# ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΔΕΥΤΕΡΟ

* 1. Συνδυαστική (ή Συμπλεκτική Ανάλυση)

Σε πολλές περιπτώσεις , η απαρίθμηση των στοιχείων ενός συνόλου είναι χρονοβόρα και επίπονη εργασία. Αυτό οφείλεται στην ειδική μορφή που έχουν τα στοιχεία που συνθέτουν τέτοια σύνολα. τέτοιες δυσκολίες απαρίθμησης αποτέλεσαν πρόκληση για τα μαθηματικά, που σύντομα ανάπτυξαν μεθόδους υπολογισμού του πληθυκού αριθμού τέτοιων συνόλων.

Η Συμπλεκτική ή Συνδυαστική Ανάλυση (Σ.Α.) περιλαμβάνει τις ταξινομημένες αυτές μεθόδους . Έτσι, η Σ.Α. μπορεί να θεωρηθεί ως ένα σύνολο αποτελεσματικών μεθόδων τεχνικών απαρίθμησης.

Ορισμός

Μια συλλογή στοιχείων, που σχηματίστηκε με ένα συγκεκριμένο τρόπο, καλείται σύμπλεγμα.

Η Σ.Α.[[1]](#footnote-2) είναι η περιοχή των μαθηματικών που ασχολείται με την ανάπτυξη τεχνικών απαρίθμησης συμπλεγμάτων. Για το λόγο αυτό, συχνά αναφέρεται και ως Συμπλεκτική Ανάλυση. Συμπλέγματα είναι οικογένειες συνόλων (συνήθως πεπερασμένες) με συγκεκριμένες χαρακτηριστικές δομές στα στοιχεία ή τα υποσύνολά τους. Οι μέθοδοι της Σ.Α. επιτρέπουν την ταχεία απαρίθμηση των στοιχείων τέτοιων συμπλεγμάτων. Ο όρος απαρίθμηση των στοιχείων ενός συμπλέγματος, που χρησιμοποιούμαι στο παρόν κείμενο, αναφέρεται σε αρκετές βασικές δομές συμπλεγμάτων, όπως εκείνη της απαρίθμησης όλων των δυνατών συνδυασμών  στοιχείων ενός πεπερασμένου συνόλου που αποτελείται από μεγαλύτερο πλήθος στοιχείων από το . Συνεπώς, είναι δύσκολο να αναφέρουμε σ’ αυτή τη σελίδα όλα τα θέματα που μπορεί να αντιμετωπίσει κάποιος στην πρώτη του προσέγγιση στη συνδυαστική ανάλυση. Επίσης, επειδή το θέμα είναι εξαιρετικά χρήσιμο, η Συνδυαστική Ανάλυση αποτελεί προαπαιτούμενη γνώση για την κατανόηση της Στοιχειώδους Θεωρίας Πιθανοτήτων, της Στοιχειώδους Θεωρίας Αριθμών και της Θεωρίας Γραφημάτων. Για τη Θεωρία Πιθανοτήτων η χρησιμότητα της Συνδυαστικής Αναλύσεως εντοπίζεται κυρίως στην απαρίθμηση των στοιχείων των πεπερασμένων δειγματικών χώρων.

Στη Συνδυαστική Ανάλυση περιλαμβάνονται και πλέον πολύπλοκες μέθοδοι αρίθμησης συνόλων. Για παράδειγμα, οι δείκτες ακολουθιών συνόλων συχνά απεικονίζονται σε σειρές δυνάμεων που μορφοποιούν έτσι τις γεννήτριες συναρτήσεις, οι οποίες μπορούν μετά να αναλυθούν χρησιμοποιώντας τεχνικές της Μαθηματικής Ανάλυσης. (Αφού πολλές μέθοδοι απαρίθμησης περιλαμβάνουν διωνυμικούς συντελεστές, δεν εκπλήσσεται κανείς από την εμφάνιση της υπεργεωμετρικής συνάρτησης). Σε μερικές περιπτώσεις η αρίθμηση είναι ασυμπτωτική (για παράδειγμα, οι εκτιμήσεις για το πλήθος των διαμερισμών ενός ακεραίου). Σε αρκετές περιπτώσεις η αρίθμηση μπορεί να γίνει με έναν καθαρά συνθετικό τρόπο, χρησιμοποιώντας «στοιχειώδη λογισμό». Συνδυαστικές μέθοδοι για τον προσδιορισμό των συντελεστών χρησιμοποιούνται για τον προσδιορισμό ταυτοτήτων μεταξύ συναρτήσεων, ειδικά μεταξύ απείρων αθροισμάτων ή γινομένων όπως οι γνωστές ταυτότητες Ramanujan.

