας εικόνας σε ένα σύνολο στοιχειωδών εικόνων

Στοιχειώδης (elementary) Εικόνα

- Στοιχειώδης εικόνα είναι το εξωτερικό γινόμενο (outer product) δύο διανυσμάτων (vectors)
- Εάν έχουμε δύο vectors Nx1:

$$\begin{aligned} \mathbf{u_i}^T &= (u_{i1}, u_{i2}, \ldots, u_{iN}) \\ \mathbf{v_j}^T &= (v_{j1}, v_{j2}, \ldots, v_{jN}) \end{aligned}$$

- Οπότε το εξωτερικό γινόμενο είναι το:

$$\mathbf{u_i}\mathbf{v_j}^T = \begin{pmatrix} u_{i1} \\ u_{i2} \\ \vdots \\ u_{iN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{j1} & v_{j2} & \ldots v_{jN} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{i1}v_{j1} & u_{i1}v_{j2} & \ldots & u_{i1}v_{jN} \\ u_{i2}v_{j1} & u_{i2}v_{j2} & \ldots & u_{i2}v_{jN} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_{iN}v_{j1} & u_{iN}v_{j2} & \ldots & u_{iN}v_{jN} \end{pmatrix}$$

- Ένας γενικός τύπος γραμμικού μετασχηματισμού μία εικόνας f, μπορεί να γραφτεί ως:

$$g = h_c^T f h_r$$

Όπου g είναι η εικόνα εξόδου και τα h_c και h_r είναι οι πίνακες μετασχηματισμού.

- Εάν λύσουμε ως προς το f, η εξίσωση διαμορφώνεται ως:

$$f = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} g_{ij} u_i v_j^T$$

Singular Value Decomposition

- Εάν επιλέξουμε τους πίνακες U και V έτσι ώστε η μετασχηματιζόμενη εικόνα g να είναι ένας διαγώνιος πίνακας, τότε η εικόνα f θα αποτελείται μόνο από τα μη μηδενικά στοιχεία του g.
- Αυτό μπορεί να γίνει με μία διεργασία που ονομάζεται matrix diagonalization και ονομάζεται Singular Value Decomposition της εικόνας

Diagonalize a matrix

Ένας πίνακας g με τάξη r μπορεί να γραφεί ως:

$$g^T = V\Lambda^{1/2}U^T \; (1)$$

Όπου U και V είναι ορθογώνιοι πίνακες μεγέθους N x r και ο $\Lambda^{1/2}$ είναι ένας διαγώνιος r x r πίνακας.

Αν αντιμεταθέσουμε την εξίσωση (1) παίρνουμε:

$$g = U\Lambda^{1/2}V^T \; (2)$$

Αν πολλαπλασιάσουμε της εξισώσεις (1) και (2) τελικά παίρνουμε:

$$gg^T = U\Lambda U^T \; (3)$$

Παρατηρούμε ότι ο πίνακας Λ αποτελείται από r non-zero eigenvalues του πίνακα gg^T ενώ ο U αποτελείται από τα eigenvectors του ίδιου πίνακα.

Παρόμοια αν πολλαπλασιάσουμε τις εξισώσεις (2) και (3) παίρνουμε:

$$g^T g = V\Lambda V^T \; (4)$$

Αυτό δείχνει ότι ο πίνακας V αποτελείται από τα eigenvectors του πίνακα g^Tg

Singular Value Decomposition (SVD)

- Η Singular Value Decomposition μίας εικόνας g ορίζεται ως η επέκτασή της σε διανύσματα εξωτερικού γινομένου, όπου τα διανύσματα αυτά αποτελούνται από τα eigenvectors του gg^T και του g^Tg. Ενώ τα βάρη είναι οι eigenvalues των πινάκων αυτών. Σε αυτήν την περίπτωση η αρχική μας η εξίσωση μετατρέπεται:

$$\boldsymbol{g} = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i^{\frac{1}{2}} \boldsymbol{u}_i \boldsymbol{v}_i^T$$

Προσέγγιση εικόνα με SVD

- Εάν αποφασίσουμε να κρατήσουμε μόνο k < r τμήματα, τότε θα αναπαράγουμε μία προσεγγιστική έκδοση της εικόνας

$$\boldsymbol{g} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i^{\frac{1}{2}} \boldsymbol{u}_i \boldsymbol{v}_i^T$$

Υπολογισμός του Λάθους

- Η διαφορά μεταξύ της αρχικής μας εικόνας με την προσεγγιστική της έκδοση είναι:

$$\boldsymbol{D} \equiv \boldsymbol{g} - \boldsymbol{g}_k = \sum_{i=k+1}^{r} \lambda_i^{\frac{1}{2}} \boldsymbol{u}_i \boldsymbol{v}_i^T$$

- Πόσο μεγάλο «αριθμητικά» είναι το λάθος?

$$\left\| \boldsymbol{D} \right\| = \sum_{i=k+1}^{r} \lambda_i$$

- Το λάθος είναι ίσο με το άθροισμα των eigenvalues που απορρίπτουμε

Ελαχιστοποίηση του Λάθους

- Εάν ταξινομήσουμε τις eigenvalues λ_i από την μεγαλύτερη τιμή στην μικρότερη, και επιλέξουμε τις πρώτες $k<r$ τιμές, τότε η προσεγγιστική εικόνα που θα ανακατασκευάσουμε, θα έχει το ελάχιστο τετραγωνικό λάθος (least square error).

Example 2.14

Show the different stages of the SVD of the following image:

$$g = \begin{pmatrix} 255 & 255 & 255 & 255 & 255 & 255 & 255 & 255 \\ 255 & 255 & 255 & 100 & 100 & 100 & 255 & 255 \\ 255 & 255 & 100 & 150 & 150 & 150 & 100 & 255 \\ 255 & 255 & 100 & 150 & 200 & 150 & 100 & 255 \\ 255 & 255 & 100 & 150 & 150 & 150 & 100 & 255 \\ 255 & 255 & 255 & 100 & 100 & 100 & 255 & 255 \\ 255 & 255 & 255 & 255 & 50 & 255 & 255 & 255 \\ 50 & 50 & 50 & 50 & 255 & 255 & 255 & 255 \end{pmatrix}$$

The gg^T matrix is:

$$gg^T = \begin{pmatrix} 520200 & 401625 & 360825 & 373575 & 360825 & 401625 & 467925 & 311100 \\ 401625 & 355125 & 291075 & 296075 & 291075 & 355125 & 381125 & 224300 \\ 360825 & 291075 & 282575 & 290075 & 282575 & 291075 & 330075 & 205025 \\ 373575 & 296075 & 290075 & 300075 & 290075 & 296075 & 332575 & 217775 \\ 360825 & 291075 & 282575 & 290075 & 282575 & 291075 & 330075 & 205025 \\ 401625 & 355125 & 291075 & 296075 & 291075 & 355125 & 381125 & 224300 \\ 467925 & 381125 & 330075 & 332575 & 330075 & 381125 & 457675 & 258825 \\ 311100 & 224300 & 205025 & 217775 & 205025 & 224300 & 258825 & 270100 \end{pmatrix}$$

Its eigenvalues sorted in decreasing order are:

2593416.500 111621.508 71738.313 34790.875
11882.712 0.009 0.001 0.000

The last three eigenvalues are practically 0, so we compute only the eigenvectors that correspond to the first five eigenvalues. These eigenvectors are the columns of the following matrix:

$$\begin{pmatrix} -0.441 & 0.167 & 0.080 & -0.388 & 0.764 \\ -0.359 & -0.252 & 0.328 & 0.446 & 0.040 \\ -0.321 & -0.086 & -0.440 & 0.034 & -0.201 \\ -0.329 & -0.003 & -0.503 & 0.093 & 0.107 \\ -0.321 & -0.086 & -0.440 & 0.035 & -0.202 \\ -0.359 & -0.252 & 0.328 & 0.446 & 0.040 \\ -0.407 & -0.173 & 0.341 & -0.630 & -0.504 \\ -0.261 & 0.895 & 0.150 & 0.209 & -0.256 \end{pmatrix}$$

