

ΔΗΜΟΚΡΙΤΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΡΑΚΗΣ

ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΗ ΣΧΟΛΗ

ΤΜΗΜΑ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
& ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

ΘΕΜΑ ΕΡΓΑΣΙΑΣ ΣΤΙΣ
ΔΙΑΚΡΙΤΕΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΕΣ ΔΟΜΕΣ:

Οι αριθμοί FIBONACCI και η χρυσή τομή
(εφαρμογές στη διαχείριση ηλ. ενέργειας και τις τηλεπικοινωνίες).

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ: Γαγλυτικός Σάββας

ΕΤΟΣ ΣΠΟΥΔΩΝ: Πτυχίο

A.M: 3529

ΚΟΥΝΕΛΙΑ & ΑΡΙΘΜΟΙ Fibonacci

Ο Leonardo Fibonacci στο βιβλίο του Liber Abaci, έθεσε ένα πρόβλημα με μία ιστορία που συνοψίζεται παρακάτω. Υποθέτουμε ότι

1. την πρώτη μέρα του Γενάρη υπάρχει σε κάποιο κλειστό μέρος ένα ζευγάρι κουνέλια,
2. το ζευγάρι αυτό παράγει ένα ζευγάρι κουνέλια την πρώτη μέρα του Φλεβάρη, καθώς και ένα κάθε πρώτη του μήνα που ακολουθεί,
3. κάθε νέο ζευγάρι ωριμάζει σε ένα μήνα και μετά παράγει ένα νέο ζευγάρι την πρώτη μέρα κάθε μήνα που ακολουθεί.

Το πρόβλημα είναι να βρεθεί πόσα ζευγάρια κουνελιών θα βρίσκονται στο μέρος αυτό την πρώτη μέρα του ερχόμενου Γενάρη μετά τη γέννηση της μέρας εκείνης. Στο διάγραμμα συμβολίζουμε κάθε *ενήλικο ζευγάρι με A* και κάθε *ανήλικο ζευγάρι με B*.

Ημερομηνία	Ζευγάρια	Πλήθος A ζευγών	Πλήθος B ζευγών
1 Μάρτη	ABA	2	1
1 Απρίλη	ABAAB	3	2
1 Μάη	ABAABABA	5	3
1 Ιούνη	ABAABABAABAAB	8	5

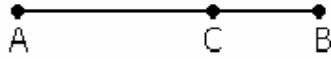
Οπότε ο πίνακας για όλο το έτος γενικεύεται σε

Ημερομηνία	Πλήθος A ζευγών	Πλήθος B ζευγών	Ολικό πλήθος ζευγών
1 Γενάρη	1	0	1
1 Φλεβάρη	1	1	2
1 Μάρτη	2	1	3
1 Απρίλη	3	2	5
1 Μάη	5	3	8
1 Ιούνη	8	5	13
1 Ιούλη	13	8	21
1 Αυγούστου	21	13	34
1 Σεπτέμβρη	34	21	55
1 Οκτώβρη	55	34	89
1 Νοέμβρη	89	55	144
1 Δεκέμβρη	144	89	233
1 Γενάρη	233	144	377

Έτσι βλέπουμε με τις συνθήκες του προβλήματος το πλήθος των ζευγών των κουνελιών θα είναι σε ένα έτος 377. Γενικά ένα σύνολο αριθμών σε σειρά όπως αυτά του παραπάνω πίνακα ονομάζεται **ακολουθία**. Μία ακολουθία μπορεί να έχει άπειρο πλήθος όρων ή πεπερασμένο. Ένα παράδειγμα ακολουθίας είναι η **αριθμητική πρόοδος**. Η ακολουθία 1,1,2,3,5,8,13,..., λέγεται **ακολουθία Fibonacci** και οι όροι της **αριθμοί Fibonacci**.

Η χρυσή τομή και η δευτεροβάθμια εξίσωση του Fibonacci

Μας δίνεται το ευθύγραμμο τμήμα AB και ζητάμε να βρούμε το σημείο C (ανάμεσα στα A & B) τέτοιο ώστε το μήκος του μεγαλύτερου τμήματος να είναι το μέσο ανάλογο ανάμεσα στο μήκος του όλου τμήματος και στο μήκος του



μικρότερου τμήματος.

Όπου $AB \neq 0, AC \neq 0, CB \neq 0$.

Βρίσκουμε πρώτα τη θετική αριθμητική τιμή του λόγου $\frac{AB}{AC}$. Για ευκολία

θέτουμε $x = \frac{AB}{AC}$, ($x > 0$). Τότε θα έχουμε $x = \frac{AB}{AC} = \frac{AC + CB}{AC} = 1 + \frac{CB}{AC} = 1 + \frac{1}{\frac{AC}{CB}}$

$= 1 + \frac{1}{\frac{AB}{AC}} = 1 + \frac{1}{x}$. Από την $x = 1 + \frac{1}{x}$ με απαλοιφή του παρονομαστή προκύπτει

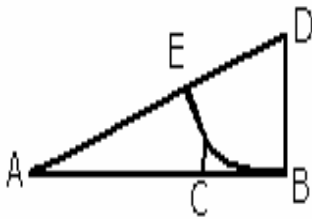
$x^2 = x + 1$ ή $x^2 - x - 1 = 0$. Οι ρίζες αυτής της δευτεροβάθμιας εξίσωσης είναι

$a = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ και $\beta = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$. Παρατηρούμε πως $a > 0$ και $\beta < 0$ και υπολογίζουμε ότι

$a = 1,618\dots$ και $\beta = -0,618\dots$ Έτσι παίρνουμε την θετική ρίζα a σαν την τιμή του

ζητούμενου λόγου: $\frac{AB}{AC} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$. Χρησιμοποιούμε τώρα αυτήν την αριθμητική

τιμή για να βρούμε μία μέθοδο καθορισμού της θέσης του C στο ευθύγραμμο τμήμα AB. Στο τρίγωνο του σχήματος ισχύουν $BD = DE$, $AC = AE$.



Τότε $AB = 2BD$, $ED = BD$ και με το πυθαγόρειο

θεώρημα $AD = \sqrt{5} * BD$. Ωστε $AC = AE = AD - ED = (\sqrt{5} - 1)BD$, $\frac{AB}{AC} = \frac{2BD}{(\sqrt{5} - 1)BD}$

$= \frac{2(\sqrt{5} + 1)}{5 - 1} = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}$. Ο υπολογισμός αυτός επαληθεύει ότι η κατασκευή καθορίζει

πράγματι τη θέση του C στο AB έτσι ώστε $\frac{AB}{AC} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$. Επειδή a είναι η ρίζα

της εξίσωσης $x^2 - x - 1 = 0$ έχουμε $a^2 = a + 1$. Κάνοντας πράξεις στους παραπάνω

τύπους καταλήγουμε στον $F_n = \frac{a^n - \beta^n}{a - \beta}$, $n = 1, 2, 3, \dots$ που λέγεται τύπος του

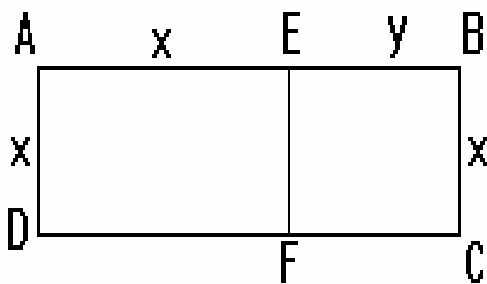
Binet για του αριθμούς Fibonacci, από το όνομα του Γάλλου μαθηματικού Jacques-Phillipe-Marie Binet (1786-1856). Επειδή οι ρίζες της εξίσωσης $x^2 - x - 1 = 0$, σχετίζονται με τους αριθμούς Fibonacci η εξίσωση λέγεται **Δευτεροβάθμια εξίσωση Fibonacci**. Οπότε θα λέμε τη θετική ρίζα της

$a = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$, **Χρυσή τομή**. Αυτή συμβολίζεται με το ελληνικό γράμμα φ. Το

σημείο C που διαιρεί το AB έτσι ώστε $a = \frac{AB}{AC} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$, λέμε ότι διαιρεί το AB

σε Χρυσή τομή. Στο ορθογώνιο του παρακάτω σχήματος έχουμε $\frac{BC}{EB} = \frac{AB}{DA}$, τότε

αν $DA = AE = BC = x$ και $EB = y$ θα έχουμε $\frac{x}{y} = \frac{x + y}{x} \Rightarrow \frac{x}{y} = 1 + \frac{y}{x}$.



Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της τελευταίας επί $\frac{x}{y}$ και βρίσκουμε

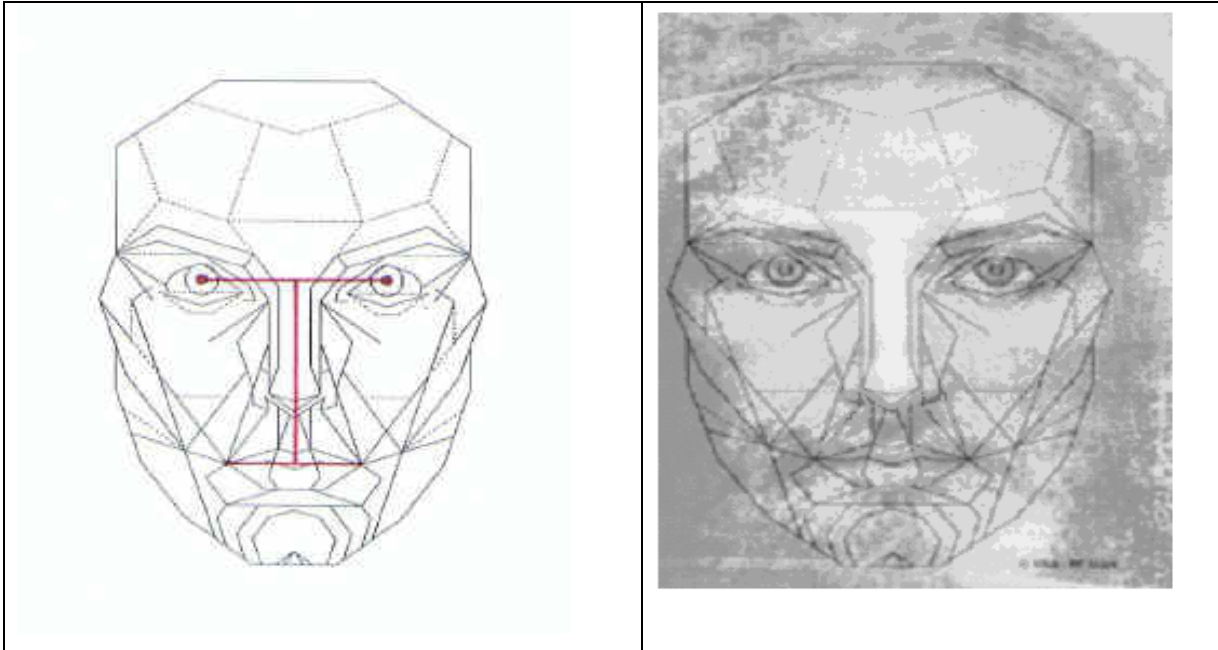
$\left(\frac{x}{y}\right)^2 = \frac{x}{y} + 1 \Rightarrow \left(\frac{x}{y}\right)^2 - \frac{x}{y} - 1 = 0$ που είναι της ίδιας μορφής με την εξίσωση

$x^2 - x - 1 = 0$. Αφού x και y θετικοί, αναζητούμε την θετική τιμή του $\frac{x}{y}$. Έτσι,

$\frac{x}{y} = a = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$. Δηλαδή ο λόγος μήκους προς το πλάτος του ορθογώνιου BCFE

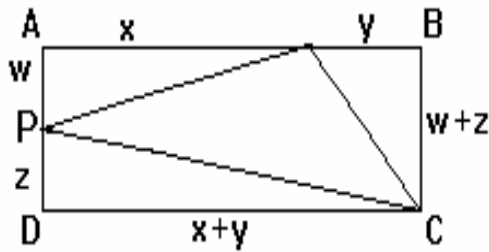
καθώς και του ABCD είναι η χρυσή τομή. Ένα τέτοιο ορθογώνιο λέγεται **Χρυσό Ορθογώνιο**.

Οι αναλογίες του χρυσού ορθογώνιου εμφανίζονται συχνά στην κλασική ελληνική τέχνη και την αρχιτεκτονική. Όπως απέδειξαν οι ψυχολόγοι Gustav Theodor Fechner (1801-1887) και Wilhelm Wundt (1832-1920), σε μία σειρά από ψυχολογικά πειράματα, οι περισσότεροι άνθρωποι προτιμούν υποσυνείδητα τις χρυσές διαστάσεις όταν επιλέγουν διάφορα ορθογώνια αντικείμενα όπως πίνακες, κάρτες. Παρακάτω φαίνεται η εντύπωση ενός καλλιτέχνη στο πρόσωπο του Ιησού Χριστού με βάση το σάβανο του Τορίνου και διορθωμένος για να ταιριάζει με του Dr. Stephen Marquardt τη μάσκα.



