Τμήμα Δασολογίας & Διαχείρισης Περιβάλλοντος & Φυσικών Πόρων
Εργαστήριο Διευθέτησης Ορεινών Υδάτων και Διαχείρισης Κινδύνου
Προπτυχιακό Πρόγραμμα Σπουδών

ΥΔΡΑΥΛΙΚΗ ΑΝΟΙΚΤΩΝ ΑΓΩΓΩΝ

Κεφάλαιο 3ο : Εξίσωση συνέχειας της μάζας και ενεργειακή εξίσωση του BERNOULLI στους ανοικτούς αγωγούς

Φώτιος ΜΑΡΗΣ
Αναπλ. Καθηγητής

3.1 Εξίσωση συνέχειας της μάζας

Στο Σχήμα 3.1. απεικονίζεται ο στοιχειώδης «ροϊκός σωλήνας» ο οποίος σχηματίζεται από ένα σύνολο εσώκλειστων ροϊκών γραμμών. Επειδή εξ ορισμού δεν υπάρχει ροή κάθετη προς τις ροϊκές γραμμές, το ρευστό πρέπει να εισέλθει και να εξέλθει εντός του αγωγού από τα άκρα μέρη του και μόνο. Ας σημειωθεί ότι τα εμβαδά των διατομών εισόδου είναι $\delta A_1 (m^2)$ και εξόδου $\delta a_2 (m^2)$, ενώ οι αντίστοιχες ταχύτητες είναι u_1 και u_2. Είναι προφανές ότι η στοιχειώδης ***παροχή*** $\delta Q (m^3/s)$ δίνεται από την εξίσωση,

$$\¢\, Q = u_1 \¢\, A_1 = u_2 \¢\, A_2 \,, \qquad (3.1)$$

Μετά την ολοκλήρωση σε όλο τον χώρο ροής η παροχή Q θα είναι,

Σχήμα 3.1 Στοιχειώδης ροϊκός σωλήν

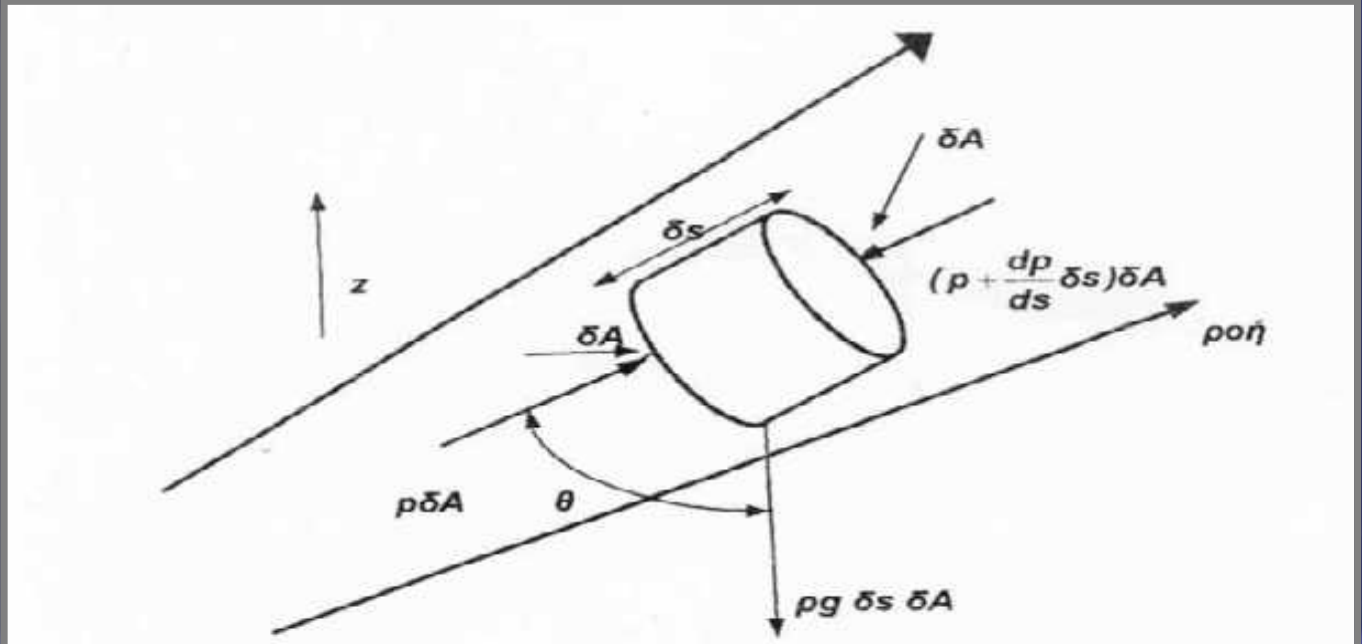
$$Q = U_1 A_1 = U_1 A_2 \qquad (3.2)$$

όπου U_1 και U_2 είναι οι μέσες τιμές των ταχυτήτων ενώ A_1 και A_2 είναι τα εμβαδά των διατομών στην είσοδο 1 και έξοδο 2, αντιστοίχως. Η τελική εξίσωση της συνέχειας της μάζας μπορεί να εκφρασθεί ως,

