

Άλγεβρα Boole

Ελάχιστες μορφές



Ρίζου Ζωή
email: zrizou@ee.duth.gr

Άσκηση 1

Να βρεθεί η σύντομη διαζευκτική μορφή (σ.δ.μ.) της X :

$$X = ((A \wedge B) \vee (B' \wedge C) \vee C')'$$

Λύση

$$X = ((A \wedge B) \vee (B' \wedge C) \vee C')'$$

De Morgan

$$= (A \wedge B)' \wedge (B' \wedge C)' \wedge C$$

$$= (A' \vee B') \wedge (B \vee C') \wedge C$$

$$= (A' \vee B') \wedge ((C \wedge B) \vee (C \wedge C'))$$

2^{ος} επιμεριστικός νόμος

$$= (A' \vee B') \wedge (C \wedge B)$$

Νόμος συμπληρώματος

$$= (C \wedge B) \wedge (A' \vee B')$$

Αντιμεταθετικός νόμος

$$= (C \wedge B \wedge A') \vee (C \wedge B \wedge B')$$

2^{ος} επιμεριστικός νόμος

$$= C \wedge B \wedge A'$$

Νόμος συμπληρώματος

Άσκηση 2

Να βρεθεί η σύντομη διαζευκτική μορφή (σ.δ.μ.) της f :

$$f = (x_1 \vee x_4) \wedge (x_1 \vee (x_2 \wedge x_3'))'$$

Λύση

$$\begin{aligned} f &= (x_1 \vee x_4) \wedge (x_1 \vee (x_2 \wedge x_3'))' \\ &= (x_1 \vee x_4) \wedge (x_1' \wedge (x_2 \wedge x_3'))' && \text{De Morgan} \\ &= (x_1 \vee x_4) \wedge (x_1' \wedge (x_2' \vee x_3)) \\ &= (x_1 \vee x_4) \wedge ((x_1' \wedge x_2') \vee (x_1' \wedge x_3)) && \text{2ος επιμεριστικός νόμος} \\ &= ((x_1 \vee x_4) \wedge (x_1' \wedge x_2')) \vee ((x_1 \vee x_4) \wedge (x_1' \wedge x_3)) \\ &= ((x_1' \wedge x_2') \wedge (x_1 \vee x_4)) \vee ((x_1' \wedge x_3) \wedge (x_1 \vee x_4)) && \text{Αντιμεταθετικός νόμος} \\ &= (x_1' \wedge x_2' \wedge x_1) \vee (x_1' \wedge x_2' \wedge x_4) \vee (x_1' \wedge x_3 \wedge x_1) \vee (x_1' \wedge x_3 \wedge x_4) \\ &= (x_1' \wedge x_2' \wedge x_4) \vee (x_1' \wedge x_3 \wedge x_4) && \text{2ος επιμεριστικός νόμος} \\ &= (x_1' \wedge x_2' \wedge x_4) \vee (x_1' \wedge x_3 \wedge x_4) && \text{Νόμος συμπληρώματος} \end{aligned}$$

Άσκηση 3

Να βρεθούν οι ελάχιστες μορφές της πρότασης με τη μέθοδο ομόφωνης επέκτασης και επιλογής:

$$f = ABCD \vee AB'D \vee A'BC \vee A'D \vee A'B'CD' \vee AC'$$

Λύση

$$f = ABCD \vee AB'D \vee A'BC \vee A'D \vee A'B'CD' \vee AC'$$

1

2

3

4

5

6

⁷
1-2 ACD

$$= ABCD \vee AB'D \vee A'BC \vee A'D \vee A'B'CD' \vee AC' \vee ACD$$

1

2

3

4

5

6

7

Σβήστε 1

$$= AB'D \vee A'BC \vee A'D \vee A'B'CD' \vee AC' \vee ACD$$

2

3

4

5

6

7

⁸
2-3, 2-4 $B'D$

$$= AB'D \vee A'BC \vee A'D \vee A'B'CD' \vee AC' \vee ACD \vee B'D$$

2

3

4

5

6

7

8

Σβήστε 2

$$= A'BC \vee A'D \vee A'B'CD' \vee AC' \vee ACD \vee B'D$$



$$\overset{9}{3-4, 3-5} A'CD'$$

$$= A'BC \vee A'D \vee A'B'CD' \vee AC' \vee ACD \vee B'D \vee A'CD'$$



$$\text{Σβήστε 5}$$

$$= A'BC \vee A'D \vee AC' \vee ACD \vee B'D \vee A'CD'$$



$$\overset{10}{3-6, 3-7} BCD$$

$$= A'BC \vee A'D \vee AC' \vee ACD \vee B'D \vee A'CD' \vee BCD$$



$$\overset{11}{3-8} A'CD$$

$$= A'BC \vee A'D \vee AC' \vee ACD \vee B'D \vee A'CD' \vee BCD \vee A'CD$$



$$3-9, 3-10, 3-11, 4-6 \overset{12}{DC'}$$

$$= A'BC \vee A'D \vee AC' \vee ACD \vee B'D \vee A'CD' \vee BCD \vee A'CD \vee DC'$$



Προστέθηκε νέος όρος (12),
 οπότε πηγαίνουμε στην πρώτη
 σύγκριση που δεν έγινε ακόμη.

$$3-12 \overset{13}{A'BD}$$

Τελικά τα βήματα καταλήγουν:

$$3-13, 4-7 \overset{14}{CD}$$

Σβήστε 7, 10, 11

$$3-14, 4-8, 4-9 \overset{15}{A'C}$$

Σβήστε 3, 9

4-12, 4-13, 4-14, 4-15, 6-8, 6-12, 6-13 $C'D$ (Περιέχει τον όρο 12)

6-14 $A\bar{D}$

4-16, 6-15, 6-16, 8-12, 8-13 $A'D$ (Ίσος όρος με τον 4)

8-14, 8-15, 8-16, 12-13, 12-14, 12-15 $A'D$ (Ίσος όρος με τον 4)

12-16, 13-14, 13-15, 13-16 $\bar{B}D$

Σβήστε 13

STOP Η επέκταση σε ομοφωνία είναι:

$$f = A'D \vee AC' \vee B'D \vee DC' \vee CD \vee A'C \vee AD \vee BD$$

a

b

c

d

e

f

g

h

$$f = A'D \vee AC' \vee B'D \vee DC' \vee CD \vee A'C \vee AD \vee BD$$



- Γράψτε την επέκταση πλήρους όρου κάθε πρώτου αριθμού με βάση το δεκαδικό σύστημα αρίθμησης:

όρος	δυναδική μορφή	δεκαδικός κώδικας
a	0 _ _ 1	1, 3, 5, 7
b	1 _ 0 _	8, 9, 12, 13
c	_ 0 _ 1	1, 3, 9, 11
d	_ _ 0 1	1, 5, 9, 13
e	_ _ 1 1	3, 7, 11, 15
f	0 _ 1 _	2, 3, 6, 7
g	1 _ _ 1	9, 11, 13, 15
h	_ 1 _ 1	5, 7, 13, 15

όρος	δυναδική μορφή	δεκαδικός κώδικας
a	0 _ _ 1	1, 3, 5, 7
b	1 _ 0 _	8, 9, 12, 13
c	_ 0 _ 1	1, 3, 9, 11
d	_ _ 0 1	1, 5, 9, 13
e	_ _ 1 1	3, 7, 11, 15
f	0 _ 1 _	2, 3, 6, 7
g	1 _ _ 1	9, 11, 13, 15
h	_ 1 _ 1	5, 7, 13, 15

- Σχηματίστε έναν πίνακα **με γραμμές τους όρους και στήλες τους δεκαδικούς κώδικες** που εμφανίζονται τουλάχιστον σε μία επέκταση πλήρους όρου. Σημειώστε X για να δηλώσετε την επέκταση πλήρους όρου κάθε όρου.