Άσκηση γεωμετρίας που σχετίζεται με την χρυσή τομή

Υποθέτουμε ότι από το ορθογώνιο ABCD θέλουμε να αποκόψουμε 3 ισεμβαδικά ορθογώνια τρίγωνα PAQ, QBC, CDP όπως φαίνεται στο παρακάτω



σχήμα. σημείων P και Q?

Πώς θα καθοριστεί η θέση των

Λύση:

Παίρνουμε $AQ=x$, $QB=y$, $AP=w$, $PD=z$. Τότε, αφού τα εμβαδά των τριγώνων PAQ, QBC, CDP είναι ίσα, έχουμε $\frac{1}{2} xw = \frac{1}{2} y(w+z) = \frac{1}{2} z(x+y) \Rightarrow xw = yw + yz$

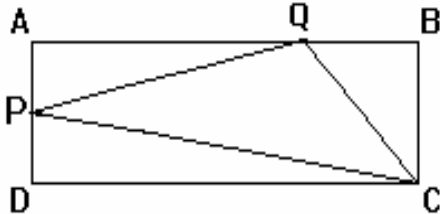
$= xz + yz$. Από την $yw + yz = xz + yz$ έχουμε $yw = xz \Rightarrow \frac{w}{z} = \frac{x}{y}$. Επίσης από την

$xw = y(w+z)$, έχουμε $\frac{x}{y} = \frac{w+z}{w} = 1 + \frac{z}{w} = 1 + \frac{1}{\frac{w}{z}}$. Επειδή $\frac{w}{z} = \frac{x}{y}$, έχουμε $\frac{x}{y} = 1 + \frac{1}{\frac{x}{y}}$, ή

$\left(\frac{x}{y}\right)^2 - \frac{x}{y} - 1 = 0$. Παίρνοντας πάλι την θετική ρίζα έχουμε $\frac{x}{y} = a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Αλλά

ισχύει επίσης $\frac{w}{z} = \frac{x}{y} = a$, και έτσι τα σημεία P και Q πρέπει να χωρίζουν τις

πλευρές AD και AB αντίστοιχα στην χρυσή τομή έτσι ώστε $\frac{AP}{PD} = \frac{AQ}{QB} = a$.



Πρόσθετο υλικό για την χρυσή τομή δίνεται στα δύο άρθρα του Marvin Holt “Mystery Puzzler and Phi”, The Fibonacci Quarterly, Vol.3, No 2 (April, 1965), pp.135-138, και “The Golden Section”, Pentagon, Spring, 1964, pp.80-104. Το χρυσό κυβοειδές πραγματεύεται σε άρθρο με τον ίδιο τίτλο ο H.Huntley στο περιοδικό The Fibonacci Quarterly, Vol.2, No 3 (October, 1964), pp.184. Άλλη μια ενδιαφέρουσα πηγή είναι το βιβλίο Patterns in Space του Συνταγματάρχη R. S. Beard. Το βιβλίο αυτό περιέχει πολλές περιπτώσεις Χρυσής Τομής σε παραλλαγές κανονικών στερεών.

Τέλος ένα τρίγωνο καλείται **Χρυσό Τρίγωνο** όταν του αποκόψουμε ένα όμοιο του τριγώνου και ο λόγος του εμβαδού του προς το εμβαδόν του τριγώνου που μένει είναι $\alpha=1,618\dots$. Το χρυσό τρίγωνο εμφανίζεται στις σελίδες 61-62 του βιβλίου “The Bequest of the Greeks” του Tobias Dantzig (New York: Charles Scribner’s Sons, 1955), καθώς και στην σελίδα 42 του βιβλίου The Fibonacci Numbers του N. N. Vorobyov (Boston: D.C. Heath and Company, 1963). Μπορείτε ακόμα να ανατρέξετε στο άρθρο “Golden Triangles, Rectangles and Cuboids”, by Marjorie Bicknell and Verner E. Hoggat, Jr., The Fibonacci Quarterly, Vol. 7, No 1 (February, 1969), pp.73-91.

Άλγεβρα Fibonacci

Από τα προηγούμενα κεφάλαια θυμόμαστε ότι οι ρίζες της εξίσωσης Fibonacci

$x^2 - x - 1 = 0$ είναι $a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ και $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, και έτσι $a^2 = a+1$ και $\beta^2 = \beta+1$. Έχουμε ακόμα $a+\beta=1$ και $a-\beta = \sqrt{5}$. Επίσης έχουμε $a^{n+2} = a^{n+1} + a^n$ και $\beta^{n+2} = \beta^{n+1} + \beta^n$.

Χρησιμοποιήσαμε αυτές τις ιδιότητες και βρήκαμε ότι οι αριθμοί Fibonacci γράφονται με τους τύπους του Binet: $F_n = \frac{a^n - b^n}{a - b} = \frac{a^n - b^n}{\sqrt{5}}$, $n=1,2,3,\dots$

Προσθέτοντας τα παραπάνω μέλη έχουμε $(a^{n+2} + \beta^{n+2}) = (a^{n+1} + \beta^{n+1}) + (a^n + \beta^n)$. Αν θέσουμε $L_n = a^n + \beta^n$, $n=1,2,3,\dots$ Έτσι έχουμε τον τύπο του Binet για την ακολουθία Lucas. Ας συγκρίνουμε τώρα τους αριθμούς Fibonacci με τους αριθμούς Lucas:

F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7	F8	F9	F10	...
1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	...
L1	L2	L3	L4	L5	L6	L7	L8	L9	L10	...
1	3	4	7	11	18	29	47	76	123	...

Σημειώστε ότι $F_1 + F_3 = L_2$, $F_2 + F_4 = L_3$. Μπορεί να αποδειχθεί ότι γενικά ισχύει $L_n = F_{n-1} + F_{n+1}$, από την οποία αφού $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$, προκύπτει $L_n = F_n + 2F_{n-1}$. Μπορείτε να επαληθεύσετε την τελευταία σχέση σε συγκεκριμένες περιπτώσεις, να διαπιστώσετε δηλαδή ότι $L_6 = F_6 + 2F_5$, έχουμε έτσι εκφράσει τους L_n και F_n . Αν λάβουμε υπόψη ότι $a - b = \sqrt{5}$, τότε από τον τύπο του Binet έχουμε:

$\sqrt{5}F_n = a^n - b^n$, $L_n = a^n + b^n$. Με πρόσθεση βρίσκουμε ότι

$$2a^n = L_n + \sqrt{5}F_n \Rightarrow a^n = \frac{L_n + \sqrt{5}F_n}{2}$$

Επίσης με αφαίρεση κατά μέλη

$$b^n = \frac{L_n - \sqrt{5}F_n}{2}$$

Ας θυμηθούμε πως είχαμε ορίσει τον F_0 σαν $F_2 - F_1$. Όμοια

μπορούμε να ορίσουμε τον L_0 σαν $L_2 - L_1 = 3 - 1 = 2$ και επειδή $L_1 = a + \beta = 1$ η σχέση μπορεί να γραφεί σαν $L_n = L_1 F_n + L_0 F_{n-1}$. Άρα λοιπόν τους αρνητικούς τους ορίζουμε ως εξής $F_{n-1} = F_{n+1} - F_n$ και $L_{n-1} = L_{n+1} - L_n$. Έτσι θα έχουμε και τους αρνητικούς

...	F ₋₄	F ₋₃	F ₋₂	F ₋₁	F ₀	F ₁	F ₂	F ₃	F ₄	...
...	-3	2	-1	1	0	1	1	2	3	...
...	L ₋₄	L ₋₃	L ₋₂	L ₋₁	L ₀	L ₁	L ₂	L ₃	L ₄	...
...	7	-4	3	-1	2	1	3	4	7	...

Βρίσκουμε τώρα τους πρώτους 14 διαδοχικούς λόγους $\frac{F_{n+1}}{F_n}, \frac{L_{n+1}}{L_n}$, οι τιμές των

διαδοχικών λόγων όπως φαίνονται παρακάτω πλησιάζουν και στις δύο περιπτώσεις όλο και περισσότερο την τιμή του a , καθώς παίρνουμε μεγαλύτερες τιμές του n . Μπορεί να παρατηρηθεί ότι ο πρώτος όρος των αριθμών Fibonacci είναι μικρότερος του a , ο δεύτερος είναι μεγαλύτερος κλπ. Ενώ στους αριθμούς Lucas ο πρώτος λόγος είναι μεγαλύτερος του a , ο δεύτερος μικρότερος κλπ.

Άρα λοιπόν

$\frac{F_2}{F_1} < a < \frac{L_2}{L_1}$	$\frac{F_3}{F_2} > a > \frac{L_3}{L_2}$
$\frac{F_{n+1}}{F_n}$	$\frac{L_{n+1}}{L_n}$
1/1=1,000	3/1=3,000
2/1=2,000	4/3=1,333
3/2=1,500	7/4=1,750
5/3=1,667	11/7=1,5714
8/5=1,600	18/11=1,6363
13/8=1,625	29/18=1,6111
21/13=1,6154	47/29=1,6207
34/21=1,619	76/47=1,6170
55/34=1,6176	123/76=1,6184
89/55=1,6182	199/123=1,6179
144/89=1,6180	322/199=1,6181
233/144=1,6181	521/322=1,6180
377/233=1,6180	843/521=1,6180
610/377=1,6180	1364/843=1,6180

Όπου το $a \approx 1,61803398875....$

Προβλήματα με μεγάλους αριθμούς Fibonacci & Lucas

1. Να βρείτε τον $F_{16} \approx \frac{a^{16}}{\sqrt{5}}$.

Λύση:

Ισχύει ότι $\log \frac{a^{16}}{\sqrt{5}} \approx 16 \log a - \log 2,236$. Επειδή θα πολλαπλασιάσουμε το $\log a$ επί τον 16 τον παίρνουμε με πιο πολλά δεκαδικά ψηφία από εκείνα που σχεδιάζουμε να πάρουμε τους άλλους υπολογισμούς. Παίρνοντας $a = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} =$

$a = \frac{1 + 2,23607}{2} \approx 1,6180$, και χρησιμοποιώντας το calculator τσέπης βρίσκουμε

ότι $\log a = 0,20898 \dots$ Έτσι λοιπόν έχουμε

$\log \frac{a^{16}}{\sqrt{5}} \approx 16 * 0,20898 - 0,3494 \approx 3,3437 - 0,3494 \approx 2,9943$ που συνεπάγεται ότι

$\frac{a^{16}}{\sqrt{5}} \approx 987,0$.

Ωστε $F_{16} = 987$. Για μεγαλύτερους δείκτες βρίσκουμε με ακρίβεια τα τρία δεκαδικά ψηφία του αριθμού.

2. Δίνεται ότι ο 610 είναι ένας αριθμός Fibonacci. Με βάση τον τύπο

$$F_{n+1} = \left\lceil \frac{F_n + 1 + \sqrt{5F_n^2}}{2} \right\rceil, n \geq 4. \text{ Να βρεθεί ο επόμενος αριθμός.}$$

Λύση:

$$F_{n+1} = \left\lceil \frac{610 + 1 + \sqrt{5 * 610^2}}{2} \right\rceil \Rightarrow F_{n+1} = \left\lceil \frac{611 + \sqrt{1860500}}{2} \right\rceil \Rightarrow F_{n+1} = \left\lceil \frac{611 + 1364,0}{2} \right\rceil \Rightarrow$$

$$F_{n+1} = \left\lceil \frac{1975,0}{2} \right\rceil = 987 \text{ ένας εναλλακτικός τρόπος εκτέλεσης των πράξεων είναι:}$$

$$F_{n+1} = \left\lceil \frac{610 + 1 + \sqrt{5 * 610}}{2} \right\rceil \Rightarrow F_{n+1} = \left\lceil \frac{611 + 2,236 * 610}{2} \right\rceil \Rightarrow F_{n+1} = \left\lceil \frac{611 + 1363,96}{2} \right\rceil \Rightarrow$$

$$F_{n+1} = \left\lceil \frac{1974,96}{2} \right\rceil = 987,0. \text{ Για ποιο μεγάλους αριθμούς Fibonacci θα χρειαστεί}$$

να πάρετε την $\sqrt{5}$ με πιο πολλά δεκαδικά ψηφία.