The g^Tg matrix is:

$$g^T g = \begin{pmatrix} 457675 & 457675 & 339100 & 298300 & 269025 & 308550 & 349350 & 467925 \\ 457675 & 457675 & 339100 & 298300 & 269025 & 308550 & 349350 & 467925 \\ 339100 & 339100 & 292600 & 228550 & 191525 & 238800 & 302850 & 349350 \\ 298300 & 298300 & 228550 & 220050 & 185525 & 230300 & 238800 & 308550 \\ 269025 & 269025 & 191525 & 185525 & 237550 & 237800 & 243800 & 321300 \\ 308550 & 308550 & 238800 & 230300 & 237800 & 282575 & 291075 & 360825 \\ 349350 & 349350 & 302850 & 238800 & 243800 & 291075 & 355125 & 401625 \\ 467925 & 467925 & 349350 & 308550 & 321300 & 360825 & 401625 & 520200 \end{pmatrix}$$

Its eigenvectors, computed independently, turn out to be the columns of the following matrix:

$$\begin{pmatrix} -0.410 & -0.389 & 0.264 & 0.106 & 0.012 \\ -0.410 & -0.389 & 0.264 & 0.106 & 0.012 \\ -0.316 & -0.308 & -0.537 & -0.029 & -0.408 \\ -0.277 & -0.100 & 0.101 & -0.727 & -0.158 \\ -0.269 & 0.555 & 0.341 & 0.220 & -0.675 \\ -0.311 & 0.449 & -0.014 & -0.497 & 0.323 \\ -0.349 & 0.241 & -0.651 & 0.200 & 0.074 \\ -0.443 & 0.160 & 0.149 & 0.336 & 0.493 \end{pmatrix}$$

In Figure *2.1 the original image and its five eigenimages are shown. Each eigenimage has been scaled so that its grey values vary between* 0 *and* 255. *These eigenimages have to be weighted by the square root of the appropriate eigenvalue and added to produce the original image. The five images shown in* Figure *2.2 are the reconstructed images when one, two,..., five eigenvalues were used for the reconstruction.*

Then we calculate the sum of the squared errors for each reconstructed image according to the formula

$$\sum_{i=1}^{64} (\textit{reconstructed pixel} - \textit{original pixel})^2$$

We obtain:

Error for image (a):	230033.32	$(\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5 = 230033.41)$
Error for image (b):	118412.02	$(\lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5 = 118411.90)$
Error for image (c):	46673.53	$(\lambda_4 + \lambda_5 = 46673.59)$
Error for image (d):	11882.65	$(\lambda_5 = 11882.71)$
Error for image (e):	0	

We see that the sum of the omitted eigenvalues agrees very well with the error in the reconstructed image.

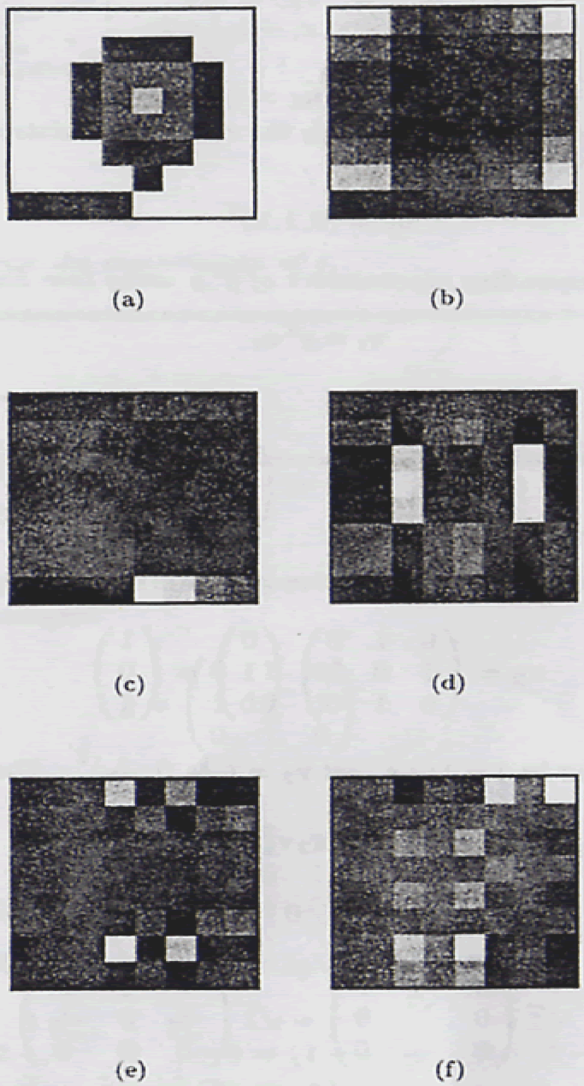


Figure 2.1: The original image and its five eigenimages, each scaled to have values from 0 to 255.

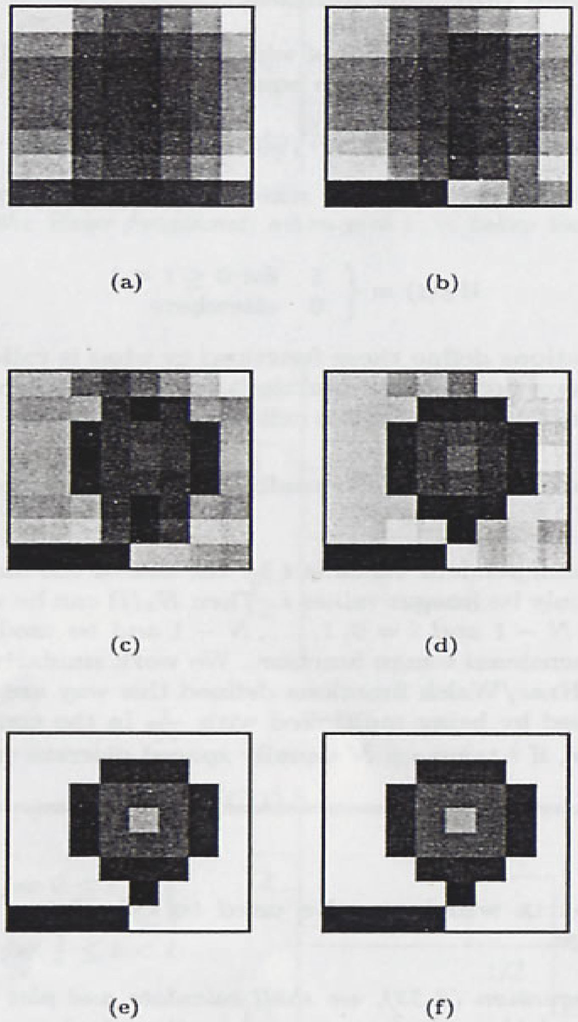


Figure 2.2: Image reconstruction using one, two,..., five eigenimages from top right to bottom left sequentially, with the original image shown in (f).

Σύνολο Στοιχειωδών Εικόνων

- Υπάρχουν διάφορα σύνολα στοιχειωδών εικόνων, στα οποία όλες οι εικόνες μπορούν να μετατραπούν.
- Αυτά καθορίζονται από ένα σύνολο από πλήρες και ορθοκανονικά σύνολα, που αποτελούνται από διακριτές τιμές διάφορων διακριτών συναρτήσεων

Πλήρες και Ορθοκανονικά Σύνολα Συναρτήσεων

- Ένα σύνολο συναρτήσεων Sn(t), όπου n ακέραιος, είναι ορθογώνιο σε ένα διάστημα [0,Tα] με μία συνάρτηση βάρους w(t) εάν:

$$\int_0^T w(t) S_n(t) S_m(t) = \begin{cases} k & n = m \\ 0 & n \neq m \end{cases}$$

- Το σύνολο λέγεται ορθοκανονικό εάν k=1.
- Το σύνολο λέγεται πλήρες εάν δεν μπορούμε να βρούμε άλλη συνάρτηση που να είναι ορθογώνια στο σύνολο και δεν ανήκει στο σύνολο.
- Ένα παράδειγμα πλήρους και ορθοκανονικού συνόλου είναι το σύνολο των συναρτήσεων e^{jnt}, το οποίο χρησιμοποιείται ως βάση για τους μετασχηματισμούς Fourier

Σημαντικότερα πλήρη σύνολα ορθοκανονικών διακριτών συναρτήσεων

- Σύνολο συναρτήσεων **Haar**, οι οποίες παίρνουν τιμές από το σύνολο:

$$\{0, \pm 1, \pm\sqrt{2^{p}}, p = 1,2,3,......\}$$

- Σύνολο συναρτήσεων **Walsh**, οι οποίες παίρνουν τιμές από το σύνολο:

{+1,-1}

Haar Συναρτήσεις

$$
\begin{aligned}
H_0(t) &= 1 \text{ for } 0 \le t < 1 \\
H_1(t) &= \begin{cases} 1 & \text{if } 0 \le t < \frac{1}{2} \\ -1 & \text{if } \frac{1}{2} \le t < 1 \end{cases} \\
H_{2^p+n}(t) &= \begin{cases} \sqrt{2}^p & \text{for } \frac{n}{2^p} \le t < \frac{(n+0.5)}{2^p} \\ -\sqrt{2}^p & \text{for } \frac{(n+0.5)}{2^p} \le t < \frac{(n+1)}{2^p} \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases}
\end{aligned}
$$

where $p = 1, 2, 3, \ldots$ and $n = 0, 1, \ldots, 2^p - 1$.

