Κατανομή Poisson (Πουασόν)

Η κατανομή Poisson είναι μία <u>διακριτή</u> συνάρτηση τυχαίας μεταβλητής που περιγράφει την πιθανότητα εμφάνισης ενός αριθμού συμβάντων σε ένα <u>σταθερό διάστημα</u> χρόνου ή χώρου με σταθερό μέσο ρυθμό.

όταν θέλουμε να μελετήσουμε:

πχ πλήθος τηλεφωνημάτων στο 166 ανά λεπτό.
πχ πλήθος πελατών που μπαίνουν σε κατάστημα ανά ώρα
πχ πλήθος λακουβών στο δρόμο ανά 100 χλμ.

Poisson συμβολίζεται: $X \overset{\text{ακολουθεί}}{\sim} P(\lambda)$ $\quad \boxed{\lambda > 0 \Leftrightarrow \lambda \in \mathbb{R}_+}$

παράμετρος λ: ο μέσος ρυθμός συμβάντων σε μονάδα χώρου ή χρόνου.

Τύπος $\quad \boxed{P(X=k) = \dfrac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!}}$

X μεταβλητή (πρακτικά αυτό που μελετάμε)

k: Η X να πάρει την τιμή k $\qquad k \in \mathbb{N}_0 = \underbrace{\{0,1,2,3,\dots\}}_{\text{διακριτές τιμές}}$

$e \simeq 2,718\dots$ (αριθμός Euler)

$k! = k \cdot (k-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$ (παραγοντικό) πχ Σε ένα μαγαζί έρχονται οι πελάτες με μέσο ρυθμό 3 άτομα ανά ώρα $\underbrace{\quad}_{\lambda=3}$ (2)

Υπολογίστε πιθανότητα:

α) Σε μία ώρα να έρθουν (ακριβώς) δύο πελάτες.

Λύση: Αριθμός πελατών: $X \sim P(3)$ $\boxed{\lambda=3}$ ← Το χρησιμοποιώ σε όλα τα υποερωτήματα

$$P(X=k) = \frac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!}$$

στο 4

$$P(X=2) = \frac{3^2 \cdot e^{-3}}{2!} = \frac{9 \cdot e^{-3}}{2} = \frac{9}{2} \cdot 0{,}049 = 0{,}2205 = 22{,}05\%$$

$$e^{-3} = 2{,}718^{-3} = 0{,}049$$

$$\alpha^{-\nu} = \frac{1}{\alpha^\nu} \qquad e^{-3} = \frac{1}{e^3} = \frac{1}{e \cdot e \cdot e} = \frac{1}{2{,}718 \cdot 2{,}718 \cdot 2{,}718} = \frac{1}{20{,}179} = \boxed{0{,}049}$$

Αν δεν έχω επιστημονικό κομπιουτεράκι

β) Σε μία ώρα να έρθουν τέσσερις πελάτες

$$P(X=k) = \frac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!}$$

$$P(X=4) = \frac{3^4 \cdot e^{-3}}{4!} = \frac{81 \cdot e^{-3}}{24} = \frac{81 \cdot 0{,}049}{24} = 0{,}1654 = 16{,}54\%$$

γ) Σε μια ώρα να έρθουν τρεις πελάτες

$$P(X=3) = \frac{3^3 e^{-3}}{3!} = \frac{27 \cdot e^{-3}}{6} = \frac{27 \cdot 0{,}049}{6} = 0{,}2205 = 22{,}05\%$$

δ) Σε μια ώρα να μην εμφανισθεί πελάτης

$$P(X=\overset{k}{0}) = \frac{3^0 \cdot e^{-3}}{0!} = \frac{1 \cdot e^{-3}}{1} = e^{-3} = 0{,}049 = 4{,}9\%$$

ε) Σε μια ώρα να έρθουν 2,5 πελάτες

$$P(X=2{,}5) = 0 \quad \text{διότι} \quad 2{,}5 \notin \mathbb{N}$$

ζ) Σε μία ώρα να έρθουν το πολύ 2 πελάτες

$$P(X \leq 2) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2)$$

$$= \frac{3^0 \cdot e^{-3}}{0!} \,(\delta) + \frac{3^1 \cdot e^{-3}}{1!} + \frac{3^2 e^{-3}}{2!} \,(\alpha)$$

$$= 0{,}049 + 0{,}147 + 0{,}22 = 0{,}416 = 41{,}6\%$$

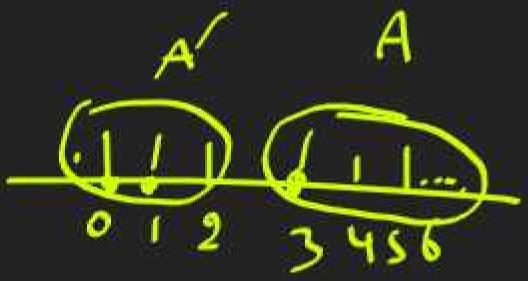
γ) Σε μία ώρα να έρθουν πάνω από δύο πελάτες (Τουλάχιστον 3 πελάτες) 3

$$\overbrace{P(X>2)}^{P(A)} = P(\overbrace{X\geq 3}^{A})$$

$\boxed{\begin{matrix} A' \\ P(X<3) \end{matrix}}$

ΔΕΝ ΔΟΥΛΕΥΕΙ!! $= \cancel{P(X=4)+P(X=5)+P(X=6)+\dots+P(100)+\dots+P(2021)+\dots}$