	1	2	3	5	6	7	8	9	11	12	13	15
a	X		X	X		X						
b							X	X		X	X	
c	X		X					X	X			
d	X			X				X			X	
e			X			X			X			X
f		X	X		X	X						
g								X	X		X	X
h				X		X					X	X

	1	2	3	5	6	7	8	9	11	12	13	15
a	X		X	X		X						
b*							⊗	X		⊗	X	
c	X		X					X	X			
d	X			X				X			X	
e			X			X			X			X
f*		⊗	X		⊗	X						
g								X	X		X	X
h				X		X					X	X

• **b και f:** ουσιώδεις όροι

➤ Οι όροι 1, 5, 11, 15 είναι προς διαπραγμάτευση:

- ✓ Ο όρος 1 μπορεί να προέλθει από τον a ή c ή d.
- ✓ Ο όρος 5 μπορεί να προέλθει από τον a ή d ή h.
- ✓ Ο όρος 11 μπορεί να προέλθει από τον c ή e ή g.
- ✓ Ο όρος 15 μπορεί να προέλθει από τον e ή g ή h.

Χρησιμοποιώντας τη λογική ερμηνεία καταλήγουμε στη μορφή:

$$(a \vee c \vee d) \wedge (a \vee d \vee h) \wedge (c \vee e \vee g) \wedge (e \vee g \vee h)$$

Άλγεβρα Boole- Ελάχιστες μορφές

Πρόταση Petrick

$$\begin{aligned}
& (a \vee c \vee d) \wedge (a \vee d \vee h) \wedge (c \vee e \vee g) \wedge (e \vee g \vee h) \\
= & \{[(a \vee d) \wedge (a \vee d)] \vee [(a \vee d) \wedge h] \vee [c \wedge (a \vee d)] \vee (c \wedge h)\} \wedge \\
& \{[(e \vee g) \wedge (e \vee g)] \vee [(e \vee g) \wedge h] \vee [(c \wedge (e \vee g))] \vee (c \wedge h)\} \\
= & [(a \vee d) \vee [(a \vee d) \wedge h] \vee [c \wedge (a \vee d)] \vee (c \wedge h)] \wedge \\
& [(e \vee g) \vee [(e \vee g) \wedge h] \vee [(c \wedge (e \vee g))] \vee (c \wedge h)] \\
= & [(a \vee d) \vee (c \wedge h)] \wedge [(e \vee g) \vee (c \wedge h)] \\
= & [(a \vee d) \wedge (e \vee g)] \vee [(a \vee d) \wedge (c \wedge h)] \vee [(c \vee h) \wedge (e \vee g)] \vee [(c \vee h) \wedge (c \wedge h)] \\
= & [(a \vee d) \wedge (e \vee g)] \vee (c \vee h) \\
= & [(a \vee d) \wedge e] \vee [(a \vee d) \wedge g] \vee (c \vee h) \\
= & (e \wedge a) \vee (e \wedge d) \vee (g \wedge d) \vee (g \wedge a) \vee (c \vee h) \\
= & \Pi
\end{aligned}$$

Πλήθος γραμματικών στοιχείων:

$e \wedge a$: $e = C \wedge D$ και $a = A' \wedge D$

$e \wedge d$: $e = C \wedge D$ και $d = D \wedge C'$

$g \wedge d$: $g = A \wedge D$ και $d = D \wedge C'$

$g \wedge a$: $g = A \wedge D$ και $a = A' \wedge D$

$c \vee h$: $c = B' \wedge D$ και $h = B \wedge D$

Τελικά η αρχική πρόταση f έχει πέντε ελάχιστες μορφές:

