Ε Λ Λ Η Ν Ι Κ Ο Α Ν Ο Ι Κ Τ Ο Π Α Ν Ε Π Ι Σ Τ Η Μ Ι Ο

Στρατηγική Τραπεζών

ΤΟΜΟΣ Α

Διαχείριση Τραπεζικού Κινδύνου

Κωνσταντίνος Συριόπουλος

Καθηγητής Πανεπιστημίου Πατρών

Το έργο συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση και το Ελληνικό Δημόσιο

ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΗ ΤΡΑΠΕΖΩΝ

Διαχείριση Τραπεζικού Κινδύνου

Β΄ ΕΚΔΟΣΗ

Σημείωση:
Το ΕΑΠ είναι υπεύθυνο για την επιμέλεια έκδοσης και την ανάπτυξη των κειμένων σύμφωνα με τη Μεθοδολογία της εξ Αποστάσεως Εκπαίδευσης. Για την επιστημονική αρτιότητα και πληρότητα των συγγραμμάτων την αποκλειστική ευθύνη φέρουν οι συγγραφείς, κριτικοί αναγνώστες και ακαδημαϊκοί υπεύθυνοι που ανέλαβαν το έργο αυτό.

ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΑΝΟΙΚΤΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
Οδός Παπαφλέσσα & Υψηλάντη, 26222 Πάτρα
Τηλ: (061) 314094, 314206, Φαξ: (061) 317244

Α΄ ΕΚΔΟΣΗ

ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΕΣ ΤΟΥ ΔΙΔΑΚΤΙΚΟΥ ΥΛΙΚΟΥ ΤΟΥ ΤΟΜΟΥ
Διαχείριση Τραπεζικού Κινδύνου

Ακαδημαϊκός Υπεύθυνος της Θεματικής Ενότητας
Κωνσταντίνος Δρακάτος

Επιστημονικός Επιμελητής του Τόμου
Γεώργιος Κόντος

Συγγραφή
Κωνσταντίνος Συριόπουλος

Κριτική Ανάγνωση
Κωνσταντίνος Γαλιάτσος
Κωνσταντίνος Κοκκομέλης

Επιμέλεια στη μέθοδο της Εκπαίδευσης από Απόσταση
Γεώργιος Αναγνωστάκης

Γλωσσική Επιμέλεια
Ευαγγελία Σωτηροπούλου

Φιλολογικός ΄Ελεγχος
Παναγιώτα Διδάχου

Τεχνική Επιμέλεια, Ηλεκτρονική Σελιδοποίηση
ΕΣΠΙ Εκδοτική Ε.Π.Ε.

Συντονισμός ανάπτυξης εκπαιδευτικού υλικού και γενική επιμέλεια των εκδόσεων
ΟΜΑΔΑ ΕΚΤΕΛΕΣΗΣ ΕΡΓΟΥ ΕΑΠ/1997-2000

ISBN: 960-538-285-7

Β΄ ΕΚΔΟΣΗ

ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΑΝΟΙΚΤΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
Πάροδος Αριστοτέλους 18, 26335, Περιβόλα Πατρών
Τηλ: 2610 367300 Φαξ: 2610 367350

Για τη Β΄ αναθεωρημένη έκδοση, επιπλέον των συντελεστών που πραγματοποίησαν την ανάπτυξη του διδακτικού υλικού της Α΄ έκδοσης, εργάστηκαν οι εξής:

ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΕΣ ΤΟΥ ΔΙΔΑΚΤΙΚΟΥ ΥΛΙΚΟΥ
της Β΄ έκδοσης του τόμου
Διαχείριση Τραπεζικού Κινδύνου

Ακαδημαϊκός Υπεύθυνος του Προγράμματος Σπουδών
Δημήτρης Βασιλείου
Καθηγητής Ελληνικού Ανοικτού Πανεπιστημίου

Συντονιστής της Θεματικής Ενότητας, Επιστημονικός Επιμελητής
Κωνσταντίνος Συριόπουλος
Καθηγητής Πανεπιστημίου Πατρών

Συγγραφή/Επιστημονική Επιμέλεια Επικαιροποίησης Β΄ έκδοσης
Κωνσταντίνος Συριόπουλος
Καθηγητής Πανεπιστημίου Πατρών

Κριτική Ανάγνωση (κεφαλαίου 1)
Γεώργιος Κορρές
Αναπληρωτής Καθηγητής Πανεπιστημίου Αιγαίου

Γλωσσική Επιμέλεια
Κατερίνα Αλεξανδρή

Τεχνική Επιμέλεια – Καλλιτεχνική Επιμέλεια – Σελιδοποίηση
opusMAGNUM

Συντονισμός ανάπτυξης εκπαιδευτικού υλικού και γενική επιμέλεια των εκδόσεων
ΟΜΑΔΑ ΕΚΤΕΛΕΣΗΣ ΕΡΓΟΥ ΕΑΠ

ISBN: 978-960-538-816-4

Ε Λ Λ Η Ν Ι Κ Ο   Α Ν Ο Ι Κ Τ Ο   Π Α Ν Ε Π Ι Σ Τ Η Μ Ι Ο

ΣΧΟΛΗ ΚΟΙΝΩΝΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ

Τραπεζική

ΘΕΜΑΤΙΚΗ ΕΝΟΤΗΤΑ

Στρατηγική Τραπεζών

ΤΟΜΟΣ Α

ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗ ΤΡΑΠΕΖΙΚΟΥ ΚΙΝΔΥΝΟΥ

Β΄ ΕΚΔΟΣΗ
ΠΑΤΡΑ 2008

Βιογραφικό Σημείωμα

*Ο **Κ. Συριόπουλος** είναι Καθηγητής του Πανεπιστημίου Πατρών στο Τμήμα Διοίκησης Επιχειρήσεων. Σπούδασε Οικονομικά στο Πανεπιστήμιο Πειραιά και συνέχισε τις μεταπτυχιακές και διδακτορικές του σπουδές στη Γαλλία στα Οικονομικά Μαθηματικά και την Οικονομετρία. Έχει συγγράψει τα βιβλία «Ανάλυση και Έλεγχος Μονομεταβλητών Χρηματοοικονομικών Χρονοσειρών» (εκδ. Τυπωθήτω, Αθήνα 1996), «Διεθνείς Κεφαλαιαγορές» (εκδ. Ανικούλα, Θεσσαλονίκη 1999) και «Χάος» (με τον Α. Λεοντίτση, εκδ. Ανικούλα, Θεσσαλονίκη 2000). Δημοσιευμένες έρευνές του έχουν περιληφθεί σε διεθνή επιστημονικά περιοδικά και συνέδρια.*

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Ενότητα 1.3

Ενότητα 1.4

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΚΕΦΑΛΑΙΟ **3**

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Ενότητα 4.1

Ενότητα 4.2

Ενότητα 4.3

ΚΕΦΑΛΑΙΟ **6**

Ενότητα 6.5

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΘΕΜΑΤΙΚΗ ΕΝΟΤΗΤΑ

Το εκπαιδευτικό υλικό που χορηγείται από το Ελληνικό Ανοικτό Πανεπιστήμιο στο πλαίσιο του μεταπτυχιακού προγράμματος σπουδών στην «Τραπεζική» ολοκληρώνεται με τη Θεματική Ενότητα ΤΡΑ 61, που αναφέρεται στη Στρατηγική των Τραπεζών. Πρόκειται για τρεις τόμους, από τους οποίους ο πρώτος πραγματεύεται θέματα Διαχείρισης Τραπεζικού Κινδύνου, ο δεύτερος θέματα Διαχείρισης Χαρτοφυλακίου και ο τρίτος τις Ειδικές Μορφές Πίστεως.

Ειδικότερα, ο τόμος με τον τίτλο «Διαχείριση Τραπεζικού Κινδύνου», που αποτελείται από έξι κεφάλαια, αναφέρεται στα συστήματα, τις μεθόδους και τις τεχνικές της διαχείρισης του χρηματοοικονομικού κινδύνου από τους τραπεζικούς οργανισμούς, στο πλαίσιο της διεθνοποίησης των συναλλαγών και του αυξανόμενου τραπεζικού ανταγωνισμού, και παρουσιάζει το φάσμα των σχετικών εφαρμογών.

Ο τόμος με τον τίτλο «Διαχείριση Χαρτοφυλακίου», που αποτελείται από έντεκα κεφάλαια, καλύπτει τις τρεις βασικές διαδικασίες αυτής της διαχείρισης. Πρόκειται για την κατανομή των περιουσιακών στοιχείων ενός επενδυτή, τις μεταβολές στην κατανομή των περιουσιακών στοιχείων διαχρονικά και την επιλογή των αξιόγραφων μέσα στην κάθε κατηγορία περιουσιακών στοιχείων. Στο πλαίσιο αυτό αναπτύσσονται τα σημαντικότερα θέματα με τα οποία ασχολείται η διαχείριση χαρτοφυλακίου, όπως είναι η απόδοση και ο κίνδυνος, η αγορά χρήματος και κεφαλαίου, η αποτίμηση των αξιόγραφων σταθερού εισοδήματος, η αποτίμηση μετοχών κ.λπ.

Τέλος, ο τόμος με τον τίτλο «Χρηματοοικονομικά Εργαλεία Στήριξης των Ειδικών Μορφών Πίστης», που απαρτίζεται από τρεις κύριες ενότητες (16 κεφάλαια) έχει στόχο να σας βοηθήσει να κατανοήσετε τη χρηματοδοτική λειτουργία των Τραπεζών και τη σχέση της με τη διαχείριση κινδύνων.

Καθηγητής Κωνσταντίνος Γ. Δρακάτος

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Το φαινόμενο του κινδύνου (risk) παίζει σημαντικό ρόλο στη σύγχρονη οικονομική πραγματικότητα. Εάν δεν υπήρχε κίνδυνος, τότε οι χρηματοοικονομικές αγορές θα αποτελούσαν απλούς χώρους συναλλαγών, το επάγγελμα των διαχειριστών χαρτοφυλακίων δεν θα υπήρχε και η επενδυτική τραπεζική πρακτική θα περιοριζόταν στη λογιστική απογραφή.

Η διαφοροποίηση μεταξύ του *κινδύνου* και της *αβεβαιότητας* είναι θεμελιώδης στο πεδίο της οικονομικής επιστήμης, όπως έδειξαν οι έρευνες του Knight (1921). Λέμε ότι μια κατάσταση συνεπάγεται *κίνδυνο,* εάν μπορούμε να εκφράσουμε το αναμενόμενο αποτέλεσμα μιας απόφασης σε όρους πιθανοτήτων (είτε αυτές προσδιορίζονται αντικειμενικά είτε υποκειμενικά, σύμφωνα με τις εκτιμήσεις μας). Από την άλλη πλευρά, καταστάσεις, το αναμενόμενο αποτέλεσμα των οποίων δεν μπορούμε να εκφράσουμε σε όρους πιθανοτήτων, λέμε ότι συνεπάγονται *αβεβαιότητα.* Ο προσδιορισμός, η μέτρηση και η αποτίμηση του κινδύνου δεν συνεπάγονται την εκμηδένιση του κινδύνου. Συγχρόνως, η συνειδητοποίηση του γεγονότος αυτού δεν σημαίνει ότι πρέπει να αποδεχτούμε παθητικά την ύπαρξη του κινδύνου. Απλώς, θα πρέπει να διαχειριστούμε τον κίνδυνο: πρέπει να αποφασίσουμε τι μέρος του κινδύνου θα αποφύγουμε και με ποιον τρόπο θα το επιτύχουμε.

Η θεωρία και η πρακτική της διαχείρισης του κινδύνου έχει αναπτυχθεί και εξελιχθεί σημαντικά την τελευταία δεκαετία. Ένας από τους σημαντικούς παράγοντες που συνέβαλλαν στην ταχύτατη αυτή εξέλιξη είναι η ανάπτυξη των υποδειγμάτων της «*αξίας σε κίνδυνο*» (Value at Risk). Η VaR *μετράει τη μέγιστη αναμενόμενη δυνητική ζημιά σε δεδομένο χρονικό ορίζοντα κάτω από την υπόθεση των κανονικών συνθηκών της αγοράς και σε δεδομένο επίπεδο σημαντικότητας.* Για παράδειγμα, μια τράπεζα μπορεί να έχει ημερήσια VaR του χαρτοφυλακίου της 55 δις δρχ. σε επίπεδο σημαντικότητας 0.01 ή πιθανότητα 99%. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει πιθανότητα 1%, κάτω από κανονικές συνθήκες της αγοράς, να πραγματοποιήσει ζημία της τάξης των 55 δις δρχ. ή μεγαλύτερη. Αυτός ο απλός αριθμός περιλαμβάνει την έκθεση του τραπεζικού οργανισμού στον κίνδυνο της αγοράς, καθώς και την πιθανότητα να πραγματοποιηθεί η ζημία.

Δεν υπάρχει αμφιβολία ότι η γνωστοποίηση αυτού του αριθμού ενδιαφέρει άμεσα και ουσιαστικά τη διοίκηση της τράπεζας, τους μετόχους αλλά και τις εποπτικές αρχές. Μάλιστα, το 1995, η International Swap and Derivatives Association (ISDA) πίστευε ότι «αυτό το μέγεθος μέτρησης του κινδύνου της αγοράς έχει ουσιαστική σημασία για τους αναγνώστες της χρηματοοικονομικής ανάλυσης των οργανισμών».

Στον τόμο αυτό γίνεται μια αναφορά στα συστήματα, στις μεθόδους και στις τεχνικές της διαχείρισης του χρηματοοικονομικού κινδύνου από την πλευρά των τραπεζικών ιδρυμάτων. Τα υποδείγματα που χρησιμοποιούνται μπορούν να κατηγοριοποιηθούν από τα πολύ απλά (χρήση των μεγεθών μέτρησης του κινδύνου, όπως η τυπική απόκλιση) έως τα πολύπλοκα υποδείγματα εκτίμησης της μεταβλητότητας (όπως τα υποδείγματα της οικογένειας ARCH και GARCH, που χρησιμοποιεί η JP Morgan, για παράδειγμα).

Ωστόσο, σκοπός του τόμου αυτού δεν είναι να εισέλθει στο βάθος των πολύπλοκων υποδειγμάτων. Στόχος είναι να υπογραμμίσει τη σημασία και τη σημαντικότητα των συστημάτων της διαχείρισης του χρηματοοικονομικού κινδύνου από τους τραπεζικούς οργανισμούς, στο πλαίσιο της διεθνοποίησης των συναλλαγών και του αυξανόμενου τραπεζικού ανταγωνισμού, καθώς και να παρουσιάσει όλο το φάσμα των εφαρμογών. Με άλλα λόγια, ο τόμος αυτός αποτελεί μια πρώτη εισαγωγή στην πολύπλοκη διαδικασία της διαχείρισης κινδύνου από τη σκοπιά των χρηματοπιστωτικών οργανισμών.

Πρέπει να σημειωθεί, ωστόσο, ότι η διεθνής βιβλιογραφία είναι περιορισμένη για μια σειρά από λόγους. Πρώτον, διότι η αντίληψη ως προς το αποτελεσματικότερο σύστημα διαχείρισης κινδύνου διαφέρει από οργανισμό σε οργανισμό. Δεύτερον, διότι πολλά από τα υπάρχοντα συστήματα αποτελούν εσωτερικές εφαρμογές και δεν δημοσιοποιούνται για λόγους ανταγωνισμού. Τρίτον, διότι μόνο πρόσφατα η ακαδημαϊκή κοινότητα ενεπλάκη στο ζήτημα της διαχείρισης του χρηματοοικονομικού κινδύνου και, έτσι, η θεωρητική ανάπτυξη των συστημάτων αυτών είναι ακόμα περιορισμένη.

Ο αναγνώστης του παρόντος τόμου θα προσεγγίσει την ανάπτυξη, εξέλιξη και εφαρμογή των συστημάτων διαχείρισης χρηματοοικονομικού κινδύνου, με ιδιαίτερη έμφαση στα μεγέθη μέτρησης της αξίας σε κίνδυνο. Το μέγεθος της VaR είναι σημαντικό στη σύγχρονη διαχείριση χρηματοοικονομικού κινδύνου και παρουσιάζεται στον τόμο αυτό βήμα προς βήμα. Αποτελεί θα λέγαμε, το βασικότερο και πρώτο εργαλείο του σύγχρονου επαγγελματία διαχειριστή χρηματοοικονομικού κινδύνου, ενώ η θεωρητική του ανάπτυξη ελκύει, τελευταία, όλο και περισσότερο την ακαδημαϊκή κοινότητα. Από πρακτικής πλευράς, η συχνή ανακοίνωση του μεγέθους της VaR επιτρέπει την αποτελεσματικότερη διαχείριση κινδύνου και, συγχρόνως, ενημερώνει τους επενδυτές και τις εποπτικές αρχές ως προς την έκθεση στους κινδύνους της αγοράς που αναλαμβάνουν οι τραπεζικοί οργανισμοί. Αυτός είναι και ο κυριότερος λόγος που γράφτηκε ο παρών τόμος.

Στόχος του τόμου αυτού είναι να παρουσιάσει την εξέλιξη των συστημάτων διαχείρισης κινδύνου από την πλευρά των τραπεζικών οργανισμών, τους λόγους που οδήγησαν στην ανάγκη της διαχείρισης του κινδύνου, καθώς και τους παράγοντες της αστάθειας του σύγχρονου οικονομικού περιβάλλοντος. Πρώτο μέλημα, λοιπόν, είναι ο προσδιορισμός και η ταυτοποίηση των διάφορων κατηγοριών των κινδύνων με τους οποίους είναι αντιμέτωπη κάθε τράπεζα στην εξάσκηση των δραστηριοτήτων της, κάτω από την αυξανόμενη ανταγωνιστική πίεση που χαρακτηρίζει τον χώρο της. Οι τραπεζικοί κίνδυνοι και η ανάγκη της διαχείρισής τους αποτελούν ουσιαστική πληροφορία για την άσκηση εποπτείας και ελέγχου, και στο επίπεδο αυτό οι διεθνείς οργανισμοί και επιτροπές ή οι εθνικοί εποπτικοί φορείς έχουν προχωρήσει με μια σειρά από ρυθμίσεις.

Από την πλευρά του τραπεζικού οργανισμού και αφού προσδιοριστούν και καταγραφούν οι κίνδυνοι που αυτός αντιμετωπίζει, το αμέσως επόμενο βήμα είναι η επιλογή της μεθόδου μέτρησης των κινδύνων. Στο σημείο αυτό η VaR παίζει σημαντικό ρόλο ως ένα σύγχρονο και αποδεκτό εργαλείο μέτρησης του κινδύνου. Οι κίνδυνοι των χρηματοπιστωτικών ιδρυμάτων έχουν πολλαπλασιαστεί τα τελευταία χρόνια με τη χρήση των παράγωγων προϊόντων, των οποίων η εξέλιξη είναι ραγδαία.

Οι φοιτητές που θα μελετήσουν αυτόν τον τόμο δεν απαιτείται να έχουν γνώση συγκεκριμένων εδαφίων της τραπεζικής διοικητικής, της στατιστικής, των μαθηματικών ή της οικονομετρίας. Βασικές μόνον γνώσεις της στατιστικής και της οικονομετρίας είναι απαραίτητες. Το κεφάλαιο «Ποσοτικές Μέθοδοι» θα σας βοηθήσει προς τούτο. Εξάλλου, όπου τούτο χρειάζεται, δίνονται τα απαραίτητα στοιχεία και βιβλιογραφικές αναφορές. Εξαίρεση αποτελεί το κεφάλαιο 6 «Υποδείγματα Πρόβλεψης Κινδύνου», το οποίο μπορεί να μελετηθεί προαιρετικά. Ωστόσο, η συγγραφή του κρίθηκε απαραίτητη, αφού αυτά τα υποδείγματα χρησιμοποιούν στην πράξη οι μεγάλοι οργανισμοί, όπως η JP Morgan και άλλοι.

Κλείνοντας αυτόν τον πρόλογο, αισθάνομαι υποχρεωμένος να ευχαριστήσω όλους εκείνους που υποστήριξαν την προσπάθεια μου αυτή με διάφορους τρόπους. Κυρίως, για τη σημαντική συμβολή τους, ευχαριστώ τον κ. Κ. Γαλιάτσο, τον κ. Γ. Αναγνωστάκη και τον κ. Χ. Γκόρτσο. Ευχαριστώ ιδιαίτερα την κα. Ζαφειρώ Χαμπούρη της ALPHA BANK για την πολύτιμη βοήθειά της στην ανάγνωση του κειμένου και τις σημαντικές παρατηρήσεις και διορθώσεις της. Ακόμα, ευχαριστώ τον Αν. Καθηγητή κ. Γ. Κορρέ για τις παρατηρήσεις και τα σχόλιά του στο κεφάλαιο 1 (Ποσοτικές μέθοδοι) του παρόντος τόμου.

Κωνσταντίνος Συριόπουλος

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΠΟΣΟΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ ΣΤΗ ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗ

Σκοπός

Στο κεφάλαιο αυτό θα κάνουμε μια εισαγωγή στις ποσοτικές μεθόδους που είναι απαραίτητες για τη συνέχεια του Τόμου Α και τη διαχείριση κινδύνου. Στην αρχή θα συζητήσουμε για την απόδοση επενδύσεων, τα επιτόκια και τις ομολογίες. Η δεύτερη ενότητα περιλαμβάνει τα στατιστικά μέτρα θέσης και διασποράς, καθώς και μια εισαγωγή στη θεωρία πιθανοτήτων και τις βασικές κατανομές. Η επόμενη ενότητα αναφέρεται στην επαγωγική στατιστική, τον έλεγχο υποθέσεων και τα διαστήματα εμπιστοσύνης. Τέλος, η τέταρτη και τελευταία ενότητα παρουσιάζει την απλή και πολλαπλή παλινδρόμηση και μια εισαγωγή στη σύγχρονη ανάλυση χρονολογικών σειρών.

Προσδοκώμενα Αποτελέσματα

Όταν ο αναγνώστης ολοκληρώσει την ανάγνωση του κεφαλαίου αυτού, αναμένεται να είναι σε θέση να υπολογίζει αποδόσεις επενδύσεων, να μετράει τη χρονική αξία του χρήματος (μελλοντική και παρούσα αξία), να υπολογίζει την τιμή ομολογιών, την κυρτότητα και τη διάρκειά τους. Ακόμα, να εκτιμά τις βασικές στατιστικές όπως μέσο, διακύμανση, συνδιακύμανση και συσχέτιση, να πραγματοποιεί ελέγχους στατιστικών υποθέσεων και να εκτιμά διαστήματα εμπιστοσύνης. Τέλος, μπορεί να εκτιμά, να αναλύει και να ερμηνεύει παλινδρομήσεις και να προχωρά σε ανάλυση χρηματοοικονομικών χρονολογικών σειρών.