$$Q = UA = \pm^{2} \sim \bar{} £ ° \acute{\eta} \qquad (3.3)$$

3.2 Εξίσωση του BERNOULLI

Στο Σχήμα 3.2 απεικονίζεται ένα κυλινδρικό στοιχείο του ροϊκού σωλήνα κατά μήκος μιας ροϊκής γραμμής. Το μήκος και το εμβαδόν της διατομής είναι *δs (m)* και *δA*, αντιστοίχως. Το βάρος του στοιχείου θα είναι *ρgδsδA.* Η δύναμη η οποία επενεργεί στο οπίσθιο τμήμα είναι *ρδA (N)* ενώ στο εμπρόσθιο τμήμα είναι [p + (dp / ds) ds] *δA (N)* όπου ρ *(N/m²)* η ***στατική πίεση***.



Σχήμα 3.2 Εξισορρόπηση δυνάμεως επί ενός ροϊκού κυλινδρικού στοιχείου

Οι κάθετες δυνάμεις οι οποίες δρουν επί των πλευρικών τοιχωμάτων του στοιχειώδους κυλίνδρου βρίσκονται σε ισορροπία. Το ρευστό θεωρείται ότι είναι ***ιδεατό ή μη - συνεκτικό*** και κατά συνέπεια οι ασκούμενες διατμητικές δυνάμεις ισούται προς μηδέν. Η ταχύτητα μεταβάλλεται κατά μήκος της ροϊκής γραμμής και ως εκ τούτου υπάρχει μία δύναμη επιταχύνσεως η οποία πρέπει να ληφθεί υπ' όψιν στην εξισορρόπηση των δυνάμεων των δρώντων κατά μήκος του άξονος της ροής. Θεωρώντας το ίδιο βάρος του στοιχειώδους όγκου θα είναι,

$$-\rho g\,\delta s\,\delta A\sin\theta + p\,\delta A - \left(p + \frac{dp}{ds}\delta s\right)\delta A = \frac{\rho g\,\delta s\,\delta A}{g}\frac{du}{dt} \qquad (3.4)$$

ή

$$-\rho g\sin\theta - \frac{dp}{ds} = \rho\frac{du}{dt} \qquad (3.5)$$

Επίσης ισχύει ότι,

$$\sin\theta = \frac{dz}{ds} \qquad (3.6)$$

όπου z είναι ο κατακόρυφος άξονας, βλέπε Σχήμα 3.2. Επειδή η ροή είναι σταθερή, το οποίο σημαίνει ότι όλες οι μεταβολές των φυσικών ποσοτήτων σε αναφορά προς τον χρόνο *t(s)* είναι μηδέν, θα είναι,

$$u = \frac{ds}{dt} \qquad (3.7)$$

και άρα,

$$\frac{du}{dt} = u\frac{du}{ds} \qquad (3.8)$$

επομένως η εξίσωση (3.5) γράφεται,

$$\rho g\frac{dz}{ds} + \frac{dp}{ds} + \rho u\frac{du}{ds} = 0 \qquad (3.9)$$

ή

$$\frac{d}{ds}\left(z + \frac{p}{\rho g} + \frac{udu}{g}\right) = 0 \qquad (3.10)$$

Ολοκληρώνοντας κατά μήκος της ροϊκής γραμμής θα είναι,

$$z + \frac{p}{\circ g} + \frac{u^2}{2g} = \pm^2 \sim \bar{} £ \circ \acute{\eta} = H \qquad (3.11)$$

Η παραπάνω εξίσωση ονομάζεται ***εξίσωση του Bernoulli*** και εκφράζει την ενεργειακή εξισορρόπηση κατά την ροή του ρευστού. Εάν κάθε όρος της εξισώσεως (3.11) πολλαπλασιασθεί με το σταθερό ποσό *ρgQ*, θα είναι,

$$(\circ gQ)z + (\circ gQ)\frac{p}{pg} + (\circ gQ)\frac{u^2}{2g} = \pm^2 \sim \bar{} £ \circ \acute{o} \neg \qquad (3.12)$$

