Επαναληπτικές Ασκήσεις

Ρίζου Ζωή
email: zrizou@ee.duth.gr

Άσκηση 1

Τι πραγματεύεται το θεώρημα Euler;

Απάντηση

Ψευδογραφήματα που περιέχουν ένα κύκλωμα στο οποίο ανήκουν όλες οι ακμές χωρίς όμως να επαναλαμβάνονται. Είναι μόνο εκείνα τα ψευδογραφήματα, των οποίων ο βαθμός κάθε κορυφής είναι άρτιας τάξης.

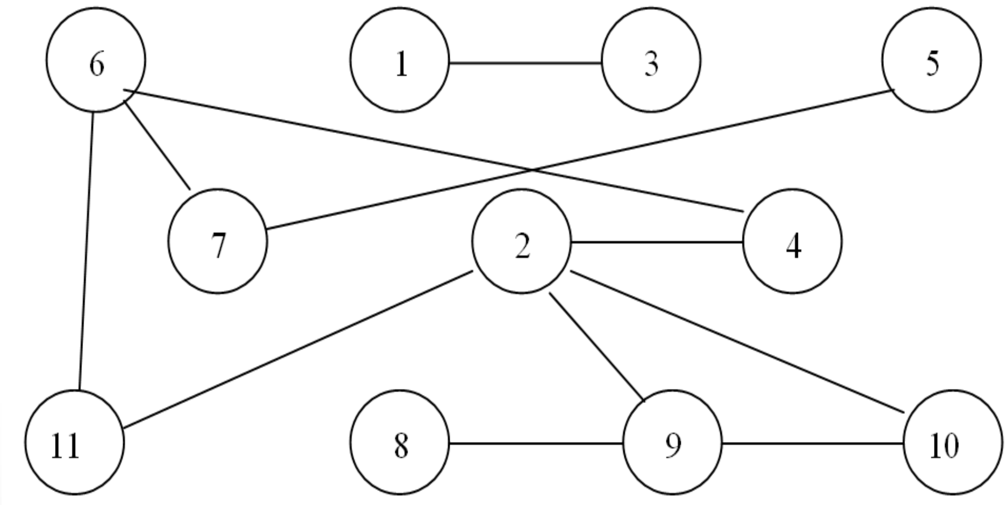
Άσκηση 2

Ένας ζωολογικός κήπος σχεδιάζει να περιλάβει στις εγκαταστάσεις του μερικές μεγάλες περιφραγμένες περιοχές, όπου 11 είδη της πανίδας της Αφρικής θα κυκλοφορούν ελεύθερα. Κάποια από αυτά τα είδη δεν μπορούν να συνυπάρξουν διότι είναι θηρευτές – θηράματα και για αυτό δεν μπορούν να εγκλειστούν στην ίδια περιφραγμένη περιοχή. Αυτές οι ασυμβατότητες σημειώνονται με " V " στον πίνακα που ακολουθεί. Να βρείτε τον ελάχιστο αριθμό περιοχών που πρέπει να σχεδιαστούν ώστε να μη τεθεί σε κίνδυνο η επιβίωση των ειδών.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1			V								
2				V					V	V	V
3	V										
4		V				V					
5							V				
6				V			V				V
7					V	V					
8									V		
9		V						V		V	
10		V							V		
11		V				V					

Απάντηση

Η λύση δίνεται με εφαρμογή του αλγόριθμου χρωματισμού γραφήματος, όπου το γράφημα είναι:



	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1			V								
2				V					V	V	V
3	V										
4		V				V					
5							V				
6				V			V				V
7					V	V					
8									V		
9		V						V		V	
10		V							V		
11		V				V					

Απαριθμούμε τις κορυφές με βάση το Πρόγραμμα 5.1- Χαρακτηρισμός γραφήματος (σελ. 197). Έτσι έχουμε:

1-u_1	3-u_2	2-u_3
4-u_4	9-u_5	10-u_6
8-u_7	11-u_8	6-u_9
7-u_{10}	5-u_{11}	

- Στη συνέχεια ακολουθούμε τον αλγόριθμο χρωματισμού γραφήματος (Πρόγραμμα 5.2 σελ. 197).

- Σημείωση: Δεν αρκεί να υπάρχουν μόνο τα χρώματα θα πρέπει να περιγραφεί ο τρόπος χρωματισμού.

