## 1.4 Μεταθέσεις στοιχείων διαφορετικών ειδών σε αντίστοιχες ομάδες

Ας θεωρήσουμε $\nu$ στοιχεία τα οποία ανήκουν σε $r$ διαφορετικά είδη με $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, ..., \kappa_r$ στοιχεία αντίστοιχα, όπου $\kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3 + ... + \kappa_r = \nu$. Το πρόβλημα της εύρεσης του αριθμού των διατάξεων των $\nu$ αυτών στοιχείων λαμβανομένων ανά $\kappa$, μελετάται πιο εύκολα με τη βοήθεια των γεννητριών συναρτήσεων. Για την ειδική περίπτωση όπου $\kappa = \nu$, έχουμε το παρακάτω θεώρημα.

### ❋ Θεώρημα 1.1

Ο αριθμός των μεταθέσεων $\nu$ στοιχείων, τα οποία ανήκουν σε $r$ διαφορετικά είδη με $\kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3 + ... + \kappa_r = \nu$, είναι ίσος με $\nu! \kappa_1! \kappa_2! \cdot ... \cdot \kappa_r!$.

**Απόδειξη**

Έστω $x$ ο ζητούμενος αριθμός των μεταθέσεων. Αν τα $\kappa_1$ ταυτόσημα στοιχεία ήταν όλα διαφορετικά, τότε ο αριθμός των μεταθέσεων θα ήταν $\kappa_1! x$, διότι από κάθε παλιά μετάθεση θα προέκυπταν $\kappa_1!$ μεταθέσεις οι οποίες αντιστοιχούν στις μεταθέσεις των $\kappa_1$ διακεκριμένων στοιχείων. Αν υποθέσουμε ότι και τα $\kappa_2$ ταυτόσημα στοιχεία του δεύτερου είδους ήταν διακεκριμένα, τότε με τον ίδιο παραπάνω συλλογισμό προκύπτει ότι ο αριθμός των μεταθέσεων θα ήταν ίσος με $\kappa_1! \kappa_2! x$.
Επαναλαμβάνοντας την παραπάνω διαδικασία μέχρις ότου θεωρήσουμε ως διακεκριμένα όλα τα $\nu$ στοιχεία, θα μας δώσει $\kappa_1! \kappa_2! *** \kappa_r! * x$ διαφορετικές μεταθέσεις και επειδή ο αριθμός αυτός των μεταθέσεων $\nu$ διακεκριμένων στοιχείων είναι ίσος με $\nu!$ συνεπάγεται το συμπέρασμα του θεωρήματος.

**Παράδειγμα 1.5**

Κατά πόσους διαφορετικούς τρόπους $20$ νεοσύλλεκτοι μπορούν να τοποθετηθούν σε $4$ διαφορετικά σώματα στρατού, $5$ σε κάθε σώμα;

Έχουμε $\nu = 20$ και $\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa_3 = \kappa_4 = 5$ και άρα υπάρχουν $20!(5!)^4$ διαφορετικοί τρόποι.

## 1.5 Απλές μεταθέσεις

Είναι ο αριθμός των συμπλεγμάτων που μπορεί να προκύψουν από τις εναλλαγές των θέσεων $\nu$ διακεκριμένων στοιχείων. Οι μεταθέσεις αναφέρονται σε συμπλέγματα όπου έχει σημασία η σειρά τοποθέτησης των $\nu$ αυτών σημείων και τα στοιχεία αυτά δεν επαναλαμβάνονται μέσα στο σύμπλεγμα. Οι μεταθέσεις $\nu$ στοιχείων δίνονται από τη σχέση $P_\nu = \nu!$.

**Παράδειγμα 1.6**

Το σύνολο των δεκαψήφιων αριθμών του δεκαδικού συστήματος αρίθμησης, στους οποίους κάθε ψηφίο, όταν χρησιμοποιηθεί, δεν επαναλαμβάνεται, είναι οι μεταθέσεις των $10$ ψηφίων του συστήματος. Είναι δηλαδή $P_\nu = 10! = 3.628.800$. Ο αριθμός αυτός είναι πολύ μικρότερος από τον $9.999.999.999$ των δεκαψήφιων αριθμών.