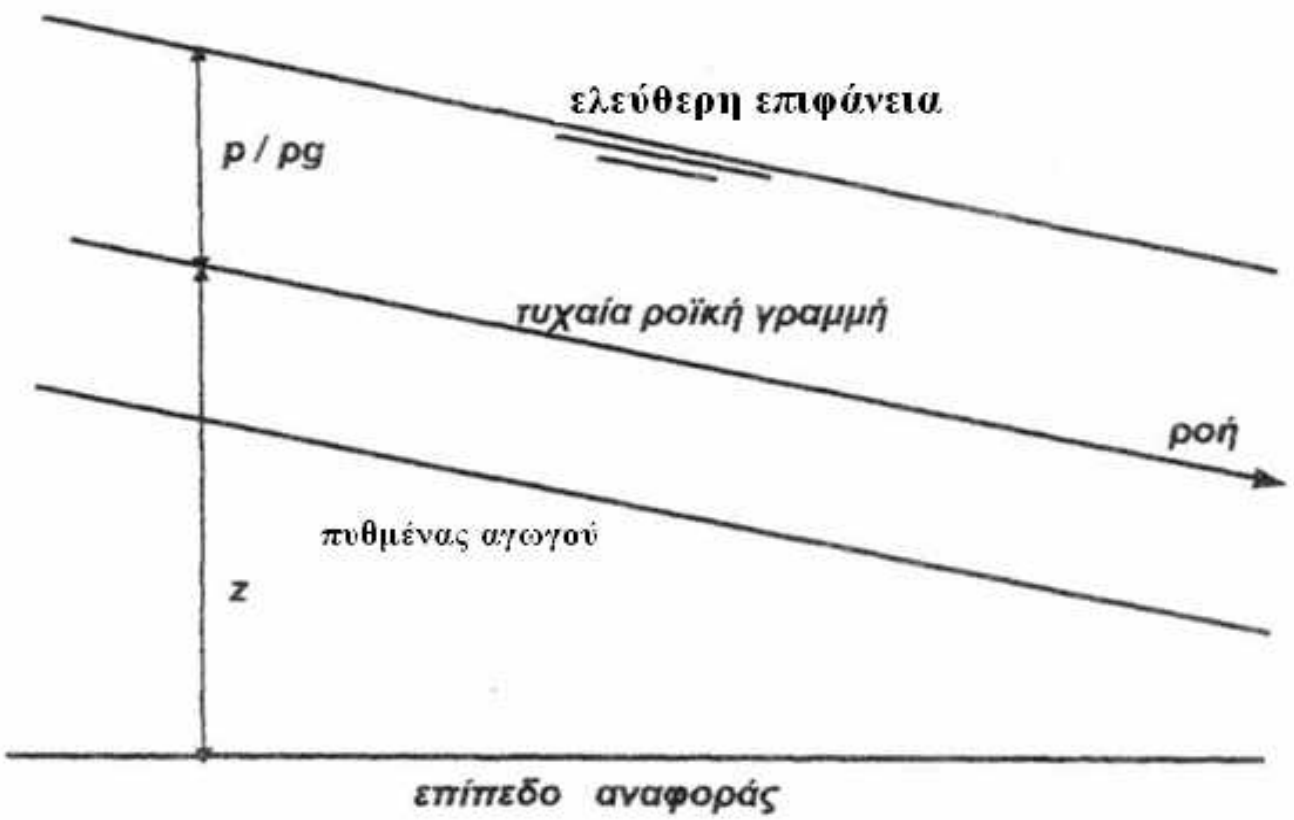
Έκαστος όρος της παραπάνω εξίσωσης έχει μονάδες ισχύος (W). Στην εξίσωση (3.11) ο κάθε όρος έχει μονάδες *(m)* και ως εκ τούτου είναι ορθότερο κάθε όρος να αναφέρεται με την έκφραση ύψος. Ο πρώτος όρος της εξίσωσης (3.11) είναι το ***ύψος*** λόγω θέσεως του ρευστού, ο δεύτερος όρος είναι το ***ύψος πιέσεως*** *του* ρευστού και ο τρίτος όρος το ***κινητικό ύψος*** του ρευστού. Το άθροισμα όλων των ανωτέρω όρων δίνει ***το ολικό ενεργειακό ύψος ή φορτίο H(m).***

3.3 Η ενεργειακή εξίσωση στους ανοικτούς αγωγούς

Στην απόδειξη της εξίσωσης Bernoulli, της ενεργειακής δηλαδή εξισώσεως, δεν γίνεται καμμιά παραδοχή σχετικά προς τα όρια του χώρου εντός του οποίου ρέει το υγρό. Ως αποτέλεσμα, η εξίσωση του Bernoulli μπορεί να εφαρμοσθεί και στους ανοικτούς αγωγούς, βλέπε Σχήμα 3.3. Πρέπει όμως να σημειωθεί ότι η εξίσωση του Bernoulli εφαρμόζεται μόνο σε σταθερή ροή. Τότε και επειδή υπάρχει ενδιαφέρον για ρευστά με σταθερή την πυκνότητα,

$$\frac{p}{\circ g} + \frac{u^2}{2g} + z = \text{σταθερή κατά μήκος μιας ροϊκής γραμμής}$$

Ο όρος *p/ρg (m)* είναι η στατική πίεση του υγρού, *u²/2g (m)* είναι το κινητικό ύψος και *z (m)* το ύψος της υπό μελέτης θέσης το οποίο μετριέται από το οριζόντιο επίπεδο. Αν οι ροϊκές γραμμές είναι ευθείες και παράλληλες, τότε η κατανομή της πιέσεως σε κάθε μία διατομή της ροής είναι ***υδροστατική.*** Ακόμη και στην περίπτωση της βαθμιαίας μεταβαλλόμενης ροής η καμπυλότητα των ροϊκών γραμμών είναι αμυδρή. Δηλαδή η πίεση κάθε σημείου εντός του χώρου ροής εξαρτάται μόνο από το κατά πόσο βρίσκεται το σημείο αυτό κάτω από την ελεύθερη επιφάνεια του ύδατος.

