1.7 Διατάξεις[1]

Είναι το σύνολο των συμπλεγμάτων που μπορεί να προκύψουν όταν επιλέγονται υποσύνολα που περιέχουν κ διακεκριμένα στοιχεία από ένα υπερσύνολο ν διακεκριμένων στοιχείων. Εδώ δεν ενδιαφέρουν οι θέσεις των $\nu-\kappa$ των εναπομενόντων στοιχείων του υπερσυνόλου. Οι διατάξεις[2] των κ στοιχείων από το δεδομένο σύνολο ν στοιχείων, δίνονται με τη σχέση $P(\nu,\kappa)=\nu!(\nu-\kappa)!$. Οι διατάξεις των κ από τα ν στοιχεία αναφέρονται σε συμπλέγματα όπου έχει σημασία η σειρά τοποθέτησης των ν αυτών σημείων και τα στοιχεία αυτά δεν επαναλαμβάνονται μέσα στο σύμπλεγμα.

❍ Ορισμός 1.2

Διάταξη ν στοιχείων ανά κ καλείται μια διατεταγμένη συλλογή ή παράθεση κ στοιχείων από τα ν. Η ειδική περίπτωση διατάξεως και των ν στοιχείων (κ = ν) καλείται μετάθεση αυτών.

Έτσι, κάθε σύμπλεγμα κ στοιχείων που λαμβάνονται από ένα σύνολο ν (διαφόρων μεταξύ τους $\kappa \leq \nu$) στοιχείων και τα οποία (κατά συνέπεια) διαφέρουν μεταξύ τους ως προς τη φύση και ως προς τη θέση, θα λέγεται απλή διάταξη.

Μια πιο θεωρητική προσέγγιση στην έννοια τη διάταξης κάνει σρήση της γνωστής έννοιας του διατεταγμένου ζεύγους (α, β) και γενικότερα της διατεταγμένης ν-άδας (α_1, $\alpha_2 \ldots \alpha_\nu$), που είναι ναγκαία για τον ορισμό του καρτεσιανού γινομένου συνόλων ορίζεται ως εξής : Ένα ζεύγος στοιχείων α και β (όχι κατά ανάγκη διαφορετικών) στο οποίο το α θεωρείται ως πρώτο και το β ως δεύτερο καλείται διατεταγμένο ζεύγος και σημειώνεται με (α, β). Η έννοια αυτή είναι απαραίτητη και για την εισαγωγή της έννοιας της διάταξης. Σχετικά θέτουμε τον επόμενο ορισμό.

❍ Ορισμός 1.3

Έστω $\Omega=\{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\nu\}$ πεπερασμένο σύνολο με ν στοιχεία.
Διάταξη των ν (στοιχείων) ανά κ καλείται μια διατεταγμένη κ-άδα (α_1, $\alpha_2 \ldots \alpha_\nu$) με α_r € Ω r = 1, 2, ... , κ .
Παρατηρούμε ότι τα στοιχεία (συνιστώσες) μιας διάταξης των ανά κ είναι είτε διαφορετικό στοιχεία του Ω είτε όχι κατ' ανάγκη διαφορετικά στοιχεία του Ω Για την πρώτη περίπτωση διατηρούμε την ονομασία διάταξη των ν ανά κ ενώ νια τη δεύτερη περίπτωση όπου στοιχεία του Ω επιτρέπεται να επαναλαμβάνονται στη διάταξη χρησιμοποιούμε την ονομασία διάταξη των ν ανά κ με επανάληψη.

Η ειδική περίπτωση διάταξης των ν ανά κ = ν (όλων των θεωρουμένων στοιχείων) καλείται ειδικότερα μετάθεση ν στοιχείων ενώ η ειδική περίπτωση διάταξης των ν ανά κ με επανάληψη στην οποία το στοιχείο ω_ι εμφανίζεται κ_ι φορές ι=1,2....,ν με $\kappa_1 + \kappa_2 + \ldots + \kappa_\nu = \kappa$ (όλων των θεωρούμενων στοιχείων, όχι κατ' ανάγκη διαφορετικών) καλείται ειδικότερα μετάθεση ν ειδών στοιχείων

[1] Στην ελληνική βιβλιογραφία επικρατεί ο συμβολισμός Δ_κ^ν .