Έννοιες Κλειδιά

- Καμπύλη επιτοκίων
- Κυρτότητα, διάρκεια
- Παλινδρόμηση, χρονολογικές σειρές

Ενότητα 1.1

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΑΠΟΔΟΣΕΩΝ ΚΑΙ ΕΠΙΤΟΚΙΟΥ ΠΕΡΙΟΥΣΙΑΚΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ

Το μεγαλύτερο μέρος της μελέτης της χρηματοοικονομικής επιστήμης επικεντρώνει το ενδιαφέρον της στην ανάλυση επενδύσεων με σκοπό την αποκόμιση θετικών αποδόσεων. Απόδοση είναι το πραγματικό κέρδος μιας επένδυσης και ποσοστιαία απόδοση είναι η ποσοστιαία μεταβολή του κεφαλαίου που πέτυχε την απόδοση αυτή. Βασική ενασχόληση και κύριο ενδιαφέρον των αναλυτών είναι η αβεβαιότητα της επιτυχίας αυτών των αποδόσεων, που είναι γνωστή, κυρίως, στην ανάλυση κινδύνου.

Οι επενδυτές συναλλάσσονται περιουσιακά στοιχεία, όπως μετοχές, ομολογίες, εταιρικά ομόλογα κ.τ.λ., με την ελπίδα να κερδίσουν είτε όταν τα πουλήσουν σε υψηλότερη τιμή (κεφαλαιακή απόδοση) είτε λαμβάνοντας μέρισμα (μερισματική απόδοση) ή τοκομερίδιο είτε και τα δύο. Την ίδια περίπου δουλειά κάνουν και οι δανειστές, επενδύοντας μέσω του δανεισμού, προσβλέποντας στο κέρδος του τόκου, που υπολογίζεται επί του συνολικού ποσού δανεισμού. Με τη διευκρίνιση αυτή, ο τόκος είναι συνώνυμος της απόδοσης, ο δανειστής είναι συνώνυμος του επενδυτή και το δάνειο είναι συνώνυμο της επένδυσης.

1.1.1 Η καμπύλη αποδόσεων επιτοκίων

Το επιτόκιο είναι ίσως μια από τις πιο σημαντικές μεταβλητές στη χρηματοοικονομική επιστήμη. Υπάρχουν πολλά είδη επιτοκίου, όπως υπάρχουν και πολλές μέθοδοι υπολογισμού του ύψους του επιτοκίου. Αλλά γιατί υπάρχει τέτοιο ενδιαφέρον;

Αυτό γίνεται κατανοητό με την αξία του χρήματος. Το χρήμα παρέχει χρησιμότητα ως μέσο ανταλλαγής. Δηλαδή αγοράζουμε μέσω του χρήματος προϊόντα και υπηρεσίες που μας δίνουν άμεση χρησιμότητα. Το χρήμα καθαυτό δεν μας δίνει αυτή τη δυνατότητα. Όταν κάποιος λοιπόν επενδύει ή δανείζει χρήματα σε μια επένδυση, αυτό σημαίνει πως ελαττώνει τη δυνατότητά του να αγοράσει αγαθά και υπηρεσίες και, έτσι, απολαμβάνει ένα χαμηλότερο επίπεδο χρησιμότητας αγαθών και υπηρεσιών σήμερα. Αυτό πρέπει να αντισταθμιστεί με ένα κέρδος αντίστοιχο των χρημάτων που επένδυσε. Αυτή είναι και η βασική λειτουργία του επιτοκίου.

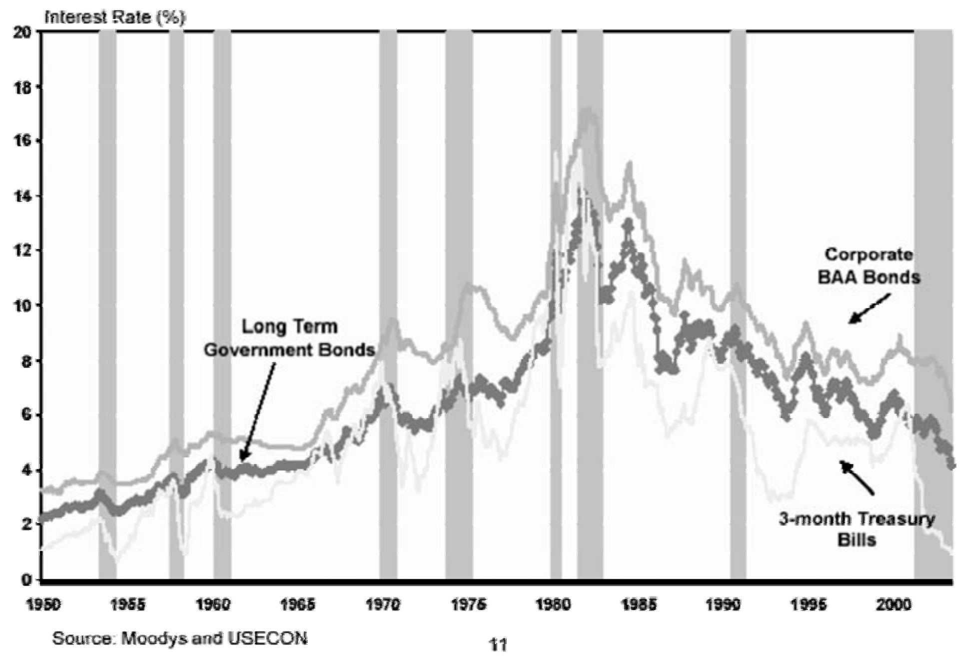
Επιπλέον, ο κίνδυνος της επένδυσης, δηλαδή η αβεβαιότητα του κέρδους ή της ζημίας αυτών των χρημάτων που επενδύονται, δημιουργεί μια δεύτερη βασική λειτουργία του επιτοκίου που αντισταθμίζει τον αναλαμβανόμενο κίνδυνο. Υπάρχουν πολλά είδη κινδύνου που οι επενδυτές αντιμετωπίζουν.

Ένας βασικός κίνδυνος είναι ο κίνδυνος ζημίας της αγοραστικής δύναμης του χρήματος που επενδύεται (πληθωρισμός). Ένας δεύτερος κίνδυνος είναι η μη επιστροφή των χρημάτων της επένδυσης είτε γιατί το επενδυτικό σχέδιο δεν ήταν επιτυχές είτε λόγω της αφερεγγυότητας του αντισυμβαλλομένου είτε λόγω άλλων απρόβλεπτων παραγόντων και τυχαίων καταστάσεων κάθε είδους. Ο κίνδυνος αυτός αναφέρεται ως πιστωτικός κίνδυνος, απέναντι στον οποίο ο επενδυτής ζητάει μια αντιστάθμιση.

Το διάγραμμα 1 δείχνει τις μεταβολές στο επίπεδο των επιτοκίων για την περίοδο 1950–2000, στην οποία παρατηρήθηκαν και οι μεγαλύτερες διακυμάνσεις. Οι σκιασμένες περιοχές δηλώνουν τις περιόδους της οικονομικής ύφεσης. Για παράδειγμα, το επιτόκιο των μακροχρόνιων ομολογιών ήταν γύρω στο 5% το 1963 και αυξήθηκε σε 15% το 1981, για να βρεθεί σε χαμηλότερα του 6% επίπεδα το 1996. Αντίστοιχα, την 30–ετία 1936–1996 κυμάνθηκε μεταξύ 2% και 5%. Παρατηρήστε, επίσης ότι τα βραχυχρόνια επιτόκια στη διάρκεια των περιόδων οικονομικής ύφεσης τείνουν να πέφτουν, ενώ έχουν ιδιαίτερα ανοδική πορεία στις περιόδους οικονομικής ανάκαμψης.

Ακόμα, από το Διάγραμμα 1 παρατηρούμε ότι τα 3–μηνα επιτόκια είναι περισσότερο ευμετάβλητα από τα υπόλοιπα και, κατά μέσο όρο, είναι σε χαμηλότερα επίπεδα. Τα επιτόκια των εταιρικών ομολογιών μεσαίας ποιότητας (Baa) είναι υψηλότερα από τα υπόλοιπα.

Διάγραμμα 1
Επιτόκια επιλεγμένων ομολογιών 1950–2000 (ΗΠΑ).



Το ύψος των επιτοκίων είναι υψηλότερο στη διάρκεια της φάσης οικονομικής ανάπτυξης, αφού η ζήτηση κεφαλαίων από τις επιχειρήσεις είναι μεγάλη και οι πληθωριστικές πιέσεις είναι ισχυρότερες. Γίνεται φανερό από το διάγραμμα 1 ότι, το ύψος του επιτοκίου δεν παραμένει σταθερό στο χρόνο. Ακόμα, παρατηρούμε ότι τα βραχυχρόνια επιτόκια είναι άλλοτε χαμηλότερα από τα μακροχρόνια επιτόκια (όπως στην περίοδο του 1990) και άλλοτε υψηλότερα από τα μακροχρόνια επιτόκια (όπως στην περίοδο του 1980–1981). Η σχέση μεταξύ των μακροχρόνιων και βραχυχρόνιων επιτοκίων (γενικά, το επίπεδο του επιτοκίου στις διάφορες ληκτότητες) είναι γνωστή ως δομή λήξεων επιτοκίων (term structure of interest rates).

Το σύνολο των δεδομένων των επιτοκίων των ομολογιών σε διαφορετικές ληκτότητες ονομάζεται καμπύλη απόδοσης (yield curve). Η καμπύλη αποδόσεων (yield curve) δείχνει τη σχέση μεταξύ της απόδοσης στη λήξη και του χρόνου λήξης διάφορων τύπων ομολόγων με τα ίδια χαρακτηριστικά κινδύνου, ρευστότητας και φορολογικής μεταχείρισης. Η καμπύλη αποδόσεων μπορεί να είναι θετικής κλίσης, αρνητικής κλίσης ή οριζόντια. Από εμπειρικές μελέτες προκύπτουν τα παρακάτω σημαντικά συμπεράσματα:

(Σ1) Τα επιτόκια ομολογιών διαφορετικών λήξεων κινούνται στην ίδια κατεύθυνση.
(Σ2) Οι καμπύλες αποδόσεων τείνουν να έχουν θετική κλίση, όταν τα βραχυχρόνια επιτόκια είναι χαμηλά και να έχουν αρνητική κλήση, όταν τα βραχυχρόνια επιτόκια είναι υψηλά.
(Σ3) Οι καμπύλες αποδόσεων, συνήθως, παρουσιάζουν θετική κλίση.

Συνήθως, αξιόγραφα με μακρινή ληκτότητα έχουν υψηλότερη απόδοση (δηλαδή, τα βραχυχρόνια επιτόκια είναι χαμηλότερα από τα μακροχρόνια επιτόκια) και η καμπύλη είναι ανοδικής κλίσης (upward sloping ή normal yield curve). Αυτό δικαιολογείται από το γεγονός ότι τα βραχυχρόνια αξιόγραφα είναι λιγότερο επικίνδυνα από ότι τα μακροχρόνιας λήξης αξιόγραφα. Η κανονική καμπύλη απόδοσης εκφράζει, έτσι, τον κίνδυνο του πληθωρισμού. Η καμπύλη αυτή υποδηλώνει συνήθως ότι αναμένεται μια επιτάχυνση της οικονομικής ανάπτυξης. Εάν, ωστόσο, αξιόγραφα βραχυχρόνιας ληκτότητας έχουν υψηλότερη απόδοση από τα μακροχρόνια, τότε θα λέμε ότι η καμπύλη αποδόσεων είναι αντιστραμμένη καμπύλη απόδοσης (reverted). Ο τύπος αυτός της καμπύλης αποδόσεων συνήθως υποδηλώνει μια μεγάλη πιθανότητα οικονομικής ύφεσης. Μία επίπεδη καμπύλη αποδόσεων (flat yield curve ή even yield curve) δηλώνει ότι οι αποδόσεις στα διάφορα χρονικά τμήματα αυτής είναι σχεδόν ίδιες. Ο τύπος αυτός της καμπύλης υποδηλώνει την πιθανότητα οικονομικής επιβράδυνσης.

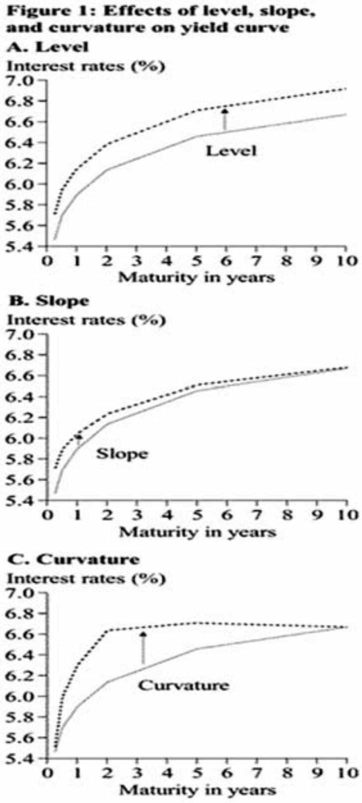
Μικρή ή αμελητέα διαφορά μεταξύ των βραχυχρόνιων και των μακροχρόνιων επιτοκίων εμφανίζεται στη φάση εκείνη του οικονομικού κύκλου, όπου τα επιτόκια αυξάνονται λόγω υψηλών πληθωριστικών πιέσεων και σφικτής νομισματικής πολιτικής, με αποτέλεσμα μικρότερη διαθεσιμότητα χρήματος. Όταν η διαφορά μεταξύ των βραχυχρόνιων και των μακροχρόνιων επιτοκίων είναι μεγάλη, η καμπύλη γίνεται αυστηρότερης κλίσης και δείχνει ότι κεφάλαια και πίστωση είναι διαθέσιμα στην οικονομία. Εμφανίζεται στην αρχή του οικονομικού κύκλου, όταν οι νομισματικές αρχές προσπαθούν να τονώσουν την οικονομική δραστηριότητα, ύστερα από μια ύφεση ή επιβράδυνση της οικονομικής ανάπτυξης. Χαμηλά βραχυχρόνια επιτόκια αντικατοπτρίζουν τη διαθεσιμότητα κεφαλαίων και χαμηλό ή μειούμενο επίπεδο πληθωρισμού. Υψηλότερα μακροχρόνια επιτόκια δηλώνουν τον φόβο των επενδυτών για υψηλό πληθωρισμό στο μέλλον. Όταν τα βραχυχρόνια επιτόκια είναι υψηλότερα, τότε οι νομισματικές αρχές ακολουθούν σφικτή νομισματική πολιτική, που οδηγεί σε αύξηση του κόστους του βραχυχρόνιου κεφαλαίου. Τα μακροχρόνια επιτόκια παραμένουν χαμηλά, αφού οι επενδυτές προβλέπουν μειούμενο πληθωρισμό. Αυτό με τη σειρά του αυξάνει τη ζήτηση για μακροχρόνιες ομολογίες.

Γενικά, οι εμπειρικές μελέτες έχουν δείξει ότι το 99% της κίνησης των επιτοκίων ομολογιών διάφορων ληκτοτήτων ερμηνεύεται από τρεις παράγοντες:

(i) το επίπεδο (level),
(ii) την κλίση (slope) και
(iii) την καμπυλότητα (curvature) της καμπύλης αποδόσεων, όπως δείχνει το παρακάτω Διάγραμμα 2.

Το μέρος A δείχνει την επίδραση ενός σοκ στον παράγοντα «επίπεδο» της καμπύλης αποδόσεων (διακεκομμένη καμπύλη). Ένα σοκ στο επίπεδο αλλάζει τα επιτόκια κάθε ληκτότητας σε όμοιο, σχεδόν, ποσό, μετακινώντας την καμπύλη αποδόσεων παράλληλα. Το μέρος B του διαγράμματος δείχνει την επίδραση του παράγοντα «κλίση» επί της καμπύλης επιτοκίων. Ένα σοκ στον παράγοντα «κλίση» οδηγεί σε αύξηση τα βραχυχρόνια επιτόκια κατά ένα ποσό μεγαλύτερο από ό,τι τα μακροχρόνια επιτόκια. Συνεπώς, η καμπύλη αποδόσεων γίνεται λιγότερο απότομη και η κλίση της μειώνεται. Τέλος, το μέρος C του διαγράμματος δείχνει την ανταπόκριση της καμπύλης επιτοκίων ύστερα από ένα σοκ επί του παράγοντα «καμπυλότητα». Η βασική επίδραση αυτού του σοκ παρατηρείται στα μεσοπρόθεσμα επιτόκια, με αποτέλεσμα η καμπύλη επιτοκίων να «καμπουριάζει» περισσότερο από πριν.

Διάγραμμα 2: Καμπυλότητα της καμπύλης επιτοκίων



Τα εμπειρικά ευρήματα της διεθνούς βιβλιογραφίας συγκλίνουν στην άποψη ότι οι μακροοικονομικές μεταβλητές και, ιδιαίτερα εκείνες της νομισματικής πολιτικής, επηρεάζουν την κλίση της καμπύλης αποδόσεων. Αυτό είναι λογικό, αφού το μακροχρόνιο ονομαστικό επιτόκιο είναι το άθροισμά του αναμενόμενου μακροχρόνιου επιπέδου του πληθωρισμού και των μακροχρόνιων πραγματικών επιτοκίων. Συνεπώς, κάθε δομική μακροοικονομική κίνηση συμβάλλει στον προσδιορισμό του μακροχρόνιου επιπέδου του πληθωρισμού ή του επιπέδου του μακροχρόνιου πραγματικού επιτοκίου, με αποτέλεσμα να επηρεάζεται ο παράγοντας «κλίση». Μια σφικτή νομισματική πολιτική οδηγεί αρχικά σε υψηλότερα ονομαστικά βραχυχρόνια επιτόκια, αλλά λόγω των αντιπληθωριστικών επιδράσεων διορθώνονται γρήγορα. Κατά συνέπεια, αφού τα μακροχρόνια επιτόκια εμπεριέχουν τις προσδοκίες που δημιουργούν τα βραχυχρόνια επιτόκια, αυξάνονται αλλά κατά μικρό μόνο ποσό. Τελικά, η κλίση της καμπύλης αποδόσεων φθίνει όταν παρατηρούνται αντικρουόμενα σοκ νομισματικής πολιτικής.

Λαμβάνοντας υπόψη τον πιστωτικό κίνδυνο (credit risk), οι διαφορές των ονομαστικών επιτοκίων, σε κάθε χρονικό σημείο, μπορούν να ερμηνευτούν από την παρακάτω εξίσωση:

$$i_{\text{market}} = \{r^* + E[\pi_t]\} + \varrho + \lambda \qquad (1)$$

Οι δύο συνιστώσες στα άγκιστρα είναι γνωστές ως *αναμενόμενη απόδοση*, r^*, (required rate of return) και *αναμενόμενος πληθωρισμός* (expected inflation) και αποτελούν τον πυρήνα κάθε επιτοκίου σε κάθε χρονική στιγμή. Η τρίτη συνιστώσα, ϱ, είναι γνωστή ως *ασφάλιστρο κινδύνου* (risk premium), η οποία δημιουργείται από τις πιστωτικές αγορές για διάφορες κατηγορίες κινδύνου και μπορεί να πάρει χαμηλή ή υψηλή τιμή ανάλογα με την αποστροφή στον κίνδυνο των δανειστών (lenders). Η τελευταία συνιστώσα, λ, είναι γνωστή ως *ασφάλιστρο ρευστότητας* (liquidity premium) και δηλώνει το ύψος της ανταμοιβής που απαιτεί ο δανειστής προκειμένου να δανείσει μακροχρόνια τα κεφάλαιά του.

Στη διεθνή βιβλιογραφία σημειώνονται τρεις θεωρίες αναφορικά με την περιγραφή της δομής λήξεων επιτοκίων και του προσδιορισμού του ασφαλίστρου ρευστότητας:

α) Η Υπόθεση της τμηματοποίησης των αγορών (*Segmented Markets*), η οποία μπορεί να ερμηνεύσει μόνο το (Σ3) της εμπειρικής παρατήρησης, αλλά όχι το (Σ1) και (Σ2),

β) Η Υπόθεση των προσδοκιών (*Expectations Hypothesis*), η οποία μπορεί να ερμηνεύσει τα (Σ1) και (Σ2) αλλά όχι το (Σ3), και

γ) Η Υπόθεση της προτίμησης (*Preferred Habitat*).

Οι δυο πρώτες υποθέσεις αντιπροσωπεύουν τις ακραίες θέσεις αναφορικά με τη δυνατότητα υποκατάστασης μεταξύ βραχυχρόνιων και μακροχρόνιων περιουσιακών στοιχείων, ενώ η τρίτη υπόθεση βρίσκεται κάπου στο μέσον μεταξύ των δυο προηγούμενων. Να σημειωθεί ότι η θεωρία του ασφαλίστρου ρευστότητας είναι ικανή να ερμηνεύσει τα (Σ1), (Σ2) και (Σ3).

Η υπόθεση της τμηματοποίησης των αγορών

Στη μια άκρη υπάρχει η άποψη ότι τα βραχυχρόνια και τα μακροχρόνια περιουσιακά στοιχεία είναι ατελώς υποκατάστατα. Δηλαδή ομολογίες διαφορετικής ληκτότητας δεν υποκαθίστανται και, έτσι, η αναμενόμενη απόδοση από τη διακράτηση της μιας δεν επηρεάζει τη ζήτηση για την άλλη. Για τον λόγο αυτό δεν μπορεί να εξηγήσει το συμπέρασμα (Σ1). Σύμφωνα με αυτή οι δανειζόμενοι και οι δανειστές (sellers and buyers) στις βραχυχρόνιες αγορές αντιδρούν τελείως διαφορετικά από εκείνους που συναλλάσσονται στις μακροχρόνιες αγορές. Τόσο στη βραχυχρόνια αγορά (π.χ. κάποιος που χρειάζεται χρηματοδότηση για την κατασκευή αποθηκών τον μήνα Σεπτέμβριο προκειμένου να προλάβει τη ζήτηση για αποθήκευση προϊόντων τα Χριστούγεννα) όσο και στη μακροχρόνια αγορά (π.χ. κάποιος που θέλει να δανειστεί κεφάλαια για αγορά κατοικίας), οι συνθήκες στην προσφορά και τη ζήτηση καθορίζουν την κλίση της καμπύλης αποδόσεων.