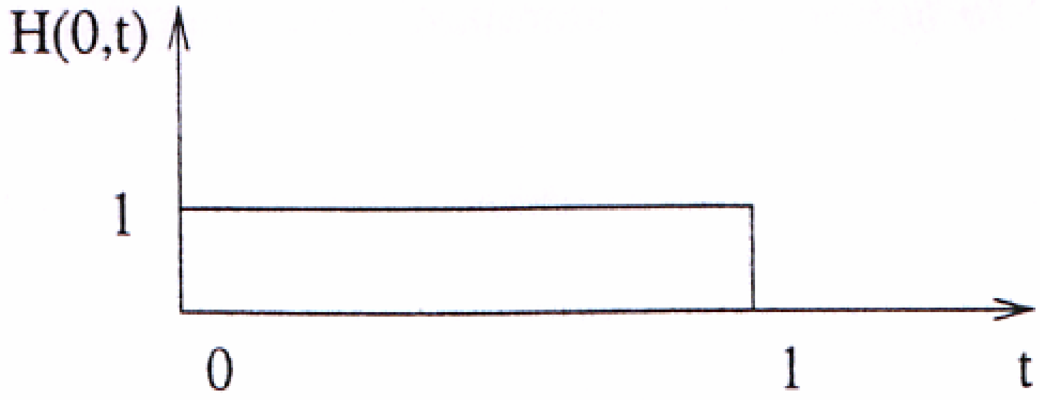
Άσκηση

Example 2.18

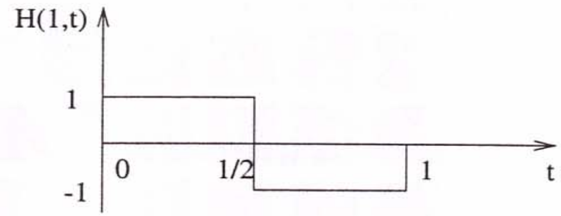
Derive the matrix which can be used to calculate the Haar transform of a 4×4 image.

First, by using equation (2.33), we shall calculate and plot the Haar functions of the continuous variable t which are needed for the calculation of the transformation matrix.

$$H(0,t) = 1 \text{ for } 0 \le t < 1$$



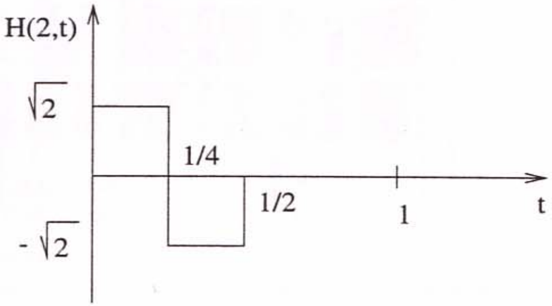
$$H(1,t) = \begin{cases} 1 & for\ 0 \le t < \frac{1}{2} \\ -1 & for\ \frac{1}{2} \le t < 1 \end{cases}$$



In the definition of the Haar functions, when $p = 1$, n *takes the values* 0 *and* 1*:*

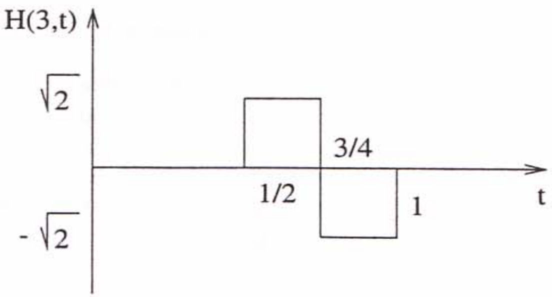
Case $p = 1$, $n = 0$*:*

$$H(2,t) = \begin{cases} \sqrt{2} & for\ 0 \le t < \frac{1}{4} \\ -\sqrt{2} & for\ \frac{1}{4} \le t < \frac{1}{2} \\ 0 & for\ \frac{1}{2} \le t < 1 \end{cases}$$

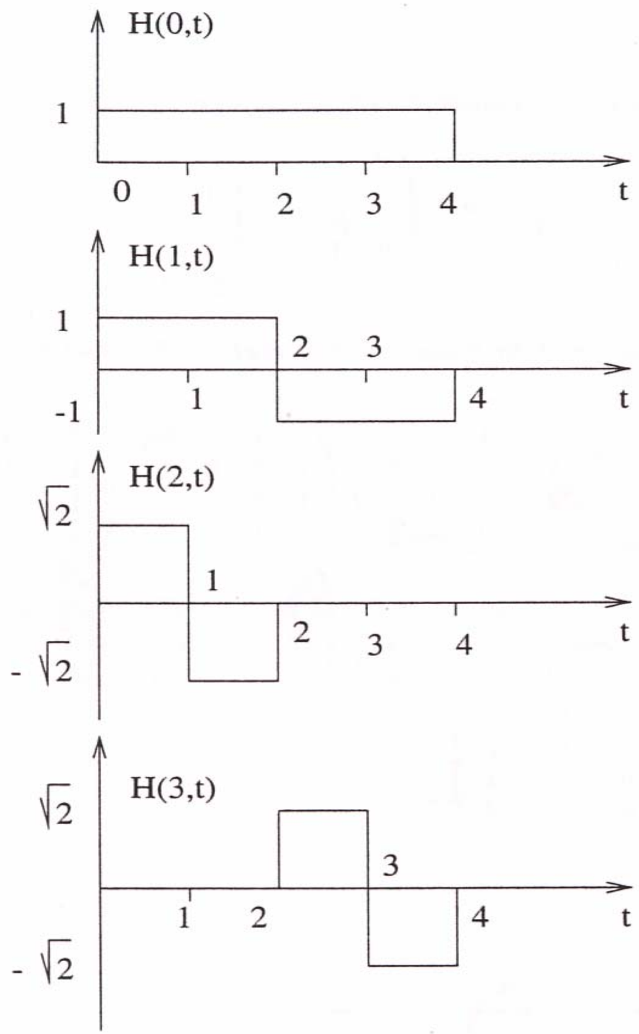


Case $p = 1$, $n = 1$*:*

$$H(3,t) = \begin{cases} 0 & for\ 0 \le t < \frac{1}{2} \\ \sqrt{2} & for\ \frac{1}{2} \le t < \frac{3}{4} \\ -\sqrt{2} & for\ \frac{3}{4} \le t < 1 \end{cases}$$



To transform a 4×4 *image we need a* 4×4 *matrix. If we scale the* t *axis by multiplying it by* 4 *and take only the integer values of* t *(i.e.* $t = 0, 1, 2, 3$*) we can construct the transformation matrix. The plots of the scaled functions look like this:*



The entries of the transformation matrix are the values of $H(s,t)$ where s and t take the values $0, 1, 2, 3$. Obviously then the transformation matrix is:

$$H = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

The factor $\frac{1}{2}$ appears so that $HH^T = I$, the unit matrix.

Example 2.19

Calculate the Haar transform of the image:

$$g = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

The Haar transform of the image g is $A = HgH^T$. We shall use matrix H derived in Example 2.18:

$$A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & 1 & -\sqrt{2} & 0 \\ 1 & -1 & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & -1 & 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & -\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 2 & 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 2 & 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 2 & 0 & -\sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & -4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Example 2.20

Reconstruct the image of Example 2.19 using an approximation of its Haar transform by setting its bottom right element be equal to 0.

