

Άσκηση 1 – Ιατρικό τεστ με πρόσθετη πληροφορία

Σε έναν πληθυσμό, η νόσος D έχει συχνότητα $P(D) = 0,01$.

Έχουμε τεστ με:

- Ευαισθησία: $P(+|D) = 0,95$
- Ειδικότητα: $P(-|\bar{D}) = 0,98$

Ένας ασθενής κάνει το τεστ και βγαίνει **θετικός**. Πριν κάνει το τεστ, ο γιατρός έχει επιπλέον πληροφορία ότι ο ασθενής ανήκει σε ομάδα υψηλού κινδύνου, οπότε γι' αυτόν ειδικά ο γιατρός εκτιμά τη **προγενέστερη πιθανότητα** $P(D) = 0,05$ αντί για 0,01.

1. Υπολόγισε την **πιθανότητα να έχει τη νόσο δεδομένου ότι το τεστ είναι θετικό**, χρησιμοποιώντας την προσαρμοσμένη προγενέστερη 0,05.
2. Σύγκρινε το αποτέλεσμα με το αντίστοιχο αν είχαμε χρησιμοποιήσει την «γενική» προγενέστερη 0,01

Λύση

1. Με προγενέστερη $P(D) = 0,05$

Θέλουμε $P(D | +)$.

Χρησιμοποιούμε τον Bayes:

$$P(D | +) = \frac{P(+|D)P(D)}{P(+)}$$

όπου

$$P(+) = P(+|D)P(D) + P(+|\bar{D})P(\bar{D})$$

Έχουμε:

- $P(+|D) = 0,95$
- $P(-|\bar{D}) = 0,98 \Rightarrow P(+|\bar{D}) = 1 - 0,98 = 0,02$
- $P(D) = 0,05$, άρα $P(\bar{D}) = 0,95$

$$P(+) = 0,95 \cdot 0,05 + 0,02 \cdot 0,95 = 0,0475 + 0,019 = 0,0665$$

Άρα:

$$P(D | +) = \frac{0,95 \cdot 0,05}{0,0665} = \frac{0,0475}{0,0665} \approx 0,7143$$

Άρα η πιθανότητα $\approx 71,4\%$.

B. 2. Με προγενέστερη $P(D) = 0,01$

Τώρα:

- $P(D) = 0,01, P(\bar{D}) = 0,99$

$$P(+) = 0,95 \cdot 0,01 + 0,02 \cdot 0,99 = 0,0095 + 0,0198 = 0,0293$$

$$P(D | +) = \frac{0,95 \cdot 0,01}{0,0293} = \frac{0,0095}{0,0293} \approx 0,3246$$

Άρα η πιθανότητα $\approx 32,5\%$.

Σύγκριση:

Με προγενέστερη 5% $\rightarrow$ posterior $\approx 71,4\%$

Με προγενέστερη 1% $\rightarrow$ posterior $\approx 32,5\%$

Δηλαδή η προγενέστερη πληροφορία (ομάδα υψηλού κινδύνου) αλλάζει **πολύ** το συμπέρασμα.

Άσκηση 2 – Επιλογή κουτιού με πολλές εκδοχές (πολλαπλές υποθέσεις)

Έχουμε τρία κουτιά:

- Κουτί B_1 : 2 κόκκινα, 1 μπλε
- Κουτί B_2 : 1 κόκκινο, 2 μπλε
- Κουτί B_3 : 3 κόκκινα, 0 μπλε

Επιλέγουμε **στην τύχη ένα κουτί** με ίσες πιθανότητες και μετά **τραβάμε 2 μπάλες χωρίς επανάθεση**.

Παρατηρούμε ότι οι 2 μπάλες είναι **κόκκινες**.

1. Ποια είναι η πιθανότητα να επιλέξαμε το κουτί B_3 ;
2. Ποια είναι η πιθανότητα η **επόμενη μπάλα** από το ίδιο κουτί (τρίτο τράβηγμα) να είναι επίσης κόκκινη;

Λύση

Θέλουμε $P(B_3 | RR)$, όπου $RR = \text{«δύο κόκκινες»}$.

Προγενέστερα:

$$P(B_1) = P(B_2) = P(B_3) = \frac{1}{3}$$

Υπολογίζουμε τις $P(RR | B_i)$.