Ωστόσο, επειδή δεν είναι γνωστό πώς μεταβάλλονται η προσφορά και η ζήτηση των βραχυχρόνιων έναντι των μακροχρόνιων επιτοκίων, η θεωρία αυτή δεν μπορεί να εξηγήσει γιατί η καμπύλη απόδοσης τείνει να έχει ανοδική κλίση όταν τα βραχυχρόνια επιτόκια είναι χαμηλά και αντιστραμμένη κλίση όταν τα επιτόκια είναι ψηλά. Άρα, δεν ερμηνεύει και το εμπειρικό συμπέρασμα (Σ2).

Με άλλα λόγια, η κλίση της καμπύλης αποδόσεων μπορεί να είναι ανοδική, καθοδική ή σταθερή. *Ανοδική*, θα είναι όταν παρατηρηθεί μεγάλη προσφορά κεφαλαίων σχετικά με τη ζήτηση στη βραχυχρόνια αγορά, αλλά, ταυτόχρονα, έλλειψη κεφαλαίων στη μακροχρόνια αγορά. Αντίστοιχα, θα είναι *καθοδικής κλίσης*, όταν παρατηρηθεί ισχυρή ζήτηση δανειακών κεφαλαίων στη βραχυχρόνια αγορά συγκριτικά με τη ζήτηση στη μακροχρόνια αγορά, ενώ η *σταθερή κλίση* παρατηρείται όταν η προσφορά και η ζήτηση κεφαλαίων είναι ισορροπημένη στις δυο αυτές αγορές.

Η υπόθεση των προσδοκιών

Αντίθετα με την προηγούμενη υπόθεση, η θεωρία των προσδοκιών βρίσκεται στο άλλο άκρο, θέτοντας ότι τα βραχυπρόθεσμα και μακροπρόθεσμα εργαλεία χρέους είναι τέλεια υποκατάστατα μεταξύ τους. Πρακτικά, αυτό σημαίνει ότι εάν δύο ομολογίες διαφορετικής ληκτότητας είναι τέλεια υποκατάστατες μεταξύ τους, τότε οι αναμενόμενες αποδόσεις τους θα είναι ίσες. Σύμφωνα με αυτή τη θεωρία, η κλίση της καμπύλης αποδόσεων εξαρτάται από τις πληθωριστικές προσδοκίες των οικονομούντων ατόμων.

Κάτω από τη θεωρία αυτή, το επιτόκιο μιας μακροχρόνιας ομολογίας ισούται με τον μέσο όρο των βραχυχρόνιων επιτοκίων, που τα οικονομούντα άτομα αναμένουν στη διάρκεια της ομολογίας αυτής. Με άλλα λόγια, μια άνοδος των βραχυχρόνιων επιτοκίων μεγαλώνει τις προσδοκίες για αύξηση των μακροχρόνιων επιτοκίων (αφού είναι ο μέσος όρος τους), ερμηνεύοντας έτσι το εμπειρικό γεγονός (Σ1). Επίσης, μπορεί να ερμηνεύσει το εμπειρικό εύρημα (Σ2), διότι όταν τα βραχυχρόνια επιτόκια είναι χαμηλά, οι συναλλασσόμενοι προσδοκούν σε άνοδό τους, με αποτέλεσμα το μέσο μελλοντικό βραχυχρόνιο επιτόκιο να είναι υψηλότερο από το τρέχον βραχυχρόνιο. Έτσι, τα μακροχρόνια επιτόκια θα είναι πάνω από το τρέχον βραχυχρόνιο και η καμπύλη θα είναι ανοδικής κλίσης.

Όμως, η θεωρία αυτή δεν μπορεί να ερμηνεύσει την εμπειρική παρατήρηση (Σ3). Σύμφωνα με αυτή, η καμπύλη αποδόσεων είναι, συνήθως, ανοδική, που σημαίνει ότι τα βραχυχρόνια επιτόκια αναμένεται να αυξάνουν στο μέλλον. Ωστόσο, η αύξηση ή η μείωσή τους δεν μπορεί να προεξοφληθεί και, έτσι, η θεωρία αυτή θέτει ότι συνήθως η καμπύλη αποδόσεων είναι οριζόντια.

Μια σημαντική θεώρηση εδώ είναι ότι οι δανειστές είναι περισσότερο εύκαμπτοι αναφορικά με το μήκος της χρονικής περιόδου των δανειζόμενων κεφαλαίων έναντι των δανειζομένων. Οι δανειζόμενοι χρησιμοποιούν τη μακροχρόνια αγορά λόγω της φύσης των επενδυτικών τους σχεδίων, η οποία είναι μακροχρόνια (π.χ. αγορά κατοικίας).

Αντίθετα, λοιπόν, από τους δανειζόμενους, οι δανειστές έχουν το δικαίωμα επιλογής, για παράδειγμα, είτε να δανείσουν τα κεφάλαιά τους σε δάνειο 30 ετών είτε να δανείσουν το κεφάλαιό τους σε 5 δάνεια των 6 ετών. Στην πρώτη περίπτωση, ο δανειστής κλειδώνει το κεφάλαιό του με ένα μακροχρόνιο επιτόκιο και εκτίθεται στον κίνδυνο της αβεβαιότητας των μελλοντικών ενδεχομένων, ενώ στη δεύτερη περίπτωση μπορεί να προσαρμόζεται στις εκάστοτε οικονομικές συνθήκες.

Για παράδειγμα, έστω ότι ο δανειστής επιλέγει να δανείσει κεφάλαιο ύψους P για 2 έτη. Έχει δηλαδή την επιλογή να δανείσει το κεφάλαιο αυτό σε έναν δανειζόμενο για δυο έτη με το υφιστάμενο βραχυχρόνιο επιτόκιο, "${}_2r_t$", ή να δανείσει το κεφάλαιό του για ένα έτος με το υφιστάμενο βραχυχρόνιο επιτόκιο, "${}_1r_t$" και να επανεπενδύσει στο αναμενόμενο βραχυχρόνιο επιτόκιο του επόμενου έτους, "$E[{}_1r_{t+1}]$". Ο συμβολισμός "${}_k\boldsymbol{r}_t$" δηλώνει τη χρονική περίοδο του δανείου "k" τη χρονική στιγμή "t", ενώ ο τελεστής E σημαίνει «αναμενόμενη αξία». Έτσι, για τον δανειστή θα είναι:

$$\boldsymbol{P}(1 + {}_2r_t)^2 = \boldsymbol{P}(1 + {}_1r_t)(1 + \mathrm{E}[{}_1r_{t+1}]) \text{ ή } 1 + 2({}_2r_t) = 1 + {}_1r_t + \mathrm{E}[{}_1r_{t+1}]$$
$$\text{ή } {}_2r_t = \{{}_1r_t + \mathrm{E}[{}_1r_{t+1}]\} /2.$$

Η τελευταία έκφραση θέτει ότι το τρέχον επιτόκιο 2–ετών είναι ίσο με τον μέσο όρο του τρέχοντος επιτοκίου 1–έτους και του αναμενόμενου επιτοκίου 1–έτους της επόμενης περιόδου. Εάν το επιτόκιο 2–ετών είναι μεγαλύτερο αυτού του ημι–αθροίσματος, τότε ο δανειστής θα δανείσει το κεφάλαιό του μακροχρόνια επιδιώκοντας υψηλότερη απόδοση. Αφού, λοιπόν, θα εκδηλωθεί ζήτηση για αυτό το μακροχρόνιο προϊόν, η τιμή του θα οδηγηθεί υψηλότερα και το επιτόκιο 2–ετών (απόδοση 2–ετών) σε χαμηλότερη τιμή, έως ότου η δεξιά έκφραση της παραπάνω σχέσης εξισωθεί με την αριστερή έκφραση. Το ασφάλιστρο ρευστότητας θα επηρεαστεί άμεσα από την προσδοκία των μελλοντικών βραχυχρόνιων επιτοκίων.

Σύμφωνα, λοιπόν, με τη θεωρία των προσδοκιών, ο μόνος λόγος για ανοδική καμπύλη αποδόσεων είναι ότι οι επενδυτές προσδοκούν το μελλοντικό τρέχον επιτόκιο της αγοράς να είναι υψηλότερο από το σημερινό. Αντίστροφα, ο μόνος λόγος για να είναι η κλίση καθοδική είναι ότι οι επενδυτές προσδοκούν το τρέχον επιτόκιο να είναι χαμηλότερο από το σημερινό.

Παράδειγμα 1

Σκεφτόμαστε να τοποθετήσουμε το κεφάλαιο των 1,000€ για 2 έτη. Οι επιλογές μας είναι:

(1) να αγοράσουμε μια ομολογία 1–έτους τον πρώτο χρόνο με επιτόκιο r_1, να πάρουμε τα χρήματά μας (κεφάλαιο + τόκους) στο τέλος του έτους και να ψάξουμε για μια άλλη ομολογία 1–έτους, με επιτόκιο που δεν γνωρίζουμε από σήμερα. Έστω, λοιπόν ότι το επιτόκιο αυτό προεξοφλούμε ότι θα είναι ίσο με ${}_1r_2$. Το τελικό όφελος της στρατηγικής αυτής (Σ1) θα είναι ίσο με: $1000(1+ r_1)(1+{}_1r_2)$.

Για παράδειγμα, έστω ότι το τρέχον επιτόκιο της ομολογίας 1–έτους r_1 = 10%. Έστω, ακόμα, ότι προεξοφλούμε το επιτόκιο μιας ομολογίας 1–έτους για την επόμενη χρονιά $E({}_1r_2)$ = 11%. Τότε θα είναι:

$$1000(1+r_1)[1+E({}_1r_2)] = 1000(1.10)(1.11) = 1{,}221€$$

(2) να επενδύσουμε σε μια ομολογία 2–ετών με επιτόκιο r_2. Έστω ότι αυτό το επιτόκιο ισούται με 10.5%. Τότε θα είναι:

$$1000(1+r_2)^2 = 1000(1.105)^2 = 1{,}221€$$

Ο παρακάτω πίνακας εκφράζει αναλυτικά τις στρατηγικές αυτές.

Στρατηγική	ΤΩΡΑ	→	1° Έτος	→	2° (τελικό) Έτος
Σ1: Επένδυση σε 2 ετήσιες ομολογίες	1,000€	Επένδυση στην 1η ομολογία με απόδοση r_1	1,000(1+ r_1)	Επένδυση στη 2η ομολογία με απόδοση ${}_1r_2$	1000(1+ r_1)(1+${}_1r_2$)
Σ2: Επένδυση σε 1 ομολογία 2 ετών	1,000€	→		→	1000(1+r_2)^2
Ισοδύναμη της Σ2	1,000€	Επένδυση 1–έτους με επιτόκιο r_1	1,000(1+ r_1)	Επένδυση για 2° έτος με προθεσμιακό επιτόκιο f_2	1000(1+ r_1)(1+ f_2)

Η **στρατηγική Σ2 μπορεί να ερμηνευτεί ως εξής**: επενδύουμε στην ομολογία 1–έτους με τρέχον (spot) επιτόκιο r_2 και για το δεύτερο έτος σε προθεσμιακό επιτόκιο (forward rate) f_2. Το προθεσμιακό επιτόκιο αποτελεί την επιπλέον απόδοση που θα πάρουμε (που επιθυμούμε να πάρουμε) επενδύοντας για 2–έτη αντί για 1–έτος. Ουσιαστικά, αυτό το επιτόκιο βρίσκεται έμμεσα στο r_2.

Έστω, για παράδειγμα, ότι το τρέχον επιτόκιο για επένδυση 2–ετών είναι 10.5%. Τότε το προθεσμιακό επιτόκιο πρέπει να είναι:

$$(1+r_2)^2 = (1+r_1)(1+f_2) \Rightarrow (1.105)^2 = (1.10)(1+f_2) \Rightarrow f_2 = \frac{(1.105)^2}{1.10} - 1 \Rightarrow f_2 = 0.11$$

ή 11%. Για να ισχύει η ισότητα, λοιπόν, ο τρέχον επιτόκιο 2–ετών θα είναι ο μέσος όρος του επιτοκίου 1–έτους (10%) και του προθεσμιακού επιτοκίου (11%).

Με άλλα λόγια: $f_2 = E({}_1r_2)$

Υπενθύμιση: Τα προθεσμιακά επιτόκια μπορούν να υπολογιστούν για περισσότερες περιόδους, εφαρμόζοντας τη σχέση:

$$f_n = \frac{(1+r_n)^n}{(1+r_{n-1})^{n-1}} - 1$$

Το προθεσμιακό επιτόκιο του πρώτου έτους ισούται, εξ ορισμού με το επιτόκιο 1–έτους στην τρέχουσα αγορά (spot).

Δραστηριότητα 1/Κεφάλαιο 1

Τι συμβαίνει εάν δεν ισχύει η ισότητα $f_2 = E(_1r_2)$;

Την απάντηση θα βρείτε στο Παράρτημα, στο τέλος του κεφαλαίου.

Γενικά, θα ισχύει για το προθεσμιακό επιτόκιο, κάτω από την υπόθεση των προσδοκιών:

$$f_2 = \text{επιτόκιο τρέχουσας αγοράς το } 2^{\text{ο}} \text{ έτος}$$

Τόσο η θεωρία προσδοκιών όσο και η θεωρία της ρευστότητας για τη δομή λήξεων επιτοκίων υποθέτουν ότι τα μελλοντικά επίπεδα πληθωρισμού είναι γνωστά. Με δεδομένο ότι το μελλοντικό επίπεδο του πληθωρισμού δεν μπορεί να είναι γνωστό με βεβαιότητα, θα ισχύει:

$$f_2 > E(_1r_2) \text{ ή } f_2 = E(_1r_2) + IP_1$$

Με άλλα λόγια, το προθεσμιακό επιτόκιο θα είναι μεγαλύτερο από το αναμενόμενο επιτόκιο της τρέχουσας αγοράς, κατά ένα ποσό που αντισταθμίζει τον κίνδυνο του πληθωρισμού (*IP*).

Η Υπόθεση της προτίμησης

Αυτή η τελευταία υπόθεση «παντρεύει» τις δυο προηγούμενες προσεγγίσεις. Στηρίζεται στη θέση ότι οι δανειστές προτιμούν να δανείζουν βραχυχρόνια και όχι μακροχρόνια, λόγω των πολλών μελλοντικών οικονομικών αβεβαιοτήτων. Ωστόσο, θα μπορούσαν, αν δεχτούν τον μακροχρόνιο δανεισμό, να αντιστάθμιζαν τον αναλαμβανόμενο κίνδυνό τους με ένα ασφάλιστρο, θ:

$$_2r_t = \{_1r_t + E[_1r_{t+1}]\}/2 + \theta$$

1.1.2 Μελλοντική και παρούσα αξία

Η αξία ενός ευρώ σήμερα αξίζει περισσότερο από την αξία ενός ευρώ ένα έτος αργότερα, γιατί εάν διαθέτουμε ένα ευρώ σήμερα μπορούμε να το επενδύσουμε, να κερδίσουμε τον τόκο και το επόμενο έτος να έχουμε περισσότερα από ένα ευρώ. Η διαδικασία να πάμε από το παρόν στο μέλλον λέγεται ανατοκισμός (compounding).

Εάν σήμερα διαθέτουμε κεφάλαιο ύψους PV (present value) και το επενδύσουμε με απόδοση r για ένα έτος ($n = 1$), τότε η αξία του κεφαλαίου το επόμενο έτος θα είναι:

$$FV_1 = PV + I = PV + PV(r) = PV(1+r)$$

όπου I (interest) είναι ο τόκος που θα κερδίσουμε και FV είναι η μελλοντική αξία (future value). Εάν στο τέλος του έτους επανεπενδύσουμε με ίδια απόδοση (επιτόκιο), r, το κεφάλαιό μας, θα λάβουμε:

$$FV_2 = FV_1 + I = FV_1 + FV_1(r) = FV_1(1+r) = PV(1+r)(1+r) = PV(1+r)^2$$

Γενικά, θα είναι:

$$FV_n = PV(1+r)^n$$

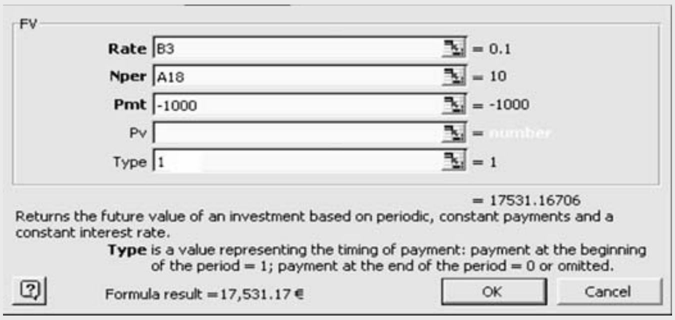
Παράδειγμα 2

1. Μπορούμε να υπολογίσουμε με το Excel πόσα χρήματα θα έχουμε μετά από 10 έτη, εάν καταθέσουμε σήμερα με κεφάλαιο 1000€ και επιτόκιο 10% και επενδύουμε το κεφάλαιο (με τους τόκους) κάθε έτος για 10 έτη. Ο παρακάτω πίνακας δίνει τα αποτελέσματα:

	A	B	C	D	E
1	ΜΕΛΛΟΝΤΙΚΗ ΑΞΙΑ				
2					
3	ΕΠΙΤΟΚΙΟ	10%			
4					
5	ΕΤΟΣ	ΚΕΦΑΛΑΙΟ	ΤΟΚΟΣ	ΣΥΝΟΛΟ	
6					
7		=B3*B8			
8	0	1000	100	1100	=C8+B8
9	1	1100	110	1210	
10	2	1210	121	1331	
11	3	1331	133.1	1464.1	=D8
12	4	1464.1	146.41	1610.51	
13	5				
14	6				
15	7				
16	8				
17	9	ΣΥΝΕΧΙΖΟΝΤΑΣ			
18	10	2593.74			
19					
20	ΑΠΛΟΥΣΤΕΡΑ			2593.742	=1000*(1+B3)^10

2. Μπορούμε, επίσης, να υπολογίσουμε το κεφάλαιο που θα έχουμε στην αρχή του $10^{ου}$ έτους με τα ίδια δεδομένα, με τη συνάρτηση του Excel:

FV(b3;a18;–1000,1)



Το αποτέλεσμα είναι 17,531.17€. Ο τρόπος υπολογισμού είναι:

$$\sum_{t=1}^{10} 1000 * (1+10\%)^t$$

Λύνοντας τη σχέση της μελλοντικής αξίας ως προς PV, βρίσκουμε:

$$PV = \frac{FV_n}{(1+r)^n} = FV_n \left(\frac{1}{1+r}\right)^n$$

που εκφράζει την παρούσα αξία μιας είσπραξης μετά από n έτη, προεξοφλημένης με επιτόκιο r.

Υπολογίζουμε την παρούσα αξία:

$$V = \frac{CF_1}{(1+r_1)^1} + \frac{CF_2}{(1+r_2)^2} + ... + \frac{CF_n}{(1+r_n)^n} = \sum_{t=1}^{t=n} \frac{CF_t}{(1+r_t)^t}$$

Η παραπάνω σχέση είναι η σχέση της προεξόφλησης αναμενόμενων χρηματορροών (discounted cash flow formula).

Παρατηρήσεις

(1) Ένα ευρώ αύριο δεν μπορεί να αξίζει λιγότερο από ένα ευρώ μεθαύριο. Με άλλα λόγια, πρέπει να ισχύει $r_1 > r_2$. Πρέπει, δηλαδή, να υπάρχει κάποια επιπλέον ανταμοιβή για αυτόν που δανείζει για 2 έτη έναντι εκείνου που δανείζει για 1 έτος. Έτσι, θα είναι $(1+r)^2 > (1+r)$. Αυτή η επιπλέον ανταμοιβή είναι η προθεσμιακή απόδοση (forward rate of return) και το συμπέρασμα λέει ότι η προθεσμιακή απόδοση δεν μπορεί να είναι αρνητική (δείτε σχετικά και το προηγούμενο κεφάλαιο).

(2) Δεν υπάρχει *money machine*. Ο τεχνικός όρος αυτής της μηχανής είναι εξισορροπητική κερδοσκοπία (arbitrage), η οποία δεν υπάρχει εάν οι αγορές χρήματος και κεφαλαίου είναι αποτελεσματικές. Η απουσία αυτής της μηχανής είναι η δεύτερη βασική αρχή στη χρηματοοικονομική για να είναι οι αγορές σε ισορροπία.

Ανατοκισμός

Πολλά χρηματοοικονομικά προϊόντα τοκίζονται με διαφορετική χρονική συχνότητα. Για παράδειγμα, οι τραπεζικοί λογαριασμοί που τοκίζουν κάθε μήνα ή ημέρα, οι ομολογίες που πληρώνουν τοκομερίδιο κάθε 6 μήνες, οι εισηγμένες εταιρίες στο χρηματιστήριο που πληρώνουν μέρισμα κάθε έτος ή, σε πολλές οικονομίες, κάθε 3 μήνες κ.λπ. Έτσι, εάν θέλουμε να συγκρίνουμε αξιόγραφα με διαφορετική περίοδο ανατοκισμού, πρέπει να βρούμε μια κοινή βάση υπολογισμού. Θα διακρίνουμε, λοιπόν, το ετήσιο ποσοστό επιβάρυνσης (annual percentage rate, APR ή ονομαστικό επιτόκιο) έναντι του πραγματικού ετήσιου επιτοκίου (effective annual rate, EAR), αυτού δηλαδή που ανατοκίζεται περισσότερες από μια φορές το χρόνο. Το APR αναφέρεται ως το επιτόκιο που επιβαρύνει τα καταναλωτικά δάνεια από τις τράπεζες. Οι τελευταίες, συνήθως, προκειμένου να τραβήξουν πελατεία διαφημίζουν το EAR. Το EAR είναι ο τόκος της τελικής ανατοκιζόμενης αξίας εάν ο ανατοκισμός ήταν ετήσιος αντί υψηλότερης συχνότητας. Θα διαπιστώσουμε ότι είναι προτιμότερο ένα ποσό να ανατοκίζεται ανά περισσότερες περιόδους αντί μια φορά το έτος, γιατί έτσι κερδίζουμε «τόκο στον τόκο» συχνότερα.