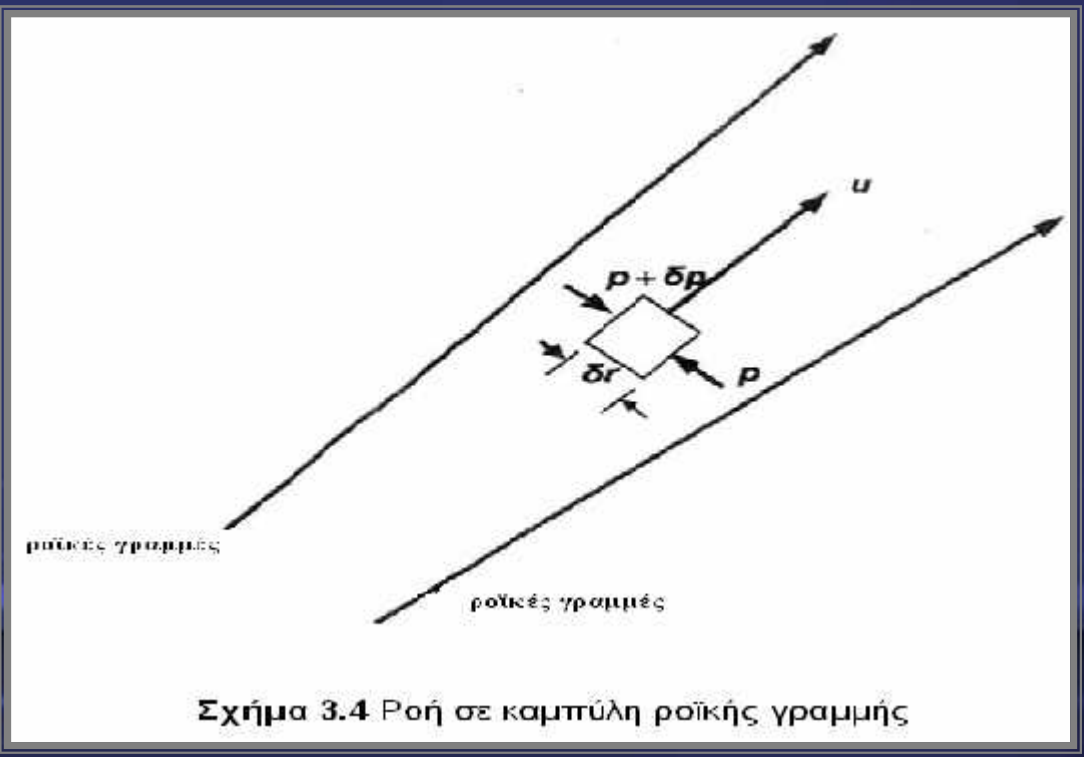


Σχήμα 3.3 Υδροστατική πίεση και ύψος από το οριζόντιο επίπεδο

3.4 Υδροστατική και μή-υδροστατική κατανομή πιέσεως

Ας θεωρηθούν οι ακτινικές δυνάμεις οι οποίες δρουν επί ενός στοιχειώδους όγκου ελέγχου ο οποίος κινείται κατά μήκος μιας καμπύλης ***ροϊκής γραμμής*****,** όπως αυτό φαίνεται στο Σχήμα 3.4. Σε δεδομένη χρονική στιγμή *t* η ταχύτητα είναι *υ* και η ακτίνα καμπυλότητας *r(m).* Η σχετική επιτάχυνση *a(m/s²), η οποία* δημιουργείται λόγω της καμπύλης τροχιάς, θα είναι,

$$a = \frac{u^2}{r} \qquad (3.13)$$



Σχήμα 3.4 Ροή σε καμπύλη ροϊκής γραμμής

Η κεντρόφυγος δύναμη *F(N)* θα είναι,

$$F = ma = \frac{\rho g}{g} \Delta r \Delta A \frac{u^2}{r} \qquad (3.14)$$

όπου δr είναι το ύψος του όγκου ελέγχου και *δA* η διατομή. Η εξισορρόπηση της δυνάμεως *F* γίνεται με την διαφορά των εξασκουμένων δυνάμεων, *ρδA* και *(ρ + δp)A* τις οποίες ασκούν οι πιέσεις μεταξύ της εσωτερικής και εξωτερικής πλευράς, αντιστοίχως,

