Κατανομές

Εκτός από το κλασικό ορισμό της πιθανότητας μπορούμε να χρησιμοποιούμε και άλλους τύπους (κατανομές).

Μεταβλητή: κεφαλαία γράμμα πχ X ή Y (συνήθως τελευταία)

$\sim$: Ακολουθεί πχ $X \sim N(0,1)$ ή $X \sim P(\lambda)$

κατανομή — κατανομή

παράμετροι των κατανομών (πληροφορίες)

• Διωνυμική Κατανομή:

Έστω ότι έχω n ανεξάρτητα πειράματα με δύο μόνο δυνατά αποτελέσματα (επιτυχία/αποτυχία) και πιθανότητα επιτυχίας p (άρα πιθανότητας αποτυχίας: $1-p$) $X \sim B(n, p)$ ← πιθανότητα επιτυχίας; n: επαναλήψεις

Η συνάρτηση πιθανότητας της διωνυμικής κατανομής δίνεται από τον τύπο:

$$\boxed{P(X=k) = \binom{n}{k} p^k \cdot (1-p)^{n-k}} \text{ με } k = 0, 1, 2, \dots, n$$

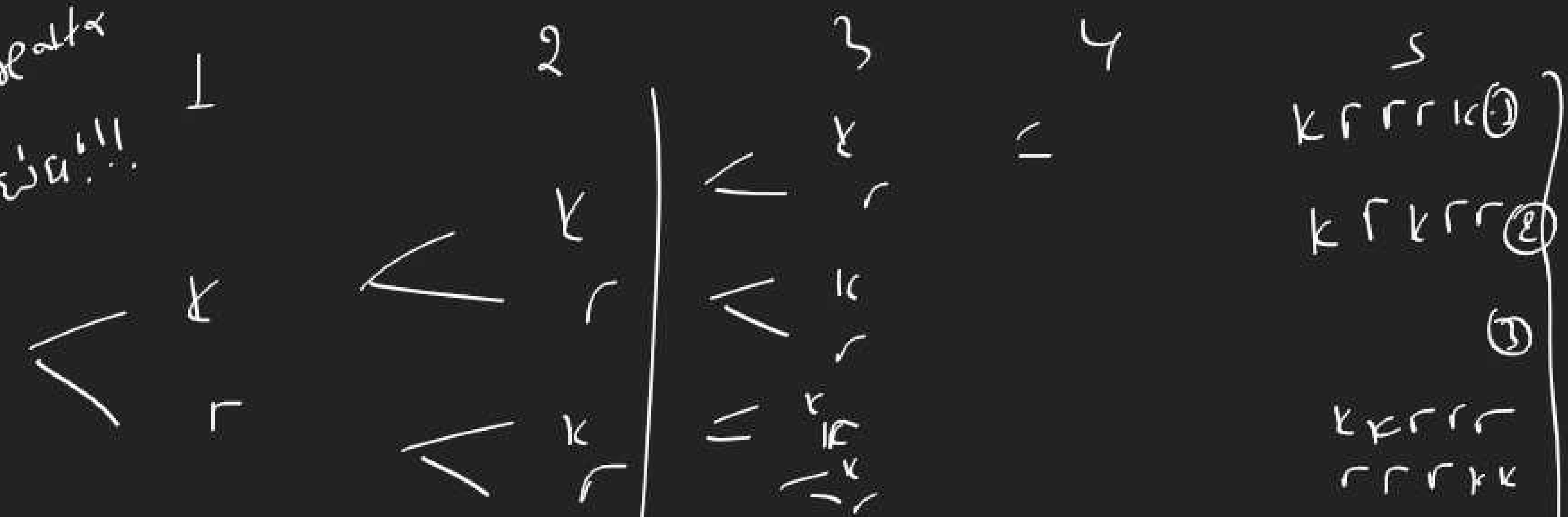
Ισχύει ότι: $\mu = E(X) = np$ και $\sigma^2 = Var(X) = np(1-p)$

$\binom{n}{k}$: διωνυμικό ανάπτυγμα (n ανά k) διαβάζεται! $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ πχ $5! = 5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1$, πχ $3! = 3\cdot2\cdot1$, $0! = 1$

πχ Ρίχνω ένα νόμισμα 5 φορές. Να βρεθεί η πιθανότητα να εμφανιστεί η ένδειξη Κορώνα:

i) Ακριβώς 2 φορές
ii) Ακριβώς 4 φορές
iii) Καμία φορά
iv) Το πολύ 2 φορές
v) λιγότερο από 2 φορές
vi) Τουλάχιστον 4 φορές.

