Κεφάλαιο 4 : Λογική και Κυκλώματα

Σύνοψη

Τα κυκλώματα που διαθέτουν διακόπτες ροής ηλεκτρικού φορτίου, χρησιμοποιούνται σε διατάξεις που αναπαράγουν λογικές διαδικασίες για τη λήψη αποφάσεων. Στην ενότητα αυτή εξετάζονται διακόπτες αυτού του είδους, οι οποίοι καλούνται λογικοί διακόπτες. Στη συνέχεια θα παρουσιαστούν οι μεθοδολογίες εκείνες που επιτρέπουν την κατασκευή πολύπλοκων λογικών διακοπτών με χρήση των στοιχειωδών εξ αυτών.

Προαπαιτούμενη γνώση

Άλγεβρα Πινάκων, Γραμμοπράξεις,

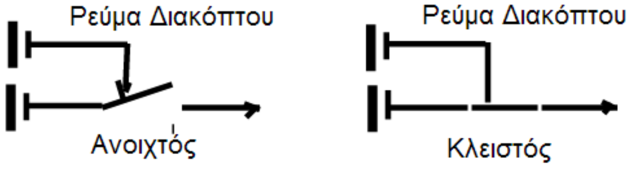
4.1. Εισαγωγικές Έννοιες

Έστω ότι ο βομβητής που ειδοποιεί τον οδηγό ενός οχήματος για μια ενέργεια ή μια σειρά ενεργειών που πρέπει να κάνει για να αυξήσει τις συνθήκες ασφάλειας στάθμευσης ή οδήγησης του οχήματος, ενεργοποιείται για ένα ή περισσότερους από τις ακόλουθες καταστάσεις:

Τα φώτα πορείας είναι αναμμένα
Το κλειδί της μηχανής βρίσκεται στη θέση του
Ο κινητήρα είναι σε κατάσταση λειτουργίας
Η πόρτα είναι ανοιχτή
Η ζώνη ασφαλείας του οδηγού είναι δεμένη

Οι καταστάσεις αυτές αποτελούν λογικές προτάσεις και ως τέτοιες υπακούν στην αρχή του δυϊσμού: είτε είναι αληθείς είτε είναι ψευδείς. Έτσι, η εξακρίβωση της ισχύος κάθε μιας από αυτές θα μπορούσε να συνδυαστεί με κατάλληλη τροφοδότηση με ισχύ του βομβητή, έτσι ώστε να τον ενεργοποιεί όταν προκύπτει θέμα ασφάλειας. Αν λόγου χάρη η Υ1 είναι αληθής και η Υ2 ψευδής τότε ο βομβητής ηχεί, επειδή ο οδηγός ξέχασε τα φώτα αναμμένα. Αν η Υ2 , Υ3 και Υ4 είναι αληθείς ο βομβητής πρέπει να ενεργοποιείται.

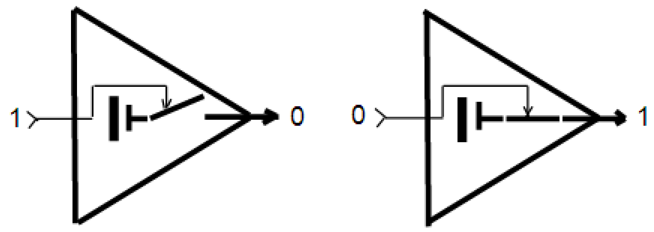
Το παράδειγμα αυτό περιγράφει μια ακόμα γνωστή εφαρμογή των κυκλωμάτων διακοπτών (switching circuits), που περιλαμβάνει μια πλειάδα διακοπτών. Κάθε διακόπτηςμπορεί να ανοίγει χάρη στην παροχή ενός ρεύματος διακόπτη, όπως φαίνεται στο σχήμα 4.1



Σχήμα 4.1

Διακρίνονται διάφοροι τρόποι σύνδεσης του βασικού αυτού διακόπτη σε ένα κύκλωμα διακοπτών. Οι πλέον βασικοί τρόποι είναι αυτοί οι οποίοι προσομοιώνουν τρεις βασικές λογικές διεργασίες: την άρνηση, την σύζευξη και την διάζευξη. Τα αντίστοιχα κυκλώματα καλούνται πύλες, που ονομάζονται πύλη NOT, πύλη OR και AND. .

