12/12/22 Κατανομή Poisson (Πουασόν) ①

Κατανομή για να υπολογίζω πιθανότητες σπάνιων ενδεχομένων.

$X \sim P(\lambda)$ ← παράμετρος

"λάμδα"

X: μετράει αριθμό των συμβάντων ανά χρόνο/χώρο κτλ.

πχ πλήθος κλήσεων προς 166 ανά λεπτό

πχ πλήθος κεραυνών ανά δεύτερα

πχ πλήθος ατυχημάτων ανά 100 χλμ στην Εγνατία

$$P(X=k) = \frac{e^{-\lambda}\cdot\lambda^k}{k!}$$ με $\lambda > 0$ και $k \in \mathbb{N} = \{0,1,2,3,\dots\}$

$e \simeq 2{,}718\dots$ αριθμός Euler

λ: είναι ο μέσος αριθμός συμβάντων στη μονάδα του χώρου/χρόνου (πρέπει να το γνωρίζω / θα δίνεται / το υπολογίζω από δεδομένα)

Ισχύει ότι $E(X) = \lambda$ και $Var(X) = \lambda$

Δηλαδή μέση τιμή και διακύμανση συμπίπτουν στην κατανομή Poisson.

Άσκηση:

Από παλαιότερη έρευνα γνωρίζουμε πως μπαίνουν στο κατάστημα κατά μέσο όρο (λ) δύο πελάτες την ώρα. Υπολογίστε πιθανότητες:

Την επόμενη ώρα:

i) Να έρθει ένας πελάτης

ii) Δύο πελάτες

iii) Κανένας πελάτης

iv) Τουλάχιστον τέσσερις πελάτες

v) Το επόμενο μισάωρο να έρθει ένας πελάτης

vi) Το επόμενο δίωρο να έρθουν τρεις πελάτες

$$\boxed{P(X=k)=\frac{e^{-\lambda}\cdot\lambda^k}{k!}}$$

$X \sim P(2) \quad (\lambda=2) \qquad e^{-2}=\frac{1}{e^2}=\frac{1}{2{,}718^2}=\frac{1}{7{,}387}=0{,}135$

i) $P(X=1)=\dfrac{e^{-2}\cdot 2^1}{1!}=\dfrac{0{,}135\cdot 2}{1}=0{,}27=27\%$

ii) $P(X=2)=\dfrac{e^{-2}\cdot 2^2}{2!}=\dfrac{0{,}135\cdot 4}{2}=0{,}27=27\%$

iii) $P(X=0)=\dfrac{e^{-2}\cdot 2^0}{0!}=\dfrac{0{,}135\cdot 1}{1}=0{,}135=13{,}5\%$

ΔΕΝ ΒΟΛΕΥΕΙ!

v) $\underbrace{P(X\geq 4)}_{P(A)}=\underbrace{\boxed{P(X=4)+P(X=5)+P(X=6)+P(X=7)\ldots+P(X=30)+\ldots P(X=2023)}}_{P(A')}$

$= 1-P(X<4)$

$= 1-[P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)]$

$= 1-P(X=0)-P(X=1)-P(X=2)-P(X=3)$

$= 1-0{,}135-0{,}27-0{,}27-\dfrac{e^{-2}\cdot 2^3}{3!}$

$= 1-0{,}135-0{,}27-0{,}27-0{,}18$

$= 0{,}145$

$= 14{,}5\%$

v) Το επόμενο μισάωρο να έρθουν δύο πελάτες

1 ώρα	2 πελάτες ($\lambda = 2$)
0,5	$\lambda' = ?$

$$1 \cdot \lambda' = 2 \cdot 0{,}5 \Rightarrow$$
$$\lambda' = 1$$

άρα $Y \sim P(\lambda') = P(1)$ $\qquad e^{-1} = \frac{1}{e} = \frac{1}{2{,}718} = 0{,}368$

$$P(Y=2) = \frac{e^{-1} \cdot 1^2}{2!} = \frac{0{,}368 \cdot 1}{2} = 0{,}184 = 18{,}4\%$$

vi) Την επόμενη 1,5 ώρα να έρθουν τέσσερις πελάτες

1 ώρα	2 πελάτες
1,5 ώρα	λ''

$$\lambda'' = 2 \cdot 1{,}5 = 3 \text{ πελάτες}$$

άρα $Z \sim P(\lambda'') = P(3)$ $\qquad e^{-3} = \frac{1}{e^3} = \frac{1}{2{,}718^3} = \frac{1}{20{,}086} = 0{,}05$

$$P(Z=4) = \frac{e^{-3} \cdot 3^4}{4!} = \frac{0{,}05 \cdot 81}{24} = 0{,}168 \simeq 16{,}8\%$$

vii) Την επόμενη ώρα να έρθουν 2,5 πελάτες

$$P(X=2{,}5) = 0$$

k – πελάτες
λ – μέσος αριθμός πελατών

viii) Την επόμενη μία ώρα και ένα τέταρτο να έρθουν δύο πελάτες

α' τρόπος

1 ώρα	2 πελάτες
1,25 ώρα	λ'''

$\Omega \sim P(\lambda''') = P(2{,}5)$

$$P(\Omega=2) = \frac{e^{-2{,}5} \cdot 2{,}5^2}{2!} = \frac{0{,}218 \cdot 6{,}25}{2} = 0{,}681 \simeq 68{,}1\%$$

β' τρόπος

60 λεπτά	2 πελάτες
75 λεπτά	λ'''

$$\lambda''' = \frac{2 \cdot 75}{60} = 2{,}5$$