Ιδιότητες διαιρετότητας των αριθμών Fibonacci & Lucas

Ας προσέξουμε τους πρώτους λίγους αριθμούς Fibonacci.

F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7	F8	F9	F10	F11	F12	F13	F14
1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377

Παρατηρούμε τα ακόλουθα:

- Κάθε τρίτος F_n είναι άρτιος δηλαδή, ο $F_3=2$ διαιρεί τους $F_6=8$, $F_9=34$, $F_{12}=144$, $F_{15}=610$, ...
- Ο $F_4=3$ διαιρεί τους $F_8=21$, $F_{12}=144$, ...
- Ο $F_5=5$ διαιρεί τους $F_{10}=55$, $F_{15}=610$, ...
- Ο $F_6=8$ διαιρεί τον $F_{12}=144$, ...
- Ο $F_7=13$ διαιρεί τον $F_{14}=377$, ...

Τα παραδείγματα αυτά μας οδηγούν στα ακόλουθα θεωρήματα.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1^ο :Κάθε αριθμός Fibonacci F_k διαιρεί κάθε αριθμό Fibonacci F_{nk} για $n=1,2,3,\dots$ ή αν ο r διαιρείται δια του s τότε ο F_r διαιρείται δια του F_s .

ΘΕΩΡΗΜΑ 2^ο :Ο Μέγιστος κοινός διαιρέτης δύο αριθμών Fibonacci είναι εκείνος ο αριθμός Fibonacci που έχει υποδείκτη τον μέγιστο κοινό διαιρέτη των υποδεικτών των δύο αυτών αριθμών. Δηλαδή $(F_m, F_n)=F_{(m,n)}$. Το θεώρημα II μπορεί να αποδειχθεί με τον αλγόριθμο του Ευκλείδη ή σαν λύση μιας Διοφαντικής εξίσωσης. Βλέπε Glenn Michael, "A New Proof for an Old Property," *The Fibonacci Quarterly*, Vol. 2, No. 1 (February, 1964), pages 57-58.

ΘΕΩΡΗΜΑ 3^ο :Ο αριθμός F_n διαιρείται δια του F_m , αν και μόνον αν ο n διαιρείται δια του m .

ΘΕΩΡΗΜΑ 4^ο :Ο αριθμός L_n διαιρεί τον F_m , αν και μόνον αν $m=2Kn$, $n>1$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 5^ο :Ο αριθμός L_n διαιρεί τον L_m , αν και μόνον αν $m=(2k-1)n$, $n>1$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 6^ο :Ο $(F_{n+2}, F_{n+1})=1$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 7^ο :Ο $(L_{n+2}, L_{n+1})=1$.

Περιοδικότητα των αριθμών Fibonacci & Lucas

Αν θεωρήσουμε την ακολουθία των πρώτων αριθμών παρατηρούμε ότι:

- Ο 2 διαιρεί τους F_3 και F_6 κλπ.
- Ο 3 διαιρεί τους F_4 και F_8 κλπ.
- Ο 5 διαιρεί τους F_5 και F_{10} κλπ.
- Ο 7 διαιρεί τους F_8 , κατά συνέπεια και τον F_{16} , κλπ.
- Ο 11 διαιρεί τους F_{10} , κατά συνέπεια και τον F_{20} , κλπ.
- Ο 13 διαιρεί τους F_7 και F_{14} κλπ.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1^ο: Κάθε ακέραιος αριθμός m διαιρεί κάποιον αριθμό Fibonacci ($>F_0$) του οποίου ο υποδείκτης δεν υπερβαίνει τον m^2 . Για παράδειγμα $K_7=16$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2^ο: Αν ο F_n διαιρεθεί δια του F_m ($n>m$), τότε είτε το υπόλοιπο R είναι αριθμός Fibonacci, είτε ο αριθμός F_m-R είναι ο αριθμός Fibonacci. Π.χ. $89=2*34+21$, ή $F_{11}=2*F_9+F_8$. & $144=6*21+18$, ή $F_{12}=6*F_8+18$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 3^ο: Αν ο L_n διαιρεθεί δια του L_m ($n>m$), τότε είτε το υπόλοιπο R είναι μηδέν ή ο R είναι αριθμός Lucas ή ο L_m-R είναι ο αριθμός Lucas. Π.χ. $76=19*4+0$, ή $L_9=19*L_3+0$ & $18=1*11+7$, ή $L_6=1*L_5+L_4$ & $47=6*7+5$, ή $L_8=6*L_4+(L_4-L_0)$.

Μια απόδειξη της «Ιδιότητας των Υπολοίπων» βρίσκεται στο άρθρο του John H. Halton “Fibonacci Residues”, *The Fibonacci Quarterly*, Vol. 2, No. 3 (October, 1964), pages 217-218. Η ιδιότητα αυτή για τους αριθμούς Lucas αναπτύσσεται από τον Laurence Taylor στο άρθρο του “Residues of Fibonacci-Like Sequences”, *The Fibonacci Quarterly*, Vol. 5, No. 3 (October, 1967), pages 298-304. Στο ίδιο άρθρο βλέπουμε ότι οι ακολουθίες Fibonacci και Lucas είναι οι μόνες που πληρούν την αναδρομική ιδιότητα $u_{n+2}=u_{n+1}+u_n$ και έχουν τις ιδιότητες που καθορίζουν τα θεωρήματα 2 και 3.

Το τρίγωνο του Pascal και οι αριθμοί Fibonacci

Αν θεωρήσουμε τα διωνυμικά αναπτύγματα $(x+y)^n$ για $n=0,1,2,3,4,5,\dots$, μπορούμε να τα γράψουμε με την μορφή:

$$(x+y)^0=x^0y^0$$

$$(x+y)^1=x^1y^0+x^0y^1$$

$$(x+y)^2=x^2y^0+2x^1y^1+x^0y^2$$

$$(x+y)^3=x^3y^0+3x^2y^1+3x^1y^2+x^0y^3$$

$$(x+y)^4=x^4y^0+4x^3y^1+6x^2y^2+4x^1y^3+x^0y^4$$

$$(x+y)^5=x^5y^0+5x^4y^1+10x^3y^2+10x^2y^3+10x^1y^4+x^0y^5$$

Αφού $x^0=y^0=1$ (x και y μη μηδενικοί), μπορούμε να γράψουμε τους συντελεστές στην ακόλουθη μορφή που λέγεται τρίγωνο του Pascal:

$$\begin{array}{c} 1 \\ 1 \ 1 \\ 1 \ 2 \ 1 \\ 1 \ 3 \ 3 \ 1 \\ 1 \ 4 \ 6 \ 4 \ 1 \\ 1 \ 5 \ 10 \ 10 \ 5 \ 1 \end{array}$$

Γράφοντας διαδοχικές γραμμές του τριγώνου του Pascal μπορούμε να βρούμε οποιοδήποτε διωνυμικό συντελεστή, μπορούμε όμως να τους βρίσκουμε και με άμεσο τρόπο. Ας είναι $1*2*3*\dots*n=n!$ Και $0!=1$. Αποδεικνύεται τότε ότι

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Ποια είναι η σχέση ανάμεσα στους αριθμούς Fibonacci και στο τρίγωνο του Pascal?

Γράφοντας το τρίγωνο όπως παρακάτω έχουμε

	F1	F2	F3	F4	F5	F6
1 ←						
1 ←	1					
1 ←	2	1				
1 ←	3	3	1			
1 ←	4	6	4	1		
1 ←	5	10	10	5	1	

Βλέπουμε έτσι πως τα αθροίσματα κατά μήκος των ανερχόμενων διαγωνίων είναι οι αριθμοί Fibonacci. $F_1=1$, $F_2=1$, $F_3=1+1$, $F_4=1+2$, $F_5=1+3+1$, $F_6=1+4+3$, $F_7=1+5+6+1$, κλπ. Γενικά αποδεικνύεται ότι $F_{n+1} = \sum_{i=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n-i}{i}$. Όπου x είναι ο μεγαλύτερος ακέραιος που δεν υπερβαίνει το x .

Πίνακες 2x2 που σχετίζονται με τους αριθμούς Fibonacci

Ένας πίνακας 2x2 συμβολίζεται με $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, όπου a, b, c, d είναι πραγματικοί αριθμοί που λέγονται στοιχεία. Σε αυτό το κεφάλαιο δεν θα ασχοληθούμε με την γραμμική άλγεβρα πινάκων, αλλά θα δείξουμε την σχέση των μητρώων με τους αριθμούς Fibonacci.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1^ο: Η ορίζουσα, $\det AB$, του γινομένου δύο πινάκων **A** και **B**, ισούται προς το γινόμενο των οριζουσών, $\det A$ και $\det B$. Δηλαδή $\det AB = (\det A)(\det B)$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2^ο: Για $n \geq 1$, η n -οστή δύναμη του **Q** είναι $Q^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}$.

Απόδειξη: Θα χρησιμοποιήσουμε μαθηματική επαγωγή. Για $n=1$,

$$Q^1 = \begin{pmatrix} F_2 & F_1 \\ F_1 & F_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \text{ Υποθέτουμε ότι } Q^k = \begin{pmatrix} F_{k+1} & F_k \\ F_k & F_{k-1} \end{pmatrix}. \text{ Τότε}$$

$Q^{k+1} = Q^k Q^1 = \begin{pmatrix} F_{k+1} & F_k \\ F_k & F_{k-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{k+1} + F_k & F_{k+1} \\ F_k + F_{k-1} & F_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{k+2} & F_{k+1} \\ F_{k+1} & F_k \end{pmatrix}$ η απόδειξη είναι πλήρης με μαθηματική επαγωγή.

ΘΕΩΡΗΜΑ 3^Q : $\det Q^n = (-1)^n, n \geq 1$.

Μεγάλο τεχνικό ενδιαφέρον στην άλγεβρα των πινάκων έχει το χαρακτηριστικό πολυώνυμο. Για έναν πίνακα A το χαρακτηριστικό πολυώνυμο ορίζεται ως:

$$P(x) = \det(A - xI) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} - x \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -x & 0 \\ 0 & -x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a-x & b \\ c & d-x \end{vmatrix} = x^2 - (a+d)x + (ad - bc)$$

Η εξίσωση $P(x)=0$ ή $x^2 - (a+d)x + (ad - bc) = 0$. Λέγεται χαρακτηριστική εξίσωση του πίνακα A. Για τον πίνακα Q το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι

$$\det(Q - xf) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-x & 1 \\ 1 & -x \end{vmatrix} = x^2 - x - 1$$
 και η χαρακτηριστική εξίσωση

είναι η $x^2 - x - 1 = 0$ που την έχουμε ονομάσει δευτεροβάθμια εξίσωση

Fibonacci. Οι χαρακτηριστικές του ρίζες είναι $a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ και $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Για να

βρούμε τώρα τη χαρακτηριστική εξίσωση και τις χαρακτηριστικές ρίζες του Q^n έχουμε ότι $x^2 - L_n x + (-1)^n = 0$. Οι χαρακτηριστικές ρίζες βρίσκονται από τον

$$\text{τύπο } x = \frac{L_n \pm \sqrt{L_n^2 - 4(-1)^n}}{2}. \text{ Έτσι λοιπόν οι ρίζες θα είναι } x = \frac{L_n + F_n \sqrt{5}}{2} \text{ και}$$

$$x = \frac{L_n - F_n \sqrt{5}}{2}. \text{ Έτσι ακολουθεί το θεώρημα τέσσερα.}$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 4^Q : **Οι χαρακτηριστικές ρίζες του πίνακα Q^n είναι οι n -οστές δυνάμεις των χαρακτηριστικών ριζών του Q και το ίχνος του Q^n είναι ο L_n .**

Μπορεί εύκολα να επαληθευθεί ότι $Q^2 = Q + I$ ή $Q^2 - Q - I = Z$. Έτσι μπορεί να λεχθεί ότι ο Q ικανοποιεί την χαρακτηριστική εξίσωση $x^2 - x - 1 = 0$. Αυτή είναι μία περίπτωση του παρακάτω θεωρήματος που δίνουμε χωρίς απόδειξη.