Παράδειγμα 3

Ποσό 1,000€ κατατέθηκε στην τράπεζα για 3 έτη με 6% ετήσιο επιτόκιο. Προσέξτε τις περιπτώσεις (I) και (II), στον παρακάτω πίνακα:

	A	B	C	D
1				
2				
3				
4	**Annual compounding at a 6% rate (I)**			
5	Year	Beginning amount, PV	*(1+r)	= Ending amount FVn
6				
7	1	1000.00	1.06	1060.00
8	2	1060.00	1.06	1123.60
9	3	1123.60	1.06	**1191.02**
10				
11	**Semiannually compounding at a 6% nominal rate (II)**			
12	Year	Beginning amount, PV	*(1+r/2)	= Ending amount FVn
13	1	1000.00	1.03	1030.00
14	2	1030.00	1.03	1060.90
15	3	1060.90	1.03	1092.73
16	4	1092.73	1.03	1125.51
17	5	1125.51	1.03	1159.27
18	6	1159.27	1.03	1194.05
19				
20	**Annual compounding at an effective annual rate 6.09% (III)**			
21	Year	Beginning amount, PV	*(1+r)	= Ending amount FVn
22	1	1000.00	1.0609	1060.90
23	2	1060.90	1.0609	1125.51
24	3	1125.51	1.0609	1194.05

Περίπτωση (I): Ο τελικός τόκος που αποκτήθηκε ισούται με 191.02€.

Περίπτωση (II): Ο τελικός τόκος που αποκτήθηκε όταν ο ανατοκισμός είναι ανά 6 μήνες (2 φορές το έτος) ισούται με 194.05€ > 191.02€.

Περίπτωση (ΙΙΙ): Στην περίπτωση αυτή αποδεικνύεται ότι *υπάρχει ένα EAR*, το οποίο ισοδυναμεί με την περίπτωση ανατοκισμού ανά 6 μήνες, δηλαδή με το ονομαστικό επιτόκιο. Με άλλα λόγια σε ονομαστικό επιτόκιο 6% ανατοκιζόμενο ανά 6 μήνες αντιστοιχεί ένα EAR 6.09% (ετήσιο). Ο τρόπος υπολογισμού του είναι ο εξής:

$$EAR = \left(1+\frac{r_{nominal}}{m}\right)^m - 1 = \left(1+\frac{0.06}{2}\right)^m - 1 = 0.0609 = 6.09\% .$$

Γενίκευση, όταν ο ανατοκισμός είναι συχνότερος από δύο φορές το έτος:

Γνωρίζουμε ότι $FV_n = PV(1+r)^n$, όπου n ο αριθμός των ετών. Η σχέση αυτή αντιπροσωπεύει τον ετήσιο ανατοκισμό. Σε περίπτωση που θεωρήσουμε συχνότερο ανατοκισμό, θα είναι:

$$FV_n = PV\left(1+\frac{r_{nominal}}{m}\right)^{mn}$$

Μέχρι τώρα θεωρήσαμε τον ανατοκισμό σε διακριτό χρόνο, 3 μήνες, 6 μήνες κ.λπ. Τι γίνεται, όμως, εάν θεωρήσουμε τον χρόνο συνεχή; Θα μιλάμε, τότε, για συνεχή ανατοκισμό (continuous compounding). Αυτό σημαίνει ότι θα πρέπει να πάρουμε το όριο της έκφρασης $\left(1+\frac{r}{m}\right)^m$, όταν δηλαδή οι χρονικές περίοδοι $m \to \infty$. Ωστόσο, προσέξτε: για $r = 1$, δηλαδή ονομαστικό επιτόκιο 100%, που δεν εμφανίζεται στην πράξη, θα είναι $\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = e = 2.71828$. Συνεπώς, όσο ενδιαφέρουσα και εάν είναι αυτή η σχέση, έχει σχεδόν μηδενική πρακτική αξία, αφού δεν μπορούμε να φανταστούμε επιτόκιο 100%!

Για να αναπτύξουμε μια χρήσιμη και οικονομικά ερμηνεύσιμη σχέση, θα κάνουμε τον μετασχηματισμό: $s \equiv m/r$ και, συνεπώς, $r/m = 1/s$ και $m = sr$. Αν, λοιπόν, αντικαταστήσουμε κατάλληλα, $m \to \infty$ σημαίνει ότι $s \to \infty$:

$$\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{r}{m}\right)^m = \lim_{s\to\infty}\left(1+\frac{1}{s}\right)^{sr} = \lim_{s\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{s}\right)^s\right]^r = e^r$$

Συνεπώς, το EAR κάτω από την υπόθεση του συνεχούς ανατοκισμού είναι ίσο με $e^r - 1$. Εάν υποθέσουμε κεφάλαιο με παρούσα αξία PV και συνεχή ανατοκισμό για n έτη, τότε θα είναι:

$$FV_n = PV(e^{rn}) .$$

Δραστηριότητα 2/Κεφάλαιο 1

Ας θεωρήσουμε 1000 € σε κατάθεση με ανατοκιζόμενο επιτόκιο 6% το χρόνο.

(α) Ποιο κεφάλαιο θα έχουμε μετά 3 έτη;

(β) Αν έχουμε 4–μηνο ανατοκισμό για 3 έτη;

Την απάντηση θα τη βρείτε στο Παράρτημα, στο τέλος του κεφαλαίου.

Δραστηριότητα 3/Κεφάλαιο 1

Ας υποθέσουμε ότι το ετήσιο αποταμιευτικό επιτόκιο είναι 12% σε έναν λογαριασμό κατάθεσης 1000 €. (α) Τι κεφάλαιο θα έχουμε στο τέλος του έτους, εάν υποθέσουμε ανατοκισμό ανά 6–μηνο; (β) Ποιο θα είναι το ύψος του κεφαλαίου, εάν ο τόκος υπολογίζεται ανά μήνα; (γ) Τι παρατηρείτε;

Την απάντηση θα βρείτε στο Παράρτημα, στο τέλος του κεφαλαίου.

Δραστηριότητα 4/Κεφάλαιο 1

Τι κεφάλαιο πρέπει να δοθεί σήμερα, ώστε να μπορούν να καλυφθούν δαπάνες 1 εκατ. ευρώ στο τέλος κάθε έτους για τα επόμενα 3 έτη;

Την απάντηση θα βρείτε στο Παράρτημα, στο τέλος του κεφαλαίου.

Δραστηριότητα 5/Κεφάλαιο 1

Τι ποσό περιμένουμε να λάβουμε από μια σημερινή επένδυση 10000 € με ετήσιο επιτόκιο 3% στις παρακάτω περιπτώσεις:

- στο τέλος ενός έτους με 6–μηνο ανατοκισμό
- στο τέλος 5 ετών με 6–μηνο ανατοκισμό
- στο τέλος 5 ετών με μηνιαίο ανατοκισμό
- στο τέλος 1 έτους με συνεχή ανατοκισμό
- στο τέλος 5 ετών με συνεχή ανατοκισμό

Την απάντηση θα βρείτε στο Παράρτημα, στο τέλος του κεφαλαίου.

Δραστηριότητα 6/Κεφάλαιο 1

Ποια είναι η παρούσα αξία των 25000 € με ετήσιο επιτόκιο 8% στις παρακάτω περιπτώσεις:

- στο τέλος ενός έτους με ετήσιο ανατοκισμό
- στο τέλος 20 ετών με ετήσιο ανατοκισμό
- στο τέλος 20 ετών με συνεχή ανατοκισμό

Την απάντηση θα βρείτε στο Παράρτημα, στο τέλος του κεφαλαίου.

1.1.3 Τιμολόγηση, διάρκεια και κυρτότητα ομολογιών

Όταν οι κυβερνήσεις ή οι επιχειρήσεις δανείζονται κεφάλαια το κάνουν, εκτός των άλλων, και εκδίδοντας ομολογίες. Ομολογία είναι, απλά, ένας τίτλος χρέους. Είναι ένας τίτλος που περιέχει επίσημη δήλωση (υπόσχεση) του εκδότη (issuer) ότι θα πληρώσει σε ορισμένη ημερομηνία (maturity) το αρχικό κεφάλαιο επένδυσης (principal ή face value of the bond) και με ορισμένο επιτόκιο (coupon payment).

Η ονομαστική αξία (par value ή nominal value) της ομολογίας αναγράφεται στον τίτλο και είναι ανεξάρτητη από την αγοραία τιμή, η οποία διαμορφώνεται από την προσφορά και τη ζήτηση. Συνήθως, εκφράζεται σε πολλαπλάσια των 1.000€. Ο λόγος του επιτοκίου που υπόσχεται ετήσια ο εκδότης της ομολογίας προς την ονομαστική αξία της, δίνει το τοκομερίδιο (coupon interest).

Ας υποθέσουμε ότι αγοράσαμε μια 5–ετή κυβερνητική ομολογία τον Σεπτέμβριο του 2000 με λήξη τον Αύγουστο του 2005. Το επιτόκιο είναι 6% και η ονομαστική αξία είναι 1.000€. Αυτό σημαίνει ότι κάθε χρόνο (μέχρι το 2005) θα παίρνουμε τοκομερίδιο 1.000 * 0.06 =60€. Στη λήξη (Αύγουστος 2005) θα πάρουμε το τελευταίο τοκομερίδιο (60€) συν το κεφάλαιό μας των 1.000€, συνολικά 1.060€.

Αναλυτικά, θα είναι:

2001	**2002**	**2003**	**2004**	**2005**
60	60	60	60	1,060

Ποια είναι η παρούσα αξία όλων αυτών των πληρωμών; Εάν υποθέσουμε 6–μηνη καταβολή τοκομεριδίου (που είναι η συνήθης πρακτική), δηλαδή 60€/2 = 30€ και ότι η απόδοση εναλλακτικής επένδυσης είναι y, τότε ο υπολογισμός δίνεται από τη σχέση:

$$P = \sum_{t=1}^{2n} \frac{c_i/2}{(1+y/2)^t} + \frac{M}{(1+y/2)^{2n}}$$

όπου P είναι η τρέχουσα αγοραία τιμή της ομολογίας, n είναι ο αριθμός των ετών μέχρι τη λήξη της, c_i είναι το ετήσιο επιτόκιο που πληρώνει η ομολογία θα το σημειώνουμε και ως CF: ταμειακή ροή), y είναι η απαιτούμενη απόδοση της επένδυσης (δηλαδή, η απόδοση που θα έδινε κάποια άλλη παρεμφερής –σε όρους κινδύνου, ληκτότητας, ρευστότητας– επένδυση) και M είναι η ονομαστική αξία της ομολογίας.

Εάν θεωρήσουμε ότι το τοκομερίδιο καταβάλλεται ετησίως, τότε η παραπάνω σχέση γίνεται:

$$P = \sum_{t=1}^{n} \frac{c_i}{(1+y)^t} + \frac{M}{(1+y)^n} = \left[\frac{c_1}{(1+y)} + \frac{c_2}{(1+y)^2} + \frac{c_3}{(1+y)^3} + \ldots + \frac{c_n}{(1+y)^n} \right] + \frac{M}{(1+y)^n}$$

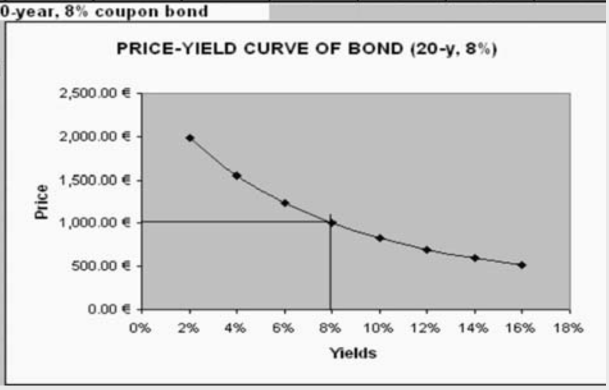
Όταν γνωρίζουμε τα βασικά χαρακτηριστικά της ομολογίας: επιτόκιο (coupon), ληκτότητα (maturity) και ονομαστική αξία (par value), τότε ο μόνος παράγοντας που προσδιορίζει την αξία της (την τιμή της) είναι η απαιτούμενη απόδοση (required rate of return). Μία αύξηση της απαιτούμενης απόδοσης οδηγεί σε πτώση την τιμή της ομολογίας.

Παράδειγμα 4

Έστω μια ομολογία 20–ετών με κουπόνι 8% και ονομαστική αξία 1,000€. Το τοκομερίδιο πληρώνεται ανά 6–μηνο, δηλαδή 80/2=40€ το 6–μηνο για 20 έτη ή 40 6–μηνα. Για διάφορα επίπεδα απαιτούμενης απόδοσης, από 2% έως 15% οι τιμή της ομολογίας δίνεται από τον παρακάτω πίνακα και το διάγραμμα περιγράφει τη σχέση τιμής–απόδοσης.

price-yield relationship for a 20-year, 8% coupon bond

Required Yield	Price of Bond
2%	1,985.04 €
4%	1,547.11 €
6%	1,231.15 €
8%	1,000.00 €
10%	828.41 €
12%	699.07 €
14%	600.05 €
16%	523.02 €



=PV(A6/2;40;–40)+1000/(1+A6/2)^40

Παρατηρούμε ότι όσο αυξάνεται η απαιτούμενη απόδοση (οριζόντιος άξονας) τόσο μειώνεται η τιμή της ομολογίας (κάθετος άξονας).

Η καμπύλη απόδοσης–τιμής (price–yield curve) δείχνει την αντίστροφη σχέση μεταξύ απαιτούμενης απόδοσης και τιμής της ομολογίας. Επίσης, καταδεικνύει τέσσερις ενδιαφέρουσες περιπτώσεις:

Όταν η απαιτούμενη απόδοση είναι χαμηλότερη από το ορισμένο επιτόκιο της ομολογίας (δηλαδή το επιτόκιο του τοκομεριδίου), όπως στο παράδειγμά μας για 2%–8%, τότε η τιμή της ομολογίας είναι υψηλότερη από την ονομαστική της αξία. Θα λέμε ότι «πωλείται υπέρ το άρτιο» (at a premium).

Όταν η απαιτούμενη απόδοση είναι υψηλότερη από το ορισμένο επιτόκιο της ομολογίας (δηλαδή το επιτόκιο του τοκομεριδίου), όπως στο παράδειγμά μας για 8%–16%, τότε η τιμή της ομολογίας είναι χαμηλότερη από την ονομαστική της αξία. Θα λέμε ότι «πωλείται υπό το άρτιο» (at a discount).

Όταν η απαιτούμενη απόδοση ισούται με το επιτόκιο τοκομεριδίου, τότε η αγοραία τιμή της ομολογίας ισούται με την ονομαστική της αξία και θα λέμε ότι «πωλείται στο άρτιο» (at par).

Η σχέση τιμής–απαιτούμενης απόδοσης δεν είναι ευθεία γραμμή, αλλά η συνάρτηση της τιμής ως προς την απαιτούμενη απόδοση είναι κυρτή, όπως δείξαμε και στο παράδειγμα 4.

Διάρκεια και κυρτότητα ομολογίας

Η κλίση της εφαπτόμενης είναι η πρώτη παράγωγος της τιμής ως προς την απόδοση y και, αν διαιρέσουμε την πρώτη παράγωγο με την τιμή: $\frac{dP}{dy} * \frac{1}{P}$, τότε παίρνουμε ένα μέγεθος που εκφράζει την ποσοστιαία μεταβολή της τιμής της ομολογίας για μια μεταβολή της απόδοσης y κατά 1% και είναι γνωστή ως Τροποποιημένη Διάρκεια. Για να γίνει ευκολότερα κατανοητός ο τρόπος υπολογισμού της τροποποιημένης διάρκειας, ας θεωρήσουμε την παρούσα αξία μιας μόνο ταμειακής ροής (τοκομεριδίου), CF:

$P = \frac{CF_T}{(1+y)^T}$ της οποίας η πρώτη παράγωγος είναι: $\frac{dP}{dy} = \frac{(-T)CF_T}{(1+y)^{(T+1)}}$

Γενικεύοντας, τώρα, θα είναι:

$$\frac{dP}{dy} = \frac{(-1)CF_1}{(1+y)^2} + \frac{(-2)CF_2}{(1+y)^3} + \frac{(-3)CF_3}{(1+y)^4} + \ldots + \frac{(-n)CF_n}{(1+y)^{(n+1)}}$$

η οποία διαιρούμενη με την τιμή P, μας δίνει την **τροποποιημένη διάρκεια** (modified duration, MD), η οποία χρησιμοποιείται ευρύτατα από τους ειδικούς στις αγορές ομολογιών και τους διαχειριστές ομολογιακών χαρτοφυλακίων ως ένας δείκτης της έκθεσης της ομολογίας στον κίνδυνο του επιτοκίου:

$$\frac{dP}{dy}\frac{1}{p}=\frac{1}{(1+y)}\left[\frac{(-1)CF_1}{(1+y)}+\frac{(-2)CF_2}{(1+y)^2}+\frac{(-3)CF_3}{(1+y)^3}+...+\frac{(-n)CF_n}{(1+y)^n}\right]\frac{1}{P}$$

$$=\frac{1}{(1+y)}\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{(-i)CF_i}{(1+y)^i}\right]\frac{1}{P}$$

Η εντός των αγκυλών παράσταση είναι η διάρκεια κατά Macaulay, που εκφράζει τον μέσο όρο αναμονής κάθε ταμειακής ροής, όταν οι ταμειακές ροές είναι προκαθορισμένες. Η τροποποιημένη διάρκεια είναι μια ένδειξη του κινδύνου της ομολογίας.

Η *MD* είναι μια εκτίμηση της τιμής της ομολογίας εξαιτίας μιας μεταβολής των επιτοκίων, ωστόσο μόνο για πολύ μικρές μεταβολές. Για μεγάλες μεταβολές δεν αρκεί διότι αποτελεί γραμμική προσέγγιση μιας κυρτής συνάρτησης. Παίρνουμε λοιπόν τη δεύτερη παράγωγο, που είναι η **κυρτότητα**, η οποία βελτιώνει τη μέτρηση της ευαισθησίας της τιμής της ομολογίας στις μεταβολές του επιτοκίου, που δίνεται από την τροποποιημένη διάρκεια.

Έστω, $P=\frac{CF_T}{(1+y)^T}$ της οποίας η πρώτη παράγωγος είναι $\frac{dP}{dy}=\frac{(-T)CF_T}{(1+y)^{(T+1)}}$. Η δεύτερη παράγωγος είναι:

$$\frac{d^2P}{dy^2}=\frac{-(T+1)(-T)CF_T}{(1+y)^{(T+2)}}$$

Η δεύτερη παράγωγος για καθεμία ταμειακή ροή (τοκομερίδιο) θα είναι:

για την CF_1: $\frac{d^2P_1}{dy^2}=\frac{-(2)(-1)CF_1}{(1+y)^3}=\frac{2CF_1}{(1+y)^3}$

για την CF_2: $\frac{d^2P_2}{dy^2}=\frac{-(3)(-2)CF_2}{(1+y)^4}=\frac{6CF_2}{(1+y)^4}$

....

....

....

για την CF_n: $\frac{d^2P_n}{dy^2}=\frac{-(n+1)(-n)CF_n}{(1+y)^{(n+2)}}=\frac{n(n+1)CF_n}{(1+y)^{(n+2)}}$

Συνολικά, λοιπόν, θα είναι:

$$\frac{d^2P}{dy^2}=\frac{2CF_1}{(1+y)^3}+\frac{6CF_2}{(1+y)^4}+\frac{12CF_3}{(1+y)^5}+....+\frac{n(n+1)CF_n}{(1+y)^{n+2}}$$

Η κυρτότητα της ομολογίας ισούται με:

$$\frac{1}{2P}*\frac{d^2P}{dy^2}$$

δηλαδή, το ήμισυ της δεύτερης παραγώγου διαιρούμενης με την τιμή της ομολογίας.

Η κυρτότητα μιας ομολογίας που πληρώνει τοκομερίδιο είναι πάντοτε θετική. Όσο μεγαλύτερη είναι η κυρτότητα μιας ομολογίας, τόσο καλύτερα, τόσο στην πτώση όσο και στην άνοδο των επιτοκίων.

Παράδειγμα 5
Τροποποιημένη Διάρκεια

Μια 2–ετης ομολογία που πληρώνει 10% τοκομερίδιο ανά 6–μηνο και στο τελευταίο 6–μηνο πληρώνει και την ονομαστική αξία 100€ στον κάτοχό της. Η απόδοση στη λήξη είναι 8% ετησίως. Ζητάμε να υπολογίσουμε την τροποποιημένη διάρκεια της ομολογίας.

Λύση

Η ομολογία αυτή πληρώνει 5€ για 3 εξάμηνα και το τέταρτο 6–μηνο πληρώνει 105€ (= 5 + 100). Καθεμιά από αυτές τις ταμειακές ροές προεξοφλείται με επιτόκιο 8% ετησίως, δηλαδή 0.08/2 = 0.04 ή 4%, ανά 6–μηνο. Συνεπώς, η τιμή της ομολογίας είναι:

$$P = \frac{5}{(1.04)} + \frac{5}{(1.04)^2} + \frac{5}{(1.04)^3} + \frac{105}{(1.04)^4} = 103.6299 \text{ €}$$

Η τροποποιημένη διάρκεια είναι:

$$\frac{1}{(1+y)}\left[\frac{(-1)CF_1}{(1+y)} + \frac{(-2)CF_2}{(1+y)^2} + \frac{(-3)CF_3}{(1+y)^3} + \dots + \frac{(-n)CF_n}{(1+y)^n}\right]\frac{1}{P} =$$

$$= \frac{1}{1.04}\left[\frac{(-1)5}{(1.04)} + \frac{(-2)5}{(1.04)^2} + \frac{(-3)5}{(1.04)^3} + \frac{(-4)105}{(1.04)^4}\right]\frac{1}{103.6299} = -3.5853$$

Στη πράξη δεν λαμβάνουμε υπόψη το αρνητικό πρόσημο και παρουσιάζουμε την τροποποιημένη διάρκεια σε έτη, άρα διαιρώντας με 2, γιατί είναι 6–μηνη η καταβολή του τοκομεριδίου, η διάρκεια είναι ίση με 1.7926. Άρα για μια αύξηση της απόδοσης (επιτόκιο) μιας ποσοστιαίας μονάδας η τιμή θα μειωθεί κατά 1,8% περίπου.

