Θεωρία συνόλων

Ρίζου Ζωή
email: zrizou@ee.duth.gr

Άσκηση 1

Έστω ότι έχουμε τα εξής σύνολα:

$$A_1 = \{x \in \mathbb{R} : x^2 = 1\}$$

$$A_2 = \{x \in \mathbb{Z} : x^3 = 1\}$$

και

$$A_3 = \{x \in \mathbb{C} : x^4 = 1\}$$

Να βρεθούν τα σύνολα:

$$A_1 \cup A_2, \quad A_2 \cap A_3, \quad (A_1 \cap A_2) \cup A_3, \quad A_2 - A_3, \quad A_3 - A_1.$$

- Τα σύνολα A_1, A_2 και A_3 είναι:

$A_1 = \{1, -1\}$, $A_2 = \{1\}$, και $A_3 = \{1, -1, i, -i\}$.

✓ Επομένως:

$A_1 \cup A_2 = \{1, -1\}$

$A_2 - A_3 = \emptyset$

$A_2 \cap A_3 = \{1\}$

$A_3 - A_1 = \{i, -i\}$

$(A_1 \cap A_2) \cup A_3 = \{1, -1, i, -i\}$

Άσκηση 2

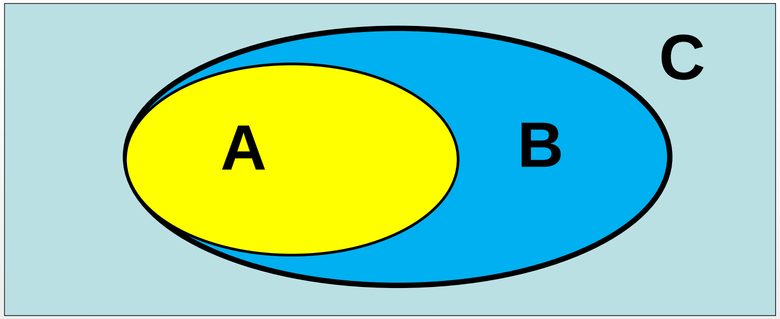
Εξετάστε αν η παρακάτω πρόταση είναι αληθής για οποιαδήποτε σύνολα A,B,C. Δικαιολογήστε την απάντηση σας

Αν A ⊆ B και B∈C, τότε A⊆ C

Απάντηση

$$A \subseteq B: \quad A = \{y : y \in B\}$$

$$B \in C: \quad B = \{x : x \in C\}$$



- Επομένως ισχύει ότι A⊆ C.

Άσκηση 3

Έστω $W \subset X$ και $Y \subset Z$.

Ισχύει πάντα ότι ($W \cup Y$) ⊂ ($X \cup Z$);

Απάντηση

- Η τομή δύο γνήσιων υποσυνόλων (εξ ορισμού), δεν μπορεί να είναι ίση με το κενό σύνολο.
- Αν η τομή των ($W \cup Y$) και ($X \cup Z$) είναι ίση με το κενό σύνολο, η σχέση δεν ισχύει.

$$(\mathrm{W} \cup Y) \cap (X \cup Z) \quad Έ\sigma\tau\omega: A = (W \cup Y)$$

$$E\pi o\mu\varepsilon\nu\omega\varsigma: \quad A \cap (X \cup Z) = (A \cap X) \cup (A \cap Z)$$

$$= \big((W \cup Y) \cap X\big) \cup \big((W \cup Y) \cap Z\big) =$$

$$= (W \cap X) \cup (Y \cap X) \cup (W \cap Z) \cup (Y \cap Z)$$

- Επειδή από τα δεδομένα της άσκησης: W⊂X

$$\mathrm{W} \cap X \neq \{\ \}.$$

- Επομένως και η παραπάνω ένωση συνόλων δεν είναι ποτέ ίση με το κενό σύνολο.
- Άρα η σχέση ισχύει.