Μια περιοχή της Συνδυαστικής Ανάλυσης, που δεν εντάσσεται όμως στην περιοχή των τεχνικών απαρίθμησης, είναι η μελέτη των μορφών σχεδίασης, δηλαδή συνόλων και των υποσυνόλων τους διατεταγμένων σε πολύ συμμετρικές ή ασύμμετρες μορφές. Από αυτές, ίσως τα πιο γνωστά είναι τα Λατινικά τετράγωνα (διατάξεις στοιχείων σε ορθογώνιο πίνακα χωρίς επαναλήψεις σε σειρές ή στήλες). Επίσης γνωστό είναι το επίπεδο Fano (επτά σημεία που ανήκουν σε επτά «ευθείες», κάθε μία με τρία σημεία), που υποδεικνύουν τη σχέση με πεπερασμένες γεωμετρίες. (Με κατάλληλη αξιωματική θεμελίωση, αυτά τείνουν να έχουν τη μορφή γεωμετριών υπέρ πεπερασμένων πεδίων, αν και τα πεπερασμένα επίπεδα είναι πιο ευέλικτα.) Τα μιτροειδή (matroids) μπορούν να εξεταστούν ως γενικευμένες γεωμετρίες και γι’ αυτό συμπεριλαμβάνονται επίσης στη Συνδυαστική Ανάλυση. Ας σημειωθεί ότι τα γραφήματα είναι μορφές αποτελούμενες από σύνολο σημείων και σύνολο ακμών που συνδέουν ζεύγη σημείων, και σε ό,τι αφορά τη Συνδυαστική Ανάλυση συμπεριλαμβάνονται μόνο τα κανονικά γραφήματα, όπως τα πλήρη, τα γραφήματα Kuratovsky κ.ά.).

Αν μια διαδικασία μπορεί να χωριστεί σε δυο διακριτές φάσεις έτσι ώστε, η πρώτη φάση να είναι εφικτή με  τρόπους ενώ η δεύτερη φάση να πραγματοποιείται με  τρόπους, τότε η διαδικασία αυτή μπορεί να πραγματοποιηθεί με  τρόπους.

* 1. Διατάξεις

**Ορισμός:** Κάθε σύμπλεγμα μ στοιχείων που παίρνουμε από ένα σύνολο ν (διαφόρων μεταξύ τους) στοιχείων και τα οποία (κατά συνέπεια) διαφέρουν μεταξύ τους ως προς τη φύση και ως προς τη θέση θα καλείται απλή διάταξη.

* 1. .
1. Παράδειγμα 1.4

Προκειμένου να συγκροτηθεί μια τριμελής επιτροπή με συμμετοχή ενός Ηλεκτρολόγου Μηχανικού, ενός Συγκοινωνιολόγου και ενός Στατιστικού, διατίθενται  Ηλεκτρολόγοι,  Συγκοινωνιολόγοι και  Στατιστικοί. Η επιτροπή μπορεί να συσταθεί με  τρόπους, γατί σε κάθε  Συγκοινωνιολόγο αντιστοιχούν  Στατιστικοί , ενώ σε κάθε ζεύγος συγκοινωνιολόγων-στατιστικών αντιστοιχούν  Ηλεκτρολόγοι Μηχανικοί. Οι συνθέσεις των επιτροπών αυτών απεικονίζονται και με το ακόλουθο δένδρο (Σχήμα 1.1), όπου η κάθε γενιά αντιστοιχεί σε μια επαγγελματική ειδικότητα.



**Σχήμα 1.1**

1.4 Μεταθέσεις στοιχείων διαφορετικών ειδών
σε αντίστοιχες ομάδες

Ας θεωρήσουμε  στοιχεία τα οποία ανήκουν σε  διαφορετικά είδη με  στοιχεία αντίστοιχα, όπου . Το πρόβλημα της εύρεσης του αριθμού των διατάξεων των  αυτών στοιχείων λαμβανομένων ανά , μελετάται πιο εύκολα με τη βοήθεια των γεννητριών συναρτήσεων. Για την ειδική περίπτωση όπου , έχουμε το παρακάτω θεώρημα.