The approximate transformation matrix becomes:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

The reconstructed image is given by $\tilde{g} = H^T \tilde{A} H$:

$$\tilde{g} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & 1 & -\sqrt{2} & 0 \\ 1 & -1 & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & -1 & 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & 1 & -\sqrt{2} & 0 \\ 1 & -1 & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & -1 & 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & 4 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

The square error is equal to:

$$0.5^2 + 0.5^2 + 1^2 = 1.5$$

Walsh Συναρτήσεις

$$W_{2j+q}(t) = (-1)^{[\frac{j}{2}]+q}\{W_j(2t) + (-1)^{j+q} W_j(2t-1)\}$$

Όπου [j/2] σημαίνει τον μεγαλύτερο ακέραιο που είναι μικρότερος ή ίσος με το J/2,q=0 ή 1, j=0,1,2, και :

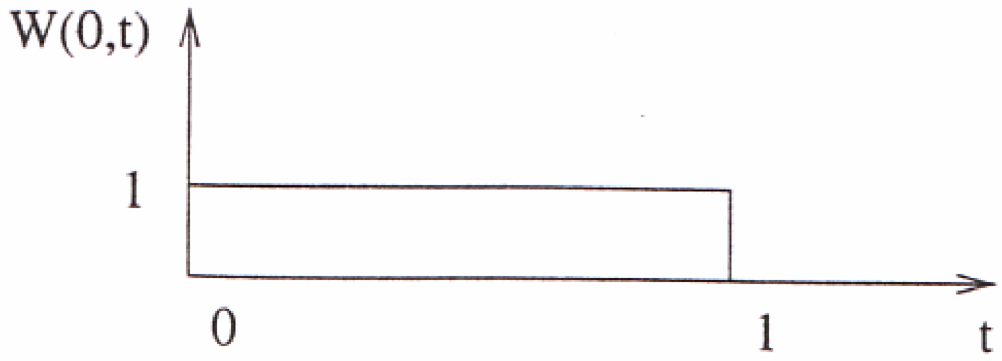
$$W_o(t) = \begin{cases} 1 & 0 \le t < 1 \\ 0 & \alpha\lambda\lambda o\acute{\upsilon} \end{cases}$$

Example 2.21

Derive the matrix which can be used to calculate the Walsh transform of a 4×4 image.

First, by using equation (2.34), calculate and plot the Walsh functions of the continuous variable t which are needed for the calculation of the transformation matrix.

$$W(0,t) = \begin{cases} 1 & \text{for } 0 \leq t < 1 \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases}$$



Case $j = 0,\ q = 1,\ [\frac{j}{2}] = 0$:

$$W(1,t) = -\left\{W(0,2t) - W\left(0, 2(t - \tfrac{1}{2})\right)\right\}$$

For $0 \leq t < \frac{1}{2}$:

$$0 \leq 2t < 1 \Rightarrow W(0,2t) = 1$$

$$-\frac{1}{2} \leq t - \frac{1}{2} < 0 \Rightarrow -1 \leq 2(t - \frac{1}{2}) < 0 \Rightarrow W\left(0, 2(t - \frac{1}{2})\right) = 0$$

Therefore:

$$W(1,t) = -1 \quad \textit{for} \quad 0 \leq t < \frac{1}{2}$$

For $\frac{1}{2} \leq t < 1$:

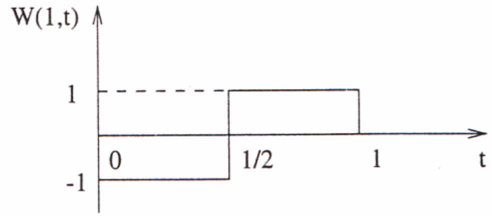
$$1 \leq 2t < 2 \Rightarrow W(0,2t) = 0$$

$$0 \leq t - \frac{1}{2} < \frac{1}{2} \Rightarrow 0 \leq 2(t - \frac{1}{2}) \leq 1 \Rightarrow W\left(0, 2(t - \frac{1}{2})\right) = 1$$

Therefore:

$$W(1,t) = -(-1) = 1 \quad \textit{for} \quad \frac{1}{2} \leq t < 1$$

$$W(1,t) = \begin{cases} -1 & \text{for } 0 \leq t < \frac{1}{2} \\ 1 & \text{for } \frac{1}{2} \leq t < 1 \end{cases}$$



Case $j = 1,\ q = 0,\ [\frac{j}{2}] = 0$:

$$W(2,t) = W(1,2t) - W\left(1, 2(t - \frac{1}{2})\right)$$

For $0 \leq t < \frac{1}{4}$:

$$0 \le 2t < \frac{1}{2} \Rightarrow W(1,2t) = -1$$

$$-\frac{1}{2} \le t - \frac{1}{2} < -\frac{1}{4} \Rightarrow -1 \le 2(t-\frac{1}{2}) < -\frac{1}{2} \Rightarrow W(1,2(t-\frac{1}{2})) = 0$$

Therefore:

$$W(2,t) = -1 \quad for \quad 0 \le t < \frac{1}{4}$$

For $\frac{1}{4} \le t < \frac{1}{2}$:

$$\frac{1}{2} \le 2t < 1 \Rightarrow W(1,2t) = 1$$

$$-\frac{1}{4} \le t - \frac{1}{2} < 0 \Rightarrow -\frac{1}{2} \le 2(t-\frac{1}{2}) < 0 \Rightarrow W\left(1, 2(t-\frac{1}{2})\right) = 0$$

Therefore:

$$W(2,t) = 1 \quad for \quad \frac{1}{4} \le t < \frac{1}{2}$$

For $\frac{1}{2} \le t < \frac{3}{4}$:

$$1 \le 2t < \frac{3}{2} \Rightarrow W(1,2t) = 0$$

$$0 \le t - \frac{1}{2} < \frac{1}{4} \Rightarrow 0 \le 2(t-\frac{1}{2}) < \frac{1}{2} \Rightarrow W\left(1, 2(t-\frac{1}{2})\right) = -1$$

Therefore:

$$W(2,t) = 1 \quad for \quad \frac{1}{2} \le t < \frac{3}{4}$$

For $\frac{3}{4} \le t < 1$:

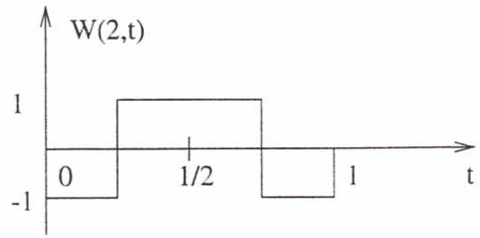
$$\frac{3}{2} \le 2t < 2 \Rightarrow W(1,2t) = 0$$

$$\frac{1}{4} \le t - \frac{1}{2} < \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} \le 2(t-\frac{1}{2}) < 1 \Rightarrow W\left(1, 2(t-\frac{1}{2})\right) = 1$$

Therefore:

$$W(2,t) = -1 \quad for \quad \frac{3}{4} \le t < 1$$

$$W(2,t) = \begin{cases} -1 & \text{for } 0 \le t < \frac{1}{4} \\ 1 & \text{for } \frac{1}{4} \le t < \frac{3}{4} \\ -1 & \text{for } \frac{3}{4} \le t < 1 \end{cases}$$



