Συνδυαστική Ανάλυση

Ρίζου Ζωή
email: zrizou@ee.duth.gr

Διαφορές διατάξεων-συνδυασμών

- Αν ενδιαφερόμαστε για τη σειρά με την οποία εμφανίζονται τα επιλεγμένα αντικείμενα μιλάμε για <u>ΔΙΑΤΑΞΕΙΣ</u>

- Αν δεν ενδιαφερόμαστε για τη σειρά με την οποία εμφανίζονται τα επιλεγμένα αντικείμενα μιλάμε για <u>ΣΥΝΔΥΑΣΜΟΥΣ</u>.

Περιπτώσεις προβλημάτων (1)

- Επιλέγουμε αρχικά ένα αντικείμενο. Πριν επιλέξουμε το δεύτερο, το αρχικό θα ξαναμπεί στην «κληρωτίδα» ή όχι;

Έτσι μιλάμε για επιλογές <u>ΜΕ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ</u> και <u>ΧΩΡΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ</u>.

Περιπτώσεις προβλημάτων (2)

- ✓ Όταν χωρίζουμε το πρόβλημά μας σε ξεχωριστές περιπτώσεις, τις αναλύουμε ανεξάρτητα και ΑΘΡΟΙΖΟΥΜΕ τα επιμέρους αποτελέσματα.
- ✓ Όταν μας ενδιαφέρουν οι τρόποι με τους οποίους συνδυάζονται τα αποτελέσματα των περιπτώσεων, ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΖΟΥΜΕ τα επιμέρους αποτελέσματα.

ΔΙΑΤΑΞΕΙΣ k αντικειμένων από n (παίζει ρόλο η σειρά)

Έχουμε n αντικείμενα. Πόσοι τρόποι υπάρχουν να επιλέξουμε k αντικείμενα από αυτά και να τα βάλουμε σε μια σειρά;

$$P(n,k) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

δηλαδή, με απλοποίηση $P(n,k) = (n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)$

❑ Παράδειγμα

Από 10 άτομα θέλω να επιλέξω 4 για να μπουν με τη σειρά στις παρακάτω θέσεις:

Για την 1^{η} θέση έχω 10 επιλογές (ένα από τα 10 άτομα)
Για την 2^{η} θέση έχω 9 επιλογές (ένα από τα 9 άτομα που περίσσεψαν)
Για την 3^{η} θέση έχω 8 επιλογές
Για την 4^{η} θέση έχω 7 επιλογές

Συνολικά έχω λοιπόν $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7$ επιλογές, ή με άλλα λόγια $\frac{10!}{6!}$

ΣΥΝΔΥΑΣΜΟΙ k αντικειμένων από n (δεν παίζει ρόλο η σειρά)

Έχουμε n αντικείμενα. Πόσοι τρόποι υπάρχουν να επιλέξουμε μια ομάδα k αντικειμένων από αυτά;

$$C(n,k) \acute{\eta} \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

❑ Παράδειγμα

Θέλω να επιλέξω 2 γράμματα από τα Α,Β,Γ,Δ,Ε.

Υπάρχουν:

$$\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!\,3!} = \frac{4 \cdot 5}{1 \cdot 2} = 10 \text{ τρόποι}$$

Πρόκειται για τα 10 ζευγάρια ΑΒ, ΑΓ, ΑΔ, ΑΕ, ΒΓ, ΒΔ, ΒΕ, ΓΔ, ΓΕ, ΔΕ. Θεωρούμε ότι ΑΒ και ΒΑ είναι το ίδιο.

ΔΙΑΤΑΞΕΙΣ k *αντικειμένων από* n ΜΕ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ

Κάθε φορά που επιλέγω ένα αντικείμενο, το ξαναβάζω στην «κληρωτίδα». Η απάντηση είναι:

$$n^k$$

❑ Παράδειγμα

Σκεπτόμενοι όπως στην περίπτωση Α, ας πούμε ότι από 10 άτομα έχω να επιλέξω 4, αλλά αυτή τη φορά κάθε άτομο μπορεί να ξαναεπιλεγεί. Τα ονόματα τους θα τα γράψω σε μια σειρά

Για την 1η θέση έχω 10 επιλογές (ένα από τα 10 άτομα)
Για την 2η θέση έχω 10 επιλογές (αφού έχουμε ξανά και τα δέκα άτομα)
Για την 3η θέση έχω 10 επιλογές
Για την 4η θέση έχω 10 επιλογές

Συνολικά έχω λοιπόν $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10$ επιλογές, ή με άλλα λόγια 10^4

ΣΥΝΔΥΑΣΜΟΙ r αντικειμένων από n ΜΕ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ

Οι συνδυασμοί δίνονται από τη σχέση:

$$\binom{n+k-1}{k}$$

Παράδειγμα

Ρίχνουμε δύο ζάρια. Πόσες ζαριές υπάρχουν;

- Σκεφτείτε ότι έχουμε n=6 αριθμούς, τους 1,2,3,4,5,6, και ρωτάμε πόσοι τρόποι υπάρχουν να επιλέξουμε r=2.

  - ✓ Έχουμε ΣΥΝΔΥΑΣΜΟΥΣ, διότι δεν μας ενδιαφέρει η σειρά. Π.χ. η ζαριά 3-4 δεν είναι διαφορετική από την 4-3.

  - ✓ Έχουμε ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ, διότι π.χ. η ζαριά 1-1 επιτρέπεται.

Υπάρχουν λοιπόν $\binom{6+2-1}{2} = \binom{7}{2} = \frac{6 \cdot 7}{1 \cdot 2} = 21$ ζαριές

Άσκηση 1

Θεωρείστε το σύνολο των ακεραίων που ανήκουν στο I=[1,300].

