

Ελάχιστες Μορφές

5η διάλεξη στα πλαίσια
του μαθήματος Διακριτά
Μαθηματικά

Πίνακες Karnaugh

Παράδειγμα εφαρμογής του πίνακα Karnaugh για την εύρεσης της ΣΔΜ

Έστω η πρόταση $f = abc + ab'c + ab'c' + abc'$

Πίνακες Karnaugh

Έστω η πρόταση $f = abc + ab'c + ab'c' + abc'$

Σχεδιάζεται ο πίνακας

	b	b'	b	b'	
	111	101	011	001	c
	110	100	010	000	c'
	a		a'		

Πίνακες Karnaugh

Έστω η πρόταση $f = abc + ab'c + ab'c' + abc'$

Διαγράφονται οι καταχωρήσεις,
που δεν αντιστοιχούν σε όρους της f

b	b'	b	b'		
111	101	011	001	0	c
110	100	010	000	1	c'
		a	a'		

Πίνακες Karnaugh

Έστω η πρόταση $f = abc + ab'c + ab'c' + abc'$

Κυκλώνουμε τα στοιχεία που διατηρούν το ίδιο ψηφίο τις περισσότερες φορές

b	b'	b	b'	
111	101			0 c
110	100			1 c'
		a	a'	

Πίνακες Karnaugh

Έστω η πρόταση $f = abc + ab'c + ab'c' + abc'$

Το b διατηρεί το ίδιο ψηφίο 2 μόνο φορές

	b	b'	b	b'	
0	111	101			c
1	110	100			c'
	a		a'		

Πίνακες Karnaugh

Έστω η πρόταση $f = abc + ab'c + ab'c' + abc'$

Το a διατηρεί το ίδιο ψηφίο 4 φορές

	b	b'	b	b'	
	111	101			0 c
	110	100			1 c'
	a		a'		

Συμπέρασμα : Η f έχει ισοδύναμη πρόταση την $f_1 = a$

Όροι σε ομοφωνία (Consensus Law)

- Οι όροι u και v βρίσκονται σε ομοφωνία αν ακριβώς ένα γραμματικό στοιχείο του u έχει την άρνησή του στο v .
- $a \wedge b \wedge c$ και $a \wedge b \wedge c'$
- $a \wedge b'$ και $b \wedge c \wedge d$
- $a \wedge b'$ και $b' \wedge c \wedge d$

Γραμματικό Στοιχείο
σε ομοφωνία

Γραμματικό Στοιχείο
σε ομοφωνία

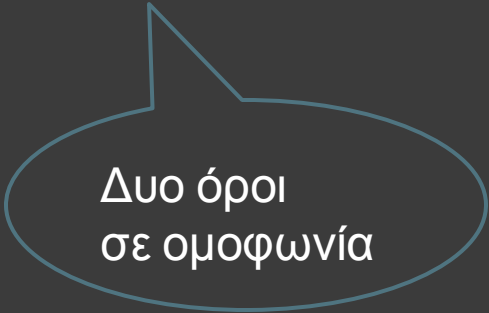
Όροι σε ομοφωνία (Consensus Law)

- Όρος σε ομοφωνία είναι το αποτέλεσμα της διάζευξης των όρων και την παράλειψη του γραμματικού στοιχείου σε ομοφωνία.
- $(a \wedge b \wedge c) \vee (a \wedge b \wedge c') = (a \wedge b)$
- $a \wedge b'$ και $b \wedge c \wedge d$
- $a \wedge b'$ και $b' \wedge c \wedge d$

Όρος σε ομοφωνία

Νόμος της ομοφωνίας

- $(x \wedge z) \vee (y \wedge z') \equiv (x \wedge z) \vee (y \wedge z') \vee (x \wedge y)$



Δυο όροι
σε ομοφωνία

ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ : Εύρεση της εν ομοφωνία επέκτασης μιας πρότασης f σε Σ.Δ.Μ.

1. Αν υπάρχουν δυο όροι που παράγουν ένα όρο σε ομοφωνία (ο οποίος δεν περιέχει ένα όρο που βρίσκεται ήδη στην πρόταση), επιλέξτε τους και ενισχύστε την πρόταση με τον όρο σε ομοφωνία. Σε άλλη περίπτωση ο έλεγχος στο 3.
2. Διαγράψτε τους όρους που περιέχουν τον νέο όρο. Ο έλεγχος στο 1.
3. **STOP.** Η μορφή περιέχει όλους τους όρους μιας ελάχιστης μορφής της f .