🟑 Θεώρημα 1.1

O αριθμός των μεταθέσεων  στοιχείων, τα οποία ανήκουν σε  διαφορετικά είδη με , είναι ίσος με .

**Απόδειξη**

Έστω  ο ζητούμενος αριθμός των μεταθέσεων. Αν τα  ταυτόσημα στοιχεία ήταν όλα διαφορετικά, τότε ο αριθμός των μεταθέσεων θα ήταν , διότι από κάθε παλιά μετάθεση θα προέκυπταν  μεταθέσεις οι οποίες αντιστοιχούν στις μεταθέσεις των  διακεκριμένων στοιχείων. Αν υποθέσουμε ότι και τα  ταυτόσημα στοιχεία του δεύτερου είδους ήταν διακεκριμένα, τότε με τον ίδιο παραπάνω συλλογισμό προκύπτει ότι ο αριθμός των μεταθέσεων θα ήταν ίσος με . Επαναλαμβάνοντας την παραπάνω διαδικασία μέχρις ότου θεωρήσουμε ως διακεκριμένα όλα τα  στοιχεία, θα μας δώσει  διαφορετικές μεταθέσεις και επειδή ο αριθμός αυτός των μεταθέσεων  διακεκριμένων στοιχείων είναι ίσος με  συνεπάγεται το συμπέρασμα του θεωρήματος.

1. Παράδειγμα 1.5

Kατά πόσους διαφορετικούς τρόπους  νεοσύλλεκτοι μπορούν να τοποθετηθούν σε  διαφορετικά σώματα στρατού,  σε κάθε σώμα;

Έχουμε  και  και άρα υπάρχουν  διαφορετικοί τρόποι.

1.5 Aπλές μεταθέσεις

Είναι το σύνολο των συμπλεγμάτων που μπορεί να προκύψουν από τις εναλλαγές των θέσεων  διακεκριμένων στοιχείων. Οι μεταθέσεις αναφέρονται σε συμπλέγματα όπου έχει σημασία η σειρά τοποθέτησης των  αυτών σημείων και τα στοιχεία αυτά δεν επαναλαμβάνονται μέσα στο σύμπλεγμα. Οι μεταθέσεις  στοιχείων δίνονται από τη σχέση .

1. Παράδειγμα 1.6

Το σύνολο των δεκαψήφιων αριθμών του δεκαδικού συστήματος αρίθμησης, στους οποίους κάθε ψηφίο, όταν χρησιμοποιηθεί, δεν επαναλαμβάνεται, είναι οι μεταθέσεις των  ψηφίων του συστήματος. Είναι δηλαδή . Ο αριθμός αυτός είναι πολύ μικρότερος από τον  των δεκαψήφιων αριθμών.

1.6 Κυκλικές μεταθέσεις

Θεωρούμε ένα πεπερασμένο σύνολο  αντικειμένων, τα οποία διακρίνονται μεταξύ τους λόγω κάποιας χαρακτηριστικής ιδιότητας, όπως π.χ. χρώμα, μέγεθος, αύξων αριθμός κ.τ.λ. Σχηματίζουμε μια συλλογή  αντικειμένων, , επιλέγοντας  από τα αντικείμενα που δόθηκαν.

Αν σε αυτή τη συλλογή συμμετέχουν όλα τα αντικείμενα και επιπλέον αν μας ενδιαφέρει και η σειρά με την οποία τα αντικείμενα είναι τοποθετημένα, τότε η συλλογή αυτή ονομάζεται μετάθεση. Αν τώρα τα αντικείμενα είναι τοποθετημένα σε κύκλο, τότε κάθε διαφορετική τοποθέτηση των στοιχείων στον κύκλο είναι μια κυκλική μετάθεση. Όταν το σύμπλεγμα έχει κυκλική δομή, δεν παρατηρείται αρχή και τέλος, σε αντίθεση με τα γραμμικά συμπλέγματα. Στην περίπτωση αυτή, το πλήθος των συμπλεγμάτων συμβολίζεται  και είναι .