Με πόσους τρόπους μπορεί να επιλεγούν 3 αριθμοί από το I, έτσι ώστε το άθροισμά τους να διαιρείται με 3;

Δεν ενδιαφέρει η σειρά επιλογής και τοποθέτησης.

<u>Απάντηση</u>

- Κάθε αριθμός από το I, διαιρούμενος με το 3 αφήνει υπόλοιπο 0, 1 ή 2.
- Χωρίζω τους αριθμούς σε τρεις ομάδες ανάλογα με το υπόλοιπο της ακεραίας διαίρεσής τους με το 3:

  <u>1η ομάδα</u>: Αυτοί που έχουν υπόλοιπο 1 (1,4,7,…)

  <u>2η ομάδα</u>: Αυτοί που έχουν υπόλοιπο 2 (2,5,8,…)

  <u>3η ομάδα</u>: Αυτοί που έχουν υπόλοιπο 0 (3,6,9,…)

- Υπάρχουν δυο τρόποι να διαλέξω τρεις αριθμούς (έστω a,b,c) με άθροισμα που να διαιρείται με το 3 (δε μας ενδιαφέρει η σειρά τους):

  a) <u>Είτε διαλέγω έναν αριθμό από κάθε ομάδα</u>:

  a+b+c, όπου $a_{mod3}=0$, $b_{mod3}=1$ και $c_{mod3}=2$

  Επομένως: **100^3 τρόπους**

  b) <u>Είτε διαλέγω τρεις αριθμούς από την ίδια ομάδα</u>:

  a+b+c, όπου $a_{mod3}=b_{mod3}=c_{mod3}=0$

  Επομένως: **$3\binom{100}{3}$ τρόπους**

Συνδυασμοί χωρίς επανάληψη

❖ Όλοι οι τρόποι επιλογής είναι: $100^3 + 3\frac{100!}{3!97!} = \mathbf{1485100}$ **τρόποι**

Άσκηση 2

Πόσοι διαφορετικοί σχηματισμοί μπορούν να δημιουργηθούν από τα γράμματα

MISSISSIPPI;

Απάντηση

- Υπάρχουν 11 γράμματα τα οποία μπορούν να ταξινομηθούν σε **11! = 39916800 τρόπους.**
- Εάν τα 4 "**S**" αλλάξουν θέση μεταξύ τους, τότε τίποτα δεν έχει αλλάξει.
- Ομοίως, για τα 4 "**I**" και 2 τα "**P**".
- Επομένως, η απάντηση είναι: $\frac{11!}{4! \times 4! \times 2!} = 34650 \text{ σχηματισμοί}$

Άσκηση 3

Έστω ότι προσπαθούμε να βρούμε το κλειδί για ένα λογαριασμό. Αν η λέξη αποτελείται μόνο από 10 μικρά γράμματα (π.χ., 10 χαρακτήρων μεταξύ των: a, b, c, ..., v, x, y, z) και κανένας χαρακτήρας δεν μπορεί να επαναληφθεί, **πόσες διαφορετικές μοναδικές λέξεις κλειδιά υπάρχουν;**

Απάντηση

- Εάν αλλάξουμε τη σειρά των χαρακτήρων, θα δημιουργηθούν νέες πιθανές λέξεις-κλειδιά. (διάταξη)
- Καθορίζουμε το n: n = 26 και το k: k = 10.

❖ Επομένως: ${}_{26}P_{10} = \frac{26!}{(26-10)!} = \frac{26!}{16!}$

Άσκηση 4

Σε έναν προκριματικό αγώνα ποδηλασίας, 15 άνδρες διαγωνίζονται για 5 θέσεις. **Με πόσους διαφορετικούς τρόπους, μπορούν να καθοριστούν οι θέσεις, εάν παίζει ρόλο η σειρά τερματισμού;**

Απάντηση

- "Παίζει ρόλο η σειρά τερματισμού" ⟶ Διάταξη
- Καθορίζουμε το n: n = 15 και το k: k = 5.

❖ Επομένως: $_{15}P_5 = \frac{15!}{(15-5)!} = \frac{15!}{10!}$

Άσκηση 5

Πόσα διαφορετικά γκρουπ των 10 μαθητών μπορεί να διαλέξει ο δάσκαλος, από μία τάξη 15 μαθητών;

Απάντηση

- Δεν παίζει ρόλο η σειρά. ⟶ Συνδυασμός
- Καθορίζουμε το n: n = 15 και το k: k = 10.

❖Επομένως: $_{15}C_{10} = \frac{15!}{10!(15-10)!} = \frac{15!}{10!5!}$

Άσκηση 6

Μία ομάδα υδατοσφαίρισης θέλει να αγωνιστεί στο τοπικό πρωτάθλημα και ο προπονητής πρέπει να επιλέξει 3 άνδρες και 4 γυναίκες, μεταξύ 4 ανδρών και 6 γυναικών. **Πόσους διαφορετικούς συνδυασμούς ομάδων μπορεί να δημιουργήσει ο προπονητής;**

Απάντηση

- Δεν παίζει ρόλο η σειρά. ⟶ Συνδυασμός
- Έχουμε δύο γκρουπ:

Γυναικών: n=6, k=4 Ανδρών: n=4, k=3

❖ Επομένως: $_6C_4 * {}_4C_3 = \frac{6!}{4!(6-4)!} * \frac{4!}{3!(4-3)!} = \frac{6!}{4!2!} * \frac{4!}{3!1!} = 60$