Case $j = 1,\ q = 1,\ [\frac{j}{2}] = 0$:

$$W(3,t) = -\left\{W(1,2t) + W\left(1, 2(t - \frac{1}{2})\right)\right\}$$

For $0 \le t < \frac{1}{4}$:

$$W(1,2t) = -1, \qquad W\left(1, 2(t-\frac{1}{2})\right) = 0$$

Therefore:

$$W(3,t) = 1 \quad \textit{for} \quad 0 \le t < \frac{1}{4}$$

For $\frac{1}{4} \le t < \frac{1}{2}$:

$$W(1,2t) = 1, \qquad W\left(1, 2(t-\frac{1}{2})\right) = 0$$

Therefore:

$$W(3,t) = -1 \quad \textit{for} \quad \frac{1}{4} \le t < \frac{1}{2}$$

For $\frac{1}{2} \le t < \frac{3}{4}$:

$$W(1,2t) = 0, \qquad W\left(1, 2(t-\frac{1}{2})\right) = -1$$

Therefore:

$$W(3,t) = 1 \quad \textit{for} \quad \frac{1}{2} \le t < \frac{3}{4}$$

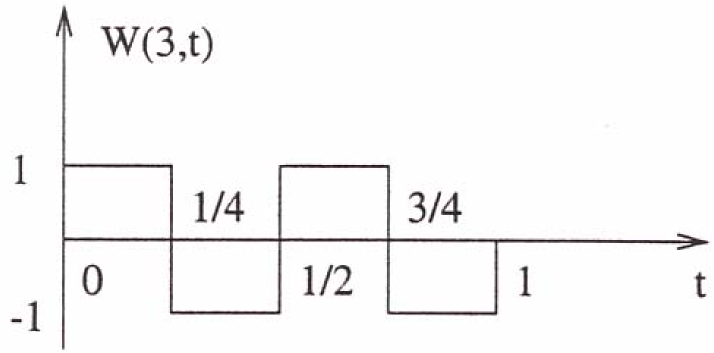
For $\frac{3}{4} \le t < 1$:

$$W(1,2t)=0, \qquad W\left(1,2(t-\frac{1}{2})\right)=1$$

Therefore:

$$W(3,t)=-1 \quad \textit{for} \quad \frac{3}{4}\le t<1$$

$$W(3,t)=\begin{cases} 1 & \text{for } 0\le t<\frac{1}{4} \\ -1 & \text{for } \frac{1}{4}\le t<\frac{1}{2} \\ 1 & \text{for } \frac{1}{2}\le t<\frac{3}{4} \\ -1 & \text{for } \frac{3}{4}\le t<1 \end{cases}$$



To create a 4×4 matrix, we multiply t by 4 and consider only its integer values i.e. $0,1,2,3$. The first row of the matrix will be formed from $W(0,t)$. The second from $W(1,t)$, the third from $W(2,t)$ and so on:

$$W=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

This matrix has been normalized by multiplying it by $\frac{1}{2}$ so that $W^TW=I$, where I is the unit matrix.

Example 2.22

Calculate the Walsh transform of the image:

$$g = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

In the general formula of a separable linear transform $A = UgV^T$, use $U = V = W$ as derived in Example 2.21:

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

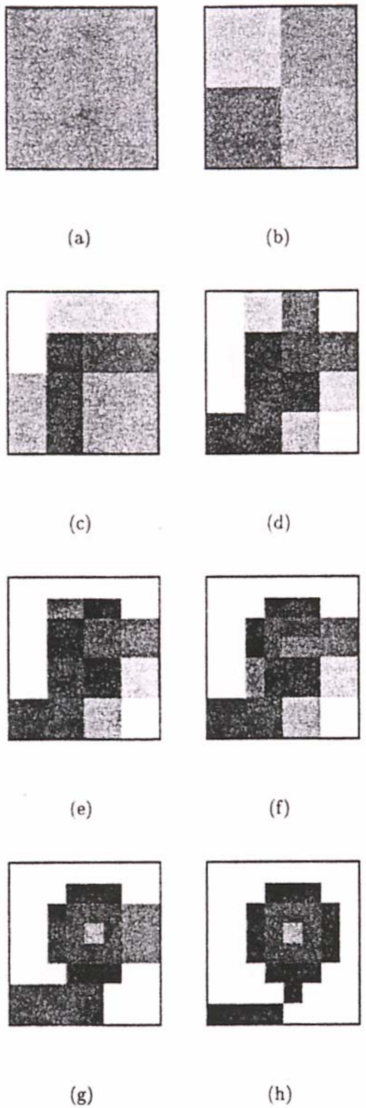


Figure 2.5: Reconstructed images when the basis images used are those created from the first one, two, three,..., eight Haar functions, from top left to bottom right respectively.

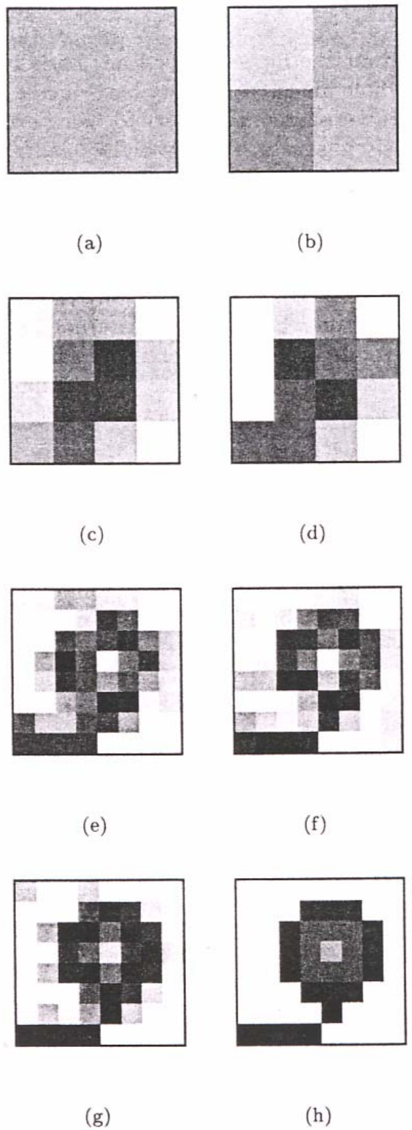
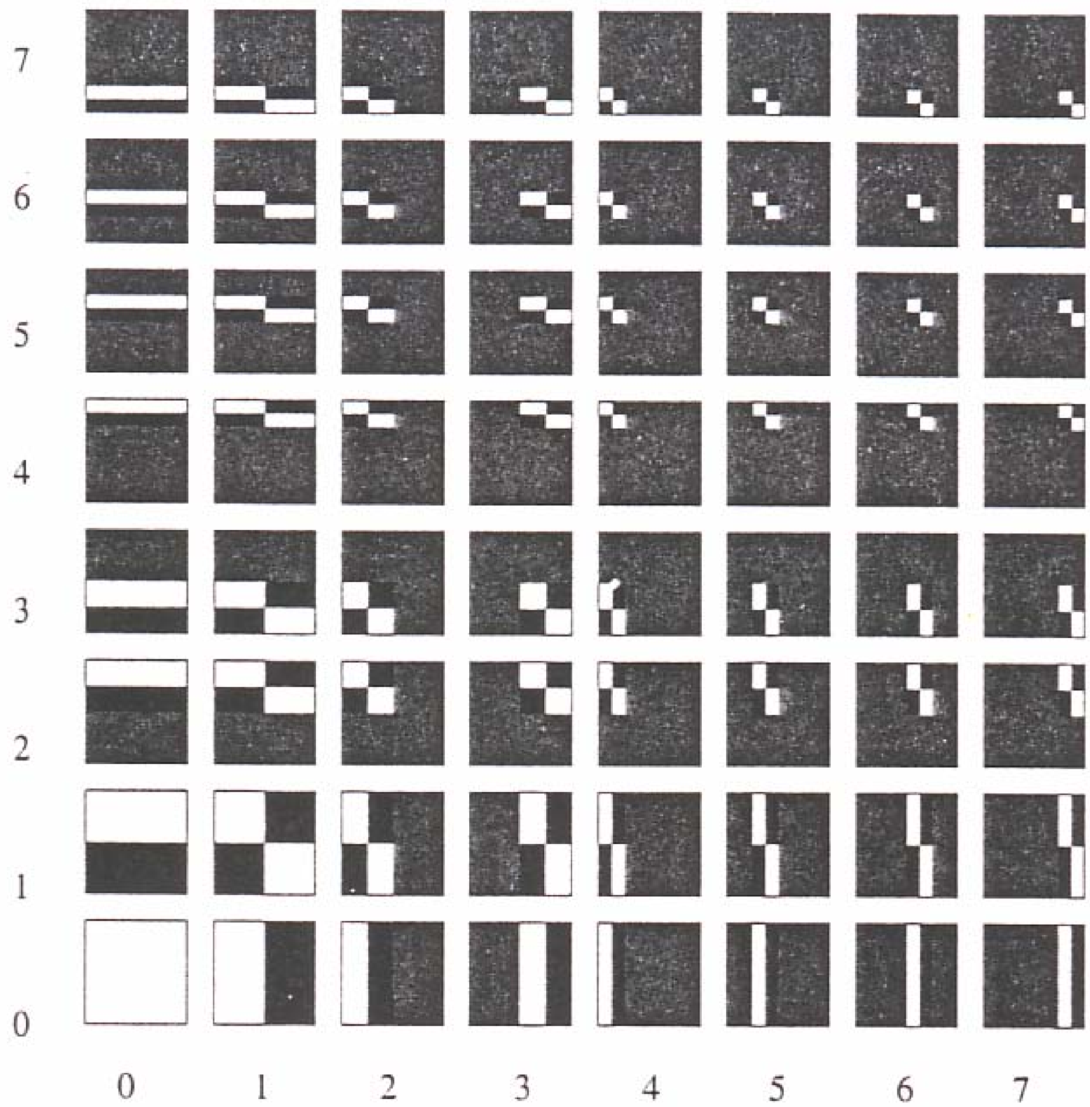
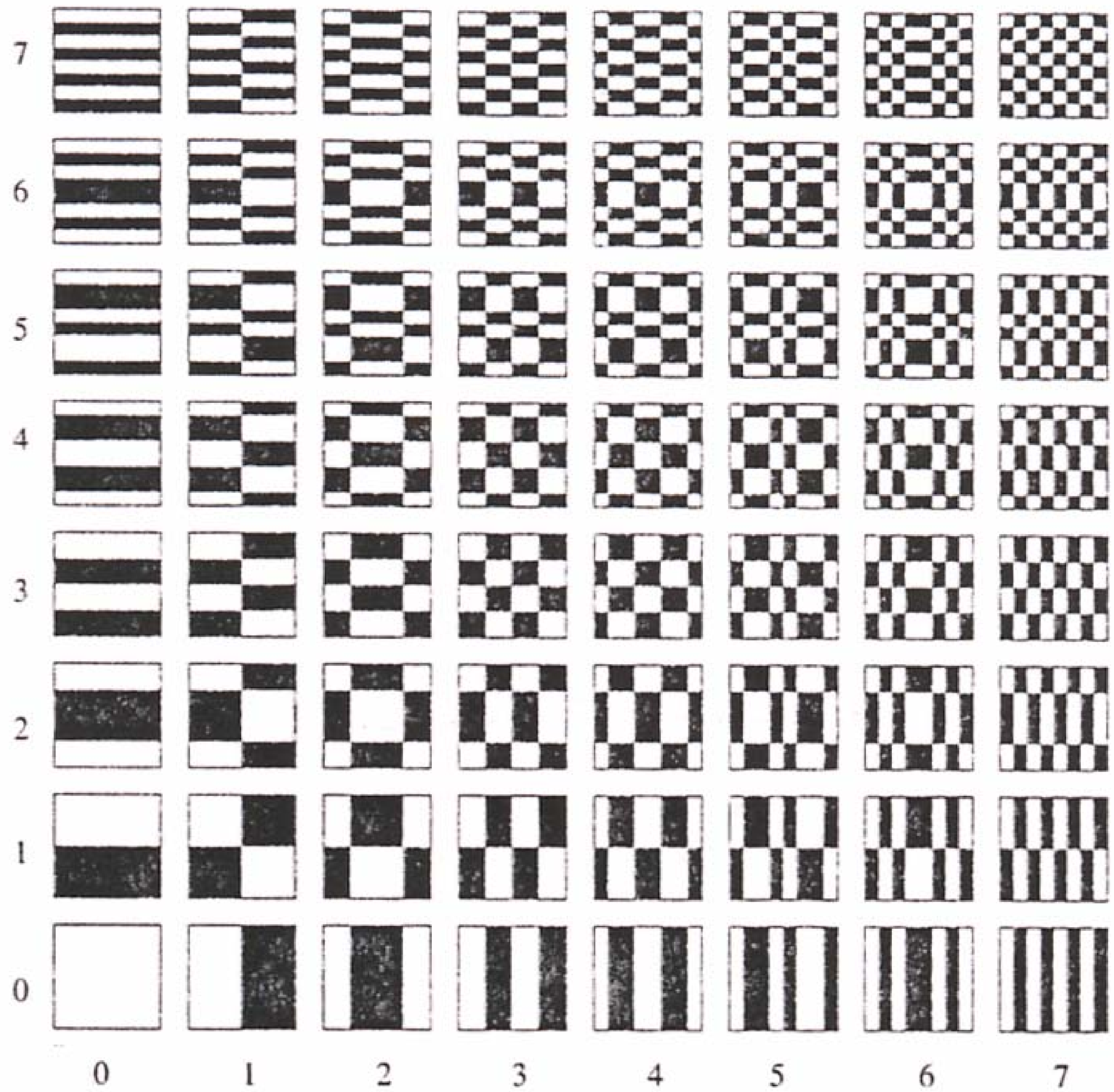