$1 - P(A')$ ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑ $\boxed{P(A') = 1 - P(A)}$



$$= 1 - P(\overbrace{X\leq 2}^{A'})$$

$$= 1 - [P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)]$$

$$= 1 - 0{,}416$$

$$= 0{,}584$$

$$= 58{,}4\%$$

Διωνυμική

Νόμισμα $p=0{,}7$ $\boxed{n=10}$

$P(X>8) = P(X=9)+P(X=10)$ STOP

Δεν χρειάζεται να πάμε στο συμπλήρωμα!!

β) Σε μισή ώρα να έρθουν δύο πελάτες → αλλάζει μονάδα χρόνου, άρα αλλάζει παράμετρος λ.

Στη 1 ώρα $\lambda = 3$

Στη 0,5 ώρα $\lambda' = ?$

$$1\cdot\lambda' = 3\cdot 0{,}5 \Rightarrow$$

$$\lambda' = 1{,}5$$

νέα μεταβλητή

Για την μισή ώρα πλήθος πελατών $Y \sim P(1{,}5)$

$$P(Y=2) = \frac{1{,}5^2 \cdot e^{-1{,}5}}{2!} = \frac{2{,}25\cdot e^{-1{,}5}}{2} = \frac{2{,}25\cdot 0{,}223}{2} = 0{,}2508 = 25{,}08\%$$

ε) Σε δύο ώρες να έρθουν 5 πελάτες

Σε 1 ώρα $\lambda = 3$

Σε 2 ώρες $\lambda'' = 6$

αριθμός πελατών στις δύο ώρες $Z \sim P(\lambda'') = P(6)$

$$P(Z=5) = \frac{6^5 \cdot e^{-6}}{5!} = \frac{7776\cdot 0{,}0024}{120} = 0{,}15552 \simeq 15{,}55\%$$