Άσκηση 3

Δίδονται οι εξής προτάσεις:

- α. ‘Η ο Ανδρέας ψεύδεται ή ο Βασίλης πήγε στην Κίνα ή ο Γιώργος δεν είναι παρών.
- β. Εάν ο Βασίλης δεν πήγε στην Κίνα τότε ή ο Ανδρέας λέει την αλήθεια ή ο Γιώργος είναι παρών.
- γ. Συμπέρασμα: Συνεπώς ο Βασίλης πήγε στην Κίνα.

Ζητείται να ευρεθεί εάν το ανωτέρω συμπέρασμα (γ) αληθεύει δηλ. μπορεί να προκύψει, αναμφίβολα, από τις προτάσεις α και β.

Απάντηση

Έστω ότι:

- A = ο Ανδρέας λέει την αλήθεια
- B = ο Βασίλης πήγε στην Κίνα
- Γ = ο Γιώργος είναι παρών

Τότε: $\Delta \equiv (A' \vee B \vee \Gamma')$

$$E \equiv (B' \Rightarrow (A \vee \Gamma)) \equiv (B \vee A \vee \Gamma)$$

Εξετάζουμε την ισχύ της πρότασης:

$$((\Delta \wedge E) \Rightarrow B) \equiv (A' \vee B \vee \Gamma') \wedge (A \vee B \vee \Gamma) \Rightarrow B$$

Η πρόταση αυτή είναι ισοδύναμη με την:

$((A' \vee B \vee \Gamma') \wedge (A \vee B \vee \Gamma))' \vee B$ ή $(A' \vee B \vee \Gamma')' \vee (A \vee B \vee \Gamma)' \vee B$

και τελικά με την Ζ = $(A \wedge B' \wedge \Gamma) \vee (A' \wedge B' \wedge \Gamma') \vee B$

της οποίας κατασκευάζουμε τον πίνακα αληθείας:

Α	Β	Γ	Η=Α∧Β΄∧Γ	Θ=Α΄∧Β΄∧Γ΄	Ζ=Η∨Θ∨Β
0	0	0	0	1	1
0	0	1	0	0	0
0	1	0	0	0	1
0	1	1	0	0	1
1	0	0	0	0	0
1	0	1	1	0	1
1	1	0	0	0	1
1	1	1	0	0	1

Άρα ο Βασίλης δεν πήγε στην Κίνα.

Άσκηση 4

Να αποδείξετε ότι ένα πλήρες γράφημα n κορυφών περιέχει n(n-1)/2 ακμές

> Ένα απλό γράφημα ονομάζεται ***πλήρες***, εάν κάθε ζεύγος κορυφών του συνδέεται με μια ακμή.

Απάντηση

Η απόδειξη θα γίνει με επαγωγή.

- Για n=1 δεν υπάρχουν ακμές άρα 1(1-1)/2=0
- Υποθέτουμε ότι πλήρης γράφος με k κορυφές έχει κ(κ-1)/2 ακμές.
- Αν λάβουμε υπόψη την (κ+1) κορυφή, που συνδέεται με τις λοιπές k κορυφές με k ακμές. Έτσι, k(k-1)/2+k= =(k+1)[(k+1)-1]/2   ό.έ.δ.

Άσκηση 5

Με πόσους τρόπους μπορείτε να «κόψετε» μια τράπουλα των 52 φύλλων ώστε σε κάθε ένα από τα δυο πακέτα που θα χωριστεί να υπάρχουν από δυο ντάμες;

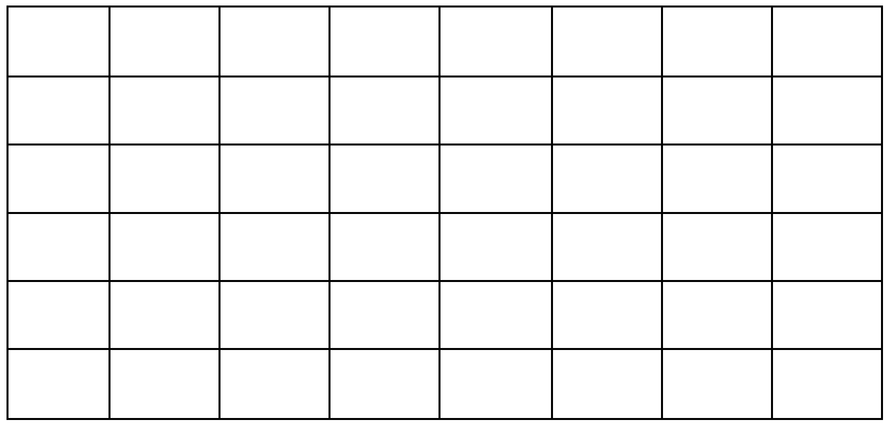
Απάντηση

Αφαιρέστε τις δύο ντάμες και υπολογίστε τους δυνατούς τρόπους να βγάλετε δυο χαρτιά, τρία χαρτιά, έως και 24 χαρτιά. Σε κάθε τέτοια επιλογή αντιστοιχούν 4 ανά 2 συνδυασμοί από ντάμες:

$$\left[\binom{48}{2}+\binom{48}{3}+\cdots+\binom{48}{24}\right]\binom{4}{2}=$$

Άσκηση 6

Στο σχήμα απεικονίζεται η ρυμοτομία μιας πόλης.