Δραστηριότητα 7/Κεφάλαιο 1

Στην ομολογία του προηγούμενου παραδείγματος, εάν η απόδοση αυξηθεί κατά 0.5%, πόσο θα μεταβληθεί η τιμή της ομολογίας;

Την απάντηση θα βρείτε στο Παράρτημα, στο τέλος του κεφαλαίου.

Παράδειγμα 6
Κυρτότητα

Θα θεωρήσουμε την ομολογία του προηγούμενου παραδείγματος: Μια 2–ετης ομολογία που πληρώνει 10% τοκομερίδιο ανά 6–μηνο και στο τελευταίο 6–μηνο πληρώνει και την ονομαστική αξία 100€ στον κάτοχό της. Η απόδοση στη λήξη είναι 8% ετησίως. Ζητάμε να υπολογίσουμε την κυρτότητα της ομολογίας.

Λύση

Η δεύτερη παράγωγος είναι

$$\frac{2*5}{(1.04)^3}+\frac{6*5}{(1.04)^4}+\frac{12*5}{(1.04)^5}+\frac{20*105}{(1.04)^6}=1{,}743.510$$

Η τιμή της ομολογίας είναι 103.6299. Συνεπώς η κυρτότητα της ομολογίας είναι:

$$\frac{1}{2}*\frac{1{,}743.510}{103.6299}=8.4122$$

Η πρακτική στην αγορά των ομολογιών εκθέτει την κυρτότητα σε έτη στο τετράγωνο. Θα πρέπει, λοιπόν, να διαιρέσουμε το αποτέλεσμα 8.4122 με το τετράγωνο του αριθμού των περιοδικών πληρωμών ανά έτος, που είναι 2 (μία ανά 6–μηνο). Συνεπώς, να διαιρέσουμε με $2^2 = 4$. Αυτό μας δίνει ότι η κυρτότητα της ομολογίας είναι 2.1031.

Δραστηριότητα 8/Κεφάλαιο 1

Μια ομολογία 3 ετών πληρώνει ετήσιο τοκομερίδιο 10% και την ονομαστική αξία 100€ στη λήξη της. Η απόδοση στη λήξη της ομολογίας είναι 8% ετησίως. Να υπολογιστεί η αξία της ομολογίας εάν το επιτόκιο μεταβληθεί σε 8.1%, η τροποποιημένη διάρκεια και η κυρτότητα της ομολογίας.

Την απάντηση θα βρείτε στο Παράρτημα, στο τέλος του κεφαλαίου.

Δραστηριότητα 9/Κεφάλαιο 1

Μια 20–ετής ομολογία πληρώνει ετήσιο τοκομερίδιο 9% και διαπραγματεύεται στα 134.41€ με απόδοση στη λήξη 6% ετησίως. Όταν τα επιτόκια αυξάνουν 10 μονάδες βάσης, η τιμή της ομολογίας μειώνεται στα 139.99€ και, όταν τα επιτόκια μειώνονται κατά 10 μονάδες βάσης, η τιμή της ομολογίας αυξάνεται στα 135.85€. Να υπολογιστεί η τροποποιημένη διάρκεια της ομολογίας.

Την απάντηση θα βρείτε στο Παράρτημα, στο τέλος του κεφαλαίου.

1.1.4 Υπολογισμός αποδόσεων χρηματοοικονομικών μεταβλητών

Εάν p_t είναι η τιμή μιας χρηματοοικονομικής μεταβλητής στο τέλος της περιόδου t, τότε η απλή απόδοση μιας περιόδου θα υπολογίζεται ως:

$$R_t(1) = \frac{p_t - p_{t-1}}{p_{t-1}} = \frac{p_t}{p_{t-1}} - 1$$

και για n περιόδους:

$$\begin{aligned} R_t(n) &= (1+R_t)(1+R_{t-1})...(1+R_{t-n-1}) - 1 \\ &= \frac{p_t}{p_{t-1}} \frac{p_{t-1}}{p_{t-2}} \frac{p_{t-2}}{p_{t-3}} ... \frac{p_{t-n-1}}{p_{t-n}} - 1 \\ &= \frac{p_t}{p_{t-n}} - 1 \end{aligned}$$

Ας θεωρήσουμε τις τιμές των χρηματιστηριακών δεικτών FTSE(100) και S&P 500 του πίνακα του επόμενου Παραδείγματος. Οι στήλες R(FTSE) και R(S&P) υπολογίζουν τις αποδόσεις των δύο δεικτών από τη σχέση:

$$\ln(p_t) - \ln(p_{t-1}) = \ln\left(\frac{p_t}{p_{t-1}}\right) = \ln\left[1 + \left(\frac{p_t}{p_{t-1}} - 1\right)\right] = \ln\left[1 + \left(\frac{p_t - p_{t-1}}{p_{t-1}}\right)\right] \approx \frac{p_t - p_{t-1}}{p_{t-1}}$$

γιατί $\ln(1 + x) \approx x$ για μικρές τιμές του $|x|$, όπου p είναι η τιμή του δείκτη.

Εάν υποθέσουμε ότι ο λογάριθμος της τιμής του περιουσιακού στοιχείου ακολουθεί την κανονική κατανομή –συνεπώς και η λογαριθμική απόδοση ακολουθεί την κανονική κατανομή– τότε η τιμή του περιουσιακού στοιχείου θα ακολουθεί τη λογαριθμοκανονική κατανομή. Συνεπώς, η τιμή του στοιχείου αυτού δεν μπορεί να λάβει αρνητικές τιμές:

$$r_t = \ln(1+R_t) \Leftrightarrow (1+R_t) = e^{r_t} \Leftrightarrow R_t = e^{r_t} - 1$$

Ενότητα 1.2

ΠΕΡΙΓΡΑΦΙΚΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ, ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ ΚΑΙ ΚΑΤΑΝΟΜΕΣ

1.2.1 Περιγραφή δεδομένων, μέτρα θέσης και διασποράς

Σύμφωνα με έναν γενικώς αποδεκτό ορισμό, *Στατιστική* είναι η επιστήμη που έχει ως σκοπό τη συστηματική συλλογή, οργάνωση, παρουσίαση, ανάλυση και ερμηνεία των δεδομένων ενός φαινομένου, για τη λήψη αποτελεσματικών αποφάσεων. Στη μελέτη της στατιστικής, συνήθως διακρίνουμε δύο κατηγορίες: (i) την *περιγραφική στατιστική*, η οποία περιλαμβάνει μεθόδους για την οργάνωση και παρουσίαση των δεδομένων με τρόπο που να παρέχεται πληροφορία, και (ii) την *επαγωγική στατιστική*, η οποία περιλαμβάνει μεθόδους που καθιστούν δυνατή τη γενίκευση των δειγματοληπτικών συμπερασμάτων στον γεννήτορα πληθυσμό.

Πληθυσμός είναι το σύνολο των στατιστικών μονάδων, που θέλουμε να μελετήσουμε και μπορεί να είναι άτομα (όλος ο πληθυσμός μιας πόλης, όλες οι εισηγμένες μετοχές στο Χ.Α., όλοι οι φοιτητές ενός πανεπιστημίου, κ.ά.), αντικείμενα (όλες μπύρες που παράγει σε μια εβδομάδα μια βιομηχανία μπύρας ή όλες οι βιομηχανίες μπύρας σε μια χώρα ή στον κόσμο), μεγέθη μέτρησης (το βάρος όλων των ποδοσφαιριστών μιας ομάδας, το ύψος όλων των παικτών του basket σε όλες τις ομάδες στις Η.Π.Α., οι αποδόσεις των μετοχών στο Χ.Α.), γεγονότα (σπάσιμο –split– μετοχών μιας εταιρίας από τότε που εισήχθη στο χρηματιστήριο αξιών, όλα τα εταιρικά γεγονότα που είχαν συνέπεια στις τιμές όλων των μετοχών σε όλα τα χρηματιστήρια αξιών) ή ακόμα και αισθήματα και προτιμήσεις (οι προτιμήσεις όλων των καταναλωτών ενός προϊόντος, η αποστροφή στον κίνδυνο όλων των επενδυτών κ.ά.). Ο στατιστικός πληθυσμός μπορεί να είναι άπειρος (όλες οι γεννήσεις στις 25 χώρες–μέλη της ΕΕ) ή πεπερασμένος (οι φοιτητές που παρακολουθούν στο αμφιθέατρο το μάθημα της Στατιστικής) και, στην περίπτωση αυτή, ολιγοπληθής ή πολυπληθής.

Παρουσίαση δεδομένων και μέτρα Θέσης και Διασποράς

Τα δεδομένα που χρησιμοποιούμε στη στατιστική ανάλυση μπορεί να είναι ποιοτικά (φύλο, κλάδος εταιριών, μάρκα τσιγάρων, θρήσκευμα) ή ποσοτικά (ηλικία μιας εταιρίας ή εταιριών ενός κλάδου, διάρκεια ζωής μιας μάρκας μπαταριών, μηνιαίο κλείσιμο τιμών του γενικού δείκτη του χρηματιστηρίου αξιών). Στην περίπτωση των ποσοτικών μεταβλητών, αυτές μπορεί να είναι συνεχείς ή ασυνεχείς (διακριτές ή απαριθμητές). Μια ποσοτική μεταβλητή θα ονομάζεται συνεχής εάν μπορεί να λάβει οποιαδήποτε τιμή μέσα σε ένα διάστημα πραγματικών αριθμών (το βάρος σε χιλιόγραμμα ή το ύψος των ατόμων σε εκατοστά). Μια ποσοτική μεταβλητή θα ονομάζεται ασυνεχής, όταν οι τιμές που μπορεί να πάρει είναι διακριτές (υπάρχουν «κενά» μεταξύ τους), όπως ο αριθμός των δωματίων σε ένα σπίτι, ο αριθμός των παιδιών σε μια οικογένεια, η ρίψη ενός ζαριού κ.ά.

Τα δεδομένα που χρησιμοποιούμε μπορεί να είναι διαστρωματικά ή χρονολογικές σειρές ή και τα δύο (panel data). Τα διαστρωματικά (Cross section) δεδομένα αναφέρονται σε ένα σύνολο στοιχείων με διαφορετικές καταστάσεις (μεταβλητές) σε οποιοδήποτε σημείο του χρόνου. Ένα τέτοιο παράδειγμα είναι η τιμή για καθεμιά από τις 20 μετοχές που απαρτίζουν τον δείκτη FTSE 20 σε ένα συγκεκριμένο χρονικό σημείο. Τα δεδομένα χρονολογικών σειρών αφορούν στη διατεταγμένη χρονικά (κατά έτος, εξάμηνο, μήνα, ημέρα, κ.τ.λ.) σειρά των δεδομένων, που αναφέρονται αποκλειστικά στην ίδια μεταβλητή. Για παράδειγμα, τα ημερήσια κλεισίματα τιμών μιας μετοχής το τελευταίο έτος. Τέλος, τα panel data αποτελούνται από, συνήθως, μικρό αριθμό χρονικών παρατηρήσεων και, συνήθως, μεγάλο αριθμό διαστρωματικών παρατηρήσεων.

Στις περισσότερες περιπτώσεις, ένα σύνολο δεδομένων παρουσιάζει συγκέντρωση των παρατηρήσεών του γύρω από μια κεντρική τιμή, τη μέση τιμή, τη διάμεσο ή τον τύπο (επικρατέστερη τιμή).

Παράδειγμα 7

Για μια χρονική περίοδο συλλέξαμε τις μετοχές που σημείωσαν ανοδική πορεία στο χρηματιστήριο αξιών και ταξινομήσαμε τις αποδόσεις τους, από 0.5% έως 30.5%, όπως στον παρακάτω πίνακα. Έτσι, μεταξύ 5.5% και 10.5% σημειώσαμε 60 μετοχές κ.λπ.

Τάξεις Αποδόσεων	Συχνότητα f	Αθροιστική συχνότητα
$0,5 \leq x \leq 5,5$	12	12
$5,5 \leq x \leq 10,5$	60	72
$10,5 \leq x \leq 15,5$	38	110
$15,5 \leq x \leq 20,5$	28	138
$20,5 \leq x \leq 25,5$	10	148
$25,5 \leq x \leq 30,5$	2	150
Σύνολο	150	

Η μέση τιμή θα υπολογίζεται ως εξής:

$$\overline{X} = \frac{\sum_i^n f_i X_i}{\sum_i^n f_i} = \frac{11{,}995}{150} = 11.99\%$$

Η <u>διάμεσος</u> θα υπολογίζεται ως εξής:

$$M = X_v + \frac{\delta}{f_v}\left[\frac{n}{2} - F_{i-1}\right] = 10.5 + \frac{5}{38}\left[\frac{150}{2} - 72\right] = 10.89\%$$

όπου X_v είναι το κάτω όριο του διαστήματος που εντοπίζεται η διάμεσος, δ είναι το εύρος του διαστήματος, f_v είναι η συχνότητα του διαστήματος που εντοπίζεται η διάμεσος, n είναι το άθροισμα των συχνοτήτων και F_{i-1} είναι η αμέσως προηγούμενη αθροιστική συχνότητα.

Ο <u>τύπος</u> υπολογίζεται δυσκολότερα σε ταξινομημένες σε κλάσεις παρατηρήσεις. Γενικά, είναι η τιμή με την υψηλότερη συχνότητα. Στην περίπτωση ταξινομημένων παρατηρήσεων και, εάν μπορούμε να δεχτούμε ότι στο ταξικό διάστημα με την υψηλότερη συχνότητα οι παρατηρήσεις κατανέμονται ομοιόμορφα, τότε ο τύπος είναι: $T = \frac{X_{v-1} + X_v}{2}$. Εάν, όμως, δεν μπορούμε να δεχτούμε την υπόθεση αυτή, τότε είναι:

$$T = X_v + \delta * \frac{(f_i - f_{i-1})}{(f_i - f_{i-1}) + (f_i - f_{i+1})} = 5.5 + 4.99 * \frac{60 - 12}{(60-12) + (60-38)} = 8.92\%$$

1.2.2 Θεωρία πιθανοτήτων

Δειγματοχώρος και ενδεχόμενα

Είναι το σύνολο όλων των δυνατών αποτελεσμάτων από ένα πείραμα ή τυχαίο σύνολο. Κάθε μέλος (σημείο) του συνόλου αυτού καλείται δείγμα και κάθε δείγμα είναι υποσύνολο του συνόλου αυτού.

Το <u>συμπλήρωμα</u> ενός ενδεχόμενου A, συμβολίζεται με A^c και ορίζεται από τη σχέση $A^c = \{s \in S : s \notin A\}$. Θεωρούμε S όλο τον χώρο με το A και το A^c μέσα του.

Η <u>ένωση</u> είναι το άθροισμα των δειγμάτων δύο ή περισσότερων ενδεχομένων και θα έχουμε: $\bigcup(A,B) = A \cup B$.

Η <u>τομή</u> δύο συνόλων είναι τα κοινά στοιχεία δύο ή περισσότερων χώρων, $\bigcap(A,B) = A \cap B$.

Η <u>διαφορά</u> των δύο συνόλων είναι $A - B = [s \in S : s \in A, s \notin B]$.

Όταν τα δύο ή περισσότερα σύνολα δεν έχουν κοινά σημεία, λέγονται <u>ξένα</u> μεταξύ τους.

Ορισμός Πιθανότητας. Η πιθανότητα να εμφανιστεί ένα γεγονός A συμβολίζεται με $P(A)$ και είναι ίσο με τον αριθμό εμφάνισης του A (κατά σύνολο).

Λέμε ότι μια πιθανότητα P είναι μια σύνολο–συνάρτηση $P: A \to R$ με τις ιδιότητες:

1. Είναι μη αρνητική.
2. Είναι σ – προσθετική.
3. Είναι $P(S) = 1$ για όλο το S.

Ισχύουν οι εξής ιδιότητες:

1. Η πιθανότητα του κενού συνόλου είναι μηδενική, $P(\varnothing) = 0$
2. Η πιθανότητα του αθροίσματος ξένων συνόλων είναι το άθροισμα των πιθανοτήτων τους, $P(\sum_1^n A_i) = \sum_1^n P(A_i)$.
3. Η πιθανότητα του αθροίσματος δύο γεγονότων είναι ίση με το άθροισμα των πιθανοτήτων των γεγονότων, $P(A+B) = P(A) + P(B)$
4. Η πιθανότητα ενός γεγονότος είναι ανάμεσα στο 0 και στο 1, $0 \le P(A) \le 1$
5. Η πιθανότητα του συμπληρώματος ενός συνόλου είναι $P(A^c) = 1 - P(A)$
6. Αν ένα σύνολο Α είναι υποσύνολο ενός Β, τότε για τις πιθανότητες τους ισχύει: $A \subseteq B \Leftrightarrow P(A) \le P(B)$
7. Προσθετικό θεώρημα (για δύο σύνολα): $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
8. Δεσμευμένη Πιθανότητα: Αν έχουμε δύο γεγονότα μη–ανεξάρτητα, το *A* και το *B*, η πιθανότητα του γεγονότος (*A* και *B*) δίνεται από το γινόμενο της πιθανότητας του γεγονότος *A* επί τη δεσμευμένη πιθανότητα του *B*, δοθέντος ότι συνέβη ήδη το γεγονός *A*. Θα ορίζουμε ότι η δεσμευμένη πιθανότητα του γεγονότος *B* δοθέντος του γεγονότος *A*, θα είναι η σχέση:
$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) * P(B \mid A).$$
9. Θα λέμε επίσης ότι δύο γεγονότα είναι στοχαστικά ανεξάρτητα μεταξύ τους όταν $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. Άρα η δεσμευμένη πιθανότητα θα είναι: $P(B/A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} = P(B)$

   Δηλαδή η πληροφορία του αποτελέσματος του *A* δεν επηρεάζει την πιθανότητα εμφάνισης του ενδεχομένου *B*.
10. Θεώρημα ολικής πιθανότητας: Ισχύει για πολλά σύνολα ότι
$$P(B) = \sum_i P(B/A_i)P(A_i).$$

Για δύο σύνολα γίνεται: $P(B) = P(B/A_1)P(A_1) + P(B/A_2)P(A_2)$

Δραστηριότητα 10/Κεφάλαιο 1

Υπολογίσαμε για το χρονικό διάστημα 15 Ιανουαρίου 1999 έως 31 Δεκεμβρίου 1999 (το έτος της μεγάλης πρόσφατης ανόδου στο Χ.Α. των Αθηνών) τις ημέρες με ανοδικές και καθοδικές μεταβολές των επιπέδων των τιμών του Γενικού Δείκτη (ΓΔ) του ΧΑ και της μετοχής της Εθνικής Τράπεζας της Ελλάδος (ΕΤΕ). Προέκυψε ο ακόλουθος πίνακας:

	ΕΤΕ ⇑	**ΕΤΕ ⇓**	**ΑΘΡΟΙΣΜΑ**
ΓΔ ⇑	93	33	126
ΓΔ ⇓	13	89	102
ΑΘΡΟΙΣΜΑ	**106**	**122**	**228**

Για παράδειγμα, 33 ημέρες η μεταβολή τιμών του ΓΔ ήταν ανοδική και της ΕΤΕ ήταν καθοδική. Να υπολογίσετε:

(α) την πιθανότητα να ήταν ανοδική η τιμή της μετοχής της ΕΤΕ, δεδομένου ότι ήταν ανοδική και η τιμή του ΓΔ

(β) την πιθανότητα να ήταν ανοδική η τιμή του ΓΔ, δεδομένου ότι ήταν ανοδική και η τιμή της μετοχής της ΕΤΕ

(γ) την πιθανότητα να ήταν ανοδική η τιμή του ΓΔ, δεδομένου ότι ήταν καθοδική και η τιμή της μετοχής της ΕΤΕ

Την απάντηση θα βρείτε στο Παράρτημα, στο τέλος του κεφαλαίου.

Δραστηριότητα 11/Κεφάλαιο 1

Μελετήσαμε στο ΧΑ της Αθήνας την περίοδο 1986 έως Νοέμβριο 2004 την υπόθεση ότι το διάστημα Νοεμβρίου–Απριλίου η αγορά είναι ανοδική και το διάστημα Μαΐου–Οκτωβρίου είναι καθοδική, γνωστή ως Halloween effect. Η υπόθεση αυτή –η οποία εάν μπορεί να γίνει αποδεκτή θέτει σε αμφισβήτηση την ισχύ της υπόθεσης της αποτελεσματικής αγοράς στην ασθενή της μορφή– ελέγχθηκε στο ΓΔ του ΧΑ, καθώς και στους επιμέρους δείκτες. Κατασκευάσαμε έναν δείκτη (HI), η προβλεπτική ικανότητα του οποίου στο δείγμα μας είναι η ακόλουθη:

	Bull Market: November–April (Correct signal)	Bear Market: May–October (False signal)
HI issues a BUY “signal”	14	4
HI does not issue a BUY “signal”	8	10

Στα μέσα Δεκεμβρίου του έτους 2004, ένας αναλυτής, αφού θεώρησε όλες τις διαθέσιμες πληροφορίες, εκτίμησε ότι μέχρι τον Απρίλιο 2005 η υπόθεση του Halloween effect θα έχει ισχύ. Να υπολογίσετε την πιθανότητα να είναι, πράγματι, σε ισχύ η υπόθεση Halloween effect.

Την απάντηση θα βρείτε στο Παράρτημα, στο τέλος του κεφαλαίου.

Παράδειγμα 8: Ανεξαρτησία ενδεχομένων

Σε δείγμα 1,000 κατοίκων της πόλης παρατηρήθηκε ότι οι 452 είναι κάτοχοι τρεχούμενου λογαριασμού, 336 κάτοχοι λογαριασμού ταμιευτηρίου και 302 κάτοχοι και των δύο τύπων λογαριασμών. Να εξετάσετε την ανεξαρτησία των καταστάσεων: «κάτοχος τρεχούμενου λογαριασμού» και «κάτοχος λογαριασμού ταμιευτηρίου».

ΛΥΣΗ

P(τρεχούμενος) = 0.452, P(ταμιευτηρίου) = 0.336.

Τότε P(τρεχούμενος)* P(ταμιευτηρίου) = 0.452 * 0.336 = 0.151872.

Αλλά P(τρεχούμενο ΚΑΙ ταμιευτηρίου) = 0.302. Συνεπώς, οι δύο καταστάσεις δεν είναι ανεξάρτητες.