## 1.6 Κυκλικές μεταθέσεις

Θεωρούμε ένα πεπερασμένο σύνολο $n$ αντικειμένων, τα οποία διακρίνονται μεταξύ τους λόγω κάποιας χαρακτηριστικής ιδιότητας, όπως π.χ. χρώμα, μέγεθος, αύξων αριθμός κ.τ.λ. Σχηματίζουμε μια συλλογή $k$ αντικειμένων, $\{a_1, a_2, ..., a_k\}$, επιλέγοντας $k$ από τα αντικείμενα που δόθηκαν.
Αν σε αυτή τη συλλογή συμμετέχουν όλα τα αντικείμενα και επιπλέον αν μας ενδιαφέρει και η σειρά με την οποία τα αντικείμενα είναι τοποθετημένα, τότε η συλλογή αυτή ονομάζεται μετάθεση. Αν τώρα τα αντικείμενα είναι τοποθετημένα σε κύκλο, τότε κάθε διαφορετική τοποθέτηση των στοιχείων στον κύκλο είναι μια κυκλική μετάθεση. Όταν το σύμπλεγμα έχει κυκλική δομή, δεν παρατηρείται αρχή και τέλος, σε αντίθεση με τα γραμμικά συμπλέγματα. Στην περίπτωση αυτή, το πλήθος των συμπλεγμάτων συμβολίζεται $P_\nu^0$ και είναι $P_\nu^0 = (\nu - 1)!$.
Για να οδηγηθούμε σ' αυτόν τον τύπο υπολογισμού, εργαζόμαστε ως εξής:
Θα βρούμε πρώτα τον τύπο που μας δίνει το πλήθος μιας διάταξης των $n$ πραγμάτων ανά $k$, έπειτα θα αναγάγουμε αυτό τον τύπο για μια μετάθεση των $n$ πραγμάτων και τον τελευταίο θα τον χρησιμοποιήσουμε για να αποδείξουμε τον επιθυμητό τύπο.
Έχοντας επιλέξει το πρώτο στοιχείο, το δεύτερο έχει $n-1$ δυνατότητες. Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο, στην τρίτη φάση έχουμε $n-2$ δυνατότητες, ενώ στην $k$-στη έχουμε $n-k+1$ δυνατότητες. Άρα το πλήθος όλων των δυνατών περιπτώσεων είναι

$$n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot (n-k+1) = n!/(n-k)!$$

Εάν στον παραπάνω τύπο θέσουμε $k = n$, προκύπτει ο τύπος που δίνει το πλήθος των δυνατών μεταθέσεων και ο οποίος είναι

$$M_n = n!$$

Σε κάθε κυκλική μετάθεση, π.χ. των αντικειμένων $a_1 a_2 ... a_n$, αντιστοιχούν $n$ το πλήθος απλές μεταθέσεις, όπως προκύπτει και από το παρακάτω σχήμα. Αυτές είναι οι εξής:

$$a_1 a_2 ... a_n, a_2 a_3 ... a_n a_1, ..., a_n a_1 a_2 ... a_{n-1}$$

Επομένως το πλήθος όλων των δυνατών κυκλικών μεταθέσεων $n$ αντικειμένων, έστω $K_n$, θα είναι

$$K_n \cdot n = M_n \Leftrightarrow K_n = M_n / n \Leftrightarrow K_n = (n-1)!$$

**Παράδειγμα 1.7**

Έχουμε $n$ αντρόγυνα που κάθονται σε κυκλικό τραπέζι. Να βρεθεί η πιθανότητα σε $k$ συγκεκριμένα από αυτά οι σύζυγοι να κάθονται ο ένας δίπλα στον άλλο.
Όλοι οι δυνατοί τρόποι τοποθέτησης $2n$ ατόμων γύρω από ένα τραπέζι είναι $(2n-1)!$, επειδή έχουμε κυκλικές μεταθέσεις. Άρα

$$N = (2n-1)!$$

Οι ευνοϊκοί τρόποι έτσι ώστε τα $k$ ανδρόγυνα να είναι μαζί, βρίσκονται ως εξής.
Θεωρούμε τα $k$ ανδρόγυνα που είναι μαζί, με τα $2n-2k$ άτομα των υπόλοιπων ανδρόγυνων σαν $2n-2k+k = 2n-k$ αντικείμενα που τοποθετούνται σε κύκλο με $(2n-k-1)!$ τρόπους. Σε κάθε τέτοια τοποθέτηση, όμως, τα άτομα των $k$ ανδρόγυνων μπορούν να αντιμετατίθενται μεταξύ τους με $2^k$ τρόπους. Άρα

$$N_A = 2^k (2n-k-1)!$$

Τελικά, σύμφωνα με τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας, η πιθανότητα που ψάχνουμε θα είναι

$$P = N_A / N \Leftrightarrow$$

$$P = 2^k (2n-k-1)!/(2n-1)!$$

Ο σχηματισμός μιας διάταξης των $n$ αντικειμένων ανά $k$ μπορεί να γίνει σε $k$ διαδοχικές φάσεις. Στην πρώτη επιλέγουμε το πρώτο στοιχείο της διάταξης με $n$ τρόπους, αφού όλα τα στοιχεία είναι δυνατό να επιλεγούν. Στη δεύτερη φάση επιλέγουμε το δεύτερο στοιχείο.

**Παράδειγμα 1.8**

Αν θεωρήσουμε τις μεταθέσεις των $12$ ωρών επί του δίσκου του ωρολογίου, οι μεταθέσεις $1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12$ και $2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,1$ δεν διαφέρουν μεταξύ τους, επειδή ακριβώς είναι τοποθετημένες σε κύκλο. Υπάρχουν λοιπόν $12$ τέτοιες «αναγνώσεις» του ωρολογίου, όπως ακριβώς υπάρχουν $12$ «αναγνώσεις» της μετάθεσης $2,1,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12$ ή της μετάθεσης $2,1,3,\ 4,7,8,5,6,9,10,11,12$.