Να υπολογίσετε το σύνολο των συντομότερων διαδρομών που θα διανύσει κάποιος που θέλει να αναχωρήσει από το κάτω αριστερό τετράγωνο και να καταλήξει στο άνω δεξιό. Η κίνηση επιτρέπεται μόνο δεξιά και άνω.

Απάντηση

- Κάθε διαδρομή αποτελείται από βήματα 7 «δεξιά» (δ) και 5 «επάνω» (ε) . Επειδή οι διαδρομές έχουν 12 βήματα, τις παριστώ ως λέξεις με 12 χαρακτήρες π.χ. δδεδεεεδδεδδ .

- Συνεπώς με ενδιαφέρει με πόσους τρόπους μπορούν να τοποθετηθούν τα 7 δ στις δώδεκα θέσεις. Το πλήθος αυτών δίνεται από τους συνδυασμούς των 7 στοιχείων από τα 12. Δηλαδή 792.

Άσκηση 7

Δείξτε ότι κάθε πεπερασμένος απλός γράφος έχει δύο κορυφές του ίδιου βαθμού.

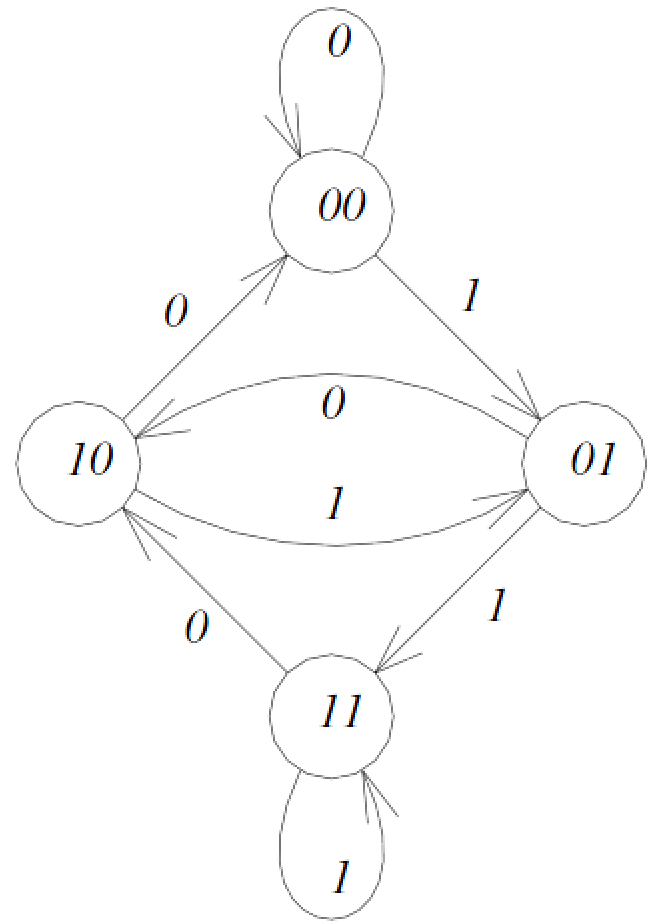
Απάντηση

- Αυτό μπορεί να δειχθεί εφαρμόζοντας τη θεωρία pigeon hole principle. Με βάση αυτή τη θεωρία εάν έχουμε **n** αντικείμενα για να τα τοποθετήσουμε **m** pigeonholes, με **n>m**, υπάρχει μία τουλάχιστον pigeonhole που θα περιέχει παραπάνω από ένα αντικείμενα.

- Ας υποθέσουμε ότι ο γράφος έχει n κορυφές.
- Κάθε κορυφή συνδέεται με τις υπόλοιπες 0,1,2,…,n-1 κορυφές.
- Αν οποιαδήποτε από τις κορυφές είναι συνδεδεμένη με n-1 κορυφές, τότε δεν μπορεί να υπάρξει μια κορυφή που να συνδέεται σε 0 άλλες.
- Έτσι, είναι αδύνατον να έχουμε ένα γράφημα με n κορυφές, όπου η μία κορυφή να έχει βαθμό 0 και οι άλλες n-1.
- Επομένως, οι κορυφές μπορούν να έχουν το πολύ n -1 διαφορετικούς βαθμούς, αλλά δεδομένου ότι υπάρχουν n κορυφές, τουλάχιστον δύο πρέπει να έχουν τον ίδιο βαθμό.