Δραστηριότητα 12/Κεφάλαιο 1

Η πιθανότητα να έχει άνοδο κατά 1% μια μετοχή εκτιμάται ότι είναι ίση με 0.6 και να πέσει κατά 1% ίση με 0.4. Εάν υποθέσουμε ότι οι μηνιαίες μεταβολές της αξίας της μετοχής είναι ανεξάρτητες, να υπολογίσετε την πιθανότητα, μετά από 3 μήνες, η αξία της μετοχής να είναι ίση με $(1.01)^3$ φορές την αρχική της αξία.

Την απάντηση θα βρείτε στο Παράρτημα, στο τέλος του κεφαλαίου.

Δραστηριότητα 13/Κεφάλαιο 1

Προσθετικό Θεώρημα. Η πιθανότητα να έχουμε άνοδο στο Γενικό δείκτη (ΓΔ) του χρηματιστήριου αξιών και στη μετοχή Μ είναι, αντίστοιχα, ίση με 0.6 και 0.35. Ο αναλυτής εκτιμάει ότι υπάρχει πιθανότητα ίση με 0.4 να έχουμε ταυτόχρονα άνοδο στον γενικό δείκτη και στη μετοχή. Να υπολογίσετε την πιθανότητα να έχουμε άνοδο είτε στον ΓΔ είτε στη μετοχή Μ.

Την απάντηση θα βρείτε στο Παράρτημα στο τέλος του κεφαλαίου.

Δραστηριότητα 14/Κεφάλαιο 1

Ανεξάρτητα ενδεχόμενα. Υποθέστε ότι οι αποδόσεις του γενικού δείκτη (ΓΔ) του χρηματιστηρίου και της μετοχής Μ είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους για το χρονικό διάστημα της μελέτης. Να υπολογίσετε την πιθανότητα να έχουμε άνοδο και των δύο αποδόσεων.

Την απάντηση θα βρείτε στο Παράρτημα στο τέλος του κεφαλαίου.

Δραστηριότητα 15/Κεφάλαιο 1

Η πιθανότητα να ανέβει ο γενικός δείκτης του ΧΑ σήμερα είναι 0.54, να ανέβει αύριο είναι ίση με 0.54 και ότι θα ανέβει και τις δύο ημέρες είναι 0.28. Ποια είναι η πιθανότητα να ανέβει καμία ημέρα;

Την απάντηση θα βρείτε στο Παράρτημα, στο τέλος του κεφαλαίου.

Δραστηριότητα 16/Κεφάλαιο 1

Με πιθανότητα 0.52, η τιμή κλεισίματος μιας μετοχής είναι τουλάχιστον τόσο υψηλή όσο η τιμή κλεισίματος της προηγούμενης ημέρας και τα ενδεχόμενα αυτά είναι ανεξάρτητα. Ποια είναι η πιθανότητα η τιμή κλεισίματος της μετοχής θα πέσει σε καθεμιά από τις επόμενες 4 ημέρες, αλλά όχι την 5^{η} ημέρα.

Την απάντηση θα βρείτε στο Παράρτημα, στο τέλος του κεφαλαίου.

Δραστηριότητα 17/Κεφάλαιο 1

Δεσμευμένη πιθανότητα. Ο συντελεστής συσχέτισης μεταξύ των αποδόσεων δύο περιουσιακών στοιχείων *A* και *B* είναι ίσος με 0.867 (συνεπώς, οι αποδόσεις είναι μη–ανεξάρτητες). Η πιθανότητα να παρατηρηθεί άνοδος και στα δύο περιουσιακά στοιχεία την επόμενη χρονική περίοδο είναι ίση με 0.4, ενώ η πιθανότητα να έχουμε άνοδο του περιουσιακού στοιχείου *A* είναι ίση με 0.65. Να υπολογίσετε την πιθανότητα να έχουμε άνοδο του περιουσιακού στοιχείου *B*, δεδομένου ότι έχουμε άνοδο στο περιουσιακό στοιχείο *A*.

Την απάντηση θα βρείτε στο Παράρτημα, στο τέλος του κεφαλαίου.

1.2.3 Μονοδιάστατες Πυκνότητες Πιθανότητας (PDF)

Η Διακριτή περίπτωση

Ορίζεται ένα διάνυσμα που έχει διακεκριμένες τιμές, δηλαδή λέμε ότι η μεταβλητή X είναι η $X=\{x_1,x_2,....x_n\}$ και η συνάρτηση που θα ορίζουν θα λέγεται Κατανομή πιθανότητας, που θα ορίζεται ως εξής:

$$f(x)=\begin{cases} P(X=x_i) & ,i=1,2,.... \\ 0 & ,x\neq x_i \end{cases}$$

Θα λέμε ότι η συνάρτηση είναι πυκνότητα πιθανότητας (π.π.), αν ισχύει ότι:

$$\sum f(x)=1$$

Παράδειγμα 9

Θεωρούμε την περίπτωση της ρίψης ενός ζαριού. Καθένα από τα δυνατά αποτελέσματα της ρίψης συνοδεύεται από μια πιθανότητα εμφάνισης. Εάν το ζάρι είναι αμερόληπτο, τότε καθένα από τα δυνατά αποτελέσματα έχει πιθανότητα εμφάνισης ίση με 1/6. Η διαδικασία αυτή υποδειγματοποιείται μαθηματικά από μια διακριτή μεταβλητή.

Δυνατό αποτέλεσμα ω_i =	1	2	3	4	5	6
Πιθανότητα να έρθει ω_i =	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

Συνεχείς Πυκνότητες Πιθανότητας (PDF)

Όταν η τυχαία μεταβλητή είναι συνεχής, τότε κατά αντιστοιχία με το ίδιο διάνυσμα $X = \{x_1, x_2, ...x_n\}$ έχουμε:

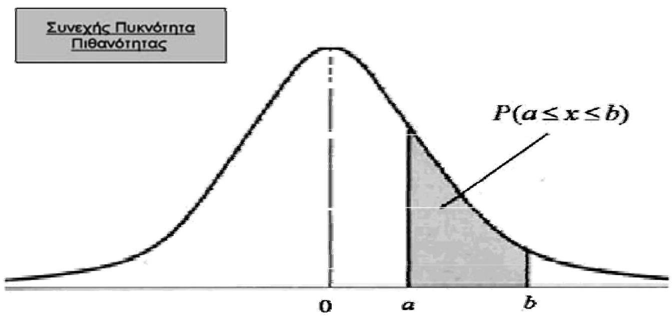
$$\begin{cases} \int_a^b f(x)dx = P(a \le x \le b), \\ \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1 \quad , f(x) \ge 0 \end{cases}$$

Θα λέμε ότι η συνάρτηση είναι <u>πυκνότητα πιθανότητας</u> (π.π.), αν ισχύει ότι:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

Εάν η τ.μ. είναι συνεχής, τότε δεν έχει νόημα να αναζητούμε την πιθανότητα να πάρει συγκεκριμένη τιμή, διότι οι πιθανές τιμές είναι άπειρες. Αυτό που μπορούμε να αναζητήσουμε είναι η πιθανότητα να πάρει τιμή μέσα σε ένα διάστημα τιμών, από το a έως το b. Για παράδειγμα, ζητάμε την πιθανότητα η απόδοση της μετοχής να είναι τον επόμενο μήνα από –3% έως +5%.

Σχηματικά, για το διάστημα (a,b):



Παράδειγμα 10

Η συνάρτηση πιθανότητας και η κατανομή πιθανοτήτων της τυχαίας μεταβλητής «απόδοση» 2 μετοχών, με δειγματικό χώρο Ω = {ΑΑ, ΑΠ, ΠΑ, ΠΠ}, όπου Α = άνοδος και Π = πτώση και τιμές της μεταβλητής «ανοδική απόδοση» της μεταβολής των δύο μετοχών x_i: 0, 1, 2, θα είναι:

Για $x = 0 \Rightarrow \{X = 0\} = ¼$, για $x = 1 \Rightarrow \{X = 1\} = ¼ + ¼ = 2/4$ και για $x = 2 \Rightarrow \{X = 2\} = ¼$.

Μέση Τιμή (Μαθηματική Ελπίδα)

Ορίζουμε ως μέση τιμή (ροπή ή μαθηματική ελπίδα ή αναμενόμενη τιμή) την ποσότητα, αντίστοιχα, στη διακριτή και συνεχή περίπτωση:

$$E(X) = \begin{cases} \sum xf(x) \\ \int xf(x)dx \end{cases}$$

Ισχύουν οι εξής ιδιότητες:
1. Εάν ν, τότε $E(b) = b$.
2. Εάν $a, b = \sigma\tau\alpha\theta$., τότε $E(aX + b) = aE(X) + b$ το οποίο γενικεύεται.
3. Εάν X, Y ανεξάρτητες, τότε $E(XY) = E(X)E(Y)$.
4. Εάν X με PDF την $g(X)$ και $g(X)$ κάποια συνάρτησή της, τότε:

$$E[g(X)] = \begin{cases} \sum_x g(X)f(x) \\ \int_{-\infty}^{\infty} g(X)f(x)dx \end{cases}$$

Διακύμανση

Για τη μεταβλητή X με $E(X) = \mu$, η διασπορά των τιμών γύρω από τη μ υπολογίζεται ως:

$$\mathrm{var}(X) = \sigma_x^2 = E(X - \mu)^2$$

Η θετική ρίζα var ορίζεται ως η τυπική απόκλιση των τιμών. Τα δύο αυτά μέτρα δείχνουν πόσο κοντά ή μακριά από τη μέση τιμή είναι διασκορπισμένες οι τιμές. Οι τύποι είναι:

$$\mathrm{var}(X) = \begin{cases} \sum_x (X - \mu)^2 f(x) \\ \int_{-\infty}^{\infty} (X - \mu)^2 f(x)dx \end{cases}$$

Η διακύμανση μιας σταθεράς είναι μηδενική. Επίσης, αν οι δύο μεταβλητές είναι ανεξάρτητες, τότε η διακύμανση του αθροίσματος ή της διαφοράς τους είναι το άθροισμα ή η διαφορά των διακυμάνσεών τους. Αντίθετα, εάν δύο τυχαίες μεταβλητές δεν είναι ανεξάρτητες, τότε ισχύει:

$$\operatorname{var}(aX+bY)=a^2\operatorname{var}(X)+b^2\operatorname{var}(Y)+2\operatorname{cov}(X,Y)$$

Σχετική Τυπική Απόκλιση ή συντελεστής μεταβλητότητας (Coefficient of variation) είναι ο λόγος της τυπικής απόκλισης διά του μέσου, δηλαδή είναι:

$$V=\frac{\sigma}{m}$$

Δραστηριότητα 18/Κεφάλαιο 1

Η επένδυση Α έχει μέση αναμενόμενη απόδοση 0.12 και κίνδυνο (τυπική απόκλιση) 0.09. Η επένδυση Β έχει, αντίστοιχα, 0.18 και 0.11. Να αξιολογήσετε ποια από τις δύο επενδύσεις θα επιλέγατε και με ποιο κριτήριο.
Την απάντηση θα βρείτε στο Παράρτημα, στο τέλος του κεφαλαίου.

Παράδειγμα 11

Ο αναλυτής μιας επενδυτικής εταιρίας θέλει να συγκρίνει τη διασπορά των τιμών του λόγου «τιμή προς κέρδη» (P/E) με τη διασπορά των τιμών της αποδοτικότητας επενδύσεων (ROI) ενός συνόλου εισηγμένων εταιριών στο χρηματιστήριο αξιών. Οι μέσες τιμές, αντίστοιχα, είναι 10.9 και 25%, ενώ οι τυπικές αποκλίσεις είναι 1.8 και 5.2%, αντίστοιχα. Στην περίπτωση αυτή ο αναλυτής πρέπει να υπολογίσει τον συντελεστή μεταβλητότητας:

$$CV_{P/E}=\frac{1.8}{10.9}(100)=0.1651(100)=16.513\% \text{ και } CV_{ROI}=\frac{0.0520}{0.25}(100)=20.8\%\ .$$

Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει μεγαλύτερη διασπορά από τη μέση τιμή στην κατανομή της αποδοτικότητας επενδύσεων (ROI) από ό,τι σε εκείνη του λόγου τιμή προς κέρδη.

1.2.4 Δισδιάστατες Πυκνότητες Πιθανότητας (PDF)

Έστω οι μεταβλητές $X=\{x_1,x_2,....x_n\}$ και $Y=\{y_1,y_2,....,y_n\}$. Τότε, η από κοινού συνάρτηση που θα ορίζουν θα λέγεται από Κοινού Πυκνότητα πιθανότητας που θα ορίζεται ως εξής:

$$f(x,y)=\begin{cases}P(X=x_i,Y=y_j) & ,i,j=1,2,....\\ 0 & ,\text{αλλού}\end{cases}$$

και

$$\iint f(x,y)dxdy = P(\vec{a} \le \left(x,y\right) \le \vec{b})$$

Θα λέμε ότι η συνάρτηση είναι πυκνότητα πιθανότητας (π.π.), αν ισχύει ότι:

$$\begin{cases} \sum f(x,y) = 1 \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy = 1 \end{cases}$$

Περιθωριακές πιθανότητες

Έστω ότι έχουμε δύο τ.μ., τις X και Y, και ορίζεται μια συνάρτηση πιθανότητας (προσοχή, όχι συνάρτηση πυκνότητας, πιθανότητας) και έστω ότι είναι:

$$\begin{cases} f(x,y) = P(X = x, Y = y) \\ f(x,y) \end{cases}, \text{ διακριτή ή συνεχής.}$$

Ορίζουμε τη διακριτή συνδυαστική ή αλλιώς μερική ή αλλιώς περιθωριακή ως προς τη μια X ή ως προς την άλλη Y τις εξής συναρτήσεις:

$$f_x(x,y) = \begin{Bmatrix} \sum_y f(x,y) = \sum_y P(X = x, Y = y) \\ \\ \int_R f(x,y)dy \end{Bmatrix}$$

και

$$f_y(x,y) = \begin{Bmatrix} \sum_x f(x,y) = \sum_x P(X = x, Y = y) \\ \\ \int_R f(x,y)dx \end{Bmatrix}$$

Δεσμευμένη π.π. (Διακύμανση υπό συνθήκη)

Με βάση τα παραπάνω, μπορούμε να ορίσουμε και τη δεσμευμένη π.π. για τη μια μεταβλητή υπό συνθήκη της άλλης, όπως είπαμε πριν για τις δεσμευμένες, και αυτές λέγονται Conditional PFD of X και Conditional PDF of Y και οι τύποι τους θα είναι οι παρακάτω:

$$f(x|y) = \frac{f(x,y)}{f(y)} = \begin{cases} \dfrac{P(X = x, Y = y)}{P(Y = y)} \\ \dfrac{f(x,y)}{f_y(x,y)} \end{cases}$$

και

$$f(y|x) = \frac{f(x,y)}{f(x)} = \begin{cases} \dfrac{P(X=x, Y=y)}{P(X=x)} \\ \dfrac{f(x,y)}{f_x(x,y)} \end{cases}$$

Στοχαστικά Ανεξάρτητες

Θα λέμε ότι οι τ.μ. X και Y είναι ανεξάρτητες –είτε είναι διακριτές είτε είναι συνεχείς– όταν

$$f(X,Y) = f(X)f(Y)$$

Ιδιότητες υπό συνθήκη αναμενόμενης τιμής και διακύμανσης

(α) Εάν $f(X)$ είναι μια συνάρτηση του X, τότε:

$$E\big(f(X) \mid X\big) = f(X)$$

Δηλαδή, η αναμενόμενη τιμή της $f(X)$ δεδομένου του X είναι σταθερή. Για παράδειγμα, $E\left(X^4 \mid X\right) = E(X^4)$, αφού, εάν είναι γνωστό το X, τότε είναι γνωστό και το X^4.

(β) Εάν $f(X)$ και $g(X)$ είναι συναρτήσεις της X, τότε:

$$E\big[f(X) + g(X) \mid X\big] = f(X)E\big(Y \mid X\big) + g(X)$$

Για παράδειγμα, $E[XY + aX^2 \mid X] = XE(Y \mid X) + aX^2$, όπου α μια σταθερά.

(γ) Εάν X και Y είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές, τότε:

$$E(Y|X)=E(Y) \text{ και } \mathrm{var}(Y|X)=\mathrm{var}(Y)$$

Δηλαδή, εάν X και Y είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές, τότε η δεσμευμένη αναμενόμενη τιμή της Y, δοθείσης της X, ισούται με τη μη δεσμευμένη αναμενόμενη τιμή της Y.

(δ) $\mathrm{var}(Y) = E[\mathrm{var}(Y \mid X)] + \mathrm{var}[E(Y \mid X)]$. Δηλαδή, η μη δεσμευμένη διακύμανση της τ.μ. Y ισούται με το άθροισμα της αναμενόμενης τιμής της δεσμευμένης διακύμανσης της Y συν τη διακύμανση της δεσμευμένης αναμενόμενης τιμής της Y.

(ε) Σχέση μεταξύ της μη δεσμευμένης αναμενόμενης τιμής μιας τυχαίας μεταβλητής Y, $E(Y)$ και της δεσμευμένης αναμενόμενης τιμής της ως προς μια άλλη τ.μ., $E(Y|X)$, (Law of Iterated Expectations):

$$E(Y) = E_X\left[E\big(Y \mid X\big)\right]$$

Δηλαδή, η περιθωριακή ή μη δεσμευμένη αναμενόμενη τιμή της τ.μ. Y ισούται με την αναμενόμενη τιμή της δεσμευμένης αναμενόμενης τιμής της.

Παράδειγμα 12
Η Υπόθεση της αποτελεσματικής κεφαλαιαγοράς

Ένα από τα γνωστότερα υποδείγματα τιμολόγησης περιουσιακών στοιχείων είναι το υπόδειγμα martingale, σύμφωνα με το οποίο: $E[p_t|I_{t-1}]=p_{t-1}$. Θα λέμε ότι $\{p_t, I_t\}$ είναι ένα martingale. Με άλλα λόγια, η αναμενόμενη τιμή του περιουσιακού στοιχείου σήμερα (στιγμή t) με δεδομένο το σύνολο πληροφοριών μέχρι την τελευταία στιγμή (I_{t-1}), θα ισούται με την αμέσως προηγούμενη τιμή του. Η αυριανή τιμή θα ισούται με τη σημερινή κ.ο.κ. Το διαθέσιμο σύνολο πληροφοριών μπορεί να είναι οι παρελθούσες τιμές του περιουσιακού στοιχείου, για παράδειγμα.

Γενικότερα, εάν I_t και J_t είναι δύο σύνολα πληροφοριών τέτοια ώστε $I_t \subset J_t$ (δηλαδή το J_t είναι μεγαλύτερο σύνολο πληροφοριών):

$$E(Y|I_t) = E\left[E[X|J_t]|I_t\right]$$

σύμφωνα με τον Law of Iterated Expectations.

Σύμφωνα με το υπόδειγμα αυτό, η διακράτηση ενός περιουσιακού στοιχείου από τον κάτοχό του έχει αναμενόμενη τιμή (κέρδος ή ζημία) ίση με το μηδέν (fair game):

$$E[p_t - p_{t-1}|I_{t-1}] = 0$$

κάτω από τις υποθέσεις ότι (i) ο επενδυτής θεωρεί πως συμμετέχει σε ένα δίκαιο παίγνιο και ότι (ii) έχει πρόσβαση στις πληροφορίες I_{t-1}. Κάτω από τη θεώρηση αυτή, ότι δηλαδή η επένδυση θεωρείται ως ένα δίκαιο παίγνιο, η απόδοση του περιουσιακού στοιχείου ισούται με το μηδέν. Ωστόσο, η επένδυση, για παράδειγμα η επένδυση σε μετοχές, δεν μπορεί να θεωρηθεί ως παίγνιο και τα περισσότερα περιουσιακά στοιχεία (π.χ. μετοχές) έχουν μια μη μηδενική αναμενόμενη απόδοση:

$$E(p_t \mid I_{t-1}) = (1+r_t)p_{t-1} \Rightarrow r_t = \frac{E(p_t \mid I_{t-1}) - p_{t-1}}{p_{t-1}} = \mu$$

όπου r είναι η αναμενόμενη απόδοση της επένδυσης στο περιουσιακό στοιχείο δεδομένου του συνόλου των πληροφοριών μέχρι τη στιγμή εκείνη.

Η δύναμη του υποδείγματος martingale βρίσκεται στην υπόθεση ότι μ θεωρείται σταθερό, δηλαδή ότι δεν μεταβάλλεται με τα στοιχεία του συνόλου πληροφοριών I. Αυτό σημαίνει ότι η μη δεσμευμένη αναμενόμενη τιμή της απόδοσης r ισούται με τη δεσμευμένη αναμενόμενη απόδοση και οι δύο ισούνται με μ:

$$E[E(r_t \mid I_{t-1})] = E(r_t) = \mu$$

Δηλαδή, η αναμενόμενη απόδοση τη (μελλοντική) χρονική στιγμή t, δεδομένου του συνόλου των πληροφοριών μέχρι τη στιγμή εκείνη (δηλαδή μέχρι τη στιγμή t–1) ισούται με τη μη δεσμευμένη αναμενόμενη απόδοση. Με άλλα λόγια, η διαθέσιμη πληροφορία μέχρι τότε δεν μπορεί να είναι χρήσιμη στην πρόβλεψη της απόδοσης την επόμενη χρονική στιγμή.

Δραστηριότητα 19/Κεφάλαιο 1

Εάν $I_{t-1} = \{p_{t-1}, p_{t-2}, p_{t-3}, ...\}$ να τεκμηριώσετε τη μη χρησιμότητα της τεχνικής ανάλυσης στην πρόβλεψη των τιμών των μετοχών κάτω από τις υποθέσεις του υποδείγματος martingale.

Την απάντηση θα βρείτε στο Παράρτημα, στο τέλος του κεφαλαίου.

Δραστηριότητα 20/Κεφάλαιο 1

Εάν $\{Y_t, I_t\}$ είναι ένα martingale, να δείξετε ότι $E[Y_t \mid I_{t-2}] = Y_{t-2}$.

Την απάντηση θα βρείτε στο Παράρτημα, στο τέλος του κεφαλαίου.