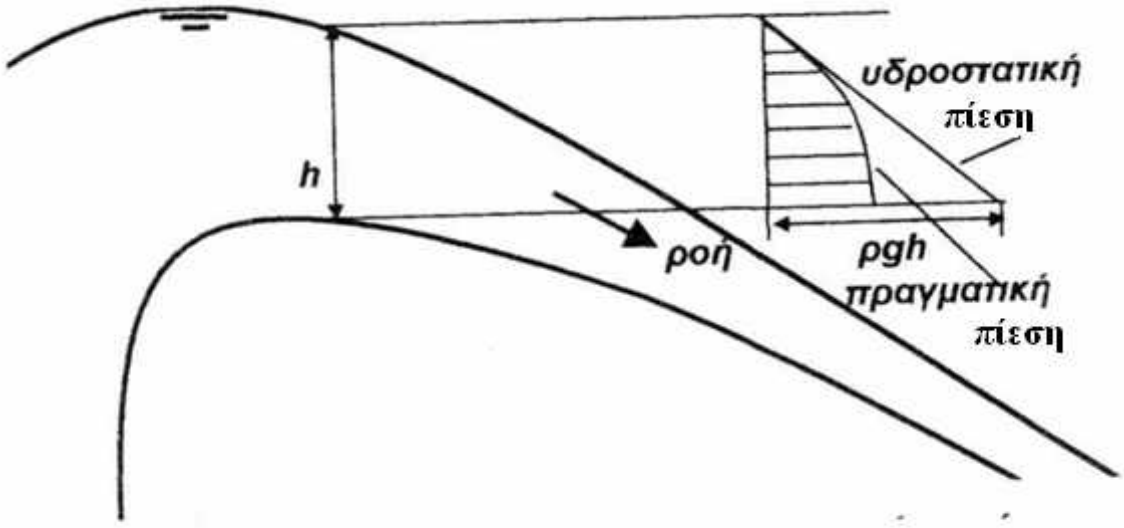
$$(p + \Delta p)\Delta A = p\Delta A + \frac{\rho g}{g} \Delta r \Delta A \frac{u^2}{r} \qquad (3.15)$$

$$\Delta p \Delta A = \frac{\rho g}{g} \Delta r \Delta A \frac{u^2}{r} \qquad (3.16)$$

ή

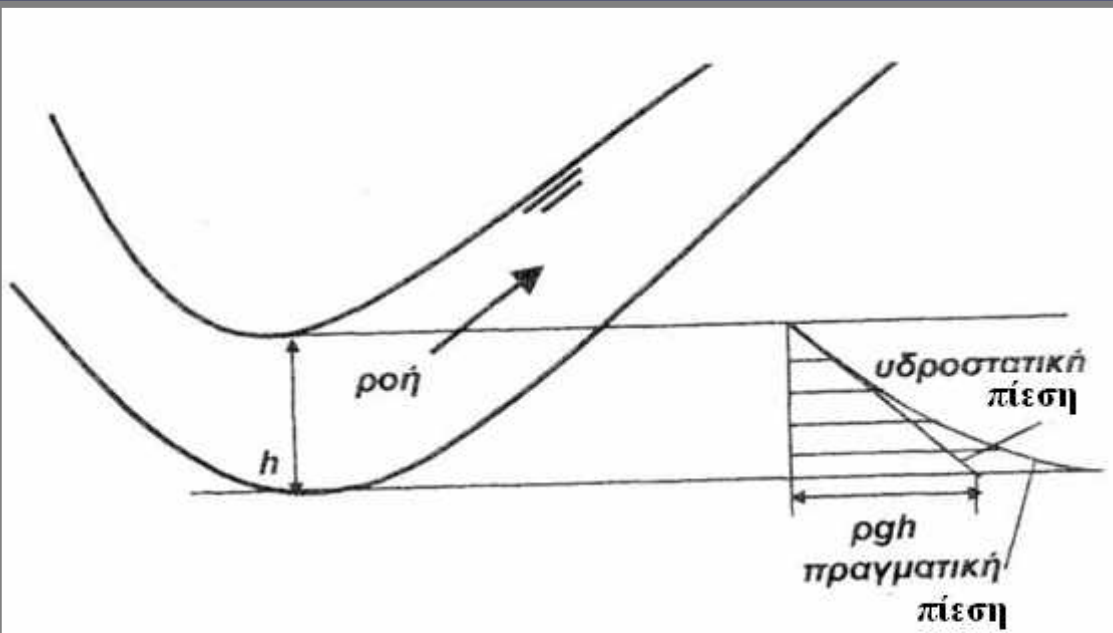
$$\frac{dp}{dr} = \frac{\rho g}{g} \frac{u^2}{r} \qquad (3.17)$$