Για να οδηγηθούμε σ’ αυτόν τον τύπο υπολογισμού, εργαζόμαστε ως εξής:

Θα βρούμε πρώτα τον τύπο που μας δίνει το πλήθος μιας διάταξης των  πραγμάτων ανά , έπειτα θα αναγάγουμε αυτό τον τύπο για μια μετάθεση των  πραγμάτων και τον τελευταίο θα τον χρησιμοποιήσουμε για να αποδείξουμε τον επιθυμητό τύπο. Έχοντας επιλέξει το πρώτο στοιχείο, το δεύτερο έχει  δυνατότητες. Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο, στην τρίτη φάση έχουμε  δυνατότητες, ενώ στην -στη έχουμε  δυνατότητες. Άρα το πλήθος όλων των δυνατών περιπτώσεων είναι



Εάν στον παραπάνω τύπο θέσουμε , προκύπτει ο τύπος που δίνει το πλήθος των δυνατών μεταθέσεων και ο οποίος είναι



Σε κάθε κυκλική μετάθεση, π.χ. των αντικειμένων ,αντιστοιχούν  το πλήθος απλές μεταθέσεις, όπως προκύπτει και από το παρακάτω σχήμα. Αυτές είναι οι εξής:



Επομένως το πλήθος όλων των δυνατών κυκλικών μεταθέσεων  αντικειμένων, έστω , θα είναι



1. Παράδειγμα 1.7

Έχουμε  αντρόγυνα που κάθονται σε κυκλικό τραπέζι. Να βρεθεί η πιθανότητα σε  συγκεκριμένα από αυτά οι σύζυγοι να κάθονται ο ένας δίπλα στον άλλο.

Όλοι οι δυνατοί τρόποι τοποθέτησης  ατόμων γύρω από ένα τραπέζι είναι , επειδή έχουμε κυκλικές μεταθέσεις. Άρα



Οι ευνοϊκοί τρόποι έτσι ώστε τα  ανδρόγυνα να είναι μαζί, βρίσκονται ως εξής. Θεωρούμε τα  ανδρόγυνα που είναι μαζί, με τα  άτομα των υπόλοιπων ανδρόγυνων σαν  αντικείμενα που τοποθετούνται σε κύκλο με  τρόπους. Σε κάθε τέτοια τοποθέτηση, όμως, τα άτομα των  ανδρόγυνων μπορούν να αντιμετατίθενται μεταξύ τους με  τρόπους. Άρα



Τελικά, σύμφωνα με τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας, η πιθανότητα που ψάχνουμε θα είναι





Ο σχηματισμός μιας διάταξης των  αντικειμένων ανά  μπορεί να γίνει σε  διαδοχικές φάσεις. Στην πρώτη επιλέγουμε το πρώτο στοιχείο της διάταξης με  τρόπους, αφού όλα τα στοιχεία είναι δυνατό να επιλεγούν. Στη δεύτερη φάση επιλέγουμε το δεύτερο στοιχείο.

1. Παράδειγμα 1.8

Αν θεωρήσουμε τις μεταθέσεις των  ωρών επί του δίσκου του ωρολογίου, οι μεταθέσεις  και  δεν διαφέρουν μεταξύ τους, επειδή ακριβώς είναι τοποθετημένες σε κύκλο. Υπάρχουν λοιπόν  τέτοιες «αναγνώσεις» του ωρολογίου, όπως ακριβώς υπάρχουν  «αναγνώσεις» της μετάθεσης  ή της μετάθεσης 2,1,3, .

1.7 Διατάξεις[[2]](#footnote-3)

Είναι το σύνολο των συμπλεγμάτων που μπορεί να προκύψουν από τις εναλλαγές των θέσεων ενός υποσυνόλου  διακεκριμένων στοιχείων που ανήκουν σε ένα υπερσύνολο  διακεκριμένων στοιχείων. Εδώ δεν ενδιαφέρουν οι θέσεις των  στοιχείων του υπερσυνόλου. Οι διατάξεις[[3]](#footnote-4) των  στοιχείων από το δεδομένο σύνολο  στοιχείων, δίνονται με τη σχέση . Οι διατάξεις των  από τα  στοιχεία αναφέρονται σε συμπλέγματα όπου έχει σημασία η σειρά τοποθέτησης των  αυτών σημείων και τα στοιχεία αυτά δεν επαναλαμβάνονται μέσα στο σύμπλεγμα.

🔿 Ορισμός 1.2

Κάθε σύμπλεγμα  στοιχείων που λαμβάνονται από ένα σύνολο  (διαφόρων μεταξύ τους ) στοιχείων και τα οποία (κατά συνέπεια) διαφέρουν μεταξύ τους ως προς τη φύση και ως προς τη θέση, θα λέγεται απλή διάταξη.