ΘΕΩΡΗΜΑ 5^Q (Θεώρημα W. R. Hamilton – Arthur Cayley): **Κάθε τετραγωνικός πίνακας ικανοποιεί την δική του χαρακτηριστική εξίσωση.**

- Παίρνοντας $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} i & j \\ k & l \end{pmatrix}$ και τον ορισμό της πρόσθεσης, να δείξετε ότι $(A+B)+C = A+(B+C)$

Λύση:

$$\begin{aligned} \text{Ισχύει } (A+B)+C &= \left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \right] + \begin{pmatrix} i & j \\ k & l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a+e)+i & (e+f)+j \\ (c+g)+k & (d+h)+l \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} a+(e+i) & e+(f+j) \\ c+(g+k) & d+(h+l) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} i & j \\ k & l \end{pmatrix} \right] = A+(B+C) \end{aligned}$$

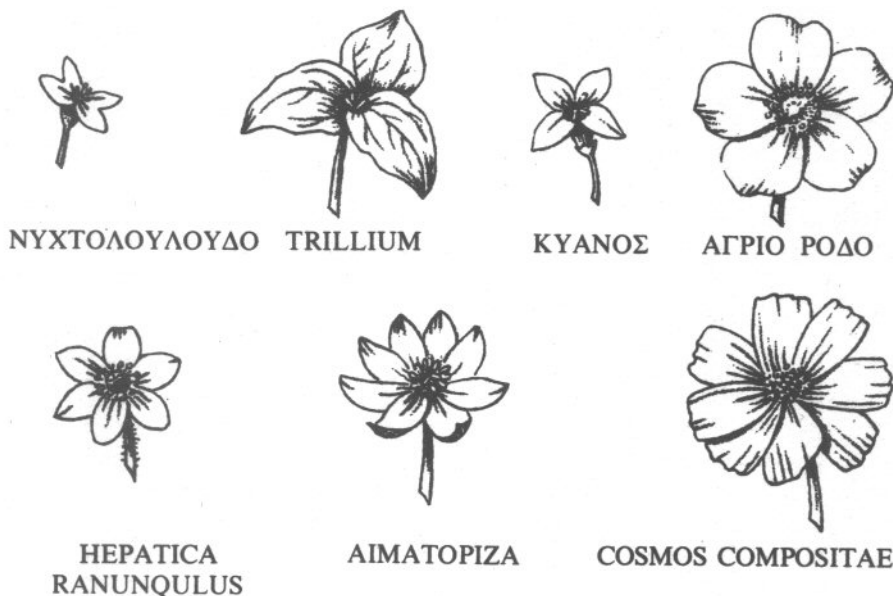
- Δείξτε ότι $Q^2=Q+I$ ή $Q^2-Q-I=Z$

Λύση:

$$Q^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot Q + I = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = Q^2$$

Οι αριθμοί Fibonacci στη Φύση

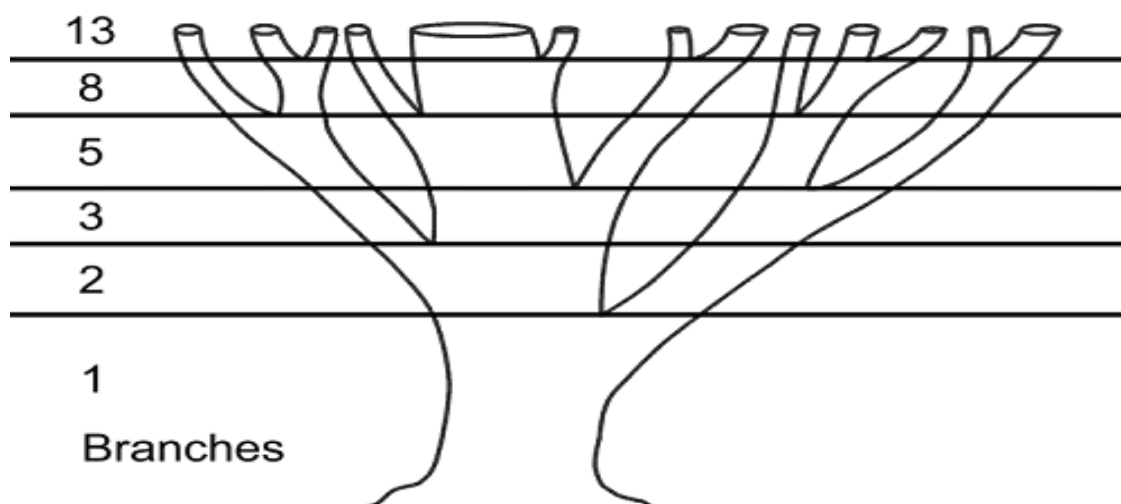
Οι αριθμοί Fibonacci εμφανίζονται στη φύση με έναν ανέλπιστο αριθμό τρόπων. Στο παρακάτω σχήμα παρατηρούμε για τον αριθμό των πετάλων (ή των πεταλοειδών μερών) των λουλουδιών.



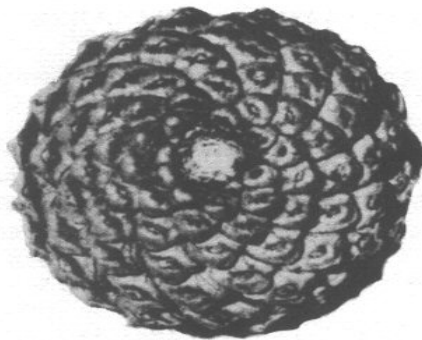
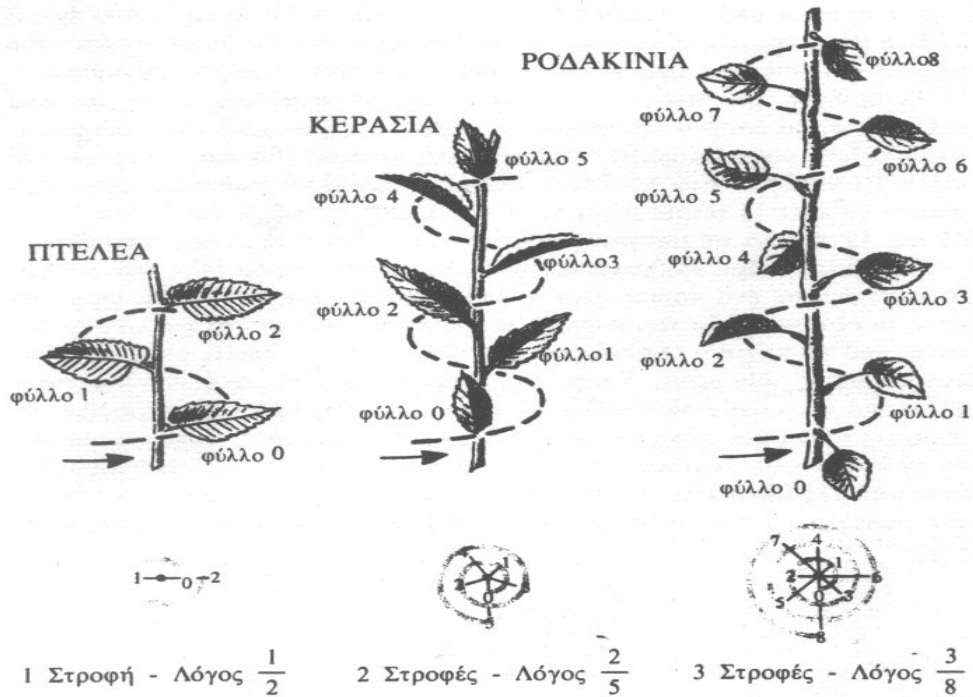
Το νυχτολούλουδο έχει 2 πέταλα (παρόλο που είναι βαθιά χωρισμένα ώστε να φαίνονται τέσσερα). Έτσι τα πιο πάνω λουλούδια έχουν 2,3,5 ή 8 (αριθμοί Fibonacci) ή 4 (αριθμός Lucas) ή 6 πέταλα ή πεταλοειδή μέρη. Ο αριθμός των πεταλοειδών μερών ενός λουλουδιού όπως το aster compositae, το cosmos compositae, η μαργαρίτα ή το gaillardia compositae στη σύνθετη οικογένεια είναι σταθερά ένας αριθμός Fibonacci ή είναι πολύ κοντά σε κάποιο. Ένα

λουλούδι μιας μόνον ποικιλίας *gaillardia compositae* μπορεί να έχει 13 τέτοια μέρη. Ο Frank Land στο *The Language of Mathematics* (London : John Murray, 1960), Chapter 13 αναφέρει ότι βρήκε 21,34,55,89 πέταλα σε μαργαρίτες και σε άλλα μέλη της ίδιας οικογένειας.

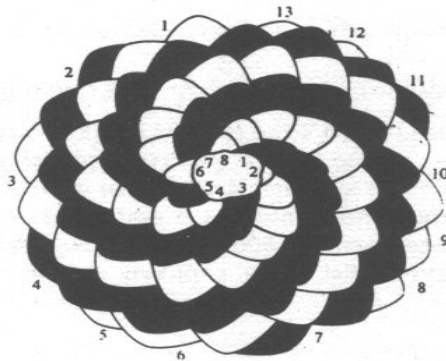
Μπορούμε να βρούμε ακόμα αριθμούς Fibonacci στην διάταξη των φύλλων ή κλαδιών σε ένα κορμό ενός δένδρου. Πάρτε σαν αφετηρία ένα φύλλο και μετρείστε προς τα έξω τα φύλλα του κορμού, μέχρι να φθάσετε σε ένα φύλλο ακριβώς πάνω από το αρχικό. Ο αριθμός των φύλλων που θα βρείτε είναι συνήθως ένας αριθμός Fibonacci. Ας υποθέσουμε ότι με μία κλωστή τυλίγουμε τον κορμό ακολουθώντας τα φύλλα. Ο αριθμός των στροφών που θα κάνει η κλωστή γύρω από το κλαδί από την αφετηρία, ώσπου να φθάσει το πρώτο φύλλο ακριβώς πάνω από το σημείο αφετηρίας, είναι συνήθως ένας αριθμός Fibonacci. Το αποτέλεσμα δηλώνεται συνήθως με τον λόγο **αριθμός στροφών / αριθμός φύλλων**. Μερικά απλουστευμένα παραδείγματα φαίνονται στο παρακάτω σχήμα. Η φοινικιά έχει λόγο 1/3 και η ιτιά η αμερικανική έχει λόγο 5/13! Τέτοια διάταξη των φύλλων σε ένα κλαδί λέγεται *φυλλόταξη*.



Τα πιο γνωστά παραδείγματα εμφάνισης αριθμών Fibonacci στην φύση είναι ο αριθμός των σπειρών των σπόρων του ηλιοτροπίου και ο αριθμός των λεπιών των σπειρών των κουκουναριών. Ένα ηλιοτρόπιο μπορεί να έχει 89 σπείρες προς τα δεξιά και 55 προς τα αριστερά και ένα άλλο, με διάμετρο 18 ίντρες, που είχε 144 σπείρες προς τα δεξιά, 89 προς τα αριστερά και 55 ρηχές σπείρες προς τα δεξιά. Ένα ιδιαίτερα ενδιαφέρον είδος ηλιοτροπίου διαθέτει ο Brother Alfred Brousseau του St. Mary's College, California.



Τα λέπια μιας κουκουνάρας αναπτύσσονται με μορφή σπείρας από το σημείο σύνδεσης με τον κλώνο προς τα έξω.

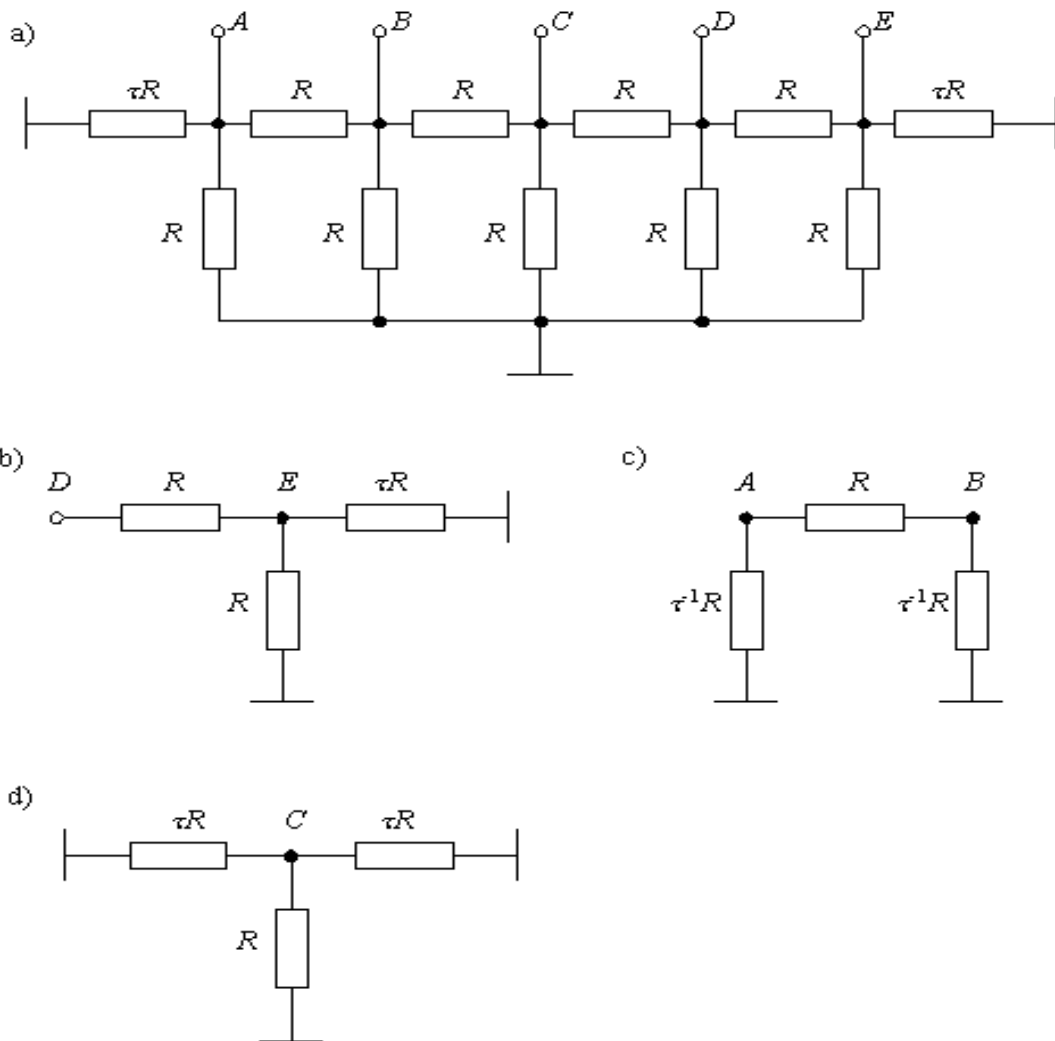


13 σπειροειδείς λωρίδες προς τα αριστερά και 8 σπειροειδείς λωρίδες προς τα δεξιά.