Εάν η ακτίνα καμπυλότητας είναι πολύ μεγάλη, δηλαδή εάν $r \to \infty$ τότε dp/dr = *0* και επομένως η πίεση p είναι σταθερά κάθετη προς τις ροϊκές γραμμές. Εάν θεωρηθεί το Σχήμα 3.3, τότε η πίεση κατά το βάθος ροής είναι ***υδροστατική*** οπότε η ποσότητα *p/ρg* είναι το βάθος του ύδατος στην υπό θεώρηση ροϊκή γραμμή. Στην γενική όμως περίπτωση η ταχύτητα *u* και η ακτίνα *r* είναι άγνωστες. Στο Σχήμα 3.5. φαίνεται η ροή γύρω από κυρτή επιφάνεια με την αντίστοιχη κατανομή πιέσεως η οποία είναι ***μή-υδροστατική*.**



Σχήμα 3.5 Κατανομή πιέσεως της ροής σε κυρτή επιφάνεια

Τέτοιες περιπτώσεις εμφανίζονται πάνω στη στέψη των εκχειλιστών φραγμάτων υδροηλεκτρικών έργων. Σε ακραίες περιπτώσεις ταχύτητας και κυρτότητας η καμπύλη οδηγεί σε αρνητικές πιέσεις, πιέσεις δηλαδή με τιμές ευρισκόμενες κάτω της ατμοσφαιρικής πίεσης. Στο Σχήμα 3.6 φαίνεται η ροή πάνω στη κοίλη επιφάνεια και η αντίστοιχη κατανομή πίεσης.



Σχήμα 3.6 Κατανομή πιέσεως της ροής σε κοίλη επιφάνεια

Στην περίπτωση κατά την οποία η κλίση του ανοικτού αγωγού είναι σχετικά μεγάλη, π.χ. μεγαλύτερη του 1 προς 10, τότε είναι δυνατόν να υπάρξει τροποποίηση της τιμής της υδροστατικής πιέσεως ακόμη και αν οι ροϊκές γραμμές είναι ευθείες και παράλληλες μεταξύ τους. Όταν λοιπόν η μεταβολή της πιέσεως είναι υδροστατική, σε σημείο στο οποίο η πίεση είναι p βρίσκεται σε βάθος *p/ ρg* κάτω από την ελεύθερη επιφάνεια και έτσι το άθροισμα *p/ρg + z,* βλέπε Σχήμα 3.3, αναπαριστά το ύψος της ελεύθερης επιφάνειας του ύδατος πάνω από το επίπεδο αναφοράς. Τότε η εξίσωση του Bernoulli απλοποιείται ως εξής,

$$\acute{u}\cdot\text{-s£}^{a}\text{£}\acute{u}\bar{}\text{£}^{\circ}\text{¦s£®§}^{\cdot\cdot}\acute{a}\neg\text{£§}\sim\text{s}+\frac{u^{2}}{2g}=\pm^{2}\sim\bar{}\text{£}^{\circ}\acute{a} \qquad (3.18)$$

Διαπιστώνουμε ότι το επιμέρους ύψος μιας ροϊκής γραμμής υπεράνω του επιπέδου αναφοράς δεν συμμετέχει στην παραπάνω εξίσωση. Αν τώρα θεωρηθεί ότι σε μία διατομή η ταχύτητα είναι η ίδια για όλες τις ροϊκές γραμμές τότε η εξίσωση (3.18) ισχύει για όλη την ροή.

3.5 Διόρθωση της ενεργειακής εξίσωσης και της εξίσωσης ορμής

Στην πράξη όμως είναι σχεδόν αδύνατον να ληφθεί ομοιόμορφη κατανομή ταχύτητας σε μία διατομή. Η πραγματική κατανομή της ταχύτητας στους ανοικτούς αγωγούς δέχεται επιδράσεις και εκ των στερεών ορίων αλλά και εκ της ελεύθερης επιφάνειας του ύδατος. Οι καμπυλώσεις της ροής καθώς και η τραχύτητα των στερεών επιφανειών επιδρούν στην ταχύτητα της ροής. Οι ανωμαλίες των στερεών ορίων των ανοικτών αγωγών είναι τόσο μεγάλες και υπάρχουν σε τέτοια τυχαία κατανομή ώστε κάθε ανοικτός αγωγός έχει την δική του κατανομή ταχύτητας. Σε γενικές γραμμές είναι δυνατόν να λεχθεί ότι η μέγιστη τιμή της ταχύτητας εμφανίζεται σε σημεία τα οποία βρίσκονται λίγο πιο κάτω από την ελεύθερη επιφάνεια του υγρού, συνήθως από 0.05 μέχρις 0.25 φορές το πλήρες βάθος ροής, ενώ η μέση ταχύτητα η οποία έχει τα 85.0% της ταχύτητας της ελεύθερης επιφάνειας εμφανίζεται σε θέση που βρίσκεται σε απόσταση 0.6 φορές το πλήρες βάθος ροής κάτω από την ελεύθερη επιφάνεια. Μια τυπική κατανομή ταχυτήτων εντός ενός ανοικτού αγωγού τραπεζοειδούς διατομής απεικονίζεται στο Σχήμα 3.7. Ο τύπος $u^2/2g$ που παριστά την κινητική ενέργεια του ρευστού ανά μονάδα βάρους αυτού, δηλαδή το