1.2.5 Συνάρτηση κατανομής

Είναι μια συνάρτηση και συνήθως τη συμβολίζουμε με *F*. Όταν κάνουμε ένα πείραμα δεν γνωρίζουμε την τιμή του πειράματος αλλά γνωρίζουμε ότι η τιμή θα είναι μες στον πιθανοθεωρητικό χώρο. Δηλαδή, ο δειγματοχώρος μας δίνει τις τυχαίες μεταβλητές που «τρέχουν» με μια συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας, δηλαδή έχουν έναν τύπο, έναν γενικό κανόνα και ο πιθανοθεωρητικός χώρος είναι αυτός που μας δίνει τις τιμές της πιθανότητας να βγει αυτό που θέλουμε (για παράδειγμα, στο ζάρι η π.π. να φέρουμε 6 είναι 1/6 και η κατανομή του είναι δύο μεταβλητές ή να το φέρουμε όντως άρα έχουμε επιτυχία ή να μη το φέρουμε και να έχουμε αποτυχία). Ορίζουμε λοιπόν την έννοια της συνάρτησης κατανομής που θα έχει τύπο:

$$F(x,y) = \begin{cases} \sum f(x,y) \\ \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(x,y)dxdy \end{cases}$$

Κατά αντιστοιχία ορίζεται και η δεσμευμένη συνάρτηση κατανομής με τους ίδιους τύπους, αρκεί να βάλουμε αντί για *f* την *F*, δηλαδή:

$$F(X/Y) = \begin{cases} \sum_{X \le Y} f(x/y) \\ \int_{-\infty}^{X} f(x/y)dx \end{cases}$$

και

$$F(Y/X) = \begin{cases} \sum_{Y \le X} f(y/x) \\ \int_{-\infty}^{y} f(y/x)dy \end{cases}$$

Δραστηριότητα 21/Κεφάλαιο 1

Η τυχαία μεταβλητή X παίρνει τιμές:

0 με πιθανότητα 0.5

1 με πιθανότητα 0.3

2 με πιθανότητα 0.2

Να υπολογίσετε:

$E[X]$, $E[3+X]$, $E[3X]$, $E[X^2]$, $\mathrm{var}[X]$

Την απάντηση θα βρείτε στο Παράρτημα, στο τέλος του κεφαλαίου.

Δραστηριότητα 22/Κεφάλαιο 1

Η τιμολογιακή πολιτική μιας ΑΧΕΠΕΥ, κάτω από το καθεστώς της οδηγίας MiFiD, εξαρτάται από το κριτήριο (ύψος χαρτοφυλακίου, αριθμός συναλλαγών σε δεδομένη χρονική περίοδο κ.λπ.) που θέτει προκειμένου να κατατάξει τους πελάτες της. Η εταιρία οφείλει να ακολουθεί το κριτήριο που έχει θέσει σε κάθε πελάτη χωρίς διακρίσεις. Σε έλεγχο της Επιτροπής Κεφαλαιαγοράς υπολογίστηκε ο αριθμός των συναλλαγών (X) σε δείγμα 400 επενδυτών–πελατών (#Ε) μιας ΑΧΕΠΕΥ:

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
#Ε	146	97	73	34	23	10	6	3	4	2	2

(Α) Να υπολογίσετε την πιθανότητα να επιλέξει ο ελεγκτής έναν επενδυτή, ο οποίος:

(1) Δεν πραγματοποίησε συναλλαγή

(2) Πραγματοποίησε τουλάχιστον μια συναλλαγή

(3) Πραγματοποίησε περισσότερες από 5 συναλλαγές

(4) Πραγματοποίησε λιγότερες από 6 συναλλαγές

(Β) Να υπολογίσετε τη μέση τιμή και τη διακύμανση του αριθμού των συναλλαγών.

Τις απαντήσεις θα βρείτε στο Παράρτημα, στο τέλος του κεφαλαίου.

Συνδιακύμανση (Covariance)

Η συνδιακύμανση (covariance) είναι ένα μέτρο αξιολόγησης της σχέσης δύο τυχαίων μεταβλητών. Εάν X και Y είναι δύο τυχαίες μεταβλητές με μέσες τιμές μ_X και μ_Y, αντίστοιχα, η συνδιακύμανσή τους υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\mathrm{cov}(X,Y) = E\{(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)\} = E(XY) - \mu_X \mu_Y$$

ή αλλιώς:

$$\operatorname{cov}(X,Y)=\sum_y\sum_x (X-\mu_X)(Y-\mu_Y)f(x,y)=\sum_y\sum_x XYf(x,y)-\mu_X\mu_Y$$

Θα είναι $\operatorname{cov}(x,y)=E(x,y)-E(x)E(y)$ ή $con(X,Y)=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)}{n-1}$, εάν διαθέτουμε ιστορικές παρατηρήσεις. Εάν *X* και *Y* είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές, τότε η συνδιασπορά είναι μηδενική, όπως επίσης είναι και γραμμική σε σχέση με σταθερούς συντελεστές. Κατά αντιστοιχία έχουμε και τις δεσμευμένες διακυμάνσεις και συνδιακυμάνσεις.

$$E(x|Y=y)=\begin{cases}\sum_x xf(x|Y=y)\\ \int_{-\infty}^{\infty} xf(x|Y=y)dx\end{cases}$$

Συσχέτιση

Η συσχέτιση μετρά τον βαθμό συνάφειας και αλληλεπίδρασης ανάμεσα σε δύο τυχαίες μεταβλητές και πρακτικά σημαίνει ότι από την τιμή του συντελεστή συσχέτισης κατανοούμε πόσο σφιχτή ή χαλαρή είναι η σχέση των δύο αυτών μεταβλητών. Βασικό σημείο είναι να κατανοήσουμε το γεγονός ότι η συσχέτιση δεν σημαίνει απαραίτητα συναρτησιακή σχέση μεταξύ των δύο μεταβλητών. Η διαδικασία συσχέτισης είναι είτε ποιοτική (συσχέτιση Spearman & Kendall), είτε ποσοτική (συντελεστής Pearson).

Ο Συντελεστής Γραμμικής Συσχέτισης συμβολίζεται με ρ και δείχνει τη γραμμική συσχέτιση μεταξύ δύο ποσοτικών μεταβλητών, είναι καθαρός αριθμός, παίρνει τιμές από -1 έως 1, όπου το -1 δείχνει τέλεια αρνητική συσχέτιση και μάλιστα όταν οι τιμές της μιας αυξάνουν, της άλλης μειώνονται και το $+1$ δείχνει ακριβώς την τέλεια θετική συσχέτιση, ενώ αν ο συντελεστής είναι μηδενικός οι *X*, *Y* είναι ασυσχέτιστες. Προκύπτει από τον τύπο:

$$\begin{cases}\rho=\dfrac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{\operatorname{var}(X)\operatorname{var}(Y)}}=\dfrac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sigma_X\sigma_Y}\\ or\\ \operatorname{cov}(X,Y)=\rho\sigma_X\sigma_Y\end{cases}$$

Παράδειγμα 13

Η στήλη Α δίνει την τελευταία ημέρα κάθε μήνα για το διάστημα Ιανουαρίου 2001–Δεκεμβρίου 2002, δηλαδή 24 παρατηρήσεις. Βάσει των τιμών κλεισίματος των μετοχών της Alpha Bank και Πειραιώς, υπολογίστηκαν οι αποδόσεις τους στις στήλες Β και C.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2	Date	ALPHA	PIRAEUS	B-MEAN	C-MEAN	D*E	D^2	E^2
3	31/1/2001							
4	28/2/2001	-0.1410	-0.0414	-0.0929	-0.0008	0.0001	0.0086	0.0000
5	30/3/2001	-0.0295	-0.1576	0.0186	-0.1170	-0.0022	0.0003	0.0137
6	30/4/2001	0.0948	0.1438	0.1430	0.1844	0.0264	0.0204	0.0340
7	31/5/2001	-0.0561	0.0137	-0.0079	0.0543	-0.0004	0.0001	0.0029
8	29/6/2001	-0.2075	-0.1386	-0.1594	-0.0980	0.0156	0.0254	0.0096
9	31/7/2001	-0.0081	-0.0849	0.0401	-0.0443	-0.0018	0.0016	0.0020
10	31/8/2001	0.0161	0.0000	0.0643	0.0406	0.0026	0.0041	0.0016
11	28/9/2001	-0.2577	-0.4063	-0.2096	-0.3658	0.0767	0.0439	0.1338
12	31/10/2001	0.0376	0.1226	0.0858	0.1632	0.0140	0.0074	0.0266
13	30/11/2001	0.0391	0.1253	0.0873	0.1659	0.0145	0.0076	0.0275
14	28/12/2001	-0.0411	-0.0040	0.0071	0.0366	0.0003	0.0000	0.0013
15	31/1/2002	-0.0356	-0.0749	0.0126	-0.0343	-0.0004	0.0002	0.0012
16	28/2/2002	-0.0831	-0.2188	-0.0349	-0.1783	0.0062	0.0012	0.0318
17	28/3/2002	0.0112	-0.0696	0.0594	-0.0290	-0.0017	0.0035	0.0008
18	30/4/2002	-0.1732	-0.0116	-0.1251	0.0290	-0.0036	0.0156	0.0008
19	31/5/2002	0.0351	0.0567	0.0833	0.0972	0.0081	0.0069	0.0095
20	28/6/2002	-0.0770	0.0055	-0.0288	0.0461	-0.0013	0.0008	0.0021
21	31/7/2002	-0.0774	-0.0888	-0.0292	-0.0482	0.0014	0.0009	0.0023
22	30/8/2002	0.0965	0.0149	0.1447	0.0554	0.0080	0.0209	0.0031
23	30/9/2002	-0.2084	-0.0894	-0.1602	-0.0489	0.0078	0.0257	0.0024
24	31/10/2002	-0.0426	-0.0065	0.0056	0.0341	0.0002	0.0000	0.0012
25	29/11/2002	0.0802	0.0256	0.1283	0.0662	0.0085	0.0165	0.0044
26	31/12/2002	-0.0802	-0.0486	-0.0320	-0.0080	0.0003	0.0010	0.0001
27								
28	MEAN	-0.0482	-0.0406		SUM	0.1791	0.2128	0.3127
29					COV=0.1791/23=	0.0078		
30					VAR=G28/23=		0.0093	0.0136
31					SD=(G30)^1/2=		0.096	0.117
32					CORR=COV/(SD1*SD2)=		0.694	

Υπολογίστηκε η συνδιακύμανση των αποδόσεων των δύο τραπεζών, ΑΒ για την ALPHA BANK και P για την Πειραιώς:

$$\operatorname{cov}(AB,P)=\frac{(B-MEAN)(C-MEAN)}{(24-1)}=0.0078$$

Στη συνέχεια, υπολογίστηκαν οι τυπικές του αποκλίσεις, *SD*, όπως φαίνεται στις στήλες G και H. O συντελεστής γραμμικής συσχέτισης υπολογίστηκε από τον λόγο:

$$\rho(AB,P)=\frac{\operatorname{cov}(AB,P)}{sd(AB)*sd(P)}=0.694\cong 0.70$$

Με τις συναρτήσεις του excel:

covar(B4:B26;C4:C26) και

correl(B4:B26;C4:C26)

θα παίρναμε τα ίδια αποτελέσματα για τη συνδιακύμανση και τον συντελεστή συσχέτισης, αντίστοιχα.

Παράδειγμα 14

Η διακύμανση ενός χαρτοφυλακίου, που αποτελείται από δύο μετοχές, X και Y, στις οποίες έχουμε επενδύσει 30% και 70% αντίστοιχα του κεφαλαίου μας, είναι:

$$\mathrm{var}(0.3X + 0.7Y) = 0.3^2\,\mathrm{var}(X) + 0.7^2\,\mathrm{var}(Y) + 2\,\mathrm{cov}(X,Y)$$

Δραστηριότητα 23/Κεφάλαιο 1

Υποθέτουμε ότι ένας επενδυτής αγοράζει 10 μετοχές μιας ορισμένης εταιρίας με 50€, τη μια για να την πουλήσει σε ένα χρόνο. Ο χρηματιστής του τον πληροφορεί ότι στο διάστημα ενός χρόνου από τον χρόνο αγοράς θα συμβούν τα εξής ενδεχόμενα:

- Οι μετοχές δεν θα αξίζουν τίποτα με πιθανότητα 0,1
- Οι μετοχές θα διατηρήσουν την αρχική τους αξία με πιθανότητα 0,5
- Η τιμή των μετοχών θα διπλασιαστεί με πιθανότητα 0,4

Συμβολίζουμε με X το κέρδος από την αγορά 100 μετοχών. Η X είναι διακριτή μεταβλητή και ζητάμε:

1. Τη συνάρτηση πιθανότητας της X
2. Τη μέση τιμή της X
3. Τη διακύμανση της X
4. Την τυπική απόκλιση της X
5. Είναι συμφέρουσα ή όχι η αγορά 100 μετοχών για τον επενδυτή;

Την απάντηση θα βρείτε στο Παράρτημα, στο τέλος του κεφαλαίου.

Παράδειγμα 15

Η από κοινού π.π. των διακριτών τ.μ. (X,Y) δίνεται στον παρακάτω πίνακα εισροών–εκροών. Υπολογίστε τις ροπές και τη στοχαστικότητα.

$X \backslash Y$	1	2	3
1	1\12	1\6	0
2	1\9	0	1\5
3	1\18	1\4	2\15

Λύση

Ο πίνακας αυτός διπλής εισόδου μας δίνει την από κοινού π.π. των τ.μ. X,Y όπου η κάθε μια είναι:

Η τ.μ. $X=(x_1,x_2x_3)=\begin{cases} x_1=1 \\ x_2=2 \\ x_3=3 \end{cases}$ με $i=$ 1,2,3 και η $Y=(y_1,y_2,y_3)=\begin{cases} y_1=1 \\ y_2=2 \\ y_3=3 \end{cases}$ για $j=$ 1,2,3

Με $P(X=x_i,Y=y_j)$ συμβολίζουμε τη συνάρτηση π.π.

Α. Οι περιθωριακές πιθανότητες

Ως προς X:

Για κάθε ένα x_i υπολογίζουμε τις τιμές του Y αθροιστικά δηλαδή,

$$P(X=x_i)=\sum_{j=1}^{3} p_{ij}=\begin{cases} P(X=1)=\dfrac{1}{12}+\dfrac{1}{6}+0=\dfrac{1}{4} \\ P(X=2)=\dfrac{1}{9}+0+\dfrac{1}{5}=\dfrac{14}{45} \\ P(X=3)=\dfrac{1}{18}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{2}{15}=\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

(το $i=$1,2,3 παραμένει σταθερό, άρα προσθέτουμε γραμμές)

Ως προς Y αντίστοιχα έχουμε

$$P(Y=y_j)=\sum_{i=1}^{3} p_{ij}=\begin{cases} P(Y=1)=\dfrac{1}{12}+\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{18}=\dfrac{1}{4} \\ P(Y=2)=\dfrac{1}{6}+0+\dfrac{1}{4}=\dfrac{5}{12} \quad \text{(προσθέτουμε στήλες)} \\ P(Y=3)=0+\dfrac{1}{5}+\dfrac{2}{15}=\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

Β. Οι ροπές

Παίρνουμε αμέσως τους τύπους και έχουμε:

μέση τιμή της X:

$$E(X)=\sum_{x=1}^{3} x_i P(X=x_i)=1P(X=1)+2P(X=2)+3P(X=3)\Leftrightarrow$$

$$E(X)=1\frac{1}{4}+2\frac{14}{45}+3\frac{2}{5}=2.05$$

μέση τιμή της Y:

$$E(Y)=\sum_{y=1}^{3} y_j P(Y=y_j)=1P(Y=1)+2P(Y=2)+3P(Y=3)\Leftrightarrow$$

$$E(Y)=1\frac{1}{4}+2\frac{5}{12}+3\frac{1}{3}=2.08$$

μέση τιμή της από κοινού:

$$E(X,Y) = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} x_i y_j P(X = x_i, Y = y_j) \Leftrightarrow$$

$$E(X,Y) = x_1y_1p_{11} + x_1y_1p_{12} + x_1y_1p_{13} + x_2y_1p_{21} + x_2y_2p_{22} + x_2y_3p_{23} + x_3y_1p_{31} + x_3y_2p_{32} + x_3y_3p_{33} \Leftrightarrow$$

$$E(X,Y) = ... = 4.6$$

διακύμανση του X:

$$E(X^2) = \sum_{i=1}^{3} x_i^2 P(X = x_i) = 1P(X = 1) + 4P(X = 2) + 9P(X = 3) = 5.09$$

$$\text{var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 0.89$$

διακύμανση του Y:

$$E(Y^2) = \sum_{j=1}^{3} y_j^2 P(Y = y_j) = 1P(Y = 1) + 4P(Y = 2) + 9P(Y = 3) = 4.85$$

$$\text{var}(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2 = 0.52$$

Συνδιακύμανση:

$\text{cov}(X,Y) = E(X,Y) - E(X)E(Y) = 0.426$ (υπάρχει γιατί δεν είναι ανεξάρτητες)

Συντελεστής συσχέτισης:

$$p(X,Y) = \frac{\text{cov}(X,Y)}{\text{var}(X)\,\text{var}(Y)} = \frac{0.426}{0.68} = 0.62 \text{ (θετική συσχέτιση)}$$

Γ. Η στοχαστική ανεξαρτησία

Για να διαπιστώσουμε αν είναι στοχαστικά ανεξάρτητες πρέπει να δείξουμε ότι ισχύει

$$P(X,Y) = P(X)P(Y), \forall i, j .$$

Θεωρούμε ένα τυχαίο δείγμα ας πούμε για $i = 1$ και $j = 1$ είναι $P(X = 1, Y = 1) = P(X = 1)P(Y = 1) \Leftrightarrow \frac{1}{12} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}$ άτοπο άρα δεν είναι στοχαστικά ανεξάρτητες.

Δ. Δεσμευμένες πιθανότητες

Θα βρούμε τώρα τις δεσμευμένες πιθανότητες:

Την Y ως προς X:

Γνωρίζουμε ότι $P(Y / X = x_i) = \dfrac{P(X = x_i, Y = y_j)}{P(X = x_i)}$ άρα με αντικατάσταση στις τιμές κάθε φορά έχουμε:

$$P(Y=1/X=1)=\frac{P(X=1,Y=1)}{P(X=1)}=\frac{1/12}{1/4}=1/3$$

$$P(Y=2/X=1)=\frac{P(X=1,Y=2)}{P(X=1)}=\frac{1/6}{1/4}=2/3$$

κ.τ.λ. για κάθε τιμή του X και Y.

Κατασκευάζουμε τον πίνακα εισόδου για τη δεσμευμένη, που είναι:

Y/X			
X*/*Y	**1**	**2**	**3**
1	4\12	2\3	0
2	45\126	0	45\70
3	5\36	5\8	1\3

Την X ως προς Y

Με τον ίδιο ακριβώς τρόπο βγάζουμε τον πίνακα που είναι οι τιμές της δεσμευμένης συνάρτησης της X ως προς Y:

X/*Y*			
X*/*Y	**1**	**2**	**3**
1	4\12	1\5	0
2	4\9	0	3\5
3	2\9	3\5	2\5

Παράδειγμα 16

Μια δισδιάστατη τ.μ. περιγράφει την από κοινού π.π. Η μια περιγράφει την οικονομική συγκυρία και η άλλη, κατ' αντιστοιχία, το πλήθος των μετοχών που ανεβαίνουν σε ένα χρηματιστήριο σύμφωνα με τον πίνακα εισόδου. Ποια είναι η μέση αναμενόμενη οικονομική συγκυρία, όταν γνωρίζουμε ότι δεν παρατηρήθηκε άνοδος σε καμία μετοχή;

Λύση

Έχουμε περιγραφή του προβλήματος. Θέτουμε τις μεταβλητές, που είναι:

Η X είναι η οικονομική συγκυρία και έχει τρεις τιμές που είναι:

X: 0 κακή

1 μέτρια

2 καλή

Η Y που είναι ο αριθμός των ανοδικών μετοχών:

Y: 0 κανένα
10 μετοχές
20 μετοχές

Ο πίνακας εισόδου είναι ο εξής

X \ Y	**0**	**10**	**20**
0	0.25	0.05	0.05
1	0.05	0.15	0.05
2	0.05	0.1	0.25

Για τις περιθωριακές

Ως προς X

$$f(X) = P(X = x_i) = \sum_{j=1}^{3} p_{ij} = \begin{cases} P(X = 0) = 0.25 + 0.05 + 0.05 = 0.35 \\ P(X = 1) = 0.05 + 0.15 + 0.05 = 0.25 \\ P(X = 2) = 0.05 + 0.1 + 0.25 = 0.40 \end{cases}$$

και ως προς Y

$$f(Y) = P(Y = y_j) = \sum_{i=1}^{3} p_{ij} = \begin{cases} P(Y = 0) = 0.25 + 0.05 + 0.05 = 0.35 \\ P(Y = 10) = 0.05 + 0.15 + 0.10 = 0.30 \\ P(Y = 20) = 0.05 + 0.05 + 0.25 = 0.35 \end{cases}$$

Η δεσμευμένη πιθανότητα ως συνάρτηση της X/Y είναι

$f(X/Y) = \dfrac{P(X = x_i, Y = y_j)}{P(Y = y_j)}$ οπότε με αντικατάσταση των τιμών προκύπτει η συνάρτηση με τιμές στον παρακάτω πίνακα:

X /Y			
X \ Y	**0**	**10**	**20**
0	0.71	0.17	0.14
1	0.14	0.5	0.14
2	0.14	0.33	0.71

Ζητάμε τώρα την αναμενόμενη κατάσταση της οικονομικής συγκυρίας, δηλαδή αναμενόμενη τιμή της μεταβλητής X, όταν γνωρίζουμε ότι δεν παρατηρήθηκαν ανοδικές μετοχές (δηλαδή $Y = 0$):

$$E(X/Y = 0) = \sum_{i=0}^{2} x_i f(X/Y = 0) = 0f(X/Y) + 1f(X = 1/Y = 0) + 2f(X = 2/Y = 0) \Leftrightarrow$$
$$E(X/Y = 0) = 0.14 + 2 \cdot 0.14 = 0.42$$

Παράδειγμα 17

Υπάρχουν πολλές περιπτώσεις στη χρηματοοικονομική, που η μελέτη της συνδιακύμανσης είναι σημαντική. Για παράδειγμα, ο διαχειριστής Αμοιβαίων Κεφαλαίων για να υπολογίσει τον κίνδυνο του υπό διαχείριση χαρτοφυλακίου, είναι απαραίτητο να γνωρίζει τη συμπεριφορά των αποδόσεων του περιουσιακού στοιχείου *X* με εκείνες του περιουσιακού στοιχείου *Y*. Εάν, για παράδειγμα, οι αποδόσεις του στοιχείου *X*, γενικά, είναι θετικές (αρνητικές) και, ταυτόχρονα οι αποδόσεις του στοιχείου *Y* είναι θετικές (αρνητικές), τότε η συνδιακύμανση των αποδόσεών τους θα είναι θετική.