[2] Permutations

Παράδειγμα 1.9

Οι διατάξεις των $\nu = 4$ γραμμάτων $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ανά $\kappa = 2$ είναι οι ακόλουθες:

(α,β) (α,γ) (α,δ), (β,α) (β,γ) (β ,δ) (γ ,α) (γ,β) (γ, δ) (δ, α) (δ ,β) (δ, γ)

Επειδή σε μια οποιαδήποτε διάταξη (α_1 ,α_2) των 4 γραμμάτων ανά 2 το πρώτο στοιχείο α_1 μπορεί να εκλεγεί από το σύνολο A_1= {α, β. γ, δ} των $N(A_1)$ =4 γραμμάτων ενώ το στοιχείο A_2 μπορεί να εκλεγεί από το σύνολο A_2= A_1- {α_1) των $N(A_2)$ =3 γραμμάτων (εξαιρουμένου του στοιχείου (γράμματος) που εκλέγεται για πρώτο στοιχείο). Επομένως σύμφωνα με την πολλαπλασιαστική αρχή ο αριθμός των διατάξεων των 4 ανά 2 είναι ίσος με 4*3 = 12. Με απαρίθμηση τούτων μπορεί εύκολα αυτό να επαληθευθεί.

Οι μεταθέσεις των ν=3 γραμμάτων {α ,β ,γ} είναι οι ακόλουθες

(α ,β ,γ) (α .γ .β) (γ ,α, β) (β, α, γ) (β, γ, α), (γ, β, α)

που σύμφωνα με την πολλαπλασιαστική αρχή είναι πλήθους 3·2· I = 6.

Παράδειγμα 1.10

Οι διατάξεις των ν = 4 γραμμάτων {α ,β ,γ ,δ} ανά κ = 2 με επανάληψη είναι οι ακόλουθες.

(α α) ,(α β), (α. γ), (α δ), (β α), (β β), (β γ), (β δ),
(γ, α) ,(γ, β), (γ, γ), (γ, δ), (δ, α), (δ, β), (δ, γ), (δ,α).

που σύμφωνα με την πολλαπλασιαστική αρχή είναι πλήθους 4.4 = 16

Παράδειγμα 1.11

(α) Οι διατάξεις των ν=3 γραμμάτων {α, β, γ} ανά κ=3 με περιορισμένη επανάληψη και συγκεκριμένα όταν το α μπορεί να εμφανίζεται μέχρι και κ_1=3 φορές, το β μόνο μέχρι κ_2=1 φορά και το γ μέχρι και κ_3= 2 φορές είναι οι εξής

(α ,α ,α), (α,α, β), (α ,α ,γ), (α ,β ,α), (α ,γ, α), (β ,α ,α), (γ, α, α)
(α, β, γ), (α ,γ ,β), (γ ,α ,β) (β, α, γ), (β ,γ, α), (γ, β, α)
(α, γ, γ), (β, γ, γ), (γ, α ,γ), (γ, β ,γ),(γ, γ, α), (γ, γ, β)

που είναι 19 το πλήθος

(β) Οι μεταθέσεις των ν = 3 ειδών στοιχείων όταν το α εμφανίζεται κ_1= 2 φορές, Το β κ_2 =1 φορά και το γ κ_3= 1 φορά είναι οι ακόλουθες

(α, α, β, γ), (α ,α ,γ ,β), (γ, α, α, β), (β, α, α ,γ), (β, γ, α, α), (γ, β, α, α)
(α, β, α, γ), (γ, α ,β ,α), (α, γ ,α ,β), (β ,α ,γ ,α), (α ,β ,γ, α), (α, γ, β, α)

που είναι 12 το πλήθος.
Σχετικά με το πλήθος των διατάξεων αποδεικνύουμε τα επόμενα θεωρήματα

Δύο διατάξεις θεωρούνται διάφοροι, όταν δεν αποτελούνται από τα ίδια στοιχεία ή (στην περίπτωση που αποτελούνται από τα ίδια στοιχεία) διαφέρουν ως προς την κατάταξή τους. Ισοδύναμα δίνεται ο ακόλουθος

❍ Ορισμός 1.3

Έστω σύνολο E με ν στοιχεία. Ονομάζουμε απλή διάταξη κάθε διατεταγμένη μ-άδα $(\mu \le \nu)$ (μη επαναλαμβανόμενων) στοιχείων του E.

❈ Θεώρημα 1.2

Ο αριθμός των διατάξεων ν διακεκριμένων στοιχείων, λαμβανομένων ανά κ, συμβολιζόμενος με $P(\nu,\kappa)$ ή $(\nu)_\kappa$, δίνεται από τη σχέση