στ) Σε 2 ώρες να έρθει τουλάχιστον ένας πελάτης

$$P(Z\geq 1) = 1 - P(Z<1)$$

$$= 1 - P(Z=0)$$

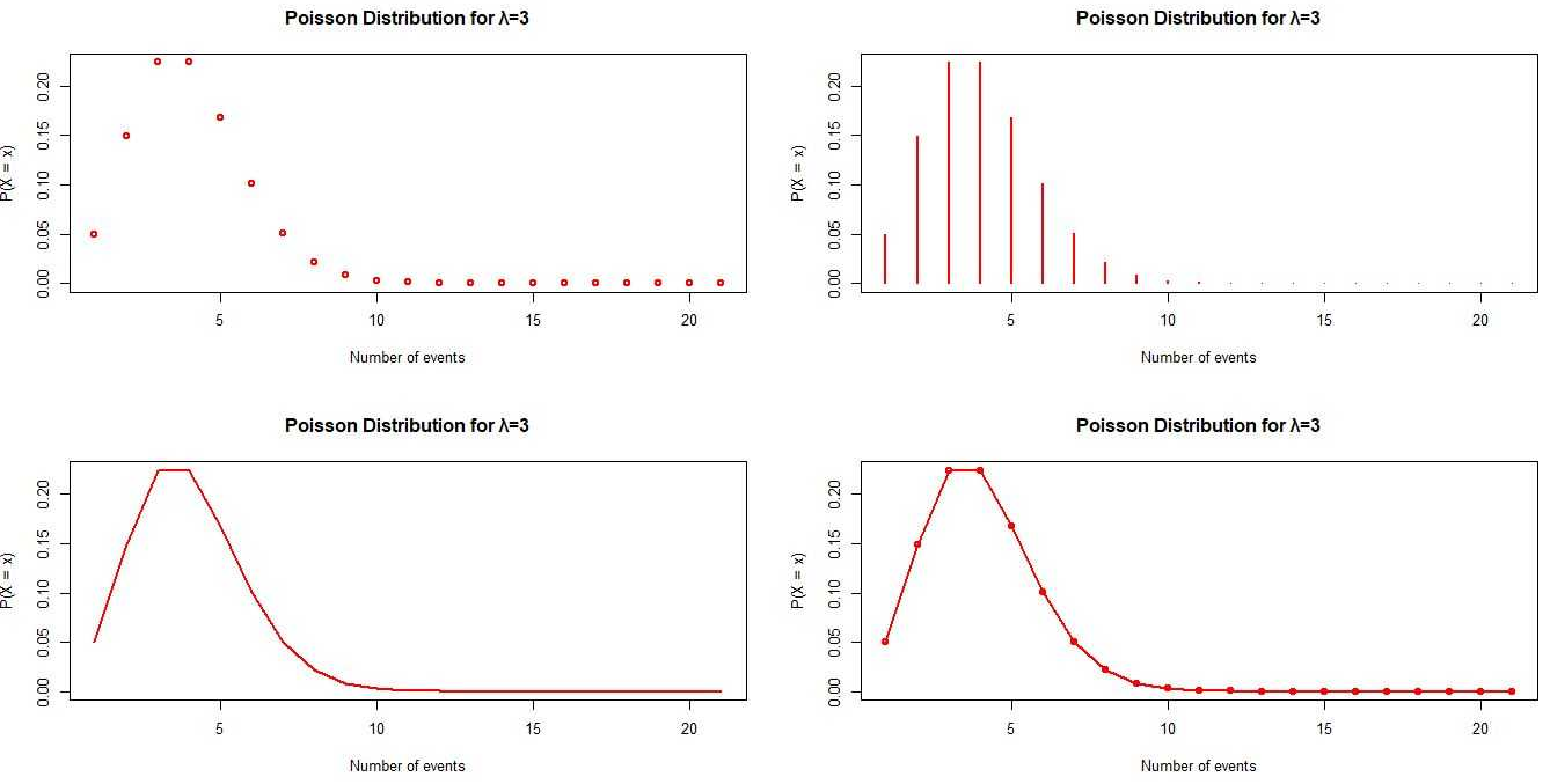
$$= 1 - \frac{6^0\cdot e^{-6}}{0!}$$

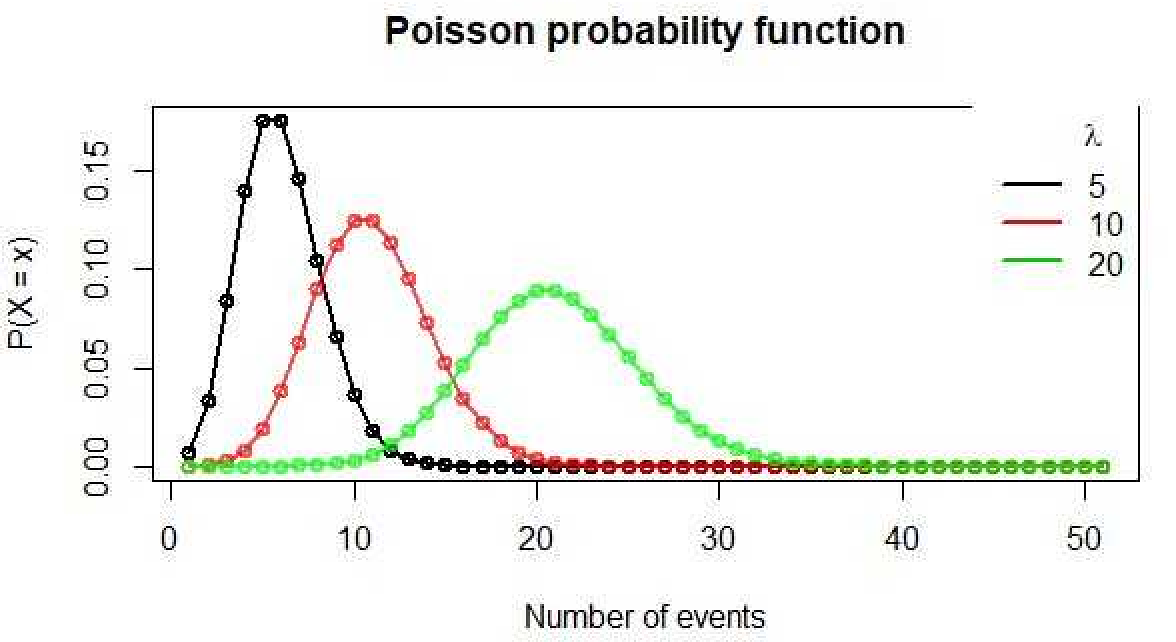
$$= 1 - \frac{1\cdot e^{-6}}{1}$$

$$= 1 - 0{,}0024$$

$$= 0{,}9976$$

$$= 99{,}76\%$$


Poisson Distribution for λ=3
P(X = x)
0.00
0.05
0.10
0.15
0.20
5
10
15
20
Number of events
Poisson Distribution for λ=3
P(X = x)
0.00
0.05
0.10
0.15
0.20
5
10
15
20
Number of events
Poisson Distribution for λ=3
P(X = x)
0.00
0.05
0.10
0.15
0.20
5
10
15
20
Number of events
Poisson Distribution for λ=3
P(X = x)
0.00
0.05
0.10
0.15
0.20
5
10
15
20
Number of events


Poisson probability function
λ
5
10
20
P(X = x)
0.00
0.05
0.10
0.15
0
10
20
30
40
50
Number of events