Παράδειγμα:

Η πρόταση είναι σε Σ.Δ.Μ.

$$\odot f \equiv (a \wedge b \wedge c) \vee (a \wedge c') \vee (a \wedge b \wedge d') \vee (a' \wedge c) \vee (a' \wedge b' \wedge c' \wedge d')$$

1 2 3 4 5

Οι όροι 1 και 2 είναι σε ομοφωνία με όρο σε ομοφωνία “1-2 (αΛb)”

Ο όρος (αΛb) δεν περιέχει άλλον όρο και για αυτό τον συμπεριλαμβάνουμε στην πρόταση

$$(a \wedge b \wedge c) \vee (a \wedge c') \vee (a \wedge b \wedge d') \vee (a' \wedge c) \vee (a' \wedge b' \wedge c' \wedge d') \vee (a \wedge b)$$

1 2 3 4 5 6

Οι όροι 1 και 3 περιέχουν τον 6 και για αυτό απαλείφονται.

$$\dots\dots\dots(a \wedge c') \dots\dots\dots \vee (a' \wedge c) \vee (a' \wedge b' \wedge c' \wedge d') \vee (a \wedge b)$$

1 2 3 4 5

Οι όροι 2 και 4 δεν βρίσκονται σε ομοφωνία : γράφουμε “2-4”

$$\text{“2-5 (b' \wedge c' \wedge d')”}$$

7

$$f \equiv (a \wedge c') \vee (a' \wedge c) \vee (a' \wedge b' \wedge c' \wedge d) \vee (a \wedge b) \vee (b' \wedge c' \wedge d')$$

2
4
5
6
7

Σβήστε το

2-6

2-7

4-6 $b \wedge c$
8

$$f \equiv (a \wedge c') \vee (a' \wedge c) \vee (a' \wedge b' \wedge c' \wedge d) \vee (a \wedge b) \vee (b' \wedge c' \wedge d') \vee (b \wedge c)$$

2
4
5
6
7
8

2-8 $a \wedge b$

Ο έλεγχος πήγε πίσω γιατί προστέθηκε ο όρος 8

4-7 $(a' \wedge b' \wedge d')$
9

2-9 $(b' \wedge c' \wedge d')$
10

4-8

4-9

6-7 περιέχει το 2

$$f \equiv (a \wedge c') \vee (a' \wedge c) \vee (\alpha \wedge b) \vee (b' \wedge c' \wedge d') \vee (b \wedge c) \vee (a' \wedge b' \wedge d') \vee (b' \wedge c' \wedge d')$$

2
4
6
7
8
9
10

4-8

4-9

6-7 $a \wedge c' \wedge d'$ (περιέχει το 2)

6-8

6-9

7-8

7-9

8-9 $a' \wedge c \wedge d'$ (περιέχει το 4)

STOP

$$f \equiv (a \wedge c') \vee (a' \wedge c) \vee (\alpha \wedge b) \vee (b' \wedge c' \wedge d') \vee (b \wedge c) \vee (a' \wedge b' \wedge d')$$

Ορισμός:

Πλήρης όρος καλείται ένας όρος της πρότασης αν περιλαμβάνει όλα τα γραμματικά στοιχεία ή τις αρνήσεις τους.

Ορισμός:

Επέκταση πλήρους όρου μιας πρότασης f καλείται μια Δ.Μ. που περιλαμβάνει όλους τους πλήρεις όρους της f .

ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ : Εύρεση της επέκτασης πλήρους όρου.

1. Για κάθε όρο y γράψτε τη διάζευξη $y \vee u$, όπου u γραμματικό στοιχείο της f του οποίου τόσο η άρνηση, όσο και το ίδιο δεν περιλαμβάνεται στον y
2. Σχηματίστε τη σύζευξη της y και όλων των διαζεύξεων, που είναι γραμμένες στο βήμα 1.
3. Ξαναγράψτε το αποτέλεσμα του βήματος 2

$$f \equiv \underset{\text{A}}{(a \wedge c')} \vee \underset{\text{B}}{(a' \wedge c)} \vee \underset{\text{Γ}}{(a \wedge b)} \vee \underset{\Delta}{(b' \wedge c' \wedge d)} \vee \underset{\text{E}}{(b \wedge c)} \vee \underset{\text{Z}}{(a \wedge b' \wedge d')}$$

Τα γραμματικά στοιχεία b και d δεν βρίσκονται στον A

Γράφουμε την διάζευξη $b \vee b'$

Γράφουμε την διάζευξη $d \vee d'$

Γράφουμε τη σύζευξη $a \wedge (b \vee b') \wedge c' \wedge (d \vee d')$

Την μετατρέπουμε σε Διαζευκτική Μορφή (επέκταση πλήρους όρου).

$$(a \wedge b' \wedge c' \wedge d') \vee (a \wedge b' \wedge c' \wedge d) \vee (a \wedge b \wedge c' \wedge d') \vee (a \wedge b \wedge c' \wedge d)$$