$$P(\nu,\kappa)=\frac{\nu!}{(\nu-\kappa)!}=\nu(\nu-1)(\nu-2)...(\nu-\kappa+1)$$

Απόδειξη
Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι σε μια οποιαδήποτε διάταξη (α_1, α_2...α_κ) των ν στοιχείων του Ω=(ω_1, ω_2 ,…. ω_ν) ανά κ, το πρώτο στοιχείο α μπορεί να εκλεγεί από το σύνολο A_1 = Ω των Ν (A_1) = ν στοιχείων, ενώ μετά την εκλογή του πρώτου στοιχείου, το δεύτερο στοιχείο α επειδή πρέπει να είναι διαφορετικό από το Ω μπορεί να εκλεγεί από το σύνολο A_2 = Ω-{α_1}των Ν(A_2)= ν-1 υπολοίπων στοιχείων. Τελικά μετά την εκλογή των α_1, α_2…..$\alpha_{\kappa-1}$ το τελευταίο στοιχείο α επειδή πρέπει να είναι διαφορετικό από τα κ - 1 προηγούμενα στοιχεία μπορεί να εκλεγεί από το σύνολο A_κ=Ω-{ α_1, α_2 , ,.. .$\alpha_{\kappa-1}$} των Ν(A_κ) =ν- (κ-1)=ν-κ+1 στοιχείων. Επομένως Δ_κ (Ω)= A_1. A_2….A_κ · είναι το σύνολο των διατάξεων των ν ανά κ και σύμφωνα με την πολλαπλασιαστική αρχή ο αριθμός τούτων δίδεται από την

$P(\nu, \kappa) = N(\Delta_\kappa(\Omega)) = N(A1 \cdot A2 \ldots A_\kappa) = N(A_1)N(A_2)\cdot\cdot N(A_\kappa)$
$=\nu(\nu-1)\ldots..(\nu-\kappa+1)$

✹ Πόρισμα 1.1

Ο αριθμός των μεταθέσεων ν διακεκριμένων στοιχείων είναι ίσος με

$$P(\nu,\nu)=1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot(\nu-1)\cdot \nu=\nu!\,1)$$

❈ Θεώρημα 1.3

Για τον αριθμό $P(\nu,\kappa)$ των διατάξεων ν διακεκριμένων στοιχείων λαμβανομένων ανά κ, ισχύει η αναγωγική σχέση

$$P(\nu,\kappa)=\kappa P(\nu-1,\kappa-1)+P(\nu-1,\kappa)$$

Απόδειξη
Παρατηρούμε ότι κάθε μια από τις $P(\nu,\kappa)$ διατάξεις των ν διακεκριμένων στοιχείων λαμβανομένων ανά κ, είτε θα περιλαμβάνει ένα συγκεκριμένο στοιχείο, έστω το α_1, είτε δεν θα το περιλαμβάνει. Ο αριθμός των διατάξεων $P(\nu,\kappa)$ των ν ανά κ θα είναι

ίσος με το άθροισμα του αριθμού $\kappa P(\nu-1,\kappa-1)$ των διατάξεων των ν ανά κ που περιλαμβάνουν το α_1 και του αριθμού $P(\nu-1,\kappa)$ των διατάξεων των ν ανά κ που δεν περιλαμβάνουν το α_1.
Η αναγωγική αυτή σχέση μπορεί να ελεγχθεί και αναλυτικά με τη βοήθεια του προηγούμενου θεωρήματος:

$$\kappa P(\nu-1,\kappa-1)+P(\nu-1,\kappa)=\kappa(\nu-1)(\nu-2)...(\nu-\kappa+1)+(\nu-1)(\nu-2)...$$
$$(\nu-\kappa)=(\kappa+\nu-\kappa)(\nu-1)(\nu-2)...(\nu-\kappa+1)=P(\nu,\kappa)$$

Παράδειγμα 1.10

Στο δεκαεξαδικό σύστημα χρησιμοποιούνται, εκτός από τα ψηφία του δεκαδικού συστήματος, και τα γράμματα A, B, C, D, E και F. Σε έναν αριθμό με 16 ψηφία, στον οποίο όμως τα ψηφία καταλαμβάνουν τη θέση τους χωρίς τη δυνατότητα επανατοποθέτησης, οι δυνατές τοποθετήσεις των 6 αλφαβητικών ψηφίων είναι Δ_6^{16} = $16!/10!=5.765.760$.

1.8 Επαναληπτικές διατάξεις

Ας θεωρήσουμε ν διαφορετικά είδη με απεριόριστο αριθμό στοιχείων από κάθε είδος. Οι διατάξεις που σχηματίζονται από τα στοιχεία αυτά, καλούνται επαναληπτικές διατάξεις, γιατί κάθε στοιχείο μπορεί να εμφανίζεται σε μια διάταξη απεριόριστο αριθμό φορών. Έτσι, λέμε ότι Επαναληπτικές Διατάξεις είναι το σύνολο των συμπλεγμάτων που μπορεί να προκύψουν από τη χρήση κ -διακεκριμένων προς άλληλα στοιχείων- σε συμπλέγματα m στοιχείων. Η χρήση κάθε στοιχείου μπορεί να επαναληφθεί μέχρι και m φορές και για το λόγο αυτό αναφερόμαστε σε επαναληπτική διαδικασία. Ο αριθμός των επαναληπτικών διατάξεων κ από m στοιχεία ενός συνόλου προσδιορίζεται με τη σχέση $E_\kappa^m=m^\kappa$.

