ΘΕΜΑ 1ο:

1. Με πόσους τρόπους οι 8 αθλητές που θα συμμετέχουν στον τελικό των 100 μέτρων στους Ολυμπιακούς αγώνες του Λονδίνου μπορούν να καταλάβουν τις τρεις θέσεις στο βάθρο;

**Λύση:**

Οι δυνατοί τρόποι δίνονται από τις διατάξεις των 3 από τους 8, δηλαδή 8!/(8-3)!. Αναλυτικότερα, επειδή ενδιαφέρει η σειρά κατάταξης των τριών νικητών στο βάθρο (1ος , 2ος και 3ος) έχουμε 3! = 6 διαφορετικές κατατάξεις για τους τρείς νικητές. Επιπλέον, οι δυνατές επιλογές τριών αθλητών από τους οκτώ δίνονται από τους συνδυασμούς των 8 ανά 3 ήτοι 8!/(8-3)!3! . Έτσι προκύπτουν οι διατάξεις των 3 από 8, δηλαδή 3!{8!/(8-5)!3!}= 8!/(8-3)! = 336

1. Με πόσους τρόπους μπορείτε να σχηματίσετε 4 ομάδες των τεσσάρων ανθρώπων από ένα σύνολο 16 ανθρώπων;

**Λύση:**

Δεν ενδιαφέρει η σειρά τοποθέτησης των ανθρώπων στις ομάδες. Η πρώτη ομάδα σχηματίζεται με τον συνδυασμό των 16 ανά 4. Η δεύτερη ομάδα θα σχηματίζεται με τόσους τρόπους, όσοι οι συνδυασμοί 4 ανθρώπων από τους εναπομείναντες 12. Η τρίτη ομάδα θα σχηματιστεί με τόσους τρόπους, όσοι οι συνδυασμοί 4 ανθρώπων από τους εναπομείναντες 8. Γα την τέταρτη ομάδα δεν χρειάζεται να γίνουν υπολογισμοί διότι σχηματίζεται από τους 4 που δεν έχουν ενταχθεί στις προηγούμενες ομάδες. Βέβαια. Ακόμα και αν χρησιμοποιήσετε το προηγούμενο σκεπτικό, θα έχετε τους συνδυασμούς 4 από 4 που είναι ίσοι με 1. Προφανώς, οι συνδυασμοί C416 θα πολλαπλασιαστούν με τους C412 και με τους C48, διότι σε κάθε ένα από τους συνδυασμούς για την πρώτη ομάδα αντιστοιχούν όλοι οι συνδυασμοί για τη δεύτερη ομάδα και ούτω καθεξής. Έτσι, το τελικό αποτέλεσμα δίνεται από το γινόμενο C416× C412 × C48

1. Με πόσους τρόπους μπορείτε να τοποθετήσετε Κ ολόιδια αντικείμενα σε Μ κιβώτια;

**Λύση:**

Επειδή τα αντικείμενα είναι ολόιδια, δεν μας ενδιαφέρει η σειρά τοποθέτησης σε ένα κιβώτιο. Αναζητούμε λοιπόν συνδυασμούς.

Το είδος των συνδυασμών θα εξαρτηθεί από το συνολικό αριθμό αντικειμένων που διατίθενται για τοποθέτηση. Σκεφτόμαστε ως εξής: Αν τοποθετήσουμε τα κιβώτια στη σειρά οι εφαπτόμενες πλευρές των κιβωτίων (που θα διαχωρίσουν τα αντικείμενα είναι Μ-1. Τοποθετούμε και τα αντικείμενα στη σειρά εμπρός από τα κιβώτια . Αν τα αντικείμενα είναι οι κύκλοι της εικόνας και οι κοινές πλευρές των κιβωτίων είναι οι γραμμές, θα έχουμε μια εικόνα τις μορφής

°°°|°°|°….°°|°°°°°|°

με Κ+Μ-1 στοιχεία από τα οποία επιλέγουμε Κ (ανεξάρτητα αν είναι κύκλοι ή γραμμές). Συνεπώς ζητούνται οι συνδυασμοί των Κ στοιχείων από τα Μ+Κ-1. Οι συνδυασμοί αυτοί είναι οι επαναληπτικοί συνδυασμοί CKM+K-1 και έτσι η απάντηση είναι (Μ+Κ-1)!/(Μ-1)!Κ!