Οι μετρήσεις των σπειρών έδειξαν, 127 προς τα δεξιά, 76 προς τα αριστερά και 47 ρηχές σπείρες προς τα δεξιά – ένα ηλιοτρόπιο με αριθμούς Lucas. Ο Brother Alfred Brousseau συνέλεξε και ταξινόμησε, σύμφωνα με τον αριθμό των σπειρών τους (που είναι αριθμοί Fibonacci) κουκουναριές από όλα τα 20 είδη πεύκων της California. Τα αποτελέσματα του δημοσιεύτηκαν στο περιοδικό The Fibonacci Quarterly, Vol. 6, No 1 (February, 1968), pp.69-76 με τίτλο “On the trail of the California Pine”.

Τεχνολογικές εφαρμογές της άλγεβρας Fibonacci(Συμμετρικός αναλογικο-ψηφιακός μετατροπέας / DAC)

Είναι γνωστό ότι οι διαιρέτες αντίστασης με τις "δυναδικές" αναλογίες είναι η βάση του κυκλώματος του κλασικού "δυναδικού" αναλογικο-ψηφιακού μετατροπέα. Ακολουθεί ο σχεδιασμός του διαιρέτη αντιστάσεων με τις αναλογίες του χρυσού αριθμού στον τύπο $\tau^2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$.



Ο διαιρέτης αντιστάσεων στο σχήμα a αποτελείται από τους οριζόντιους και κάθετους αντιστάτες δύο τιμών R και τR . Οι ηλεκτρικές εισοδοι A, B, C, D, E συνδέουν τους αντιστάτες του διαιρέτη. Στο a παρουσιάζεται διαιρέτης αντιστάσεων 5-ψηφίων με τα παραπάνω σημεία σύνδεσης. Το σημείο C σύνδεσης αντιστοιχεί στο ψηφίο 0. Τα ισοδύναμα ηλεκτρικά κυκλώματα του διαιρέτη παρουσιάζονται στα σχήματα b,c,d. Το δεξί τμήμα του διαιρέτη που θεωρεί στα σημεία d, e σύνδεσης έχει τη μορφή στο σχήμα b. Ας υπολογίσουμε την ισοδύναμη αντίσταση της παράλληλης ένωσης των αντιστατών R και τR

στο σχήμα b: $R_{e1} = \frac{R \times \tau R}{R + \tau R} = \tau^{-1} R$. Αλλά ίδια τιμή έχει η ισοδύναμη αντίσταση

του διαιρέτη στο αριστερό τμήμα θεωρώντας στο σημείο B. Η ισοδύναμη αντίσταση του κυκλώματος στο σχήμα b θεωρώντας στο σημείο d είναι ίση με $R + \tau^{-1} R = \tau R$. Εάν πάρουμε στον διαιρέτη αντιστάσεων στο σχέδιο a κάποιο αυθαίρετο "οριζόντιο" αντιστάτη R με τα σημεία σύνδεσης A (το αριστερό σημείο σύνδεσης) και B (το δεξί σημείο σύνδεσης) έπειτα είναι εύκολο να δείξει ότι σύμφωνα με την πρώτη εξίσωση, η ισοδύναμη αντίσταση των αριστερών και δεξιών μερών του διαιρέτη σύμφωνα με τους κόμβους σύνδεσης A και B είναι αντίστοιχα ίσο με το $\tau^{-1} R$.

Κατόπιν μπορούμε να παρουσιάσουμε το ισοδύναμο κύκλωμα του διαιρέτη για κάποιο αυθαίρετο "οριζόντιο" αντιστάτη R όπως παρουσιάζεται στο σχέδιο c. Το τελευταίο επιτρέπει τον υπολογισμό του συντελεστή μετάδοσης τάσης από

τον κόμβο A στον κόμβο B: $U_B = \frac{U_A}{R + \tau^{-1} R} \tau^{-1} R = \frac{U_A}{\tau^2}$. Ας εξετάσουμε κάποιο

αυθαίρετο σημείο C του κυκλώματος στο σχήμα.a. Κατόπιν με τη χρήση της δεύτερης εξίσωσης είναι εύκολο να δείχτεί ότι η ισοδύναμη αντίσταση της αλυσίδας διαιρετών στο αριστερό και στο δικαίωμα για το αυθαίρετο σημείο C είναι ίση με τR . Κατόπιν το ισοδύναμο κύκλωμα του διαιρέτη που θεωρώντας το σημείο C μπορεί να παρουσιαστεί στη μορφή του σχήματος d. Με τη χρήση των ισοδύναμων κυκλωμάτων στο σχήμα d είναι εύκολο να υπολογιστεί η ισοδύναμη αντίσταση του κυκλώματος στο σχήμα d ως παράλληλη ένωση των 3

αντιστατών τR , R και τR : $R_{e2} = \frac{\tau R \times \tau^{-1} R}{\tau R + \tau^{-1} R} = \frac{1}{2} R$.

Κατά συνέπεια η έρευνα για το διαιρέτη στο σχήμα a επιτρέπει την διατύπωση των ακόλουθων ηλεκτρικές ιδιότητες του διαιρέτη:

- ο συντελεστής μετάδοσης τάσης μεταξύ μερικών γειτονικών σημείων σύνδεσης του διαιρέτη (όπως τα σημεία A και B) είναι αντιστρόφως ανάλογος προς το τετράγωνο του χρυσού τμήματος τ^2
- η ισοδύναμη αντίσταση του διαιρέτη στο αυθαίρετο σημείο σύνδεσης C είναι σταθερή και είναι ίση με $\frac{1}{2} R$.

Σημειώστε ότι η ιδιότητα (1) είναι μιας μεγάλης έκπληξης! Πραγματικά, είναι αδύνατο να φανταστούμε ότι το απλούστερο ηλεκτρικό κύκλωμα στο σχέδιο a περιέχει το τετράγωνο της χρυσής αναλογίας! Αλλά αυτό το γεγονός τονίζει ακόμα περισσότερο τον θεμελιώδη χαρακτήρα της χρυσής αναλογίας, η οποία εμφανίζεται απροσδόκητα σε ένα ηλεκτρικό κύκλωμα!

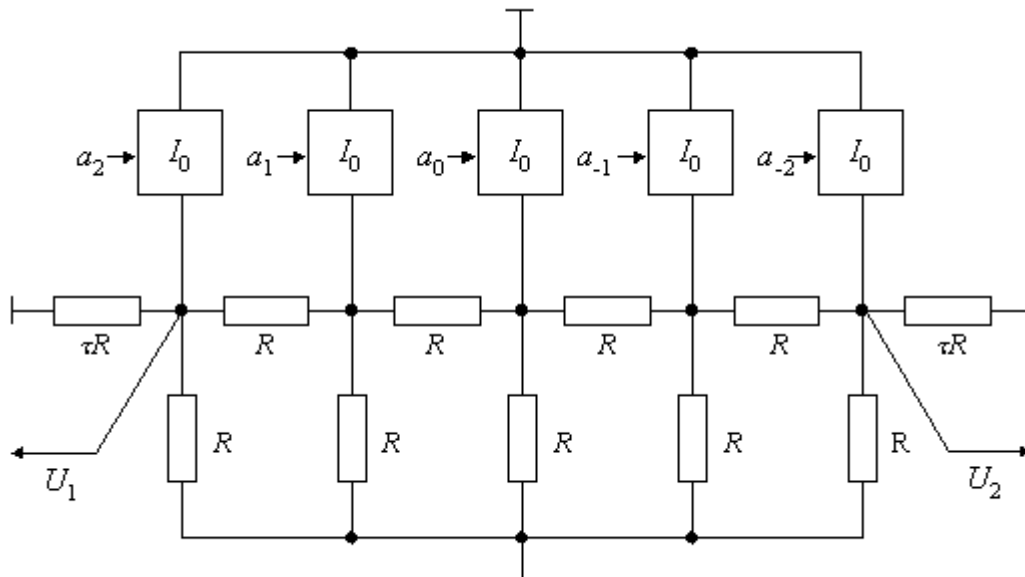
Ο παραπάνω διαιρέτης αντιστάσεων μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον σχεδιασμό του συμμετρικού ψηφιακό-αναλογικού μετατροπέα (D to A converter) σχήμα 2. Το τελευταίο αποτελείται από τα πέμπτα (n στη γενική περίπτωση) ψηφία. Το μέσο σημείο C αντιστοιχεί στο 0-s ψηφίο a_0 του καθρέφτικου-συμμετρικού κώδικα εισαγωγής $a_2 a_0 a_{-1} a_{-2} (a_m a_{m-1} \dots a_0, -1 a_{-2} \dots$

a_i στη γενική περίπτωση) του αριθμού N . Τα ψηφία a_i ($i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm m$) ελέγχεται από το ειδικό κύκλωμα I_0 που συνδέεται με τα αντίστοιχα σημεία σύνδεσης του συμμετρικού-καθρεπτικού διαιρέτη. Το ειδικό κύκλωμα I_0 αποτελείται από την τυποποιημένη ηλεκτρική γεννήτρια I_0 και το ηλεκτρικό κλειδί 3-θέσεων, οι οποίες ελέγχονται από τα τριαδικά ψηφία a_i σύμφωνα με τον ακόλουθο κανόνα.

Εάν $a_i = 1$ τότε το τυποποιημένο ηλεκτρικό ρεύμα διαρέεται στο αντίστοιχο σημείο του συμμετρικού διαιρέτη αντιστάσεων -στο θετικό-, $+ I_0$.

Εάν $a_i = -1$ τότε το τυποποιημένο ηλεκτρικό ρεύμα διαρέεται στο αντίστοιχο σημείο του συμμετρικού διαιρέτη αντιστάσεων -στο αρνητικό-, $- I_0$.

Τέλος, εάν $a_i = 0$ τότε το τυποποιημένο ηλεκτρικό ρεύμα I_0 δεν διαρέεται στο αντίστοιχο σημείο σύνδεσης.