Άσκηση 8

Θεωρούμε την αλληλουχία 01110100 διατεταγμένη σε ένα κυκλικό μοτίβο. Παρατηρήστε ότι κάθε μία από τις οκτώ πιθανές δυαδικές τριάδες: 000, 001, 011,. . . , 111 εμφανίζονται ακριβώς μια φορά στην κυκλική λίστα. Μπορείτε να κατασκευάσετε μια παρόμοια λίστα με μήκος 16, όπου όλες οι πιθανές δυαδικές τετράδες εμφανίζονται ακριβώς μια φορά η κάθε μία; Στη λίστα μήκους 32, όλες οι πιθανές δυαδικές πεντάδες εμφανίζονται ακριβώς μια φορά;



Απάντηση

- Εξετάστε το παραπάνω γράφημα. Είναι μία γραφική παράσταση με τέσσερις κορυφές και η καθεμία έχει ένα από τα δυνατά ζεύγη δυαδικών ψηφίων. Φανταστείτε ότι καθεμία αντιπροσωπεύει τα δύο τελευταία ψηφία της ακολουθίας μέχρι τώρα.
- Τα βέλη οδηγούν μακριά από μια κορυφή και έχουν τιμές ή 0 ή 1: τις δύο πιθανές τιμές για το επόμενο ψηφίο που μπορεί να προστεθεί στην ακολουθία.
- Τα άκρα των βελών υποδεικνύουν τα νέα τελευταία δύο ψηφία.
- Για την επίτευξη κάθε δυνατού τριψήφιου συνδυασμού, θα πρέπει να διασχίσουμε το γράφημα με Οϊλεριανό κύκλωμα .

- Υπάρχουν πάντα δύο βέλη “από” και δύο βέλη “προς” κάθε κορυφή. Επομένως ο βαθμός κάθε κορυφής είναι άρτιας τάξης.

- Η κατάσταση είναι η ίδια για οποιοδήποτε αριθμό ψηφίων, εκτός και αν η γραφική παράσταση γίνει περίπλοκη.

- Για την εκδοχή 4 ψηφίων, θα υπάρχουν 8 κορυφές και 16 ακμές και ανάλογα για περισσότερα ψηφία. Αλλά σε κάθε περίπτωση, θα υπάρχουν δύο άκρα που εισέρχονται και δύο που εξέρχονται σε κάθε κορυφή, έτσι ώστε η ύπαρξη ενός Eulerian κυκλώματος να είναι δυνατή.

Άσκηση 9

Ένας n-κύβος, είναι ένας κύβος με n διαστάσεων. Ένας κύβος μιας διάστασης είναι μία γραμμή. Στις δύο διαστάσεις είναι ένα τετράγωνο, στις τρείς ένας κανονικός κύβος, και σε γενικές γραμμές για να μεταβείτε στην επόμενη διάσταση, γίνεται αντίγραφο του κύβου και όλες οι αντίστοιχες κορυφές συνδέονται. Αν λάβουμε υπόψη ότι ο κύβος πρέπει να αποτελείται από τις κορυφές και τις ακμές μόνο, δείξτε ότι κάθε n-κύβος έχει Hamiltonian κύκλωμα.

Απάντηση

- Η απόδειξη μπορεί να γίνει με επαγωγή. Αν n = 1, πρέπει απλά να επισκεφτούμε κάθε κορυφή ενός γραφήματος δύο κορυφών με μία ακμή που τις συνδέει.
- Ας υποθέσουμε ότι ισχύει: n=k. Για να οικοδομήσουμε ένα (k+1) κύβο, παίρνουμε δύο αντίγραφα του k-cube και συνδέουμε τις αντίστοιχες ακμές.
- Παίρνουμε το Hamiltonian κύκλωμα στον ένα κύβο και το αντιστρέφουμε στον άλλο.
- Στη συνέχεια, επιλέγουμε μια κορυφή σε ένα κύβο που αποτελεί μέρος του κυκλώματος και την αντίστοιχη κορυφή στον άλλο και τις διαγράφουμε από το κύκλωμα.
- Τέλος, προσθέτουμε τις ακμές από τα αντίστοιχα τελικά σημεία στους κύβους που θα παράγει ένα κύκλωμα στον (k+1)-κύβο.