- Για B_1 : έχει 2 κόκκινες, 1 μπλε, σύνολο 3.

$$P(RR | B_1) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$$

- Για B_2 : 1 κόκκινη, 2 μπλε. Είναι αδύνατον να βγάλουμε 2 κόκκινες:

$$P(RR | B_2) = 0$$

- Για B_3 : 3 κόκκινες, 0 μπλε.

$$P(RR | B_3) = 1$$

Ο Bayes για πολλαπλές υποθέσεις:

$$P(B_3 | RR) = \frac{P(RR | B_3)P(B_3)}{\sum_{i=1}^3 P(RR | B_i)P(B_i)}$$

Ο παρονομαστής:

$$P(RR) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9} + 0 + \frac{1}{3} = \frac{1}{9} + \frac{3}{9} = \frac{4}{9}$$

Άρα:

$$P(B_3 | RR) = \frac{1 \cdot \frac{1}{3}}{\frac{4}{9}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{4}{9}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{9}{4} = \frac{3}{4}$$

Άρα η πιθανότητα να έχουμε διαλέξει το B_3 είναι 75%.

Για το (2): θέλουμε $P(3\text{η κόκκινη} \mid RR)$.

Χρησιμοποιούμε ολικό:

$$P(3\text{η κόκκινη} \mid RR) = P(3\text{η κόκκινη} \mid RR, B_1)P(B_1 \mid RR) + P(3\text{η κόκκινη} \mid RR, B_2)P(B_2 \mid RR) + P(3\text{η κόκκινη} \mid RR, B_3)P(B_3 \mid RR)$$

Πρώτα βρίσκουμε τις posterior:

$$P(B_i \mid RR) = \frac{P(RR \mid B_i)P(B_i)}{P(RR)}$$

- $P(B_1 \mid RR) = \frac{\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{3}{4}} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{9}$
- $P(B_2 \mid RR) = 0$ (γιατί $P(RR \mid B_2) = 0$)
- $P(B_3 \mid RR) = \frac{3}{4}$ (όπως βρήκαμε)

Τώρα, υπό συνθήκη:

- Αν είμαστε στο B_1 : αρχικά (2R, 1B). Για να πάρουμε 2 κόκκινες, η μόνη σειρά είναι R,R και μένει 0 κόκκινες, 1 μπλε, άρα:

$$P(3\text{η κόκκινη} \mid RR, B_1) = 0$$

- Στο B_2 : δεν γίνεται RR $\rightarrow$ δεν παίζει ρόλο (και ούτως ή άλλως έχει posterior 0).
- Στο B_3 : είχε 3 κόκκινες, μετά 2 κόκκινες εξαγονται, μένει 1 κόκκινη:

$$P(3\text{η κόκκινη} \mid RR, B_3) = 1$$

Άρα:

$$P(3\text{η κόκκινη} \mid RR) = 0 \cdot \frac{1}{9} + 0 \cdot 0 + 1 \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{4}$$

Πιθανότητα η τρίτη μπάλα να είναι επίσης κόκκινη: 75%.

Άσκηση 4 – Ελαττωματικά προϊόντα από πολλές μηχανές

Σε ένα εργοστάσιο υπάρχουν 3 μηχανές που παράγουν το ίδιο προϊόν:

- Μηχανή M_1 : παράγει το 50% της παραγωγής, με 2% ελαττωματικά.
- Μηχανή M_2 : παράγει το 30% της παραγωγής, με 3% ελαττωματικά.
- Μηχανή M_3 : παράγει το 20% της παραγωγής, με 5% ελαττωματικά.

Επιλέγουμε **τυχαία ένα προϊόν** από τη συνολική παραγωγή και διαπιστώνουμε ότι είναι **ελαττωματικό**.

1. Ποια είναι η πιθανότητα το προϊόν να προέρχεται από τη μηχανή M_3 ;
2. Αν βρούμε ότι ένα προϊόν είναι **καλό**, ποια είναι η πιθανότητα να έχει προέλθει από τη μηχανή M_1 ;

Λύση

1. $P(M_3 \mid \text{ελαττ.})$

Θέτουμε:

- D : «το προϊόν είναι ελαττωματικό»

Δεδομένα:

- $P(M_1) = 0,5, P(D \mid M_1) = 0,02$
- $P(M_2) = 0,3, P(D \mid M_2) = 0,03$
- $P(M_3) = 0,2, P(D \mid M_3) = 0,05$

Πρώτα ολικό:

$$\begin{aligned} P(D) &= \sum_{i=1}^3 P(D \mid M_i)P(M_i) = 0,02 \cdot 0,5 + 0,03 \cdot 0,3 + 0,05 \cdot 0,2 \\ &= 0,01 + 0,009 + 0,01 = 0,029 \end{aligned}$$

Bayes:

$$P(M_3 \mid D) = \frac{P(D \mid M_3)P(M_3)}{P(D)} = \frac{0,05 \cdot 0,2}{0,029} = \frac{0,01}{0,029} \approx 0,3448$$

Άρα περίπου 34,5%.