Figure 2.6: Reconstructed images when the basis images used are those created from the first one, two, three,..., eight Walsh functions, from top left to bottom right respectively.

Haar transform basis images



Walsh transform basis images



Πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα των Walsh και Haar μετασχηματισμών

- Ο Haar μετασχηματισμός μας επιτρέπει να ανακατασκευάσουμε με διαφορετικά επίπεδα λεπτομέρειας, διαφορετικά μέρη της εικόνας
- Αντίθετα το λάθος στην ανακατασκευή μια εικόνας, με Walsh μετασχηματισμό, διαχέεται σε όλη την εικόνα
- Όμως ο Walsh μετασχηματισμός είναι πιο εύκολος να εφαρμοστεί από έναν υπολογιστή καθώς είναι πιο απλός (παίρνει μόνο δύο τιμές:
  -1 και 1)

Discrete Fourier Transform

- 1-διάσταση του discrete μετασχηματισμού Fourier μίας συνάρτησης f(k) είναι:

$$F(m) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} f(k) \exp[-j\frac{2\pi mk}{N}]$$

- 2-διάσταση του discrete μετασχηματισμού Fourier μιας εικόνας NxM είναι:

$$G(m,n) = \frac{1}{\sqrt{MN}} \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{l=0}^{N-1} g(k,l) e^{-2\pi j[\frac{km}{M}+\frac{\ln}{N}]}$$

Inverse Discrete Fourier

- Το Inverse Discrete Fourier είναι:

$$g(q,p)=\frac{1}{\sqrt{MN}}\sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1}G(m,n)e^{-2\pi j[\frac{qm}{M}+\frac{pn}{N}]}$$

Discrete Fourier Transform σε μορφή πίνακα

- Κατασκευάζουμε πίνακα U με στοιχεία:

$$U_{xa} = \frac{1}{\sqrt{N}} e^{-j\frac{2\pi xa}{N}}$$

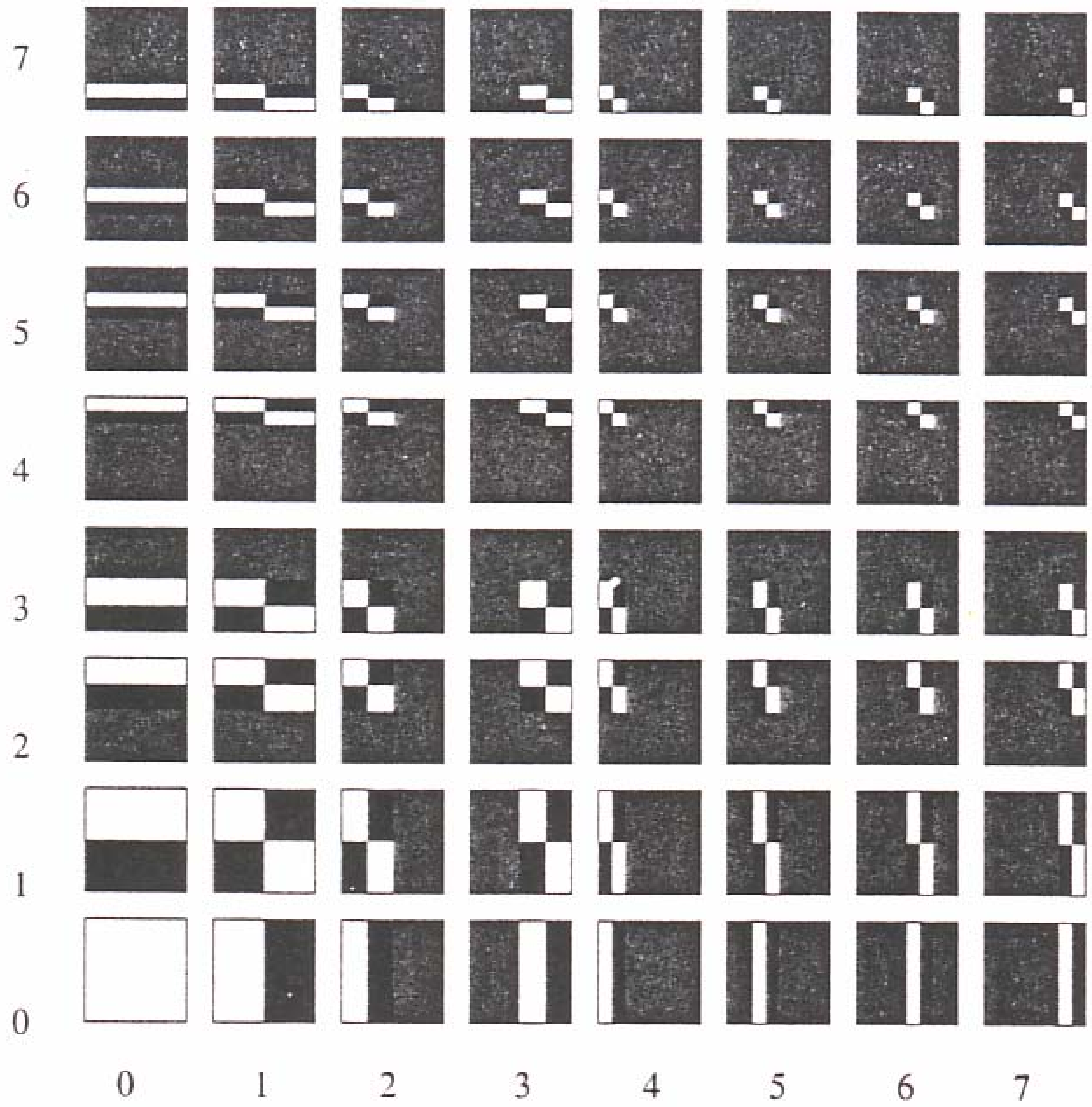
  - x παίρνει τιμές 0,1,….,N-1 για κάθε στήλη
  - α παίρνει τιμές από 0,1,….,N-1 για κάθε γραμμή
  - Ο πίνακας U είναι συμμετρικός: $U^T=U$
  - 2-διάστατη discrete Fourier Transform σε μορφή πίνακα δίνεται:

$$A=UgU$$

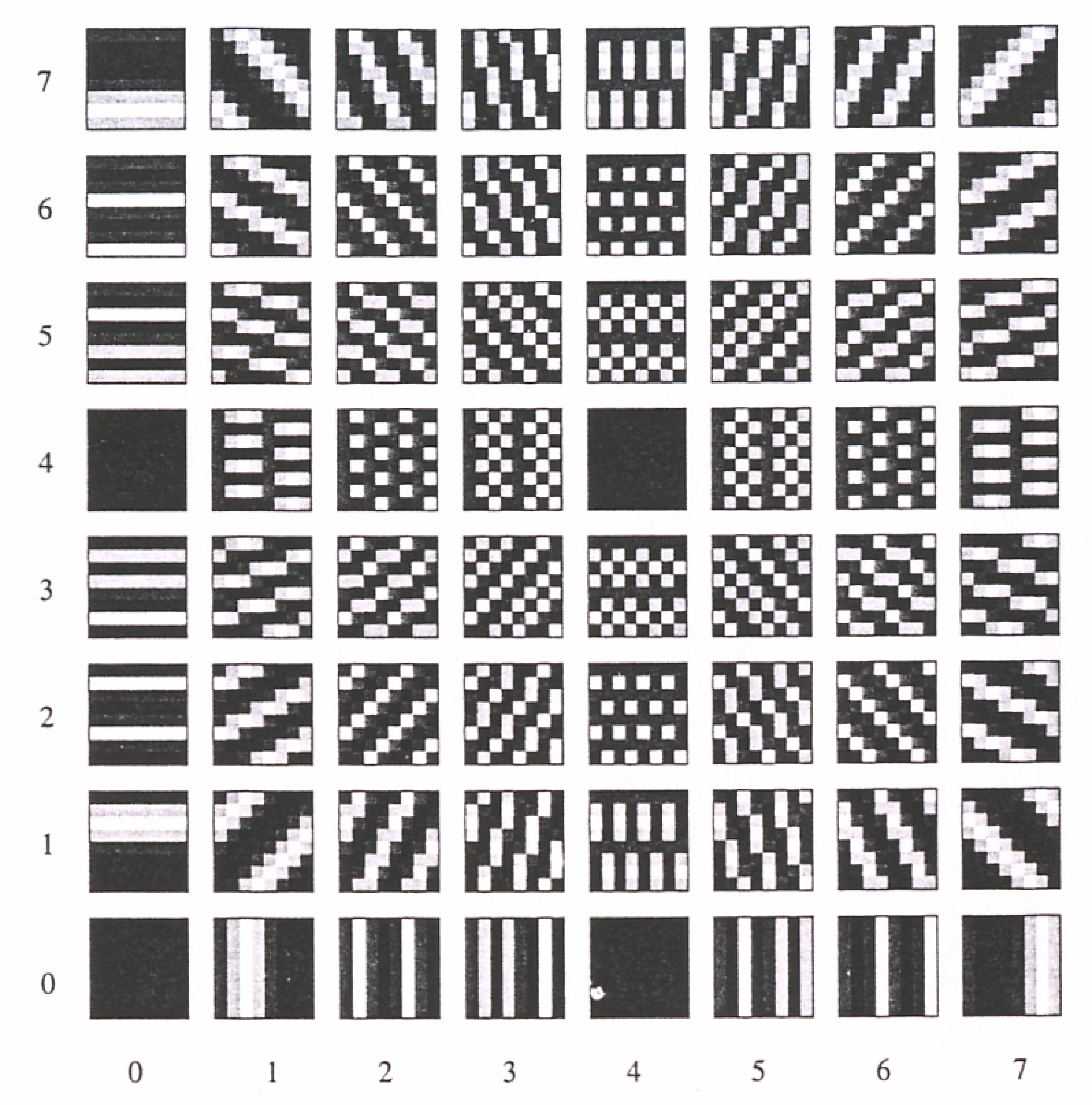
Οι στοιχειώδεις εικόνες του Discrete Fourier Transform

- Επειδή η συνάρτηση του μετασχηματισμού Fourier είναι περίπλοκη και οι στοιχειώδεις εικόνες είναι περίπλοκες.
- Δημιουργούνται με το εξωτερικό γινόμενο δύο γραμμών του πίνακα U

Real part of the Fourier transform basis images



Imaginary part of the Fourier transform basis images



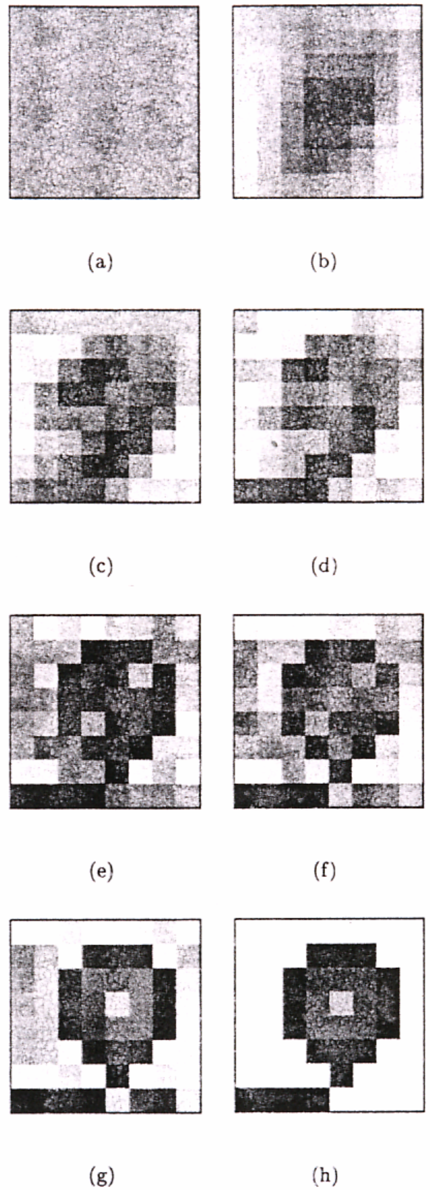


Figure 2.9: Reconstructed image when the basis images used are those created from the first one, two,..., eight lines of matrix U of Example 2.27, from top left to bottom right respectively.