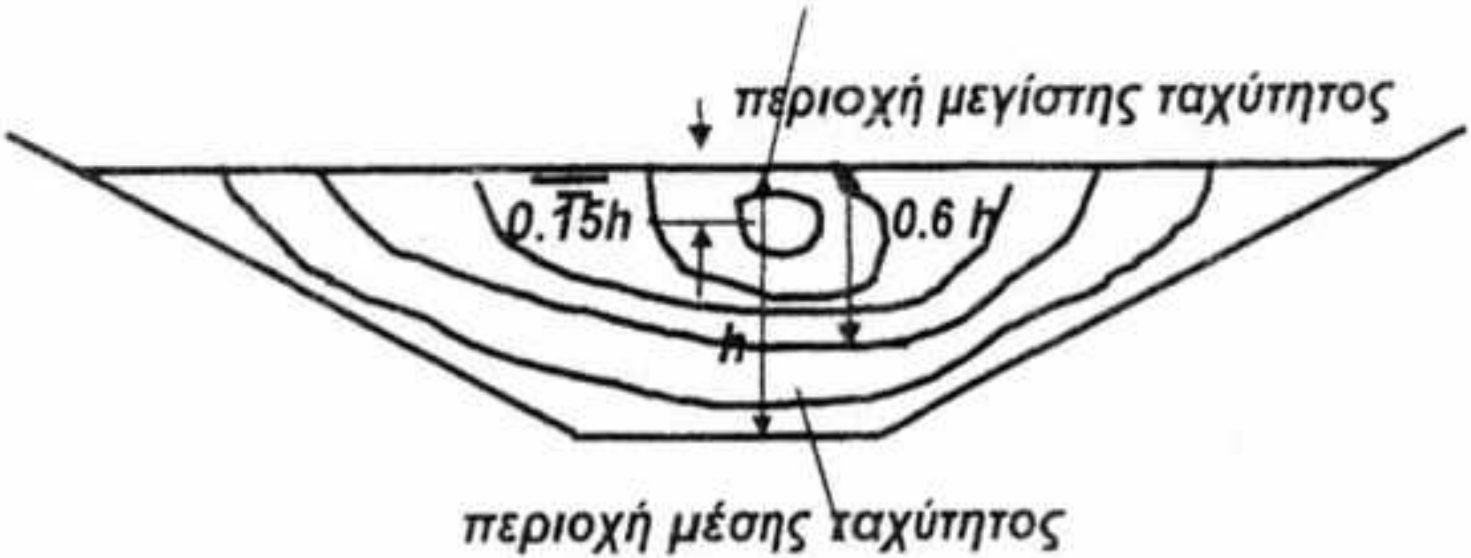
κινητικό ύψος, έχει υποεκτιμηθεί, εάν βεβαίως ο υπολογισμός έχει γίνει με την μέση τιμή ū της ταχύτητας στην διατομή. Για να διορθωθεί λοιπόν η τιμή πολλαπλασιάζετε το κινητικό ύψος $\bar{u}^2/2g$ με τον αριθμό α έναν δηλαδή ***συντελεστή διορθώσεως της κινητικής ενεργείας*** και ο οποίος λαμβάνει τιμές από 1.03 μέχρι και 1.6 για φυσικούς ανοικτούς αγωγούς. Το *α* λαμβάνει μεγαλύτερες τιμές σε μικρότερης διατομής ανοικτούς αγωγούς. Συνήθως η τιμή του α για ανοικτούς αγωγούς σύνθετης διατομής *A* αποτελούμενης από διατομές $A_1,A_2,A_3,\ldots A_n$ με μέσες ταχύτητες $\bar{u}_1,\bar{u}_2,\bar{u}_3,\ldots\bar{u}_n$ ανά διατομή και $\bar{u}(=Q/A)$ την μέση ταχύτητα όλης της σύνθετης διατομής είναι,

$$a=\frac{u_1^{-3}A_1+u_2^{-3}A_2+u_3^{-3}A_3+\ldots+u_n^{-3}A_n}{u^3\left(A_1+A_2+A_3+\ldots+A_n\right)} \qquad (3.19)$$

Τέλος, να αναφερθεί επίσης ότι η ***ορμή*** της ροής του υγρού πρέπει να διαφοροποιηθεί αναλόγως με τον συντελεστή ***διορθώσεως της ορμής*** *β*. Έτσι, η ορθή έκφραση για τον υπολογισμό της ορμής, βλέπε και Κεφάλαιο 10, θα είναι,

$$\text{-}\,°\,«\acute{\eta}=\quad °\,Q\bar{u} \qquad (3.20)$$

ενώ ο συντελεστής *β* μεταβάλλεται από 1.01 μέχρι και 1.2.