Η πύλη NOT που καλείται και πύλη αντιστροφής, παρεμβάλει στο κύκλωμα ένα διακόπτη που

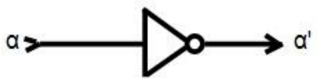


Σχήμα 4.2

τροφοδοτείται από μια πηγή με το ρεύμα διακόπτη. Η παροχή ρεύματος διακόπτη διακόπτει την παροχή από την έξοδο της πύλης, ενώ αντίθετα, η διακοπή του ρεύματος διακόπτη στην είσοδο της πύλης επιτρέπει την παροχή ρεύματος στην έξοδο της πύλης.

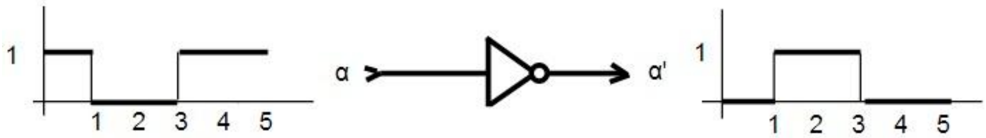
ΟΡΙΣΜΟΣ : Πίνακας αληθείας του κυκλώματος είναι ό πίνακας που περιγράφει τις καταστάσεις της (ή των εισόδων) και της εξόδου μιας λογικής πύλης.

α	α'
0	1
1	0



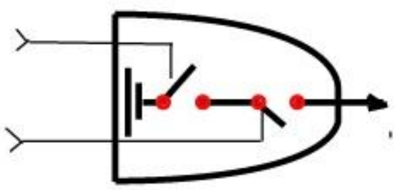
Πίνακας 4.1 Ο πίνακας αληθείας της πύλης NOT και η γραφική της παράσταση

Στο επόμενο σχήμα φαίνεται ο τρόπος λειτουργία της πύλης NOT. Όταν στην είσοδο παρέχεται το συγκεκριμένο σήμα, στην έξοδο λαμβάνεται αντεστραμμένο.



Σχήμα 4.3

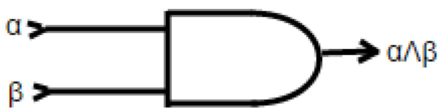
Οι πύλες AND και OR έχουν δυο εισόδους. Η πρώτη από αυτές, αποτελείται από δυο διακόπτες συνδεμένους εν σειρά, όπως φαίνεται στο σχήμα 4.4



Σχήμα 4.4

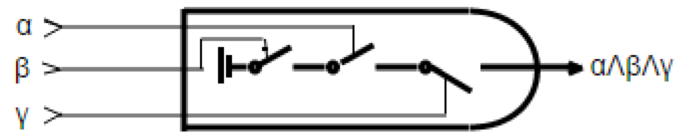
Η πύλη AND επιτρέπει τη δίοδο ρεύματος όταν υπάρξει ρεύμα διακόπτου και στις δυο εισόδους, ενώ αποκλείει την έξοδο όταν τουλάχιστον μια εκ των δύο εισόδων δεν δέχεται ρεύμα διακόπτη. Αν οι καταστάσεις εισόδου δηλωθούν με α και β τότε η έξοδος θα είναι $\alpha \wedge \beta$ που σημαίνει α και β. Ο πίνακας 4.2 περιγράφει τη λειτουργία της πύλης AND

α	β	αΛβ
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1



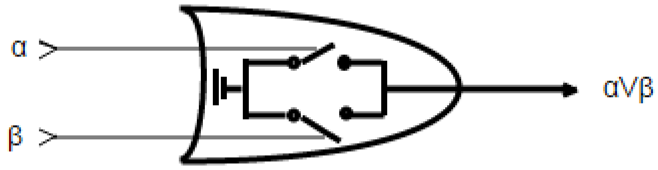
Πίνακας 4.2 Ο πίνακας αληθείας της πύλης AND και η γραφική της παράσταση

Πύλες AND με περισσότερες εισόδους διαμορφώνονται σύμφωνα με τη διαδικασία που περιγράφηκε. Για παράδειγμα η πύλη AND τριών εισόδων θα έχει την μορφή



Σχήμα 4.5

Η πύλη δυο εισόδων OR, που συχνά καλείται και πύλη διάζευξης δυο σημείων, αποτελείται από δυο διακόπτες συνδεμένους παράλληλα. Όπως φαίνεται στο σχήμα 4.6, κάθε διακόπτης παραμένει ανοιχτός αν δεν παρέχεται ρεύμα διακόπτη.