❋ Θεώρημα 1.4

Ο αριθμός των διατάξεων ν διακεκριμένων στοιχείων λαμβανομένων ανά κ, αν κάθε στοιχείο μπορεί να επαναλαμβάνεται απεριόριστο αριθμό φορών, είναι ν^κ.
Απόδειξη
Κάθε ένα από τα στοιχεία μιας διάταξης μπορεί να επιλεγεί κατά ν διαφορετικούς τρόπους και επομένως, σύμφωνα με την πολλαπλασιαστική αρχή, το πλήθος των διατάξεων αυτών είναι ν^κ.

Παράδειγμα 1.11

Κατά τη ρίψη νομίσματος 3 φορές υπάρχουν $2^3=8$ συνολικά διαφορετικά αποτελέσματα. Πραγματικά, εδώ $\nu=2$, δηλαδή K, Γ και $\kappa=3$ και τα δυνατά αποτελέσματα είναι

ΚΚΚ,ΓΚΚ,ΚΓΚ,ΚΚΓ,ΓΓΚ,ΓΚΓ,ΚΓΓ,ΓΓΓ

Παράδειγμα 1.12

Οι πινακίδες κυκλοφορίας που μπορεί να δοθούν από το Υπουργείο Συγκοινωνιών, χρησιμοποιούν τα 14 γράμματα που είναι κοινά στο ελληνικό και λατινικό αλφάβητο. Δεδομένου ότι σε κάθε πινακίδα χρησιμοποιούνται 3 γράμματα, το σύνολο των πινακίδων αυτών έχει $3^{14} = 4.782.969$ στοιχεία. Αν τώρα σκεφτεί κανείς ότι στις ίδιες πινακίδες χρησιμοποιούνται και τα ψηφία του δεκαδικού συστήματος για να καταλάβουν 4 άλλες θέσεις, ο αριθμός των επαναληπτικών διατάξεων για τη δημιουργία τετραψήφιων αριθμών ανέρχεται σε $1.048.576$. Συνολικά, και επειδή σε κάθε μία διάταξη των 14 αλφαβητικών χαρακτήρων αντιστοιχεί το σύνολο των διατάξεων των αριθμών που προαναφέρθηκαν, το σύνολο των πινακίδων αυτοκινήτων στην Ελλάδα μπορεί να ανέλθει με το παρόν σύστημα αριθμοδότησης σε $5.015.306.502.144$, όταν ο πληθυσμός είναι $10,5$ εκατομμύρια μόνο.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Με πόσους τρόπους είναι δυνατό να διανεμηθούν 5 φάρμακα σε ισάριθμους ασθενείς ;

2. Με πόσους τρόπους είναι δυνατό να τοποθετηθούν 15 ποντίκια σε ισάριθμα κλουβιά ;

3. Πόσους τριψήφιους αριθμούς με διαφορετικά ψηφία μπορούμε να σχηματίσουμε με τα ψηφία 1,2,3,4,5;

4. Πόσους τριψήφιους αριθμούς με διαφορετικά ψηφία μπορούμε να σχηματίσουμε με τα ψηφία 0,1,2,3,4,5;

5. Διαθέτουμε 3 αθλητικές φανέλες με τα νούμερα 9 , 10 , 11. Από μια ομάδα 10 παικτών θέλουμε να επιλέξουμε το πολύ 3 παίκτες για να τους μοιράσουμε κάποιες από αυτές τις φανέλες. Κατά πόσους τρόπους μπορεί να γίνει αυτό;

6. Με πόσους τρόπους 6 άτομα μπορούν να καθίσουν σε 4 καρέκλες γύρω από ένα κυκλικό τραπέζι;

7. Με πόσους τρόπους 7 αυτοκίνητα μπορούν να παρκάρουν σε 5 γκαράζ; (κάθε γκαράζ χωρά ένα μόνο αυτοκίνητο)

8. Με πόσους τρόπους 5 αυτοκίνητα μπορούν να παρκάρουν σε 7 γκαράζ; (κάθε γκαράζ χωρά ένα μόνο αυτοκίνητο)

9. Με πόσους τρόπους 5 άτομα μπορούν να διανυκτερεύσουν σε 7 ξενοδοχεία;

10. Πόσες στήλες ΠΡΟ-ΠΟ πρέπει να συμπληρώσουμε για να έχουμε σίγουρη επιτυχία;