2. $P(M_1 \mid \text{καλό})$

Θέτουμε G : «το προϊόν είναι καλό».

$$\begin{aligned}P(G \mid M_1) &= 1 - 0,02 = 0,98 \\P(G \mid M_2) &= 1 - 0,03 = 0,97 \\P(G \mid M_3) &= 1 - 0,05 = 0,95 \\P(G) &= 0,98 \cdot 0,5 + 0,97 \cdot 0,3 + 0,95 \cdot 0,2 \\&= 0,49 + 0,291 + 0,19 = 0,971 \\P(M_1 \mid G) &= \frac{P(G \mid M_1)P(M_1)}{P(G)} = \frac{0,98 \cdot 0,5}{0,971} = \frac{0,49}{0,971} \approx 0,5046\end{aligned}$$

Άρα περίπου 50,5%.

Σε ένα νησί, οι ταξιτζήδες είναι είτε ειλικρινείς (τύπος H) είτε αναξιόπιστοι (τύπος L). Ένας συγκεκριμένος οδηγός είναι άγνωστος και αρχικά εκτιμούμε ότι:

- $P(H) = 0,6$
- $P(L) = 0,4$

Αν ο οδηγός είναι:

- H : λέει την αλήθεια με πιθανότητα 0,9 σε κάθε ερώτηση, ψεύδεται με 0,1.
- L : λέει την αλήθεια με πιθανότητα 0,4, ψεύδεται με 0,6.

Υποθέτουμε ότι οι απαντήσεις στις ερωτήσεις είναι ανεξάρτητες δεδομένου του τύπου.

Του κάνουμε **τρεις ερωτήσεις** για γεγονότα που ξέρουμε ήδη την αλήθεια.

Τον τρεις φορές παρατηρούμε ότι **έλεγε την αλήθεια**.

1. Ποια είναι η πιθανότητα ο οδηγός να είναι ειλικρινής τύπος H μετά από αυτές τις 3 παρατηρήσεις;
2. Αν κάνουμε μια 4η ερώτηση, ποια είναι η πιθανότητα να απαντήσει σωστά;

Λύση

Θέτουμε:

- T : «ο οδηγός λέει την αλήθεια σε μια ερώτηση»
- Παρατηρούμε τρεις φορές T , συμβολικά T^3 .

Δεδομένα:

- $P(T \mid H) = 0,9$,

- $P(T | L) = 0,4$,
- $P(H) = 0,6, P(L) = 0,4$.

Με ανεξαρτησία:

$$\begin{aligned} P(T^3 | H) &= (P(T | H))^3 = 0,9^3 = 0,729 \\ P(T^3 | L) &= (P(T | L))^3 = 0,4^3 = 0,064 \\ P(T^3) &= P(T^3 | H)P(H) + P(T^3 | L)P(L) = 0,729 \cdot 0,6 + 0,064 \cdot 0,4 \\ &= 0,4374 + 0,0256 = 0,463 \end{aligned}$$

Bayes:

$$P(H | T^3) = \frac{P(T^3 | H)P(H)}{P(T^3)} = \frac{0,729 \cdot 0,6}{0,463} = \frac{0,4374}{0,463} \approx 0,9448$$

Άρα περίπου 94,5% πιθανότητα ότι είναι τύπου Η.

Για την 4η ερώτηση:

$$P(\text{αλήθεια στην 4η} | T^3) = P(T | H)P(H | T^3) + P(T | L)P(L | T^3)$$

Όπου:

$$P(L | T^3) = 1 - P(H | T^3) = 1 - 0,9448 = 0,0552$$

Άρα:

$$\begin{aligned} P(\text{αλήθεια στην 4η} | T^3) &= 0,9 \cdot 0,9448 + 0,4 \cdot 0,0552 \\ &= 0,8503 + 0,0221 = 0,8724 \end{aligned}$$

Άρα περίπου 87,2%.

ΔΙΩΝΥΜΙΚΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ – 3 ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1 – Πιθανότητα συγκεκριμένου πλήθους επιτυχιών

Σε ένα εργοστάσιο, κάθε προϊόν έχει πιθανότητα $p = 0,1$ να είναι ελαττωματικό. Επιλέγουμε τυχαία **20 προϊόντα**.

1. Ποια είναι η πιθανότητα **ακριβώς 3** να είναι ελαττωματικά;
 2. Ποια η πιθανότητα **το πολύ 2** να είναι ελαττωματικά;
 3. Ποια η πιθανότητα **τουλάχιστον 1** να είναι ελαττωματικό;
-

Άσκηση 2 – Ποσοστό επιτυχίας μηχανής

Μια μηχανή ολοκληρώνει σωστά μια εργασία με πιθανότητα $p = 0,85$. Την παρακολουθούμε για **15 εργασίες**.

1. Ποια είναι η πιθανότητα να ολοκληρώσει σωστά **τουλάχιστον 13** εργασίες;
 2. Ποια η πιθανότητα να ολοκληρώσει **ακριβώς 10** εργασίες;
 3. Ποιος είναι ο **αναμενόμενος αριθμός** σωστών εργασιών;
-

Άσκηση 3 – Τρεις εργάτες, επιλογή στην τύχη

Τρεις εργάτες εκτελούν ανεξάρτητα μια εργασία με πιθανότητα επιτυχίας:

- Εργάτης A: $p_A = 0,7$
- Εργάτης B: $p_B = 0,8$
- Εργάτης Γ: $p_C = 0,6$

Την ημέρα αυτή ανατέθηκαν **10 εργασίες** σε κάθε εργάτη.

1. Ποια είναι η πιθανότητα ο εργάτης A να πετύχει **τουλάχιστον 8** φορές;
 2. Ποια η πιθανότητα ο εργάτης B να αποτύχει **τουλάχιστον 3** φορές;
 3. Ποια είναι η πιθανότητα ο εργάτης Γ να πετύχει **όχι περισσότερες από 5** επιτυχίες;
-



POISSON ΚΑΤΑΝΟΜΗ – 3 ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 4 – Αριθμός κλήσεων σε τηλεφωνικό κέντρο

Το τηλεφωνικό κέντρο δέχεται κατά μέσο όρο **6 κλήσεις ανά 10 λεπτά**.
Θεωρούμε ότι ο αριθμός κλήσεων ακολουθεί **Poisson**.

1. Ποια είναι η πιθανότητα σε 10 λεπτά να δεχθούν **ακριβώς 4** κλήσεις;
2. Ποια είναι η πιθανότητα να δεχθούν **περισσότερες από 8**;
3. Πόσες κλήσεις αναμένονται σε **1 ώρα**;

Άσκηση 5 – Ατυχήματα σε ένα σταυροδρόμι

Σε ένα συγκεκριμένο σταυροδρόμι συμβαίνουν κατά μέσο όρο **2 ατυχήματα τον μήνα**.

1. Ποια είναι η πιθανότητα σε έναν συγκεκριμένο μήνα να συμβούν **κανένα** ατύχημα;
2. Ποια η πιθανότητα να συμβούν **τουλάχιστον 3** ατυχήματα;
3. Ποια είναι η πιθανότητα σε διάστημα **3 μηνών** να συμβούν συνολικά **το πολύ 4** ατυχήματα;

Άσκηση 6 – Αφίξεις πελατών σε κατάστημα

Σε ένα κατάστημα φτάνουν κατά μέσο όρο **10 πελάτες ανά ώρα** (Poisson).

1. Ποια είναι η πιθανότητα σε μία ώρα να φτάσουν **ακριβώς 12** πελάτες;
2. Ποια η πιθανότητα σε μισή ώρα να φτάσουν **τουλάχιστον 8** πελάτες;
3. Υπολόγισε την πιθανότητα σε δύο συνεχόμενες ώρες ο συνολικός αριθμός πελατών να είναι **μεταξύ 15 και 25**.

Άσκηση 1

X : πλήθος ελαττωματικών σε 20 προϊόντα, με πιθανότητα ελαττώματος $p = 0,1$.
Άρα $X \sim \text{Bin}(n = 20, p = 0,1)$.