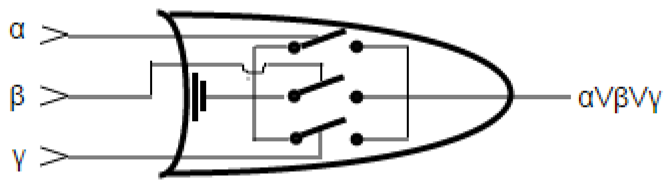
Σχήμα 4.6

Αν οι καταστάσεις εισόδου δηλώνονται με α και β, τότε η κατάσταση εξόδου είναι αVβ (α ή β). Στον πίνακα 4.3 αποτυπώνεται η λειτουργία του διακόπτη

α	β	αVβ
0	0	0
1	0	1
0	1	1
1	1	1

Πίνακας 4.2 Ο πίνακας αληθείας της πύλης IF και η γραφική της παράσταση

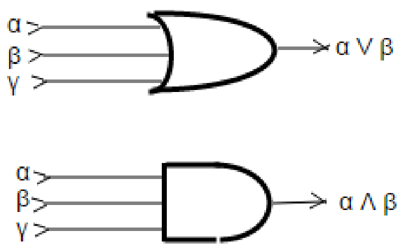
Μια πύλη OR με περισσότερες από μια εισόδους περιέχει αντίστοιχο με αυτές αριθμό διακοπτών. Στο σχήμα 4.7 απεικονίζεται μια πύλη τριών εισόδων.



Σχήμα 4.7

Στον πίνακα 4.4 αποτυπώνονται οι δυνατές καταστάσεις των πυλών AND και OR τριών εισόδων.

α	β	γ	α Λ β Λ γ	α V β V γ
0	0	0	0	0
1	0	0	0	1
0	1	0	0	1
1	1	0	0	1
0	0	1	0	1
1	0	1	0	1
0	1	1	0	1
1	1	1	1	1

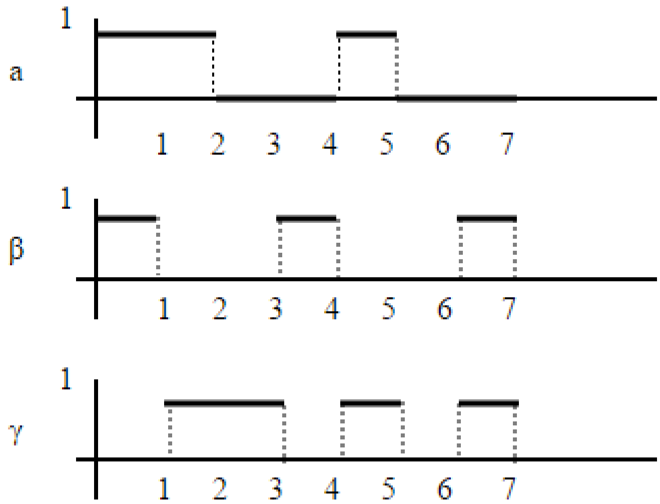


Πίνακας 4.4 Ο πίνακας αληθείας της πύλης IF και η γραφική της παράσταση

Η εναλλαγή των στοιχείων στην n-στη στήλη ενός πίνακα n εισόδων γίνεται με εναλλαγή 2^n το πλήθος μηδενικών (0) και μονάδων (1)

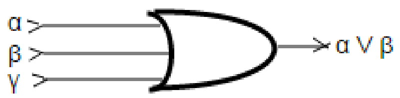
ΑΣΚΗΣΕΙΣ

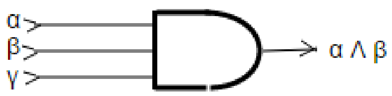
1. Έστω ότι οι καταστάσεις εισόδου, στη διάρκεια 7 sec δίδονται με τις επόμενες γραφικές παραστάσεις:



Στις επόμενες ασκήσεις σχεδιάστε τις γραφικές παραστάσεις των σημάτων εξόδου.

2. c’
3. b’
4. $a_{\wedge}b$
5. $d_{\wedge}c$
6. $a_{\vee}c$
7.