Δεντροδιάγραμμα δεν βολεύει!!!



συνολικά 32 αποτελέσματα

άρα: πχ $\dfrac{12}{32}$

Λύση: Έστω $p = \frac{1}{2} = 0,5$ πιθανότητα να εμφανιστεί κορώνα σε μια ρίψη νομίσματος. Άρα $X \sim B(5, \frac{1}{2})$ $\left(\begin{array}{l} n = 5 \text{ ρίψεις νομίσματος} \\ p = \frac{1}{2} \end{array} \right)$

i) $P(X=2) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} =$

$$= \binom{5}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{5-2}$$

$$= \frac{5!}{2!(5-2)!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3$$

$$= \frac{5 \cdot 4 \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}}{2 \cdot 1 \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}} \cdot \frac{1}{2^2} \cdot \frac{1}{2^3}$$

$$= 10 \cdot \frac{1}{2^5} = \frac{10}{2^5} = \frac{10}{32}$$

ii) $P(X=4) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

$$= \binom{5}{4} \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{5-4}$$

$$= \frac{5!}{4!(5-4)!} \cdot \frac{1}{2^4} \cdot \frac{1}{2^1}$$

$$= \frac{5 \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}}{\cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1} \cdot 1} \cdot \frac{1}{2^5} = \frac{5}{2^5} = \frac{5}{32}$$

iii) $P(X=0) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

$$= \binom{5}{0} \left(\frac{1}{2}\right)^0 \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{5-0}$$

$$= \frac{5!}{0!(5-0)!} \cdot 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5$$

$$= \frac{\cancel{5!}}{1 \cdot \cancel{5!}} \cdot 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{2^5} = \frac{1}{32}$$

iv) Το πολύ δύο φορές

$$P(X \le 2) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2)$$

$$= \frac{1}{32} + \frac{5}{32} + \frac{10}{32}$$

$$= \frac{16}{32}$$

$$P(X=1) = \binom{5}{1}\left(\tfrac{1}{2}\right)^1 \cdot \left(1-\tfrac{1}{2}\right)^{5-1} =$$

$$\frac{5!}{1!(5-1)!} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^4} =$$

$$\frac{5 \cancel{\cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}}{1 \cdot \cancel{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}} \cdot \frac{1}{2^5} =$$

$$\frac{5}{2^5} = \frac{5}{32}$$

v) λιγότερο από δύο φορές:

$$P(X<2) = P(X=0) + P(X=1)$$

$$= \frac{1}{32} + \frac{5}{32}$$

$$= \frac{6}{32}$$

vi) Τουλάχιστον τέσσερις φορές

$$P(X \ge 4) = P(X=4) + P(X=5)$$

$$= \frac{5}{32} + \frac{1}{32}$$

$$= \frac{6}{32}$$

$$P(X=5) = \binom{5}{5}\left(\tfrac{1}{2}\right)^5 \left(\tfrac{1}{2}\right)^{5-5}$$

$$= \frac{1}{32}$$

vii) Τουλάχιστον μία φορά

$$P(X \ge 1) = P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) + P(X=4)$$

ή

$$P(\overbrace{X \ge 1}^{A}) = 1 - P(\overbrace{X < 1}^{A'})$$

$$= 1 - P(X=0)$$

$$= 1 - \frac{1}{32}$$

$$= \frac{32}{32} - \frac{1}{32}$$

$$= \frac{31}{32}$$

100%

$$\boxed{P(A) = 1 - P(A')}$$

A : $X > 5 \Leftrightarrow A' : X \le 5$

A : $X < 6 \Leftrightarrow A' : X \ge 6$

A : $X = 5 \Leftrightarrow A' : X \ne 5$

viii) Μέση τιμή εμφανίσεων κορώνας: $\mu = np = 5 \cdot \frac{1}{2} = 2,5$

ix) Διακύμανση: $\sigma^2 = np(1-p) = 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(1-\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{4}$