1. Παράδειγμα 1.9

Οι διατάξεις των  γραμμάτων  ανά  είναι οι ακόλουθες:



Επειδή υπάρχουν  τρόποι εκλογής του πρώτου γράμματος και  τρόποι εκλογής του δεύτερου, προκύπτει σύμφωνα με την πολλαπλασιαστική αρχή ότι υπάρχουν  διατάξεις των  γραμμάτων ανά . Με την απαρίθμησή τους μπορεί εύκολα αυτό να επαληθευθεί.

Δύο διατάξεις θεωρούνται διάφοροι, όταν δεν αποτελούνται από τα ίδια στοιχεία ή (στην περίπτωση που αποτελούνται από τα ίδια στοιχεία) διαφέρουν ως προς την κατάταξή τους. Ισοδύναμα δίνεται ο ακόλουθος

🔿 Ορισμός 1.3

Έστω σύνολο  με  στοιχεία. Ονομάζουμε απλή διάταξη κάθε διατεταγμένη -άδα  (μη επαναλαμβανόμενων) στοιχείων του .

🟑 Θεώρημα 1.2

O αριθμός των διατάξεων  διακεκριμένων στοιχείων, λαμβανομένων ανά , συμβολιζόμενος με  ή , δίνεται από τη σχέση



**Απόδειξη**

To πρώτο στοιχείο μιας διάταξης στοιχείων που επιλέγεται από σύνολο στοιχείων, μπορεί να επιλεγεί με τρόπους. Όταν επιλεγεί το πρώτο στοιχείο, το δεύτερο μπορεί να επιλεγεί από τα υπόλοιπα  στοιχεία κατά  τρόπους. Το τρίτο στοιχείο μπορεί να επιλεγεί κατά  τρόπους και τελικά το  στοιχείο μπορεί να επιλεγεί κατά  τρόπους. Η εφαρμογή της πολλαπλασιαστικής αρχής δίνει τότε την προηγούμενη σχέση του .

🟓 Πόρισμα 1.1

O αριθμός των μεταθέσεων  διακεκριμένων στοιχείων είναι ίσος με



🟑 Θεώρημα 1.3

Για τον αριθμό  των διατάξεων  διακεκριμένων στοιχείων λαμβανομένων ανά , ισχύει η αναγωγική σχέση



**Απόδειξη**

Παρατηρούμε ότι κάθε μια από τις  διατάξεις των  διακεκριμένων στοιχείων λαμβανομένων ανά , είτε θα περιλαμβάνει ένα συγκεκριμένο στοιχείο, έστω το , είτε δεν θα το περιλαμβάνει. Ο αριθμός των διατάξεων  των  ανά  θα είναι ίσος με το άθροισμα του αριθμού  των διατάξεων των  ανά  που περιλαμβάνουν το  και του αριθμού  των διατάξεων των  ανά  που δεν περιλαμβάνουν το .

Η αναγωγική αυτή σχέση μπορεί να ελεγχθεί και αναλυτικά με τη βοήθεια του προηγούμενου θεωρήματος:



Παράδειγμα 1.10

Στο δεκαεξαδικό σύστημα χρησιμοποιούνται, εκτός από τα ψηφία του δεκαδικού συστήματος, και τα γράμματα , , , ,  και . Σε έναν αριθμό με  ψηφία, στον οποίο όμως τα ψηφία καταλαμβάνουν τη θέση τους χωρίς τη δυνατότητα επανατοποθέτησης, οι δυνατές τοποθετήσεις των  αλφαβητικών ψηφίων είναι  .

1.8 Επαναληπτικές διατάξεις

Ας θεωρήσουμε  διαφορετικά είδη με απεριόριστο αριθμό στοιχείων από κάθε είδος. Οι διατάξεις που σχηματίζονται από τα στοιχεία αυτά, καλούνται επαναληπτικές διατάξεις, γιατί κάθε στοιχείο μπορεί να εμφανίζεται σε μια διάταξη απεριόριστο αριθμό φορών. Έτσι, λέμε ότι Επαναληπτικές Διατάξεις είναι το σύνολο των συμπλεγμάτων που μπορεί να προκύψουν από τη χρήση  -διακεκριμένων προς άλληλα στοιχείων- σε συμπλέγματα  στοιχείων. Η χρήση κάθε στοιχείου μπορεί να επαναληφθεί μέχρι και  φορές και για το λόγο αυτό αναφερόμαστε σε επαναληπτική διαδικασία. Ο αριθμός των επαναληπτικών διατάξεων  από  στοιχεία ενός συνόλου προσδιορίζεται με τη σχέση .