8. $b_{\vee}c$

9. Σχεδιάστε ένα κύκλωμα για a1 $a2_{\wedge}a_{3\wedge}a_4$
10. Σχεδιάστε ένα κύκλωμα για $a_{1v}a_{2v}a_{3v}a_4$
11. Συμπληρώστε ένα πίνακα που περιγράφει τη λειτουργία των πυλών τεσσάρων εισόδων των δύο προηγούμενων ασκήσεων
12. Χρησιμοποιώντας διακόπτες, αντί για πύλες, σχεδιάστε κυκλώματα που έχουν έξοδο:
    $a_{\Lambda}b'$ $a'_{\Lambda}b$ $(a_{\Lambda}b)'$ $(a_{v}b)'$ $(a_{\Lambda}b)_{v}c$ $(a_{v}b)_{\Lambda}(c_{\Lambda}d)$
13. Συμπληρώστε τους πίνακες που περιγράφουν την έξοδο των 6 περιπτώσεων της άσκησης 12

4.2 Κυκλώματα και προτάσεις

Είναι δυνατό να κατασκευαστούν πολλά διαφορετικά κυκλώματα- διακόπτες, αν συνδεθούν με διαφορετικό τρόπο οι βασικές πύλες, που προηγουμένως περιγράφηκαν. Ένας απλός αλγόριθμος για το σχεδιασμό ενός κυκλώματος με προκαθορισμένη λειτουργία, είναι ο αλγόριθμος 4.1. Πριν όμως προχωρήσουμε στην παρουσίαση και ανάλυση της λειτουργίας του αλγόριθμου αυτού, θα αναφέρουμε μερικούς νέους χρήσιμους όρους και ορισμούς.

Ας θεωρήσουμε το άγνωστο κύκλωμα-διακόπτη, με n εισόδους α, β, γ, ..., ω και μια έξοδο Φ, όπως φαίνεται στο σχήμα 4.9.

Σχήμα 4.5

Η λειτουργία του κυκλώματος αυτού, περιγράφεται πλήρως με τη βοήθεια ενός πίνακα που δίνει τις τιμές 0 ή 1 σε κάθε δυνατό συνδυασμό τω 0 και 1, που αντιστοιχούν στις καταστάσεις εισόδου α, β, γ, ..., ω. Ο πίνακας αυτός καλείται πίνακας λειτουργίας. Αν οι είσοδοι είναι n, πίνακας λειτουργίας που αντιστοιχεί στις εισόδους a_1, a_2, …, a_n , έχει 2^n στήλες. Την παρατήρηση αυτή μπορείτε να επαληθεύσετε αμέσως, αν παρατηρήσετε τους πίνακες 4.1, 4.2, 4.3 και 4.4. Το σύνολο πινάκων με n εισόδους είναι 2^{2^n}. Σύμφωνα με αυτή την παρατήρηση ο συνολικός αριθμός πινάκων με δύο εισόδους είναι 2^{2^2}=16. Δύο κυκλώματα λέγονται <u>ισοδύναμα</u>, αν περιγράφονται με τον ίδιο πίνακα λειτουργίας.

Στη συνέχεια θα μελετήσουμε τις εξόδους κυκλωμάτων, που είναι κατασκευασμένα εξ' ολοκλήρου με πύλες AND, OR και NOT. Οι είσοδοι σε τέτοια κυκλώματα ονομάζονται μεταβλητές. Η έξοδος τέτοιου κυκλώματος καλείται πρόταση (ή και φράση). Έτσι λοιπόν, η πρόταση στις μεταβλητές a_1, a_2, …, a_n είναι κάθε πρόταση που μπορεί να δομηθεί από τις a_1, a_2, …, a_n όπου κάθε μεταβλητή μπορεί να χρησιμοποιηθεί όσες φορές θέλουμε, δια μέσου πεπερασμένου αριθμού αρνήσεων (χρήση της πύλης NOT), συζεύξεων (χρήση της πύλης AND) και διαζεύξεων (χρήση της πύλης OR). Το επόμενο είναι ένα παράδειγμα μια φράσης στις a_1, a_2, a_3 με έξοδο f:

$[[(a'_2 \mathrm{v} a_3)\Lambda(a'_1\Lambda a_2\Lambda a_3)]\mathrm{V}a'_3]'=f$ (1)