Μια πρόταση με n γραμματικά στοιχεία
πόσους πλήρεις όρους μπορεί να έχει;

ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ : Επιλογή όλων των ελαχίστων μορφών από την επέκταση σε ομοφωνία

$$f \equiv (a\Lambda c') \vee (a'\Lambda c) \vee (\alpha\Lambda b) \vee (b'\Lambda c'\Lambda d) \vee (b\Lambda c) \vee (a\Lambda b'\Lambda d')$$

A
B
Γ
Δ
Ε
ΣΤ

Όρος	Δυαδική Μορφή	Όροι στην επέκταση πλήρους όρου (Δεκαδικό σύστημα)
A	1 _ 0 _	8, 9, 12, 13
B	0 _ 1 _	2, 3, 6, 7
Γ	1 1 _ _	12, 13, 14, 15
Δ	_ 0 0 0	0, 8
Ε	_ 1 1 _	6, 7, 14, 15
ΣΤ	0 0 _ 0	0, 2

	0	2	3	6	7	8	9	12	13	14	15
A						X	X	X	X		
B		X	X	X	X						
Γ								X	X	X	X
Δ	X					X					
Ε				X	X					X	X
ΣΤ	X	X									

Σημειώνεται ο πλήρης όρος B διότι εμφανίζεται μόνο ένας πλήρης όρος του (3) μία ακριβώς φορά στην πρόταση

	0	2	3	6	7	8	9	12	13	14	15
A						X	X	X	X		
B		X	X	X	X						
Γ								X	X	X	X
Δ	X					X					
E				X	X					X	X
ΣΤ	X	X									

Σημειώνεται και ο πλήρης όρος A διότι εμφανίζεται μόνο ένας πλήρης όρος του (9) μία ακριβώς φορά στην πρόταση .
Οι όροι A και B καλούνται ουσιώδεις όροι.

Οι συνδυασμοί των όρων Γ, Δ, E και ΣΤ ελέγχονται ως προς την συμμετοχή τους στην ελάχιστη μορφή.

	0	2	3	6	7	8	9	12	13	14	15
A						X	X	X	X		
B		X	X	X	X						
Γ								X	X	X	X
Δ	X					X					
E				X	X					X	X
ΣΤ	X	X									

Οι όροι Γ, Δ, E και ΣΤ πρέπει να συμμετέχουν επίσης. Ο πλήρης όρος 0 προκύπτει από τους Δ και ΣΤ, ο 14 από τους Γ και E ενώ ο 15 από τους Γ και E

Από αυτούς τους όρους διαμορφώνεται η Δ.Μ. που καλείται πρόταση Petric της αρχικής: **(Δ Λ ΣΤ) V(Γ Λ E) V (Γ Λ E)**

Γράψτε την πρόταση Petric σε ΣΔΜ

$$\begin{aligned} & (\Delta \wedge \Sigma \tau) \vee (\Gamma \wedge \epsilon) \vee (\Gamma \wedge \epsilon) = \\ & = (\Delta \vee \Sigma \tau) \wedge (\Gamma \vee \epsilon) = \\ & = (\Gamma \wedge \Delta) \vee (\Gamma \wedge \Sigma \tau) \vee (\epsilon \wedge \Delta) \vee (\epsilon \wedge \Sigma \tau) \end{aligned}$$

Διατηρείστε εκείνους τους όρους της petric, που έχουν τα λιγότερα γραμματικά στοιχεία (εδώ όλοι έχουν από 2 και διατηρούνται)

Από όλους τους συνδυασμούς ανά δύο των τεσσάρων όρων Γ , Δ , ϵ και $\Sigma \tau$ επιλέγω εκείνους με τον μικρότερο αριθμό γραμματικών στοιχείων σύμφωνα με τον ορισμό της ελάχιστης μορφής:

Αυτοί είναι: $(\Gamma \wedge \Delta)$ $(\Gamma \wedge \Sigma \tau)$ $(\Delta \wedge \epsilon)$ $(\epsilon \wedge \Sigma \tau)$

$$\begin{aligned} f & \equiv (\alpha \wedge c') \vee (\alpha' \wedge c) \vee (\alpha \wedge b) \vee (b' \wedge c' \wedge d') \equiv \\ & \equiv (\alpha \wedge c') \vee (\alpha' \wedge c) \vee (\alpha \wedge b) \vee (\alpha' \wedge b' \wedge d') \equiv \\ & \equiv (\alpha \wedge c') \vee (\alpha' \wedge c) \vee (b \wedge c) \vee (b' \wedge c' \wedge d') \equiv \\ & \equiv (\alpha \wedge c') \vee (\alpha' \wedge c) \vee (b \wedge c) \vee (\alpha' \wedge b' \wedge d') \end{aligned}$$