τη διάζευξη των b, f, e, a : $f = A'D \vee AC' \vee CD \vee A'C$

τη διάζευξη των b, f, e, d : $f = AC' \vee DC' \vee CD \vee A'C$

τη διάζευξη των b, f, g, d : $f = AC' \vee DC' \vee A'C \vee AD$

τη διάζευξη των b, f, g, a : $f = A'D \vee AC' \vee A'C \vee AD$

τη διάζευξη των b, f, c, h : $f = AC' \vee B'D \vee A'C \vee BD$

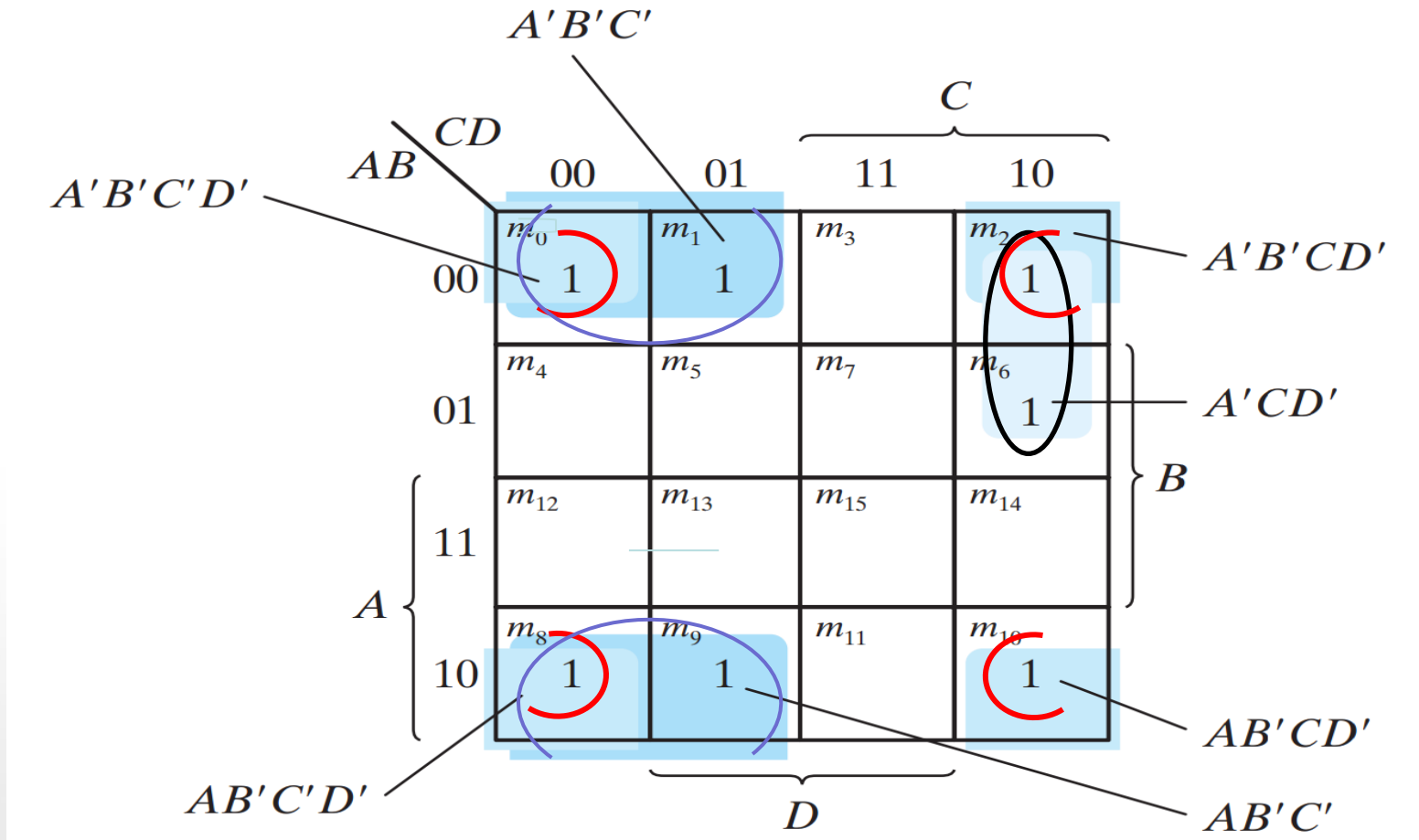
Άσκηση 4

Να απλοποιηθεί η συνάρτηση Boole με χρήση χαρτών Karnaugh

$$f = A'B'C' \vee B'CD' \vee A'BCD' \vee AB'C'$$

Λύση

$$f = A'B'C' \vee B'CD' \vee A'BCD' \vee AB'C'$$



$$\text{Τελικά: } f = B'D' \vee B'C' \vee A'CD'$$