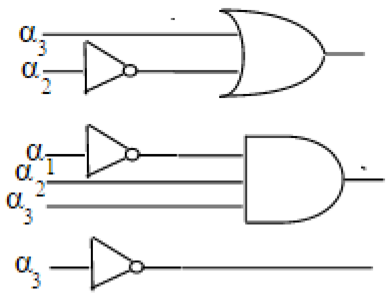
Οι μεταβλητές και οι αρνήσεις του θα καλούνται στο εξής γραμματικά στοιχεία (literals). Όροι θα καλούνται είτε μεμονωμένα γραμματικά στοιχεία, είτε οι συζεύξεις (ή διαζεύξεις) πεπερασμένου αριθμού γραμματικών στοιχείων. Έτσι, στην πρόταση (1) τα γραμματικά στοιχεία είναι

a'_1, a'_2, a_2, a_3 a'_3

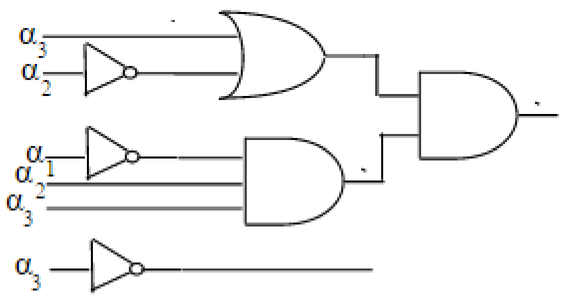
ενώ οι όροι είναι

$a'_2\mathrm{V}a_3$, $a'_1\Lambda a_2\Lambda a_3$ και a'_3

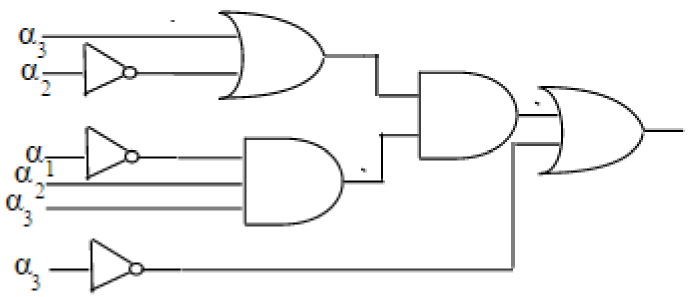
Με όσα είπαμε παραπάνω είναι τώρα εύκολο να σχεδιάσουμε μια πρόταση. Για τη φράση (1), λόγου χάρη, σχεδιάζουμε πρώτα τους όρους:

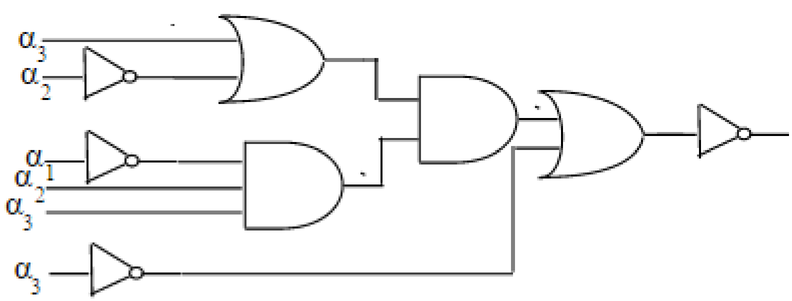


στη συνέχεια συνδέουμε του δύο πρώτους με AND:

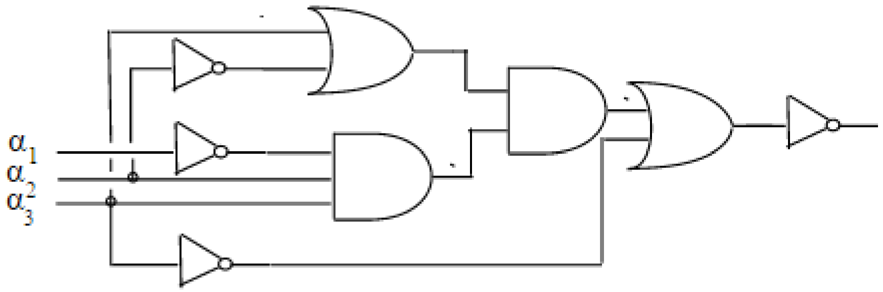


συνδέουμε το σχήμα αυτό με τον τελευταίο όρο με ένα OR και αντιστρέφουμε την έξοδο με ένα NOT:





Τελικά συνδέουμε τις κοινές εισόδους, όπως φαίνεται στην επόμενη εικόνα.