🟑 Θεώρημα 1.4

Ο αριθμός των διατάξεων  διακεκριμένων στοιχείων λαμβανομένων ανά , αν κάθε στοιχείο μπορεί να επαναλαμβάνεται απεριόριστο αριθμό φορών, είναι .

**Απόδειξη**

Κάθε ένα από τα στοιχεία μιας διάταξης μπορεί να επιλεγεί κατά  διαφορετικούς τρόπους και επομένως, σύμφωνα με την πολλαπλασιαστική αρχή, το πλήθος των διατάξεων αυτών είναι .

1. Παράδειγμα 1.11

Κατά τη ρίψη νομίσματος  φορές υπάρχουν  συνολικά διαφορετικά αποτελέσματα. Πραγματικά, εδώ , δηλαδή ,  και  και τα δυνατά αποτελέσματα είναι



Παράδειγμα 1.12

Οι πινακίδες κυκλοφορίας που μπορεί να δοθούν από το Υπουργείο Συγκοινωνιών, χρησιμοποιούν τα  γράμματα που είναι κοινά στο ελληνικό και λατινικό αλφάβητο. Δεδομένου ότι σε κάθε πινακίδα χρησιμοποιούνται  γράμματα, το σύνολο των πινακίδων αυτών έχει  στοιχεία. Αν τώρα σκεφτεί κανείς ότι στις ίδιες πινακίδες χρησιμοποιούνται και τα ψηφία του δεκαδικού συστήματος για να καταλάβουν  άλλες θέσεις, ο αριθμός των επαναληπτικών διατάξεων για τη δημιουργία τετραψήφιων αριθμών ανέρχεται σε . Συνολικά, και επειδή σε κάθε μία διάταξη των  αλφαβητικών χαρακτήρων αντιστοιχεί το σύνολο των διατάξεων των αριθμών που προαναφέρθηκαν, το σύνολο των πινακίδων αυτοκινήτων στην Ελλάδα μπορεί να ανέλθει με το παρόν σύστημα αριθμοδότησης σε , όταν ο πληθυσμός είναι  εκατομμύρια μόνο.

1.9 Συνδυασμοί

Είναι το σύνολο των συμπλεγμάτων που μπορεί να προκύψουν από τις εναλλαγές των θέσεων ενός υποσυνόλου  διακεκριμένων στοιχείων που ανήκουν σε ένα υπερσύνολο  διακεκριμένων στοιχείων. Εδώ δεν ενδιαφέρουν οι θέσεις των  στοιχείων του υπερσυνόλου, αλλά ενδιαφέρει η θέση των  στοιχείων του υπό θεώρηση υποσυνόλου. Αυτό σημαίνει ότι συμπλέγματα συγκεκριμένου πλήθους  στοιχείων του υπερσυνόλου, που διαφέρουν ως προς τη θέση τους στο σύμπλεγμα, καταμετρούνται ως διαφορετικά στοιχεία του συνόλου των συμπλεγμάτων. Οι συνδυασμοί των  στοιχείων από το δεδομένο σύνολο  στοιχείων δίνονται με τη σχέση



Οι διατάξεις των  από τα  στοιχεία αναφέρονται σε συμπλέγματα όπου έχει σημασία η σειρά τοποθέτησης των  αυτών σημείων και τα στοιχεία αυτά δεν επαναλαμβάνονται μέσα στο σύμπλεγμα.

Παράδειγμα 1.13

Αν στις πινακίδες κυκλοφορίας που μπορεί να δοθούν από το Υπουργείο Συγκοινωνιών, χρησιμοποιηθούν τα  γράμματα που είναι κοινά στο ελληνικό και λατινικό αλφάβητο, αλλά χωρίς επανάληψη, και δεδομένου ότι σε κάθε πινακίδα χρησιμοποιούνται  γράμματα, το σύνολο των πινακίδων αυτών έχει  συνδυασμούς γραμμάτων. (Στην πραγματικότητα αυτό δεν συμβαίνει και σε πολλές περιπτώσεις παρατηρούμε πινακίδες με επανάληψη γραμμάτων, όπως ΝΒΝ κ.λ.π.).