Ο παραπάνω ψηφιακό-αναλογικός μετατροπέας (DAC) έχει δύο συμμετρικά αποτελέσματα, U_1 και U_2 . Λαμβάνοντας υπόψη τις βασικές ιδιότητες (1) - (4) του συμμετρικού διαιρέτη, κάποιος μπορεί να δείξει ότι τα συμμετρικά αποτελέσματα U_1 και U_2 εκφράζονται, σε συνάρτηση από το συμμετρικό κώδικα εισαγωγής $a_m a_{m-1} \dots a_0 a_{-1} a_{-2} \dots a_{-m}$ στην ακόλουθη μορφή:

$$U_1 = U_2 = \frac{I_0}{2} \sum_{i=-M}^M a_i \tau^{2^i} .$$

Η θεμελιώδης ιδιότητα ελέγχου των τελευταίων είναι η

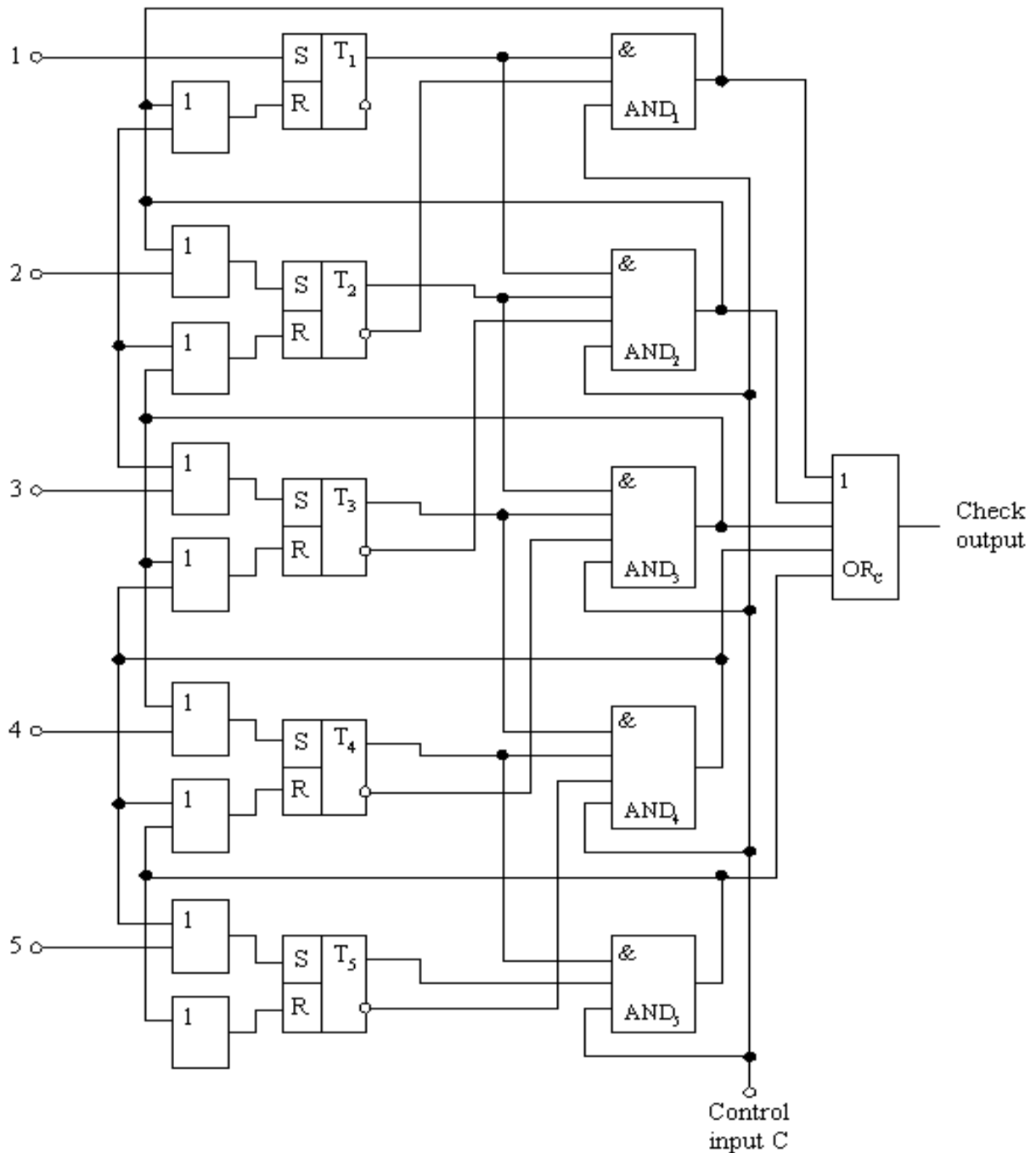
ισότητα $U_1=U_2$ αυτή η ισότητα επιβεβαιώνει την ακρίβεια της λειτουργίας του συμμετρικού DAC. Αλλά η παραβίαση της ισότητας (6) είναι η ένδειξη λάθους στο DAC. Κατά συνέπεια ο συμμετρικός-καθρεπτικός ψηφιακό-αναλογικός μετατροπέας (DAC) στο σχήμα 2 είναι αυτοδιορθώμενος επιτρέποντας τον DAC να συνεχίζει να λειτουργεί σύμφωνα με τη σχέση (6).

Ψηφιακός καταχωρητής συνέλιξης(convolution register) βασισμένος στην άλγεβρα Fibonacci

Οι διαδικασίες της συνέλιξης, της μετάβασης και της μείωσης στην ελάχιστη μορφή είναι οι κύριες διαδικασίες των τεχνολογικών εφαρμογών της αριθμητικής Fibonacci. Εξετάζουμε σε αυτό το κεφάλαιο μια απλή ηλεκτρονική συσκευή για την πραγματοποίηση της συνέλιξης Fibonacci. Σαν βάση της συσκευής συνελίξεων μπορούμε να επιλέξουμε τον δυαδικό καταχωρητή που αποτελείται από flip-flops. Αυτός ο καταχωρητής έχει τα λογικά κυκλώματα για την εκτέλεση των συνελίξεων. Κάθε ψηφίο του καταχωρητή περιλαμβάνει δυαδικό flip-flop και τα λογικά στοιχεία. Η "συνέλιξη" ($011 \rightarrow 100$) μπορεί να παρουσιαστεί ως αντιστροφή των καταστάσεων των flip-flop. Η αντιστροφή της κατάστασης του flip-flop εκτελείται πολύ εύκολα για το flip-flop με τις ρυθμιζόμενες και μετρούμενες εισόδους.

Μια από τις πιθανές παραλλαγές του καταχωρητή συνελίξεων εμφανίζεται στο κύκλωμα. Ο καταχωρητής "συνελίξεων" αποτελείται από τα πέντε R-S FFs και τα λογικές πύλες AND, OR οι οποίες προορίζονται για την πραγματοποίηση της συνέλιξης. Η "συνέλιξη" εκτελείται από το χαμηλότερο flip-flop $T1$ προς το υψηλότερο flip-flop $T5$ με τη βοήθεια των λογικών στοιχείων $AND1 - AND5$ και τα αντίστοιχα λογικά στοιχεία OR πριν από τις RS εισόδους των flip-flops. Το λογικό στοιχείο-πύλη $AND1$ πραγματοποιεί τη "συνέλιξη" του 1ου ψηφίου στο 2ο ψηφίο. Οι δύο εισοδοί της πύλης συνδέονται με την άμεση έξοδο του flip-flop $T1$ και την αντίστροφη έξοδο του flip-flop $T2$. Η τριών ψηφίων είσοδος συνδέεται με την είσοδο C του συγχρονισμού. Το λογικό στοιχείο $AND1$ αναλύει τις καταστάσεις $Q1$ και $Q2$ του flip-flops $T1$ και του $T2$. Εάν $Q1 = 1$ και $Q2 = 0$ αυτό σημαίνει ότι ο όρος "συνελίξεων" τηρείται για τα 1α και 2α ψηφία. Το σήμα συγχρονισμού $C = 1$ προκαλεί μια εμφάνιση του λογικού 1 στην έξοδο του στοιχείου $AND1$. Το τελευταίο προκαλεί τη μετατροπή του flip-flops $T1$ και του $T2$. Αυτό οδηγεί στη συνέλιξη ψηφίων ($01 \rightarrow 10$). Το λογικό στοιχείο $ANDk$ του K -ψηφίο ($K = 2 \dots 3 \dots 4, 5$) πραγματοποιούν τη "συνέλιξη" ($K - 1$) ψηφίου και του K -ψηφίου. Τρεις εισοδοί της συνδέονται με τα άμεσα αποτελέσματα των flip-flops T_{k-1} και T_k και την αντίστροφη έξοδο flip-flop T_{k+1} . Η 4η είσοδος συνδέεται με την είσοδο συγχρονισμού C . Το λογικό στοιχείο $ANDk$ αναλύει τις καταστάσεις Q_{k-1} , Q_k και Q_{k+1} flip-flops T_{k-1} , T_k και T_{k+1} . Εάν $Q_{k-1} = 1$, $Q_k = 1$ και $Q_{k+1} = 0$ αυτό σημαίνουν ότι ο όρος της συνέλιξης διατηρείται. Το σήμα συγχρονισμού $C = 1$ οδηγεί στη αντιστροφή των flip-flops T_{k-1} , T_k , και T_{k+1} . Οπότε η συνέλιξη των αντίστοιχων ψηφίων ($011 \oplus 100$) τελειώνει. Σημειώστε ότι όλα τα στοιχεία-πύλες $AND1 - AND5$ συνδέονται μέσω του κοινού στοιχείου ORc με την έξοδο ελέγχου του καταχωρητή συνελίξεων. Ο καταχωρητής συνελίξεων στο σχέδιο λειτουργεί με τον ακόλουθο τρόπο. Οι πληροφορίες κώδικα εισόδου στέλνονται

στις εισόδους πληροφοριών 1 - 5 του καταλόγου συνελίξεων και εισάγουν τις S-εισόδους flip-flops μέσω των αντίστοιχων λογικών στοιχείων-πυλών OR.



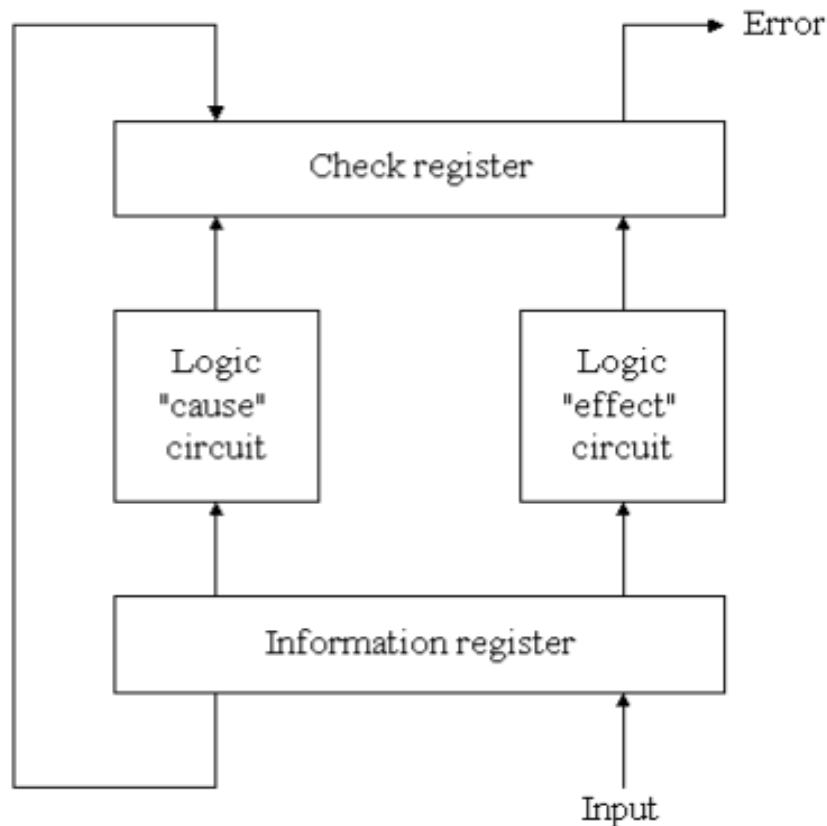
Ο καταχωρητής συνελίξεων διαδραματίζει έναν σημαντικό ρόλο στον επεξεργαστή Fibonacci ως αυτοδιορθώμενη(self-checking) συσκευή. Ας εξετάσουμε τον καταχωρητή συνελίξεων του κυκλώματος από αυτήν την άποψη. Οι έξοδοι των λογικών στοιχείων $AND_1 - AND_5$ του καταχωρητή συνελίξεων του σχήματος συνδέονται με την έξοδο ελέγχου του καταχωρητή μέσω του κοινού στοιχείου OR. Αυτή η έξοδος διαδραματίζει έναν σημαντικό ρόλο ως έξοδος ελέγχου του καταχωρητή συνελίξεων. Προκύπτει από το τρόπο λειτουργίας του καταχωρητή συνελίξεων ότι το λογικό 1 εμφανίζεται στην έξοδο ελέγχου μόνο για δύο καταστάσεις:

- Ο συνδυασμός δυαδικού κώδικα που γράφεται στον καταχωρητή "συνελίξεων" δεν έχει την ελάχιστη μορφή. Σημαίνει ότι ο όρος συνελίξεων ισχύει ακόμη και για αυτόν τρία γειτονικά flip-flops του καταχωρητή "συνελίξεων". Αυτό προκαλεί την εμφάνιση του λογικού 1 στην έξοδο του αντίστοιχου στοιχείου *AND*. Ως εκ τούτου σε αυτήν την περίπτωση η εμφάνιση του λογικού 1 στην έξοδο ελέγχου του καταχωρητή συνελίξεων δείχνει ότι η διαδικασία συνελίξεων δεν τελειώνει. Αυτό σημαίνει ότι έχουμε μια δυνατότητα να δείξουμε τη λήξη της διαδικασίας συνελίξεων με τη βοήθεια της παρατήρησης της εξόδου ελέγχου του καταχωρητή "συνελίξεων".
- Η εμφάνιση του σταθερού λογικού 1 στην έξοδο ελέγχου είναι η ένδειξη της βλάβης στον καταχωρητή συνελίξεων. Ως εκ τούτου ο καταχωρητής συνελίξεων είναι η φυσική self-checking συσκευή.