Γενικός τύπος:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$

(1) Πιθανότητα ακριβώς 3 ελαττωματικά

$$P(X = 3) = \binom{20}{3} (0,1)^3 (0,9)^{17}$$

$$\binom{20}{3} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 1140$$

Άρα:

$$P(X = 3) = 1140 \cdot 0,1^3 \cdot 0,9^{17} \approx 0,1901$$

(2) Πιθανότητα το πολύ 2 ελαττωματικά

«Το πολύ 2» $\Rightarrow X \leq 2$:

$$P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$$

- $P(X = 0) = \binom{20}{0} 0,1^0 0,9^{20} = 0,9^{20}$
- $P(X = 1) = \binom{20}{1} 0,1^1 0,9^{19} = 20 \cdot 0,1 \cdot 0,9^{19}$
- $P(X = 2) = \binom{20}{2} 0,1^2 0,9^{18} = 190 \cdot 0,01 \cdot 0,9^{18}$

Αριθμητικά:

$$P(X \leq 2) \approx 0,6769$$

(3) Πιθανότητα τουλάχιστον 1 ελαττωματικό

«Τουλάχιστον 1» $\Rightarrow X \geq 1$.

Πιο εύκολο με συμπλήρωμα:

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0,9^{20}$$

Αριθμητικά:

$$P(X \geq 1) \approx 0,8784$$

Άσκηση 2

X : πλήθος σωστά εκτελεσμένων εργασιών από 15, με $p = 0,85$.

$X \sim \text{Bin}(15, 0,85)$.

(1) Πιθανότητα τουλάχιστον 13 επιτυχίες

$$P(X \geq 13) = P(X = 13) + P(X = 14) + P(X = 15)$$

$$P(X = k) = \binom{15}{k} (0,85)^k (0,15)^{15-k}$$

Άρα:

$$P(X \geq 13) = \sum_{k=13}^{15} \binom{15}{k} (0,85)^k (0,15)^{15-k} \approx 0,6042$$

(2) Πιθανότητα ακριβώς 10 επιτυχίες

$$P(X = 10) = \binom{15}{10} (0,85)^{10} (0,15)^5 \approx 0,0449$$

(3) Αναμενόμενος αριθμός επιτυχιών

Για $X \sim \text{Bin}(n, p)$:

$$E(X) = np = 15 \cdot 0,85 = 12,75$$

Άσκηση 3

Κάθε εργάτης ακολουθεί **δική του** διωνυμική κατανομή με $n = 10$.

(1) Εργάτης Α – πιθανότητα τουλάχιστον 8 επιτυχίες

$$X_A \sim \text{Bin}(10, 0,7)$$

$$P(X_A \geq 8) = P(X_A = 8) + P(X_A = 9) + P(X_A = 10)$$

$$P(X_A = k) = \binom{10}{k} 0,7^k 0,3^{10-k}$$

Άρα:

$$P(X_A \geq 8) = \sum_{k=8}^{10} \binom{10}{k} 0,7^k 0,3^{10-k} \approx 0,3828$$

(2) Εργάτης Β – πιθανότητα να αποτύχει τουλάχιστον 3 φορές

Ο εργάτης Β έχει πιθανότητα επιτυχίας $p_B = 0,8 \Rightarrow$ αποτυχίας $q_B = 0,2$.

Θέτουμε Y : πλήθος αποτυχιών του εργάτη Β.

$$Y \sim \text{Bin}(10, 0,2)$$

Θέλουμε:

$$P(Y \geq 3) = 1 - P(Y \leq 2) = 1 - [P(Y = 0) + P(Y = 1) + P(Y = 2)]$$

$$P(Y = k) = \binom{10}{k} 0,2^k 0,8^{10-k}$$

Αριθμητικά:

$$P(Y \geq 3) \approx 0,3222$$

(3) Εργάτης Γ – πιθανότητα όχι περισσότερες από 5 επιτυχίες

$$X_C \sim \text{Bin}(10, 0,6)$$

«Όχι περισσότερες από 5» $\Rightarrow X_C \leq 5$:

$$P(X_c \leq 5) = \sum_{k=0}^5 \binom{10}{k} 0,6^k 0,4^{10-k} \approx 0,3669$$

Γενικά, αν $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$:

$$P(X = k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}$$

Άσκηση 4 – Κλήσεις σε τηλεφωνικό κέντρο

Μέσος όρος: **6 κλήσεις / 10 λεπτά** $\Rightarrow$ για κάθε 10λεπτο $\lambda = 6$.