ΘΕΜΑ 2ο:

Στην Ξάνθη έχουν αδειοδοτηθεί 8 ραδιοφωνικοί σταθμοί. Ο Α1 εκπέμπει σε συχνότητές που δημιουργούν παρεμβολές στους Α4 και Α8, ο Α2 εκπέμπει σε συχνότητές που δημιουργούν παρεμβολές στους Α5, Α3 και Α8, ο Α3 εκπέμπει σε συχνότητές που δημιουργούν παρεμβολές στους Α4 και Α6, ο Α7 εκπέμπει σε συχνότητές που δημιουργούν παρεμβολές στους Α3 και Α6, ενώ ο Α5 εκπέμπει σε συχνότητές που δημιουργούν παρεμβολές στους Α7 και Α8. Το Εθνικό Συμβούλιο Ραδιοφώνου και Τηλεόρασης καλείται να δώσει στους σταθμούς τον ελάχιστο αριθμό συχνοτήτων, ώστε να μη υπάρχουν στο μέλλον παρεμβολές. Να υπολογίσετε τον αριθμό των συχνοτήτων που απαιτούνται.

**Απάντηση:**

Η απάντηση δίνεται με εφαρμογή του αλγόριθμου για την έυρεση των ελάχιστων χρωμάτων για το χρωματισμό κορυφών του γραφήματος που δημιουργείται από την αναπαράσταση των σχέσεων που περιγράφουν το πρόβλημα.

1

7

4

6

ΘΕΜΑ 3ο:

1. Να αποδείξετε ότι το Κ4 είναι επίπεδο

**Απάντηση:**

Στο Κ4 διακρίνουμε V=4, E=6, F=4. Ισχύει το θεώρημα του Euler.

1. Να δείξετε ότι σε κάθε απλό, συνεκτικό, επίπεδο γράφο G me E>2, ισχύει η σχέση Ε ≤ 3V – 6

**Απάντηση:**

Έστω Δ(f) συμβολίζει των αριθμό των ακμών που ορίζουν (περικλείουν) μια όψη. Επειδή ο ελάχιστος αριθμός ακμών που ορίζουν μια όψη είναι 3, ισχύει ότι

Σ[Δ(Fi)] ≥ 3F (1)

Από τον τύπο του Euler: f = 2-V+E με αντικατάσταση στον προηγούμενο

Σ[Δ(Fi)] ≥ 6-3V+3E (2)

Επειδή όμως κάθε ακμή χωρίζει δυο όψεις ισχύει

Σ[Δ(Fi)]=2Ε (3)

από τις (2) και (3) προκύπτει το ζητούμενο.

1. Να δείξετε ότι το Κ5 δεν μπορεί να είναι επίπεδο.

**Απάντηση:**

Επειδή V=5 και E=10 παραβιάζεται η ισχύς της ανισότητας στο ερώτημα 2.

ΘΕΜΑ 4ο :

Να βρείτε όλες τις ελάχιστες μορφές της πρότασης:

1. (b'Vc’Vd’)Λ(a’Vb’Vc’)Λ(a’Vc’Vd’)
2. [(aΛb’Λd)’Λ(bΛc’Λd)’]V(a’Λd)’
3. [(a’ΛbΛd’)’Λ(c’Λd)’]V(a’Λb’Λc’)
4. (aΛbΛcΛe)V(aΛc’)V(aΛbΛd’)V(a’Λc) V (a’Λb’Λc’Λd’Λe’)

ΘΕΜΑ 5ο:

Δίδονται οι εξής προτάσεις:

• α. ‘Η ο Ανδρέας ψεύδεται ή ο Βασίλης πήγε στην Κίνα ή ο Γιώργος δεν είναι παρών.

