

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

①

Έστω A, B ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω και ισχύουν:

$$P(A \cup B) = \frac{3}{4}, \quad P(A') = \frac{2}{3}, \quad P(A \cap B) = \frac{1}{4}$$

Υπολογίστε πιθανότητες:

α) $P(B)$ β) $P(A \cap B')$ γ) $P((A-B) \cup (B-A))$ δ) $P(A \cup B')$

$$P(A) + P(A') = 1 \Rightarrow P(A) + \frac{2}{3} = 1 \Rightarrow P(A) = 1 - \frac{2}{3} \Rightarrow P(A) = \frac{1}{3}$$

α) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow$

$$\frac{3}{4} = \frac{1}{3} + P(B) - \frac{1}{4} \Rightarrow$$

$$\frac{3}{4} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = P(B) \Rightarrow$$

$$\frac{9}{12} - \frac{4}{12} + \frac{3}{12} = P(B) \Rightarrow$$

$$P(B) = \frac{8}{12} \Rightarrow$$

$$P(B) = \frac{2}{3}$$

β) $P(A \cap B') =$

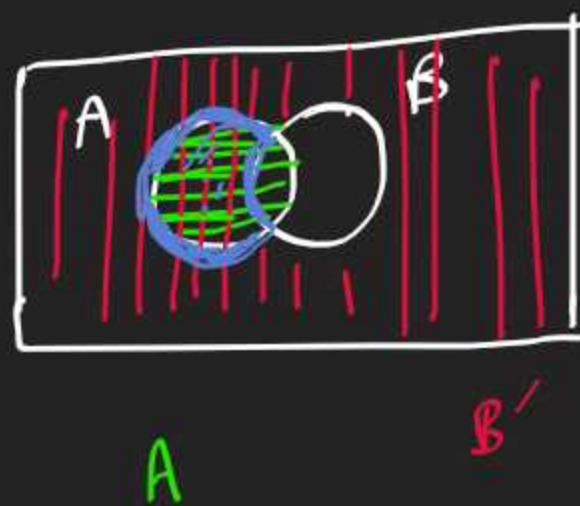
$$P(A - B) =$$

$$P(A) - P(A \cap B) =$$

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{4} =$$

$$\frac{4}{12} - \frac{3}{12} =$$

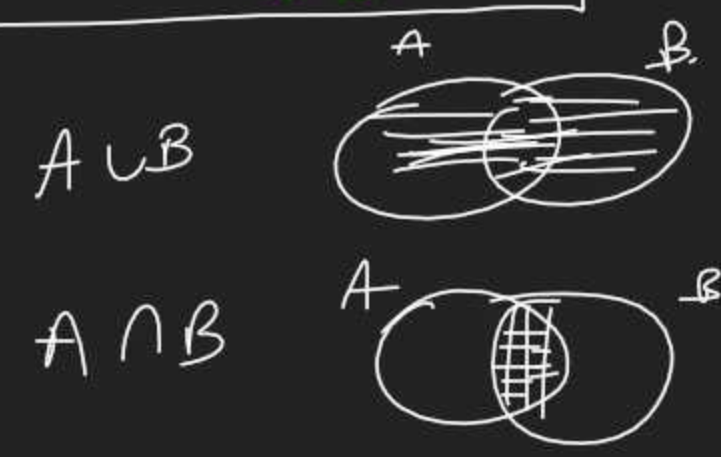
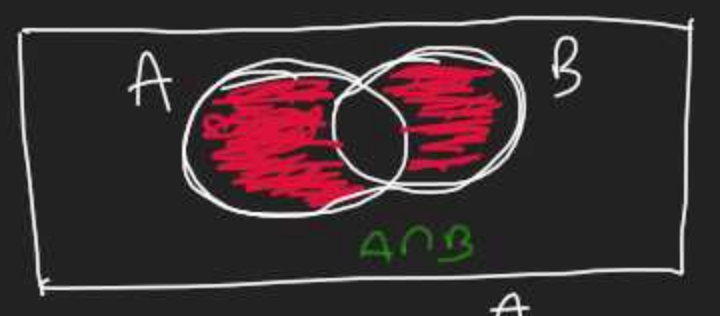
$$\frac{1}{12}$$



α) $P((A-B) \cup (B-A)) =$
α' Τέσνος: $P(A \cup B) - P(A \cap B) =$

$$\frac{3}{4} - \frac{1}{4} =$$

$$\frac{2}{4} = \frac{1}{2} \quad \checkmark$$



β' Τέσνος: $P((A-B) \cup (B-A)) =$ *δύο ξεχωριστά*
 $P(A-B) + P(B-A) =$

$$\frac{1}{12} + \frac{5}{12} =$$

$$\frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

$P(B-A) =$
 $P(B) - P(A \cap B) =$
 $\frac{2}{3} - \frac{1}{4} =$
 $\frac{8}{12} - \frac{3}{12} =$
 $\frac{5}{12}$