Για τη "ερμηνεία" του η καθιέρωση της αλληλοεπικοινωνίας μεταξύ του "αιτίου" και του "αιτιατού" πραγματοποιείται με τη χρησιμοποίηση flip-flop ελέγχου. Η "αιτία" οργανώνει αντίστοιχο "flip-flop ελέγχου" στην κατάσταση 1 αλλά η σωστή εκπλήρωση της μικροϋπολογιστικής-λειτουργίας αναγκάζει τα "flip-flop ελέγχου" να μεταβούν στην κατάσταση 0. Εάν τα "flip-flop ελέγχου" μεταβούν στην κατάσταση 1 αυτό το γεγονός είναι η ένδειξη σφάλματος. Ο έλεγχος των πληροφοριών "που γράφονται" στον καταχωρητή εκπληρώνεται με τη βοήθεια της σύγκρισης των πληροφοριών εξόδου των καταχωρητών μετά από το "γράψιμο" με τις πληροφορίες εισόδου καταλόγων. Εάν αναλύσουμε τα "αίτια" και τα "αιτιατά" για κάθε βασική μικροϋπολογιστική-λειτουργία καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι κάθε "επίδραση" είναι η αντιστροφή "της αιτίας της", δηλαδή όλες οι μικροϋπολογιστικές-λειτουργίες θα μπορούσαν να μειωθούν στην αντιστροφή των ψηφίων (flip-flops) που περιλαμβάνονται στις μικροϋπολογιστικές-λειτουργίες.

Το block diagram δεδομένων της μονάδας Fibonacci για την πραγματοποίηση της αρχής "της αιτία-επίδρασης" εμφανίζεται στο παρακάτω σχέδιο. Η μονάδα του σχεδίου αποτελείται από τους καταχωρητές πληροφοριών και ελέγχου, οι οποίοι συνδέονται με τη βοήθεια των λογικών κυκλωμάτων "αιτίου" και "αιτιατού". Το λογικό κύκλωμα "αιτίας" αναλύει τις πληροφορίες κώδικα που εισάγονται στον καταχωρητή πληροφοριών μέσω της "εισόδου". Ως εκ τούτου, εάν έχουμε τον συνδυασμό μηδενικών στον καταχωρητή ελέγχου μετά από τη λήξη όλων των διαδικασιών του μικροϋπολογιστή σημαίνει ότι όλες οι "αιτίες" αντιστοιχούν "στα αποτελέσματά τους", δηλ. όλες οι διαδικασίες του μικροϋπολογιστή εκτελούνται σωστά. Εάν ο κατάλογος ελέγχου περιέχει τουλάχιστον το μόνο δυαδικό 1 σε κάποιο flip-flop αυτό σημαίνει ότι τουλάχιστον η μόνη βασική λειτουργία μικροϋπολογιστών δεν είναι σωστή. Το σημαντικότερο πλεονέκτημα της αρχής ελέγχου "αιτίας - επίδρασης", που πραγματοποιείται στη μονάδα Fibonacci του block-diagram, είναι η ανίχνευση των σφαλμάτων στη στιγμή της εμφάνισής τους. Η διόρθωση του σφάλματος

της μικροϋπολογιστικής-λειτουργίας πραγματοποιείται από την επανάληψη αυτής της μικροϋπολογιστικής-λειτουργίας.



Η πιο πάνω αναφερόμενη λειτουργία της αρχής "αιτίας - αποτελέσματος" τέθηκε στη βάση της αυτοδιορθώμενης(self-checking) μονάδας Fibonacci, η οποία υλοποιήθηκε με την χρήση της τεχνολογίας LSI. Η μονάδα πραγματοποιεί τις ακόλουθες μικροϋπολογιστικές-λειτουργίες: γράψιμο, ανάγνωση, συνέλιξη, μετάβαση, αντικατάσταση, απορρόφηση, πρόσθεση Fibonacci, αφαίρεση Fibonacci, μείωση στην ελάχιστη μορφή, κυκλική μετατόπιση. Η διαθεσιμότητα στην έξοδο ελέγχου του bit-σφάλματος είναι το σημαντικό πλεονέκτημα της μονάδας Fibonacci. Εάν στην έξοδο ελέγχου εμφανισθεί το δυαδικό σήμα 1 ("σφάλμα") όλα τα ενημερωτικά αποτελέσματα της μονάδας εμποδίζονται. Για να διορθώσει το "σφάλμα" είναι απαραίτητο να επαναληφθεί η προηγούμενη μικροϋπολογιστική-λειτουργία.

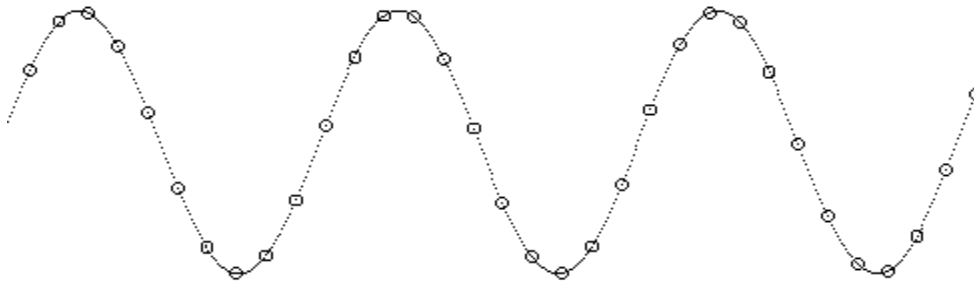
Εάν προκύψει το δυαδικό σήμα 0 στην έξοδο "του σφάλματος" αυτό σημαίνει ότι το "σφάλμα" είναι αποτέλεσμα "μόνιμης βλάβης" στην μονάδα. Αυτή η μονάδα Fibonacci μπορεί να χρησιμοποιηθεί για το σχεδιασμό επεξεργασιών "ανίχνευσης βλαβών" με τη χρήση δύο αυτοδιορθώμενων (self-checking) μονάδων Fibonacci.

Εφαρμογές και χρήση των επεξεργασιών Fibonacci έχουμε στην επεξεργασία σύγχρονων κρυπτογραφικών συστημάτων. Πολλά κρυπτογραφικά συστήματα είναι βασισμένα στους υπολογισμούς μεγάλων πεπερασμένων πεδίων. Η υλοποίηση(hardware) τέτοιων υπολογιστικών μονάδων ή

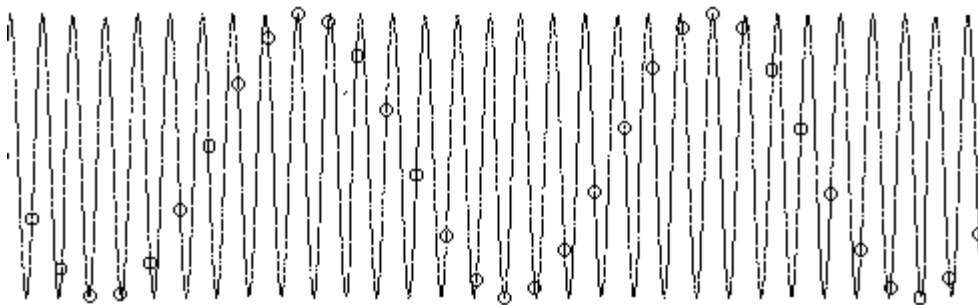
επεξεργαστών απαιτεί χιλιάδες πύλες λογικής. Είναι δύσκολη και δαπανηρή η ανάπτυξη τέτοιων υπολογιστικών μονάδων ή επεξεργαστών με τη χρήση χιλιάδων πυλών λογικής, όπου πάντα παραμονεύει κάποιο σφάλμα κατασκευής. Αυτό σημαίνει ότι η ανάπτυξη των επεξεργαστών Fibonacci είναι λύση για αξιόπιστους υπολογισμούς στο σημαντικό πρόβλημα σχεδιασμού αξιόπιστων κρυπτογραφικών συστημάτων.

Τεχνολογικές εφαρμογές στην επεξεργασία σημάτων της άλγεβρας Fibonacci

Η επόμενη εικόνα δείχνει τη δειγματοληψία από ένα αναλογικό ημιτονικό σήμα, με σκοπό να ληφθούν τα στοιχεία για τη δημιουργία ενός CD. Για κάθε δείγμα μια ψηφιακή λέξη παράγεται και αποθηκεύεται. Ένας ψηφιακός παλμογράφος χρησιμοποιεί την ίδια ιδέα.



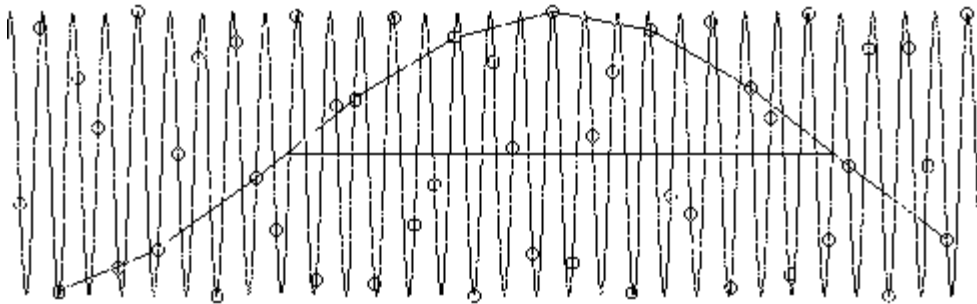
Σε ένα CD υπάρχει ένας αναλογικός σε ψηφιακό μετατροπέας(ADC) που μετατρέπει τα ψηφιακά στοιχεία στα αναλογικά σήματα, με τη βοήθεια κάποιου φιλτραρίσματος. Μπορείτε να δείτε ότι από τα μαύρα σημεία στοιχείων, δεν πρέπει να είναι δύσκολο να επαναδημιουργηθεί κάτι πολύ παρόμοιο με το ημιτονικό σήμα.



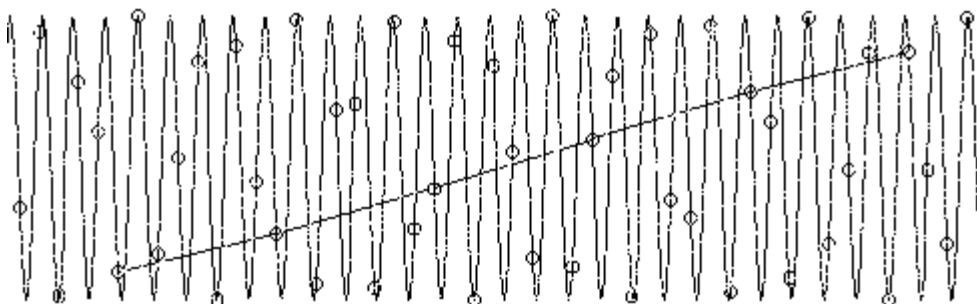
Αν και η συχνότητα σημάτων έχει αυξηθεί κατά έναν παράγοντα δέκα, τα δείγματα δεν απεικονίζουν αυτό. Η περίοδος του ημιτόνου που αντιπροσωπεύεται από τα μαύρα στοιχεία είναι πραγματικά λίγο πιά μεγαλύτερη από πριν. Η συχνότητα σημάτων είναι πάρα πολύ υψηλή για το δείγμα-ποσοστό, που έχει το σύστημα. Το σήμα στο CD έχει μεταλλαχθεί σε περίπου 44 kHz, έτσι ώστε το τμήμα υψηλότερης συχνότητας που θα μπορούσε να καταγραφεί σωστά