Στη συνέχεια θα δούμε πως δομείται μια πρόταση με τη βοήθεια πληροφοριών που παίρνουμε από ένα πίνακα λειτουργίας. Για να πετύχουμε κάτι τέτοιο, εισάγουμε ένα τύπο φράσης που θα καλείται διαζευτική μορφή (). Η διαζευτική μορφή είναι ένας μοναδικός όρος, ή σε άλλες περιπτώσεις διάζευξη όρων, όπου κάθε όρος είναι είτε γραμματικό στοιχείο ή σύζευξη γραμματικών στοιχείων. Ας υποθέσουμε, γα παράδειγμα, πως ένα κύκλωμα έχει μια έξοδο f και τέσσερεις εισόδους α’$_1$, $α_2$, $α_3$ και $α_4$. Ο όρος αυτός παίρνει την τιμή 1 εάν και μόνον εάν $α_1$=1, $α_2$=0, $α_3$=0, $α_4$=1. Για κάθε άλλη τιμή των μεταβλητών ο όρος αυτός είναι 0. Αν καταγράψουμε περισσότερους όρους στους οποίους, για κατάλληλες καταστάσεις των μεταβλητών, η f παίρνει την τιμή 1, τότε η διάζευξη αυτών των όρων θα είναι η απαιτούμενη φράση.

Αλγόριθμος 4.1

Για να γράψουμε τη διαζευτική μορφή για κύκλωμα με εισόδους a_1, a_2, ..., a_n και έξοδο f.

1. Εάν f=0, για όλες τις τιμές, τότε γράφουμε τη μορφή $a_1 \Lambda a_1'$, αν f=1 για όλες τις τιμές, γράφουμε a μορφή $a_1 V a_1'$. Σε κάθε άλλη περίπτωση συνεχίζουμε :
2. Για κάθε συνδυασμό τιμών που δίνουν f=1 γράφουμε: $a_1^{e_1} \Lambda a_2^{e_2} \Lambda ...... \Lambda a_n^{e_n}$ όπου $a_i^{e_i}$ είναι a_i αν $a_i = 1$ και $a_i^{e_i}$ είναι a_i' αν $a_i = 0$.
3. Αν μόνο ένας όρος έχει γραφεί, τότε αυτή είναι η τελική μορφή. Σε κάθε άλλη περίπτωση η τελική μορφή είναι η διάζευξη όλων των όρων, που έχουν γραφεί.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4.1

Σχεδιάστε ένα κύκλωμα που έχει έξοδο 1 αν και μόνον αν τουλάχιστον δύο είσοδοι είναι 1

ΛΥΣΗ: Το πρώτο βήμα του αλγόριθμου 4.1 δεν εφαρμόζεται, για αυτό εφαρμόζουμε το βήμα 2 ως εξής:

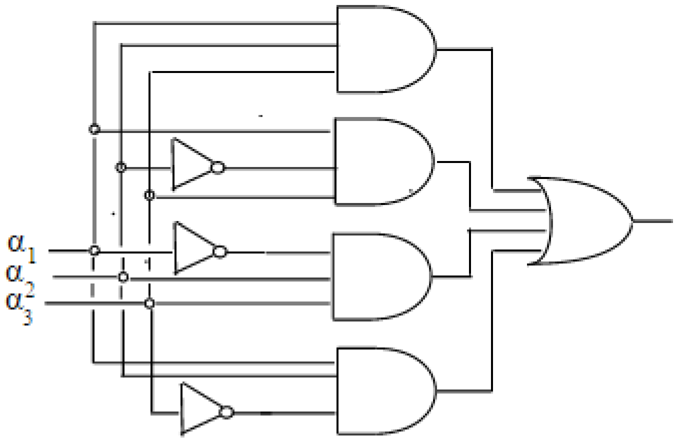
είσοδος που δίνει f=1

$α_1$	$α_2$	$α_3$	Όρος που αντιστοιχεί
0	1	1	$α_1' \wedge α_2 \wedge α_3$
1	0	1	$α_1 \wedge α_2' \wedge α_3$
1	1	0	$α_1 \wedge α_2 \wedge α_3'$
1	1	1	$α_1 \wedge α_2 \wedge α_3$

Πίνακας 4.1

Τότε, $f=(a_1 \Lambda a_2 \Lambda a_3)V(a_1 \Lambda a_2 \Lambda a_3)V(a_1 \Lambda a_2 \Lambda a_3)V(a_1 \Lambda a_2 \Lambda a_3)$

Το σχέδιο του κυκλώματος είναι στην παρακάτω εικόνα του σχήματος 4.11.