Σχήμα 3.7 Κατανομή της ταχύτητας εντός ανοικτού αγωγού τραπεζοειδούς διατομής

3.6 Απώλειες ενέργειας

Στην πράξη καθώς το υγρό ρέει από μια διατομή σε μια άλλη αναπτύσσονται τριβές οι οποίες και μετατρέπουν την διαθέσιμη ενέργεια σε θερμότητα. Έτσι, δημιουργούνται οι απώλειες ενέργειας. Εάν ονομασθούν ως h_f οι ***απώλειες ενέργειας*** ανά μονάδα βάρους του ρευστού, τότε για σταθερή ροή μεταξύ των διατομών 1 και 2, βλέπε Σχήμα 3.8, είναι,

$$H_{01} = \left(\begin{array}{l} \acute{u}\cdot\ \text{-s} \\ £^{a}£\acute{u}\bar{}£^{\circ}\,\text{¦s} \\ £®§^{\cdot\cdot}\,\acute{a}\neg£§\sim\text{s} \end{array} \right)_1 + \frac{u_1^2}{2g} = \left(\begin{array}{l} \acute{u}\cdot\ \text{-s} \\ £^{a}£\acute{u}\bar{}£^{\circ}\,\text{¦s} \\ £®§^{\cdot\cdot}\,\acute{a}\neg£§\sim\text{s} \end{array} \right)_2 + \frac{u_2^2}{2g} + h_f \qquad (3.21)$$

ή

$$h_1 + z_1 + \frac{u_1^2}{2g} = h_2 + z_2 + \frac{u_2^2}{2g} + h_f \qquad (3.22)$$

Σχήμα 3.8 Ενεργειακή κλίση

$$H_{01} = H_{02} + h_f \qquad (3.23)$$

όπου H_{01} *(m)* και H_{02} *(m)* είναι τα ***ολικά ύψη ή φορτία*** στις διατομές 1 και 2 ενώ h_1 και h_2 είναι τα βάθη της επιφάνειας του υγρού στις διατομές 1 και 2. Το βάθος εννοείται κάθετο προς τον πυθμένα του αγωγού. z_1 και z_2 είναι τα ύψη του πυθμένα του ανοικτού αγωγού στο επίπεδο αναφοράς. Αν ληφθεί υπ' όψιν η μή-ομοιομορφία της κατανομής της ταχύτητας σε κάθε μια διατομή, τότε,

$$h_1 + z_1 + a_1 \frac{\overline{u_1^2}}{2g} = h_2 + z_2 + a_2 \frac{\overline{u_2^2}}{2g} + h_f \qquad (3.24)$$

Το ποσό της ενέργειας το οποίο μετατρέπεται σε τριβή, δηλαδή η απώλεια φορτίου h_f , εκφράζεται και ως,

$$S_f = \frac{h_f}{l} \qquad (3.25)$$

όπου l *(m)* είναι το μήκος του ανοικτού αγωγού στον οποίο αναφέρονται οι απώλειες ενέργειας (ύψους). Η ποσότητα S_f ονομάζεται ***ενεργειακή κλίση***, διότι αντιστοιχεί προς την κλίση μιας ευθείας γραμμής γραφικής παράστασης με άξονα των *y* την απώλεια ενέργειας ανά μονάδα βάρους h_f και άξονα *x* το μήκος l κατά μήκος του ανοικτού αγωγού. Στην ειδική περίπτωση ομοιόμορφης ροής είναι, $\overline{u}_1 = \overline{u}_2, \sim_1 = \sim_2 \quad \text{©}\sim\S \quad h_1 = h_2,$ (3.26)

τότε η εξίσωσις (3.23) δίνει,

$$h_f = z_1 - z_2 \qquad (3.27)$$

Τότε η απώλεια φορτίου ή ύψους ισούται ακριβώς με την πτώση του πυθμένα του ανοικτού αγωγού, στην ίδια απόσταση. Η ενεργειακή κλίση λοιπόν είναι η ίδια με την γεωμετρική κλίση και του πυθμένα του ανοικτού αγωγού αλλά και της ελεύθερης επιφάνειας του υγρού *($h_1 = h_2$).* Πρέπει να αναφερθεί και πάλι ότι τα παραπάνω ισχύουν μόνον για την περίπτωση της

ομοιόμορφης ροής. Όταν θα αναφερθεί η θεωρία της μή-ομοιόμορφης ροής τότε θα γίνει διάκριση μεταξύ,

α) ***ενεργειακής κλίσεως*** S_f **,**

β) ***κλίσεως της ελεύθερης επιφάνειας*** S_w και

γ) ***κλίσεως του πυθμένα*** S_0 .