Παράδειγμα 1.14

Πέντε διακεκριμένα σημεία επί της περιφερείας ενός κύκλου ορίζουν



τρίγωνα.



**Σχήμα 1.2** Το Διώνυμο του Newton

Επειδή



είναι προφανές ότι κάθε όρος του αναπτύγματος σε άθροισμα έχει  παράγοντες. Διακρίνουμε:

•  όρο με  παράγοντες, που είναι όλοι τους 

•  όρους με  παράγοντες, όπου  εξ αυτών είναι  και ένας μόνο είναι 

• περισσότερους όρους με  παράγοντες  και  παράγοντες 

• …

•  όρο με  παράγοντες, που είναι όλοι τους 

Παρατηρούμε ότι οι όροι των  παραγόντων με   και   έχουν τα  και τα  σε διάφορες θέσεις. Οι δυνατοί συνδυασμοί των   από  συνολικά παράγοντες, απαριθμούν το σύνολο των όρων που έχουν  ακριβώς  και τα υπόλοιπα  είναι  στη θέση των παραγόντων αυτών των όρων.

Γράφουμε λοιπόν ότι



Παρατηρούμε τη συμμετρία των διωνυμικών συντελεστών ως προς τον κεντρικό ή τους δύο κεντρικούς όρους (όταν  άρτιο ή περιττό αντιστοίχως).

**1.10 Επαναληπτικοί Συνδυασμοί.**

Συνδυασμός με επαναλήψεις, μεγέθους m από ένα σύνολο S n στοιχείων, ορίζεται από μία αλληλουχία m στοιχείων του S, που δεν είναι απαραίτητα διακριτά μεταξύ τους. Επειδή δεν λαμβάνεται υπόψη η σειρά επιλογής των στοιχείων, δύο αλληλουχίες που διαφέρουν μόνο ως προς τη σειρά επιλογής των στοιχείων είναι αντιπρόσωποι του ίδιου συμπλέγματος.

Έτσι, για τον υπολογισμό του αριθμού των m συμπλεγμάτων στα οποία κατανέμονται τα n στοιχεία του S δεν λαμβάνονται υπόψη διαφορετικές διατάξεις εναπόθεσης σε των στοιχείων σε κάθε σύμπλεγμα αλλά λαμβάνονται υπόψη η διάταξη των συμπλεγμάτων ως προς το πλήθος των στοιχείων που τοποθετούνται σε κάθε ένα από αυτά (π.χ. Αν το S περιέχει 5 στοιχεία που θα κατανεμηθούν σε τρία αποθετήρια, οι αποθέσεις {2,1,2} και {1,2,2}) εκλαμβάνονται ως διαφορετικές κατανομές.

Οι Επαναληπτικοί Συνδυασμοί των m στοιχείων του S σε n συμπληρωματικά υποσύνολα αυτού συμβολίζονται με

$$\left(\left(\begin{matrix}n\\m\end{matrix}\right)\right)$$

και υπολογίζεται με τη βοήθεια των συνδυασμών των m+n-1 ανά n

$$\left(\left(\begin{matrix}n\\m\end{matrix}\right)\right)=\left(\begin{matrix}m+n-1\\n\end{matrix}\right)$$

Είναι προφανές ότι ισχύει

$\left(\begin{matrix}m+n-1\\n\end{matrix}\right)=\left(\begin{matrix}m+n-1\\m-1\end{matrix}\right)$.

Παράδειγμα 1.14

Δεκαέξι όμοιες σφαίρες τοποθετούνται σε εννέα κάλπες. Να υπολογιστούν οι τρόποι με τους οποίους μπορεί να κατανεμηθούν οι σφαίρες στις κάλπες.

Οι κάλπες είναι διακριτές και αριθμούνται από 1 έως 9. Έτσι, στην 16 σφαίρες μπορεί να τοποθετηθούν στην 1η κάλπη, ενώ οι λοιπές θα μείνουν κενές. Το ίδιο μπορεί να συμβεί αν οι 16 σφαίρες τοποθετηθούν δε μια από τις λοιπές. Αν εξακολουθήσουμε αυτού του τύπου την ανάλυση θα βρούμε ότι 15 σφαίρες μπορεί να τοποθετηθούν σε μία κάλπη ενώ η εναπομείνασα μπορεί να τοποθετηθεί σε μία από τις λοιπές 8. Συνολικά αυτές δίνουν 9Χ8 περιπτώσεις. Πρόκειται λοιπόν για την ανάπτυξη συμπλεγμάτων που είναι συνδυασμοί με επανάληψη.