είναι σε 22 kHz. Ένα σήμα σε 23 kHz θα ακουόταν ως 21 kHz, 24 kHz ως 20 kHz, και τα λοιπά. Αυτές οι ψεύτικες συχνότητες καλούνται ψευδώνυμα. Βλέπετε αυτό στις ταινίες του κινηματογράφου, όταν μπορούν να εμφανιστούν οι ρόδες βαγονιών εμπορευμάτων να περιστρέφονται στη λανθασμένη κατεύθυνση. Το βλέπετε επίσης σε τουρμπίνες ενός αεροσκάφους ξεκινούν και επιταχύνονται έπειτα. Ο προωστήρας θα αρχίσει κατά τρόπο κανονικό, και θα εμφανιστεί έπειτα να επιβραδύνει και να πηγαίνει προς τα πίσω, αντίστοιχος στις αρνητικές συχνότητες. Αυτό συμβαίνει επειδή η κινούμενη εικόνα αποτελείται από πολλές ακίνητες εικόνες που προβάλλονται στη διαδοχή. Παρά όλες τις δεξιότητες της βιομηχανίας κινηματογράφων, **καμία δεν μπορεί να αγνοήσει τη θεωρία δειγματοληψίας, η οποία απαιτεί εκεί να είναι τουλάχιστον δύο δείγματα ανά κύκλο στη μέγιστη συχνότητα σημάτων.** Αυτό που συμβαίνει στα συστήματα δειγματοληψίας είναι ότι το φάσμα συχνότητας είναι διπλωμένο επάνω και συσκευασμένο σε μια ζώνη που πηγαίνει μόνο στη μισή συχνότητα δειγματοληψίας. Και αυτός είναι αυτό που βλέπουμε στις εγκαταστάσεις. Αυτοί οι **αριθμοί Fibonacci** είναι ψευδώνυμα των πραγματικών διαδικασιών και των συχνότητων. Οι επόμενες τρεις εικόνες παρουσιάζουν το αποτέλεσμα της χρησιμοποίησης κάθε 5ου σημείου, κάθε 8ου σημείου, κάθε 13ου σημείου, και κάθε 21ου σημείου, σε μία σειρά των κύκλων των οποίων η συχνότητα αφορά τη δειγματοληψία-ποσοστό από τη **χρυσή αναλογία**. Σημειώστε πώς οι γραμμές ισιώνουν προς τα έξω όσο το διάστημα αυξάνεται, που αντιστοιχούν σε μεγάλες περιόδους του σήματος-πληροφορίας.

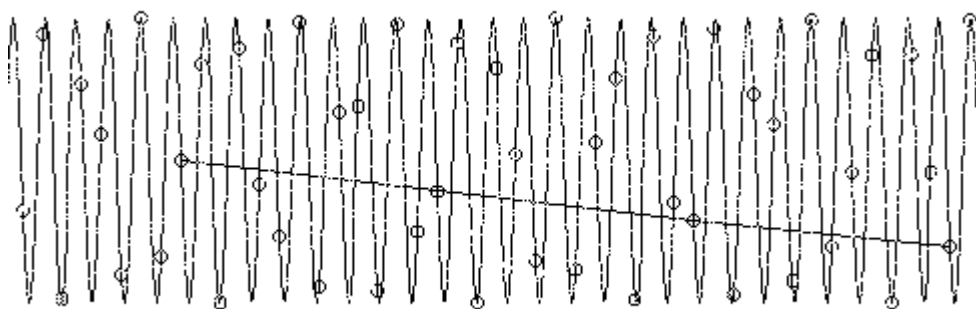
Every 5th point



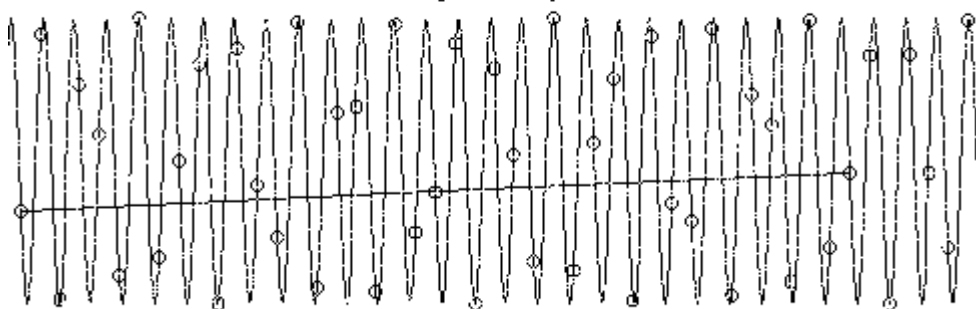
Every 8th point



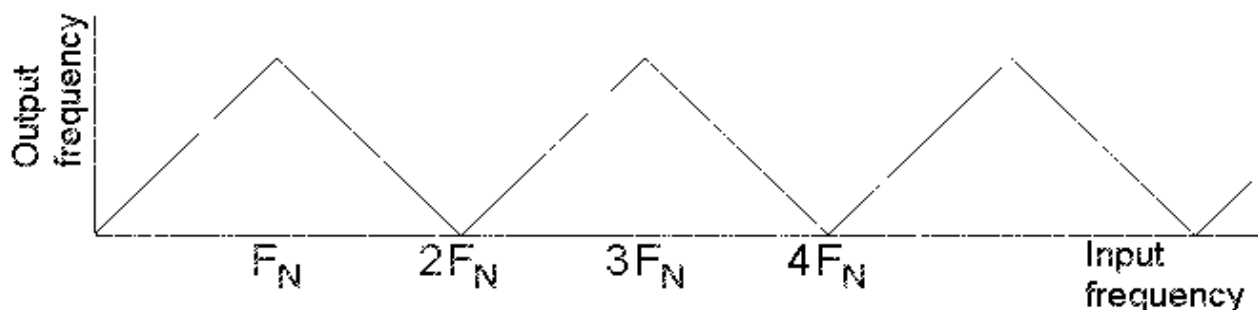
Every 13th point



Every 21st point

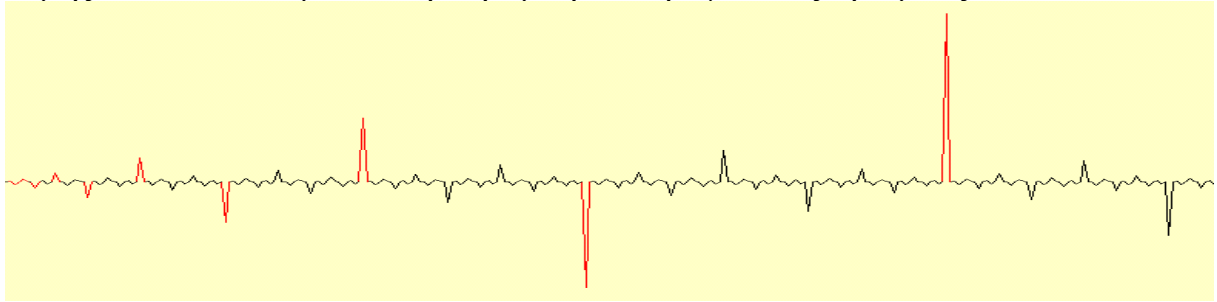


Η επόμενη εικόνα παρουσιάζει συχνότητα εξόδου (άξονας Y) συναρτήσει της συχνότητας εισόδου (άξονας X). Μόνο οι συχνότητες εισαγωγής μέχρι F_N - η συχνότητα Nyquist - έχουν οποιαδήποτε πιθανότητα της καταγραφής σωστά. Το F_N είναι το ένα δεύτερο της συχνότητας δειγματοληψίας. Σημειώστε ότι εάν ένα σήμα αποτελεσθεί από ένα σφάλμα περιόδου τριών κύκλων ενός ημιτόνου 1 kHz, ένα ποσοστό δειγματοληψίας 2 kSa/s δεν θα αρκέσει. Το εύρος ζώνης ενός τέτοιου σήματος είναι περισσότερο από 1 kHz, επειδή το σήμα περιλαμβάνει αποτελεσματικά ένα 1 kHz ημίτονο, εύρος που διαμορφώνεται από έναν απότομο παλμό 3msec. Οι πλευρικές ζώνες συχνοτήτων που απαιτούνται για να χαρακτηρίσουν αυτό είναι εκτενείς.



Η επόμενη εικόνα παρουσιάζει το φάσμα των περιόδων ενός ψευδωνύμου για $N = 1$ έως 300. Βλέπουμε σαφώς την αιχμή στο κόκκινο στους Fibonacci αριθμούς 2.3.5.8.13.21.34.55.89.144 και 233, που αντιστοιχούν στα μακροχρόνια μήκη κύματος ανωτέρω. Μεταξύ αυτών, για τα σημεία τμημάτων, υπάρχουν θυγατρικές αιχμές, και στο χρυσό τμήμα εκείνοι, ακόμα μικρότερες αιχμές.

Αυτό είναι ένα σημαντικό διάγραμμα. Χρησιμοποιώντας μόνο το τμήμα χρυσής τομής - GS - και καμία άλλη παράμετρο, παράγει τους αριθμούς Fibonacci.



Τέλος, κατωτέρω, το διάγραμμα αντιπροσωπεύει τη σειρά των τιμών $N = 0$ έως 1000, συμπεριλαμβανομένων των αριθμών Fibonacci 377 ..610 και 987, με τη διαίρεση των κάθετων τιμών με το N , για να παρουσιάσουν πολλαπλάσια χρυσά τμήματα πιά σαφώς. Αυτοί παρουσιάζονται από οριζόντιες γραμμές. Οι σύντομες οριζόντιες γραμμές χαρακτηρίζουν τα δύο χρυσά σημεία τμημάτων (GS) σε κάθε τμήμα. Εάν το μήκος μιας μακροχρόνιας οριζόντιας γραμμής λαμβάνεται ως 1, κατόπιν τα τρία τμήματα έχουν τα μήκη GS^2 , GS^3 και GS^2 αντίστοιχα. GS^2 και GS^3 προσθέτει GS.

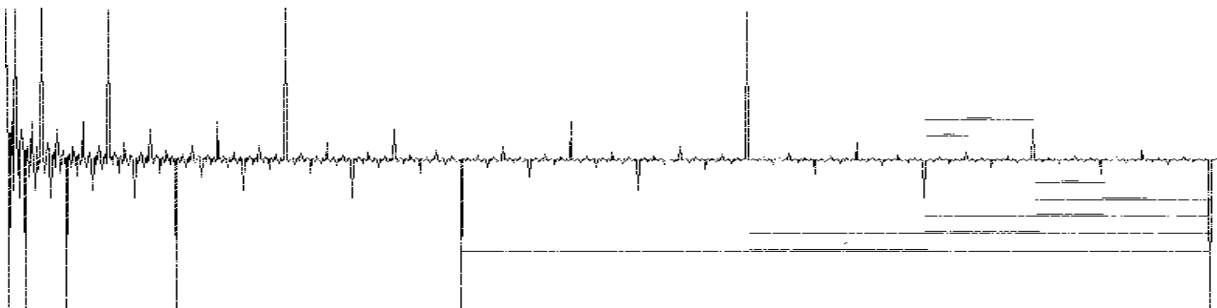
Οι τιμές είναι -

$GS=0.618033989...$

$GS^2=0.3819659...$

$GS^3=0.2360678...$

Το διάγραμμα μοιάζει με ένα μονοδιάστατο fractal.



ΕΠΙΛΟΓΟΣ

Η παραπάνω εργασία είχε θέμα την άλγεβρα των αριθμών Fibonacci και τη χρυσή τομή. Έγινε μια σύντομη παρουσίαση των επιμέρους κεφαλαίων της συγκεκριμένης άλγεβρας αριθμών. Αναφέρθηκε περιληπτικά –και όσο συντομότερα γινόταν- η εμφάνιση των αριθμών Fibonacci στο φυσικό κόσμο(ανθοκομία, δενδροκομία). Μετά ακολούθησαν οι τεχνολογικές εφαρμογές της, στην επιστήμη των ηλεκτρονικών υπολογιστών – ψηφιακά ηλεκτρονικά και και τέλος καταλήξαμε στις έννοιες των τηλεπικοινωνιών – επεξεργασίας σήματος.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- Δ.Α. Γεωργίου , “Εισαγωγή στα διακριτά μαθηματικά για την επιστήμη των H / Y ” , εκδόσεις Δ.Π.Θ. 1996.
- S. Lipschutz & M. Lipson , “Διακριτά Μαθηματικά” , εκδοσείς Τζιόλα - σειρά Schaum 2003.
- Verner E. Hoggatt , “Αριθμοί Fibonacci και Lucas” , εκδόσεις Gutenberg Αθήνα 1983.
- <http://www.mcs.surrey.ac.uk/Personal/R.Knott/Fibonacci/>
- <http://www.branta.connectfree.co.uk/fibonacci.htm>
- <http://mathworld.wolfram.com/FibonacciNumber.html>
- http://www.goldenmuseum.com/index_engl.html
- <http://www.win.ua.ac.be/~vanhoudt/graph/graph5.pdf>