Example 2.25

Derive the matrix with which the discrete Fourier transform of a 4 image can be obtained.

Apply formula (2.45) with $N = 4$, $0 \le x \le 3$, $0 \le \alpha \le 3$:

$$U = \frac{1}{\sqrt{4}} \begin{pmatrix} e^{-j\frac{2\pi}{4}\times 0} & e^{-j\frac{2\pi}{4}\times 0} & e^{-j\frac{2\pi}{4}\times 0} & e^{-j\frac{2\pi}{4}\times 0} \\ e^{-j\frac{2\pi}{4}\times 0} & e^{-j\frac{2\pi}{4}\times 1} & e^{-j\frac{2\pi}{4}\times 2} & e^{-j\frac{2\pi}{4}\times 3} \\ e^{-j\frac{2\pi}{4}\times 0} & e^{-j\frac{2\pi}{4}\times 2} & e^{-j\frac{2\pi}{4}\times 0} & e^{-j\frac{2\pi}{4}\times 2} \\ e^{-j\frac{2\pi}{4}\times 0} & e^{-j\frac{2\pi}{4}\times 3} & e^{-j\frac{2\pi}{4}\times 2} & e^{-j\frac{2\pi}{4}\times 1} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & e^{-\frac{\pi}{2}j} & e^{-j\pi} & e^{-\frac{3\pi}{2}j} \\ 1 & e^{-j\pi} & 1 & e^{-j\pi} \\ 1 & e^{-\frac{6\pi}{4}j} & e^{-j\pi} & e^{-\frac{2\pi}{4}j} \end{pmatrix}$$

$$e^{-\frac{2\pi}{4}j} = e^{-\frac{\pi}{2}j} = cos\frac{\pi}{2} - jsin\frac{\pi}{2} = -j$$

$$e^{-\pi j} = cos\pi - jsin\pi = -1$$

$$e^{-\frac{6\pi}{4}j} = cos\frac{3\pi}{2} - jsin\frac{3\pi}{2} = j$$

Therefore:

$$U = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{pmatrix}$$

Example 2.28

Compute the real and imaginary parts of the discrete Fourier transform of image:

$$g = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

We shall use matrix U of Example 2.25.

$$A = UgU$$

$$gU = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1-j & 0 & j-1 \\ 2 & -1-j & 0 & j-1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1-j & 0 & j-1 \\ 2 & -1-j & 0 & j-1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 & -2-2j & 0 & 2j-2 \\ -2j-2 & 2j & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2j-2 & 2 & 0 & -2j \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1+j}{2} & 0 & \frac{j-1}{2} \\ -\frac{1+j}{2} & \frac{j}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{j-1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{j}{2} \end{pmatrix}$$

$$Re(A) = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad and \quad Im(A) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα του Discrete Fourier transform

- Μπορεί να οριστεί έτσι ώστε να υπακούει στο convolution theorem
- Χρησιμοποιεί πολύ λεπτομερείς βασικές συναρτήσεις, οπότε η προσέγγιση της εικόνας δίνει λιγότερο λάθος από τους άλλους μετασχηματισμούς και σταθερό αριθμό όρων.
- Για n αριθμό βασικών εικόνων απαιτεί 2n συντελεστές για την ανακατασκευή της αρχικής εικόνας αντί για n που απαιτούν οι μετασχηματισμοί Haar και Walsh
- Λόγω, κυρίως ότι υπακούει στο convolution theorem, ο μετασχηματισμός Fourier είναι ο πιο χρησιμοποιούμενος μετασχηματισμός στις εικόνες

Convolution Theorem

- Ο μετασχηματισμός Fourier της συνέλιξης δύο συναρτήσεων είναι ίσος με το γινόμενο των μετασχηματισμών Fourier των δύο συναρτήσεων
- Για την περίπτωση εικόνων, το θεώρημα ισχύει εάν η εικόνα επαναλαμβάνεται περιοδικά προς όλες τις κατευθύνσεις

- Αν μία συνάρτηση ισούται με την συνέλιξη δύο συναρτήσεων, ο τύπος που δίνει την σχέση μεταξύ του DFT (Discrete Fourier Transform) της και των DFT των δύο συναρτήσεων είναι:

$$U(p,q)=\sqrt{MN}G(p,q)W(p,q)$$

- Θεωρώντας ότι:

$$g(n,m)\equiv g(n-N,m-M)$$

$$w(n,m)\equiv w(n-N,m-M)$$

$$g(n,m)\equiv g(n,m-M)$$

$$w(n,m)\equiv w(n,m-M)$$

$$g(n,m)\equiv g(n-N,m)$$

$$w(n,m)\equiv w(n-N,m)$$

Σχεδίαση του Discrete Fourier Transform

- Όπως γνωρίζουμε οι ποσότητες του μετασχηματισμού Fourier μιας εικόνας αποτελούν τους συντελεστές των στοιχειωδών εικόνων. Άρα όσο μεγάλη είναι η εικόνα, τόσους περισσότερους συντελεστές έχουμε και μάλιστα οι υψηλές συχνότητες της εικόνας γίνονται λιγότερο σημαντικές με αποτέλεσμα και οι ανάλογοι συντελεστές να είναι γίνονται μικρότεροι
- Οπότε υπάρχει δυσκολία στην παρουσίαση όλων των συντελεστών καθώς η διαφορά τιμής τους είναι μεγάλη
- Οπότε για τους **σκοπούς εμφάνισης,** και μόνο για αυτούς, χρησιμοποιείται ο παρακάτω τύπος

$$d(p,q) \equiv \log(1 + |G(p,q)|)$$

- O Discrete Fourier Transforms μίας εικόνας που έχουμε περιστρέψει θ γωνία δίνετε σε σχέση με τον DFT της ίδιας μη περιστρεφόμενης εικόνας δίνεται

$$G(w,\varphi) = G(w,\varphi+\theta)$$

Δηλαδή βλέπουμε ότι ο Discrete Fourier Transform δεν επηρεάζεται από την περιστροφή της εικόνας

- Έστω μία εικόνα g(k,l) την μετακινούμε κατά k_o,l_o οπότε τότε ορίζεται ως g(k-k_o,l-l_o). Η σχέση του discrete Fourier transform της εικόνας g(k,l) και του discrete Fourier transform της εικόνας δίνεται:

$$G(m,n) = G(m,n)e^{-2\pi j\frac{k_o m + l_o n}{N}}$$

- Η σχέση μεταξύ του discrete Fourier Transforms μιας εικόνας και του discrete Fourier Transforms της ίδιας εικόνας όμως έχοντας αλλάξει την κλίμακά της με scaling factors α και β δίνεται από τον τύπο:

$$G(m,n) = \frac{1}{\alpha\beta} g(\frac{m}{\alpha}, \frac{n}{\beta})$$

- Όπου G(m,n) είναι ο DFT της scaled εικόνας
- Και g(m,n) είναι ο DFT της unscaled εικόνας

Περίληψη

- Οι μετασχηματισμοί αναλύουν κάθε εικόνα σε ένα σύνολο από στοιχειώδεις βασικές εικόνες
- Υπάρχει δυνατότητα να ταξινομήσουμε τις εικόνες αυτές με βάση την πληροφορία που περιέχουν
- Μπορούμε να επιλέξουμε την «ποσότητα» λεπτομέρειας της εικόνας, επιλέγοντας να κρατήσουμε ένα σύνολο βασικών εικόνων
- Ο καλύτερο τρόπος πετυχαίνεται χρησιμοποιώντας σαν βασικές εικόνες τις eigenimages της βασικής εικόνας
- Όμως αυτό δεν είναι ευέλικτο καθώς οι βασικές εικόνες μας αλλάζουν από εικόνα σε εικόνα

Περίληψη

- Οπότε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε κάποιες προκαθορισμένες βασικές εικόνες, οι οποίες καθορίζονται με την βοήθεια των ορθοκανονικών συνόλων
- Τέτοια σύνολα είναι π.χ. τα Haar και Walsh
- Ο πιο διαδομένος μετασχηματισμός είναι ο Fourier
- Με τον Fourier μπορούμε να επηρεάσουμε μία εικόνα με την βοήθεια μίας απλής συνέλιξης