• β. Εάν ο Βασίλης δεν πήγε στην Κίνα τότε ή ο Ανδρέας λέει την αλήθεια ή ο Γιώργος είναι παρών.

• γ. Συμπέρασμα: Συνεπώς ο Βασίλης πήγε στην Κίνα.

Ζητείται να ευρεθεί εάν το ανωτέρω συμπέρασμα (γ) αληθεύει δηλ. μπορεί να προκύψει, αναμφίβολα, από τις προτάσεις α και β.

**Απάντηση:** Το θέμα παρουσιάστηκε από την βοηθό διδασκαλίας , υποψ. Διδάκτορα κα Ζωή Ρίζου στο αμφιθέατρο και αναρτήθηκε στο <https://eclass.duth.gr/eclass/modules/document/file.php/TMA113/%CE%91%CE%A3%CE%9A%CE%97%CE%A3%CE%95%CE%99%CE%A3%20%CE%9C%CE%91%CE%98%CE%97%CE%9C%CE%91%CE%A4%CE%9F%CE%A3/%CE%95%CF%80%CE%B1%CE%BD%CE%B1%CE%BB%CE%B7%CF%80%CF%84%CE%B9%CE%BA%CE%AD%CF%82%20%CE%91%CF%83%CE%BA%CE%AE%CF%83%CE%B5%CE%B9%CF%82.pdf>

ΘΕΜΑ 6ο:

Ένας n-κύβος, είναι ένας κύβος εμφωλιασμένος σε χώρο n διαστάσεων. Ένας κύβος μιας διάστασης είναι ένα ευθύγραμμο τμήμα. Στις δύο διαστάσεις είναι ένα τετράγωνο, στις τρείς ο γνωστός μας κύβος. Όλοι έχουν τις ίδιες ιδιότητες: (α) ο βαθμός των κορυφών είναι n και οι ακμές έχουν ίσα μήκη. Αν λάβουμε υπόψη ότι ο κύβος πρέπει να αποτελείται από τις κορυφές και τις ακμές μόνο, δείξτε ότι κάθε n-κύβος έχει Hamiltonian κύκλωμα.

**Λύση:**

**Α’ τρόπος**

Με επαγωγή:

Για n=1 έχουμε δυο κορυφές με μια ακμή που τις συνδέει

Έστω ότι ισχύει για n=k

Για n=k+1 παρατηρούμε ότι ο κύβος αποτελείται από δυο κύβους στην διάσταση k των οποίων συνδέονται οι αντίστοιχες κορυφές τους. Θεωρούμε τα Χαμιλτονιανά κυκλώματα που υπάρχουν στους δυο κύβους της προηγούμενης διάστασης (διάσταση k). Επιλέγουμε μια ακμή του κύβου διάστασης k και την αντίστοιχη ακμή του άλλου κύβου της αυτής διάστασης και τις σβήνουμε. Ενώνουμε τις κορυφές των σβησμένης ακμής του ενός κύβου διάστασης k με τις αντίστοιχες κορυφές της σβησμένης ακμής του έτερου κύβου διάστασης k. Αυτό που προκύπτει είναι κύκλωμα Hamilton.

Ο τρόπος αυτός παρουσιάστηκε από την βοηθό διδασκαλίας , υποψ. Διδάκτορα κα Ζωή Ρίζου στο αμφιθέατρο και αναρτήθηκε στο <https://eclass.duth.gr/eclass/modules/document/file.php/TMA113/%CE%91%CE%A3%CE%9A%CE%97%CE%A3%CE%95%CE%99%CE%A3%20%CE%9C%CE%91%CE%98%CE%97%CE%9C%CE%91%CE%A4%CE%9F%CE%A3/%CE%95%CF%80%CE%B1%CE%BD%CE%B1%CE%BB%CE%B7%CF%80%CF%84%CE%B9%CE%BA%CE%AD%CF%82%20%CE%91%CF%83%CE%BA%CE%AE%CF%83%CE%B5%CE%B9%CF%82.pdf>

**Β τρόπος:**

Με χρήση κωδίκων Gray