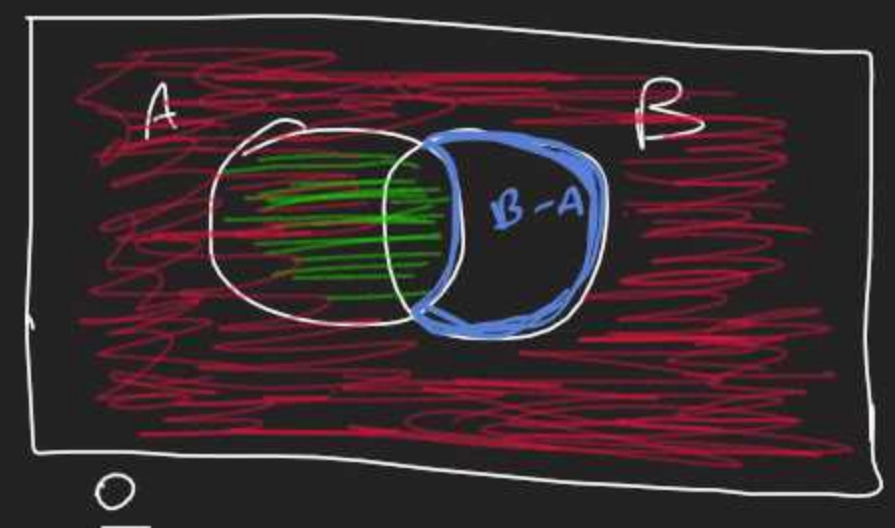
δ) $P(A \cup B') =$

$P((B-A)') =$

$1 - P(B-A) =$

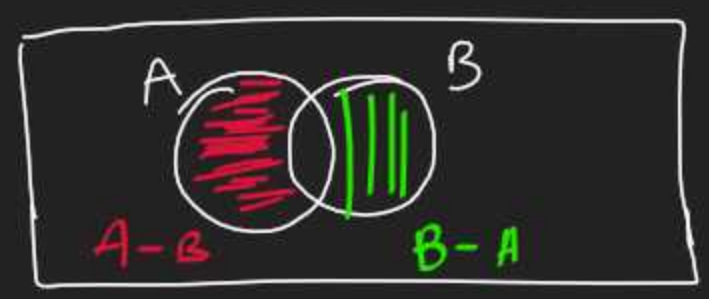
$1 - \frac{5}{12} =$

$\frac{7}{12}$



ε) $P((A-B) \cap (B-A)) = 0$

Διότι $A-B, B-A$ είναι *ξεχωριστά* τμήματα τους.



Σχόλια:

$P(A') = 1 - P(A)$
 $P(B') = 1 - P(B)$
 $P((A \cup B)') = 1 - P(A \cup B)$
 $P((A-B)') = 1 - P(A-B)$
 $P(B') = 1 - P(B)$

στ) Τα ενδεχόμενα A, B είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους? (3)

Θεωρία

A, B ανεξάρτητα μεταξύ τους αν και μόνο αν ισχύει:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{4}$$

$$P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$$

$$\Rightarrow P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B)$$

Άρα A, B δεν είναι

ανεξάρτητα μεταξύ τους

$$\delta) P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \left(\frac{\frac{1}{4}}{\frac{2}{3}} \right) = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} = \frac{3}{8}$$

$$\gamma) P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \left(\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{3}} \right) = \frac{1 \cdot 3}{1 \cdot 4} = \frac{3}{4}$$

Δύο νοικοκυριά σε Αθήνα και Θεσσαλονίκη
ρωτήθηκε ως προς τη γήινη θέρμανση:

	Αθήνα	Θεσσαλονίκη	Σύνολο/Αθροιστά
Πετρέλαιο	160	105	265
Ηλ. Ρεύμα	115	45	160
Ξύλο	20	10	30
Φυσικό Αέριο	15	10	25
Άλλο	5	15	20
Σύνολο	315	185	500

Υπολογίστε πιθανότητες ένα τυχαίο νοικοκυριό να χειρισθεί:

- α) Ξύλο και να είναι στην Αθήνα
- β) Πετρέλαιο ή να είναι στη Θεσσαλονίκη
- γ) Ρεύμα δωσάριου ότι είναι στην Αθήνα

α) $P(\text{Ξύλο} \cap \text{Αθήνα}) = \frac{20}{500}$

προσέτιω κοινότητα που με "αυτήριον"

β) $P(\text{Πετρέλαιο} \cup \text{Θεσσαλονίκη}) = \frac{160 + 105 + 45 + 10 + 10 + 15}{500} = \frac{345}{500}$

β' τρόπο $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
 $P(\text{Πετρέλαιο} \cup \text{Θεσσαλονίκη}) = \frac{265}{500} + \frac{185}{500} - \frac{105}{500} = \frac{345}{500}$

γ) $P(\text{Ρεύμα} | \text{Αθήνα}) = \frac{115}{315}$ (Ορισμός Πιθανότητας)

Επειδή είναι δωσάριου ότι νοικοκυριό είναι στην Αθήνα

β' τρόπο

Διαχωρώ με 315 και όχι με 500

$P(\text{Ρεύμα} | \text{Αθήνα}) = \frac{P(\text{Ρεύμα} \cap \text{Αθήνα})}{P(\text{Αθήνα})} = \frac{\frac{115}{500}}{\frac{315}{500}} = \frac{115 \cdot 500}{315 \cdot 500} = \frac{115}{315}$

δ) πιθανότητα να διαλέψετε νοικοκυριό από Αθήνα
δωδομένου ότι χρησιμοποιεί φυσικό αέριο.

$$P(\text{Αθήνα} | \text{φυσικό αέριο}) = \frac{15}{25}$$

βλ. επίσης Τύπος Bayes

$$P(\text{Αθήνα} | \text{φυσικό αέριο}) = \frac{P(\text{Αθήνα} \cap \text{φυσικό αέριο})}{P(\text{φυσικό αέριο})} = \frac{\frac{15}{500}}{\frac{25}{500}} = \frac{15}{25}$$