Σχήμα 4.11

Αν ένα κύκλωμα-διακόπτης με n εισόδους έχει έξοδο f=1 για περισσότερους από τους μισούς συνδυασμούς καταστάσεων εισόδων, -δηλαδή για περισσότερο από το 2^{n-1} τέτοιων συνδυασμών - τότε η ακόλουθη προσαρμογή θα οδηγήσει σε σχεδιασμό κυκλώματος με λιγότερες πύλες:

Με χρήση του αλγορίθμου 4.1 σχεδιάζουμε κύκλωμα με έξοδο f '.

Αντιστρέφουμε το σήμα εξόδου δια μέσου μιας πύλης αντιστροφής NOT, για να καταλήξουμε το σήμα εξόδου f.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4.2 Σχεδιάστε ένα κύκλωμα με τέσσερις εισόδους που έχει έξοδο 1 αν και μόνο αν δύο ή περισσότερες είσοδοι είναι 1.

ΛΥΣΗ Υπάρχουν 2^4=16 συνδυασμοί καταστάσεων εισόδου. Συνολικά μόνο 5 από αυτούς δίνουν έξοδο f=0. Έτσι το κανονικό διάγραμμα θα αποτελείται από 11 πύλες AND, 4 πύλες NOT και μία πύλη OR. Εφόσον f=1 για 16-5=11συνδυασμούς καταστάσεων εισόδου, επιλέγουμε τον αναπροσαρμοσμένο αλγόριθμο που μόλις περιγράψαμε. Θεωρούμε μόνο εκείνες τις περιπτώσεις συνδυασμών εισόδου για τις οποίες f΄=1, που σημαίνει f=0.

καταστάσεις για τις οποίες f=0

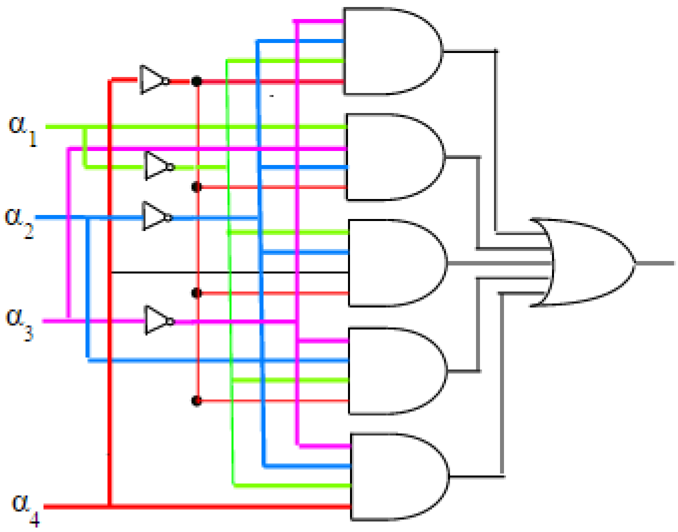
α_1	α_2	α_3	α_4	Όρος που αντιστοιχεί
0	0	0	0	$\alpha_1'\wedge\alpha_2'\wedge\alpha_3'\wedge\alpha_4'$
0	0	0	1	$\alpha_1'\wedge\alpha_2'\wedge\alpha_3'\wedge\alpha_4$
0	0	1	0	$\alpha_1'\wedge\alpha_2'\wedge\alpha_3\wedge\alpha_4'$
0	1	0	0	$\alpha_1'\wedge\alpha_2\wedge\alpha_3'\wedge\alpha_4'$
1	0	0	0	$\alpha_1\wedge\alpha_2'\wedge\alpha_3'\wedge\alpha_4'$

Πίνακας 4.1

Άρα

,$f = [(\alpha_1'\Lambda\alpha_2'\Lambda\alpha_3'\Lambda\alpha_4')V(\alpha_1'\Lambda\alpha_2'\Lambda\alpha_3'\Lambda\alpha_4\ )V(\alpha_1'\Lambda\alpha_2'\Lambda\alpha_3\ \Lambda\alpha_4')V(\alpha_1'\Lambda\alpha_2\ \Lambda\alpha_3'\Lambda\alpha_4')V(\alpha_1\ \Lambda\alpha_2'\Lambda\alpha_3'\Lambda\alpha_4')]'$

Το σχέδιο είναι στο σχήμα 4.12, που ακολουθεί.