Ο υπολογισμός θα γίνει με χρήση της σχέσης

$$\left(\begin{matrix}16+9-1\\9\end{matrix}\right)=\left(\begin{matrix}24\\9\end{matrix}\right)=1.307.504$$

🔿 Ορισμός 1.4

**Προσέγγιση του *n*! κατά Stirling**

Μία βοηθητική και ευρέως εφαρμοζόμενη προσεγγιστική σχέση για τον υπολογισμό του παραγοντικού «μεγάλων αριθμών» είναι η προσέγγιση του Stirling:



Μία ελαφρώς πιο ακριβής προσέγγιση είναι η ακόλουθη:



αλλά στις περισσότερες των περιπτώσεων η διαφορά είναι μικρή. Αυτός ο επιπρόσθετος όρος μπορεί να συντελέσει στην αποτίμηση στο αν η προσέγγιση παρουσιάζει μεγάλο σφάλμα.

Η προσέγγιση του Stirling είναι επίσης χρήσιμη στον προσεγγιστικό υπολογισμό του λογαρίθμου () του παραγοντικού ενός αριθμού, που βρίσκει εφαρμογή στον υπολογισμό της εντροπίας σχετικά με τη θεωρία της πολυπλοκότητας. Ο λογάριθμος του παραγοντικού ενός αριθμού  ισούται με



αλλά ο τελευταίος όρος μπορεί, και συνήθως παραλείπεται, ώστε μια λειτουργική προσέγγιση να είναι η εξής:



Θυμίζουμε ότι . Ενώ ο Stirling παρουσίασε την εξής υπέροχη σχέση:



Αυτή η σχέση παρουσιάζει σφάλμα περίπου  για το , και  για το  -και ολοένα και καλύτερες προσεγγίσεις για το , καθώς ο αριθμός  όλο και μεγαλώνει. Στην πραγματικότητα, το κλασματικό λάθος πλησιάζει αρκετά την ποσότητα : αν η σχέση του Stirling πολλαπλασιασθεί με , προκύπτει μια νέα βελτιωμένη και ταχύτερη σχέση (με σφάλμα ανάλογο του ).

Σημειώνεται εδώ ότι , επειδή ισχύει ότι , οπότε (*N*–1)!= , επομένως συνεπάγεται ότι . (Για παράδειγμα: , , , άρα =1). Αν εφαρμόσουμε τη σχέση σε αρνητικούς ακέραιους, παρατηρούμε ότι , , .

Δηλαδή,  είναι άπειρο, όταν ο αριθμός  είναι αρνητικός ακέραιος. Το γεγονός αυτό δείχνει ότι η σχέση για τον αριθμό  (όπου ) έχει μηδενική ακτίνα σύγκλισης, ακριβώς όπως οι σειρές της ποσότητας , ιδιότητα που οφείλεται στα παραπάνω άπειρα μεγέθη. Μια μη μηδενική ακτίνα σύγκλισης του  θα έπρεπε να περιλαμβάνει μερικές αρνητικές τιμές οι οποίες βρίσκονται κοντά στο μηδέν -που συνεπάγεται και μεγάλους αρνητικούς ακέραιους αριθμούς. Από τότε που αυτή η συνάρτηση με το παραγοντικό  (γνωστή και ως Gamma συνάρτηση) έχει ως αποτέλεσμα το άπειρο για όλους τους αρνητικούς ακέραιους αριθμούς, δεν είναι δυνατό να περιγραφεί από συγκλίνουσες σειρές. Δεν μπορεί να συγκλίνει για , διότι δεν πρέπει να συγκλίνει για .

Παράδειγμα 1.15

Υπολογίστε το .

Για μεγάλο  ισχύει , άρα .

Χρησιμοποιώντας δεκαδικούς λογάριθμους, βρίσκουμε



οπότε προκύπτει ότι 

1. Combinatorics [↑](#footnote-ref-2)
2. Στην ελληνική βιβλιογραφία επικρατεί ο συμβολισμός . [↑](#footnote-ref-3)
3. Permutations [↑](#footnote-ref-4)