X : κλήσεις σε **10 λεπτά**, $X \sim \text{Poisson}(6)$.

(1) Πιθανότητα σε 10 λεπτά ακριβώς 4 κλήσεις

$$P(X = 4) = \frac{e^{-6} 6^4}{4!} \approx 0,1339$$

(2) Πιθανότητα περισσότερες από 8 κλήσεις

«Περισσότερες από 8» $\Rightarrow X \geq 9$:

$$P(X > 8) = 1 - P(X \leq 8) = 1 - \sum_{k=0}^8 \frac{e^{-6} 6^k}{k!} \approx 0,1528$$

(3) Αναμενόμενες κλήσεις σε 1 ώρα

1 ώρα = 60 λεπτά = $6 \times (10 \text{ λεπτά})$.

Για Poisson, αν αθροίσουμε 6 ανεξάρτητες περιόδους με $\lambda = 6$, παίρνουμε συνολικά:

$$\lambda_1 \text{ ώρα} = 6 \cdot 6 = 36$$

Ο αναμενόμενος αριθμός είναι ίσος με λ , άρα **36 κλήσεις**.

Άσκηση 5 – Ατυχήματα σε σταυροδρόμι

Μέσος όρος: **2 ατυχήματα/μήνα** $\Rightarrow \lambda = 2$ (για 1 μήνα).

X : ατυχήματα σε 1 μήνα, $X \sim \text{Poisson}(2)$.

(1) Πιθανότητα κανένα ατύχημα σε έναν μήνα

$$P(X = 0) = \frac{e^{-2} 2^0}{0!} = e^{-2} \approx 0,1353$$

(2) Πιθανότητα τουλάχιστον 3 ατυχήματα σε έναν μήνα

$$\begin{aligned} P(X \geq 3) &= 1 - P(X \leq 2) = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)] \\ &= 1 - [e^{-2} + 2e^{-2} + \frac{2^2}{2!} e^{-2}] = 1 - e^{-2}(1 + 2 + 2) = 1 - 5e^{-2} \end{aligned}$$

Αριθμητικά:

$$P(X \geq 3) \approx 0,3233$$

(3) Πιθανότητα σε 3 μήνες το πολύ 4 ατυχήματα συνολικά

Σε 3 μήνες, η παράμετρος γίνεται:

$$\lambda_3 \text{ μηνών} = 3 \cdot 2 = 6$$

Άρα $Y \sim \text{Poisson}(6)$, όπου Y : συνολικά ατυχήματα σε 3 μήνες.

Θέλουμε $P(Y \leq 4)$:

$$P(Y \leq 4) = \sum_{k=0}^4 \frac{e^{-6} 6^k}{k!} \approx 0,2851$$

Άσκηση 6 – Αφίξεις πελατών σε κατάστημα

Μέσος όρος: **10 πελάτες/ώρα** $\Rightarrow \lambda = 10$ για 1 ώρα.

Για 1 ώρα: $X \sim \text{Poisson}(10)$.

Για $\frac{1}{2}$ ώρα: $\lambda = \frac{10}{2} = 5$.

Για 2 ώρες: $\lambda = 2 \cdot 10 = 20$.

(1) Πιθανότητα σε 1 ώρα ακριβώς 12 πελάτες

$$P(X = 12) = \frac{e^{-10} 10^{12}}{12!} \approx 0,0948$$

(2) Πιθανότητα σε $\frac{1}{2}$ ώρα τουλάχιστον 8 πελάτες

Σε μισή ώρα: $Z \sim \text{Poisson}(5)$.

Θέλουμε $P(Z \geq 8)$:

$$P(Z \geq 8) = 1 - P(Z \leq 7) = 1 - \sum_{k=0}^7 \frac{e^{-5} 5^k}{k!} \approx 0,1334$$

(3) Πιθανότητα σε 2 ώρες συνολικά μεταξύ 15 και 25 πελατών

Σε 2 ώρες: $W \sim \text{Poisson}(20)$.

Θέλουμε:

$$P(15 \leq W \leq 25) = \sum_{k=15}^{25} \frac{e^{-20} 20^k}{k!} \approx 0,783$$