Σχήμα 4.12 *Αυτό το κύκλωμα έχει 5 πύλες AND, 5 πύλες NOT και μια πύλη OR.*

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Σχεδιάστε ένα κύκλωμα με δύο εισόδους που έχει έξοδο 1 ανν ακριβώς μία είσοδος είναι 1. (Ένα τέτοιο κύκλωμα καλείται αποκλειστική πύλη OR).
2. Σχεδιάστε ένα κύκλωμα με δύο εισόδους που έχει έξοδο 1 ανν οι είσοδοι δεν είναι και οι δύο 1. (Ένα τέτοιο κύκλωμα καλείται πύλη NAND, συμβολίζεται με) .
3. Σχεδιάστε ένα κύκλωμα με δύο εισόδους που έχει έξοδο 1 ανν ούτε μία είσοδος είναι 1. (Ένα τέτοιο κύκλωμα καλείται πύλη NOR και συμβολίζεται με).
4. Σχεδιάστε ένα κύκλωμα με εισόδους a_1 , a_2 που έχει έξοδο 1 ανν a_1=0.
5. Σχεδιάστε ένα κύκλωμα με τρεις εισόδους που έχει έξοδο 1 ανν ακριβώς μία είσοδος είναι 1.
6. Σχεδιάστε ένα κύκλωμα με τρεις εισόδους που έχει έξοδο 1 ανν είτε καμία είσοδος είναι 1 είτε όλοι οι είσοδοι είναι 1 .
7. Σχεδιάστε ένα κύκλωμα με πέντε εισόδους του οποίου η έξοδος είναι πάντα 1.
8. Σχεδιάστε ένα κύκλωμα με έξι εισόδους του οποίου η έξοδος δεν είναι ποτέ 1 .

Στις ασκήσεις 9-16 που ακολουθούν, θα δείξετε ότι κάθε κύκλωμα μπορεί να κατασκευαστεί με συνδυασμούς μόνο πυλών NOT και πυλών AND δύο εισόδων, όπως επίσης ότι κάθε κύκλωμα μπορεί να κατασκευαστεί με χρήση μόνο πυλών NOT και πυλών OR δύο εισόδων.

9. Κατασκευάστε πύλη AND 3-εισόδων με τη βοήθεια δύο πυλών AND 2-εισόδων.
10. Κατασκευάστε πύλη OR 3-εισόδων με τη βοήθεια δύο πυλών OR 2-εισόδων.
11. Κατασκευάστε πύλη AND n-εισόδων, όπου $n > 2$, με τη βοήθεια πυλών AND 2-εισόδων. Πόσες τέτοιες πύλες απαιτούνται;
12. Επαναλάβατε την άσκηση 11 για πύλες OR.
13. Κατασκευάστε πύλη OR 2-εισόδων με τη βοήθεια μιας πύλης AND 2-εισόδων και τριών πυλών NOT.
14. Κατασκευάστε πύλη AND 2-εισόδων με τη βοήθεια μιας πύλης OR 2-εισόδων και τριών πυλών NOT.
15. Χρησιμοποιείστε τα αποτελέσματα των ασκήσεων 11 και 13, εξηγείστε πως αντικαθιστούμε οποιοδήποτε κύκλωμα με ένα ισοδύναμο κύκλωμα που αποτελείται μόνο από πύλες NOT και πύλες AND 2-εισόδων.
16. Χρησιμοποιείστε τα αποτελέσματα των ασκήσεων 12 και 14, εξηγείστε πως αντικαθιστούμε οποιοδήποτε κύκλωμα με ένα ισοδύναμο κύκλωμα που αποτελείται μόνο από πύλες NOT και πύλες OR 2-εισόδων.
17. Εξηγείστε πως αντικαθιστούμε οποιοδήποτε κύκλωμα