Δραστηριότητα 24/Κεφάλαιο 1

(α) Δείξτε ότι εάν οι αποδόσεις ενός περιουσιακού στοιχείου *X* είναι θετικές και οι αποδόσεις ενός άλλου περιουσιακού στοιχείου *Y* είναι, ταυτόχρονα, πτωτικές, τότε η συνδιακύμανσή τους θα έχει αρνητική τιμή.

(β) Δείξτε ότι εάν οι αποδόσεις ενός περιουσιακού στοιχείου *X* είναι χαμηλότερες από τη μέση τους απόδοση και οι αποδόσεις ενός άλλου περιουσιακού στοιχείου *Y* είναι, ταυτόχρονα, υψηλότερες από τη μέση τους απόδοση, τότε η συνδιακύμανσή τους θα έχει αρνητική τιμή. Να σχεδιάσετε το αντίστοιχο διάγραμμα.

Την απάντηση θα βρείτε στο Παράρτημα, στο τέλος του κεφαλαίου.

Η μήτρα διακυμάσεων–συνδιακυμάνσεων

Οι συνδιακυμάνσεις μεταξύ των διάφορων ζευγών τυχαίων μεταβλητών παρουσιάζονται συχνά στη μήτρα διακυμάνσεων–συνδιακυμάνσεων. Η παρακάτω μήτρα δίνει τη μήτρα διακυμάνσεων–συνδιακυμάνσεων μεταξύ των τυχαίων μεταβλητών *X*, *Y* και *Z*.

	X	Y	Z			X	Y	Z
X	σxx	σxy	σxz		X	σxx		
Y	σyx	σyy	σyz		Y	σyx	σyy	
Z	σzx	σzy	σzz		Z	σzx	σzy	σzz
		(α)					(β)	

όπου σ_{xx} είναι η διακύμανση της μεταβλητής *X* (γιατί;), σ_{xy} είναι η συνδιακύμανση των μεταβλητών *X* και *Y* κ.ο.κ. Στο μέρος (α) είναι η πλήρης διάταξη της μήτρας διακυμάνσεων–συνδιακυμάνσεων και στο μέρος (β) παρουσιάζεται η ίδια μήτρα διακυμάνσεων–συνδιακυμάνσεων μέσω της σχέσης $\sigma_{xy} = \sigma_{yx}$.

Παράδειγμα 18
Υπολογισμός στο excel της μήτρας διακυμάνσεων–συνδιακυμάνσεων

Θα χρησιμοποιήσουμε και πάλι το παράδειγμα των αποδόσεων των χρηματιστηριακών δεικτών FTSE και S&P, που χρησιμοποιήσαμε και σε προηγούμενα παραδείγματα. Συγκεκριμένα, θα χρησιμοποιήσουμε τις υπερβάλλουσες αποδόσεις τους (excess return), ως εξής:

Excess Return X = Return X - Mean Return X = A

δηλαδή, η διαφορά κάθε απόδοσης από τη μέση απόδοση του δείκτη, που θα συμβολίσουμε για συντομία με A. Η A είναι μια μήτρα 15 γραμμών και 2 στηλών, δηλαδή, μια μήτρα διαστάσεων (15*2). Ο παρακάτω πίνακας δίνει αυτή τη μήτρα στο excel στα κελιά, έστω, A2:B16.

A = Μήτρα υπεραποδόσεων	
FT-m(FT)	SP-m(SP)
-0.44592	-0.04334
-0.04112	-0.05066
0.046808	0.007635
-0.01652	0.008491
0.016863	-0.03099
0.088747	0.027152
0.087565	0.033101
-0.03743	-0.03112
0.057505	0.016833
0.029103	-0.04414
0.029113	0.008394
0.009883	0.020158
0.040182	0.031609
0.076129	0.023132
0.059085	0.023747

Η μήτρα διακυμάνσεων–συνδιακυμάνσεων προκύπτει από τη σχέση:

$$\Sigma = [\sigma ij] = (A' * A)/n, n=15$$

όπου A΄ είναι η ανάστροφη (transpose) μήτρα της A. Η ανάστροφη A΄ μιας μήτρας A είναι εκείνη της οποίας οι γραμμές είναι οι στήλες της A. Ο παρακάτω πίνακας δείχνει την ανάστροφη μήτρα A΄, της A, η οποία είναι διαστάσεων (2*15):

A B C .... M N O

A' = ΑΝΑΣΤΡΟΦΗ ΜΗΤΡΑ ΑΠΟΔΟΣΕΩΝ FTSE ΚΑΙ S&P 500														
-0.043	-0.051	0.00763	0.00849	-0.030990133	0.0272	0.0331	-0.031	0.0168	-0.044	0.0084	0.0202	0.0316	0.0231	0.0237
0.0193	0.0021	0.00036	-0.0001	-0.000522576	0.0024	0.0029	0.0012	0.001	-0.001	0.0002	0.0002	0.0013	0.0018	0.0014

Στο παράδειγμα αυτό πολλαπλασιάζουμε μια μήτρα διαστάσεων 2*15 (η ανάστροφη μήτρα, A΄) με μια μήτρα διαστάσεων 15*2 (η μήτρα των υπεραποδόσεων των δεικτών, A). Για να είναι εφικτός ο πολλαπλασιασμός δύο μητρών, πρέπει ο αριθμός των γραμμών της πρώτης μήτρας να είναι ίσος με τον αριθμό των στηλών της δεύτερης μήτρας. Το αποτέλεσμα του πολλαπλασιασμού θα είναι μια μήτρα διαστάσεων (2*2), διότι το αποτέλεσμα του πολλαπλασιασμού δύο μητρών είναι μια μήτρα διαστάσεων ίσων με τον αριθμό των γραμμών της πρώτης μήτρας και τον αριθμό των στηλών της δεύτερης μήτρας.

Για τον υπολογισμό της ανάστροφης μήτρας στο excel, εργαζόμαστε ως εξής: Μαρκάρουμε την περιοχή που θέλουμε να εμφανιστεί η ανάστροφη μήτρα, έστω, στα κελιά A17:O18, γιατί είναι μια μήτρα διαστάσεων (2*15). Στη συνέχεια, χρησιμοποιούμε τη συνάρτηση TRANSPOSE(A2:B16) και πληκτρολογούμε [CTRL] – [SHIFT] – [ENTER] (ΟΧΙ Enter).

Για τον υπολογισμό της μήτρας διακυμάνσεων–συνδιακυμάνσεων θα πρέπει να πολλαπλασιάσουμε την ανάστροφη μήτρα που περιλαμβάνεται στα κελιά A17:O18 με τη μήτρα A, που περιλαμβάνεται στα κελιά A2:B16. Θα χρησιμοποιήσουμε τη συνάρτηση του excel, MMULT(A17:O18; A2:B16), αφού πρώτα επιλέξουμε την περιοχή που θέλουμε να εγγραφεί η μήτρα διακυμάνσεων–συνδιακυμάνσεων. Και πάλι, πληκτρολογούμε [CTRL] – [SHIFT] – [ENTER] (ΟΧΙ Enter). Το αποτέλεσμα στο παράδειγμά μας είναι:

		FTSE	S&P
Variance-covariance matrix	FTSE	0.01314	-0.00061
	S&P	-0.0006	0.000403

Τα διαγώνια στοιχεία είναι οι διακυμάνσεις των αποδόσεων των δύο χρηματιστηριακών δεικτών και τα μη διαγώνια στοιχεία, που είναι ίσα μεταξύ τους, είναι η συνδιακύμανση των αποδόσεων του δείκτη FTSE με εκείνες του δείκτη S&P.

Δραστηριότητα 25/Κεφάλαιο 1

Η συνδιακύμανση μεταξύ των αποδόσεων της μετοχής *X* και των αποδόσεων της μετοχής *Y* είναι ίση με 0.0123. Η συσχέτιση των αποδόσεών τους ισούται με 0.678. Εάν η διακύμανη των αποδόσεων της μετοχής *X* ισούται με 21, τότε να υπολογίσετε τον κίνδυνο της μετοχής *Y*.

Την απάντηση θα βρείτε στο Παράρτημα, στο τέλος του κεφαλαίου.

Άσκηση Αυτοαξιολόγησης 1/Κεφάλαιο 1

Να γράψετε τη μήτρα των συντελεστών συσχέτισης ενός χαρτοφυλακίου με 3 μετοχές επαναλαμβάνοντας την προηγούμενη ενότητα.

Την απάντηση θα βρείτε στο Παράρτημα, στο τέλος του κεφαλαίου.

Δραστηριότητα 26/Κεφάλαιο 1

Εάν *X* και *Y* είναι δύο τυχαίες μεταβλητές η καθεμία από τις οποίες ακολουθεί την τυποποιημένη κανονική κατανομή N(0, 1) με συνδιακύμανση ίση με 0,5, να υπολογίσετε τη διακύμανση $(0.7X+0.3Y)$.

Την απάντηση θα βρείτε στο Παράρτημα, στο τέλος του κεφαλαίου.

Δραστηριότητα 27/Κεφάλαιο 1

Η συνδιακύμανση μεταξύ των αποδόσεων της μετοχής Α και εκείνων της Β ισούται με 8. Η συσχέτιση των αποδόσεων των δύο μετοχών ισούται με 0.8. Εάν η διακύμανση των αποδόσεων της Α είναι ίση με 22, να υπολογίσετε τη διακύμανση των αποδόσεων της Β μετοχής.

Την απάντηση θα βρείτε στο Παράρτημα, στο τέλος του κεφαλαίου.

Ροπές μεγαλύτερης τάξης

Οι ροπές 3^{ης} και 4^{ης} τάξης δείχνουν τα χαρακτηριστικά της κατανομής και συγκεκριμένα την ασυμμετρία και κύρτωση.

Ασυμμετρία

Ο συντελεστής ασυμμετρίας δείχνει εάν υπάρχει μεροληπτική διασπορά στα δεδομένα. Στο διάγραμμα που ακολουθεί φαίνονται η συμμετρική κατανομή και οι ασύμμετρες (αριστερά και δεξιά). Σε μια θετικά ασύμμετρη κατανομή ισχύει, μεταξύ του μέσου μ, της διαμέσου δ και του τύπου τ: $\mu > \delta > \tau$, ενώ σε μια αρνητικά ασύμμετρη κατανομή ισχύει: $\mu < \delta < \tau$. Στη συμμετρική κατανομή είναι $\tau = \delta = \mu$.

Στην περίπτωση της αρνητικής ασυμμετρίας (negative skewness), η κατανομή παρουσιάζει μακριά αριστερή ουρά (long left tail) με τη μέση τιμή χαμηλότερη από της διαμέσου και του τύπου. Οι περισσότερες παρατηρήσεις είναι πάνω από τον μέσο, αλλά η μέση τιμή πιέζεται προς τα κάτω από λίγες παρατηρήσεις με πολύ χαμηλές τιμές. Στην περίπτωση της θετικής ασυμμετρίας (positive skewness), η κατανομή παρουσιάζει μακριά δεξιά ουρά (long right tail), με τον μέσο να είναι υψηλότερος από τη διάμεσο και τον τύπο, οδηγούμενος από λίγες μόνο παρατηρήσεις με πολύ υψηλές τιμές.

Παράδειγμα 19

Ας θεωρήσουμε μια επένδυση που έδωσε θετική απόδοση 8% ετησίως, στο τέλος δύο ετών. Αν το αρχικό κεφάλαιο είναι 1.000€, τότε στο τέλος των δύο ετών θα είναι:

$$1.000(1,08)^2 = 1166,40\ €$$

Ας υποθέσουμε, τώρα, ότι η απόδοση ήταν αρνητική κατά 8% σε κάθε έτος, τότε στο τέλος του δεύτερου έτους θα είναι:

$$\frac{1.000}{(1,08)^2} = 857,3388\,€$$

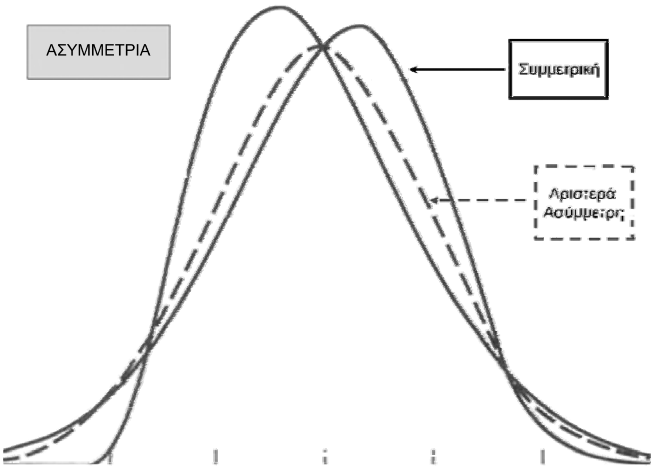
Από τα παραπάνω προκύπτει ότι οι ανατοκιζόμενες θετικές αποδόσεις έδωσαν κέρδος στον επενδυτή ίσο με 166,40€ σε δύο έτη, ενώ στην περίπτωση των αρνητικών αποδόσεων η ζημία στο τέλος των δύο ετών, είναι ίση με 142,6612€. Προκύπτει ότι οι ανατοκιζόμενες αποδόσεις των περιουσιακών στοιχείων οδηγούν σε θετική ασυμμετρία.

Ο τύπος υπολογισμού της ασυμμετρίας είναι:

$$S = \frac{E(X-\mu)^3}{\sigma^3}$$

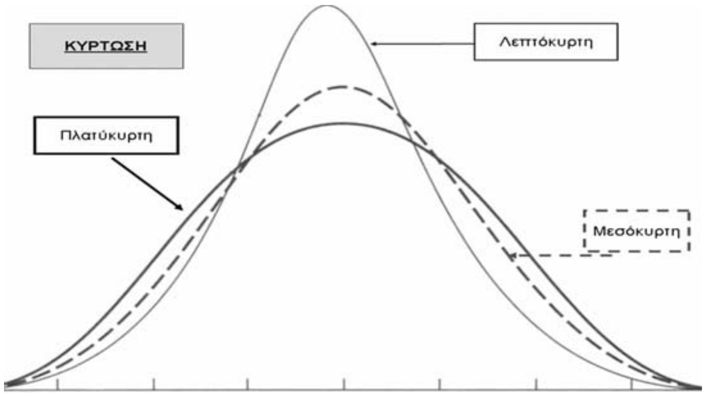
ενώ ο συντελεστής ασυμμετρίας του Spearman υπολογίζεται ως:

$$\frac{\text{3(mean - median)}}{\text{standard deviation}}$$



Κύρτωση

Ο συντελεστής κύρτωσης μιας κατανομής δείχνει την αιχμηρότητα (peaked ness) της κατανομής. Οι κατανομές που είναι πιο αιχμηρές από την κανονική κατανομή ονομάζονται λεπτόκυρτες, ενώ εκείνες που είναι λιγότερο αιχμηρές από την κανονική κατανομή ονομάζονται πλατύκυρτες. Στην κανονική κατανομή (μεσόκυρτη) ο συντελεστής κύρτωσης ισούται με 3.



Οι λεπτόκυρτες κατανομές παρατηρούνται στις αποδόσεις των περιουσιακών στοιχείων των οποίων οι τιμές εμφανίζουν περιοδικά τινάγματα (jumps) σε βραχύ χρονικό διάστημα. Αυτό συμβαίνει σε μετοχές των οποίων η συναλλακτική δραστηριότητα παρουσιάζει ασυνέχειες ή τα Σαββατοκύριακα, όπου τα χρηματιστήρια δεν λειτουργούν. Ο λόγος είναι προφανής: οι πληροφορίες που δημοσιεύονται όταν τα χρηματιστήρια αξιών είναι κλειστά θα επηρεάσουν τις τιμές των μετοχών, όταν ανοίξουν ξανά, παρουσιάζοντας, έτσι, τινάγματα στις τιμές μεταξύ της τιμής κλεισίματος της προηγουμένης με την τιμή ανοίγματος της επομένης. Αυτά τα τινάγματα στις τιμές, που εμφανίζονται εντονότερα σε ημερήσιες παρατηρήσεις, θα οδηγήσουν σε συχνές μεγάλες θετικές ή αρνητικές αποδόσεις, από ό,τι θα περιμέναμε εάν η αγορά λειτουργούσε συνεχώς και αδιάκοπα.

Ο συντελεστής κύρτωσης υπολογίζεται από τη σχέση:

$$K = \frac{E(X-\mu)^4}{[E(X-\mu)^2]^2}$$

1.2.6 Βασικές κατανομές

Θα δούμε τώρα τις βασικότερες κατανομές, στη διακριτή και στη συνεχή περίπτωση, που χρησιμοποιούνται ευρύτατα στη στατιστική.

Διακριτές Κατανομές

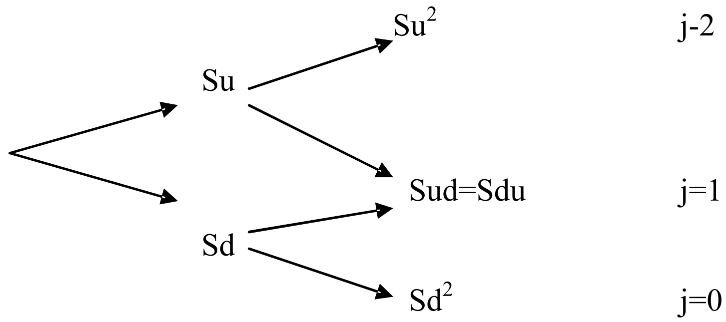
- **Η Διωνυμική κατανομή**

Εξετάζει ένα πείραμα τύχης που μπορεί να έχει δύο πιθανά αποτελέσματα την «επιτυχία» και την «αποτυχία». Ο γενικός της τύπος είναι:

$$X \sim B(n,p) \Leftrightarrow f(x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$$

Όπου n είναι το δείγμα, X η μεταβλητή, p η πιθανότητα επιτυχίας, $i = 1–p$ η πιθανότητα αποτυχίας. Η αναμενόμενη τιμή είναι $E(X) = np$ και η διακύμανση $\text{var}(X) = npq$. Για $n=1$ προκύπτει η Διωνυμική Bernoulli.

Η χρήση της διωνυμικής κατανομής στην αποτίμηση δικαιωμάτων προαίρεσης είναι σημαντική. Πρόκειται για ένα μοντέλο που αναπτύχθηκε από τους Cox, Ross και Rubinstein. Το διωνυμικό υπόδειγμα πήρε το όνομά του επειδή υποθέτει ότι η κίνηση της τιμής της μετοχής μπορεί να κινηθεί προς δύο μόνο κατευθύνσεις. Είτε να ανέβει είτε να πέσει κατά ορισμένη ποσότητα. Καμιά άλλη κίνηση της τιμής δεν είναι δυνατή.



Η φιλοσοφία του υποδείγματος αυτού είναι πολύ απλή. Ορίζουμε τον χρόνο ως τη λήξη του δικαιώματος σε διακριτές στιγμές (ώρες, ημέρες, εβδομάδες κ.λπ.) και σε κάθε τέτοια στιγμή θεωρούμε ότι η υποκείμενη αξία μπορεί να πάρει δύο πιθανές τιμές. Αφού φτιαχτεί ένα δέντρο με πιθανά σενάρια μετακίνησης της υποκείμενης αξίας και υπολογιστούν οι τιμές της κατά την ημερομηνία λήξης του δικαιώματος, υπολογίζουμε βάσει αυτών τις τιμές του δικαιώματος εκείνη τη χρονική στιγμή και, μετακινούμενοι προς τα πίσω βρίσκουμε την αξία του σήμερα.

Έστω ότι η μετοχή έχει αξία S, ένα δικαίωμα ευρωπαϊκού τύπου αξία C και διάρκεια t. Κατά τον χρόνο μέχρι τη λήξη η μετοχή μπορεί να αυξηθεί στο επίπεδο Su ($u>1$) ή να μειωθεί στο επίπεδο Sd ($0<d<1$), με αντίστοιχα ποσοστά αύξησης και μείωσης ($u–1$) και ($1–d$). Οι μεταβλητές u και d ισούνται με (1 + ποσοστό μεταβολής ανόδου) για την άνοδο και (1 – ποσοστό πτώσης) για την πτώση της τιμής. Έστω, για παράδειγμα, ότι η τρέχουσα τιμή της μετοχής είναι 50€. Αν αυξηθεί κατά 10% τότε θα είναι $u = 1.1$, ενώ εάν μειωθεί κατά 10% τότε $d = 1 – 0.1 = 0.9$. Η τιμή της μετοχής θα είναι, λοιπόν, $Su = 50(1.10)= 55$€, ενώ εάν μειωθεί $Sd = 50(0.9) = 45$€.

Δραστηριότητα 28/Κεφάλαιο 1

Υποθέτουμε ότι η πιθανότητα ανόδου της τιμής μιας μετοχής είναι 0.5. (α) Ποια είναι η πιθανότητα να έχουμε άνοδο για δύο διαδοχικές ημέρες; (β) Ποια είναι η πιθανότητα να έχουμε άνοδο την πρώτη ημέρα και πτώση τη δεύτερη ημέρα;

Την απάντηση θα βρείτε στο Παράρτημα, στο τέλος του κεφαλαίου.

Το πού θα είναι η τιμή της μετοχής μετά από n περιόδους (για παράδειγμα, στη λήξη του δικαιώματος) δεν είναι αποτέλεσμα μιας συγκεκριμένης διαδρομής, αλλά διάφορων συνδυασμών κινήσεων της τιμής στο πέρασμα του χρόνου. Τη δυνατότητα υπολογισμού των πιθανών αυτών συνδυασμών μπορούμε να έχουμε με τον παραγοντικό όρο:

$$\frac{n!}{j!(n-j)!}$$

Ο όρος αυτός μετρά τον αριθμό των τρόπων (δηλαδή τους δυνατούς συνδυασμούς) με τους οποίους η τιμή της μετοχής μπορεί να κλείσει ανοδικά (δηλαδή να έχει j ανόδους) μέσα σε n περιόδους. Έτσι, αφού με τη χρήση του παραπάνω παραγοντικού όρου μπορούμε να γνωρίζουμε τον αριθμό των αποτελεσμάτων με j επιτυχίες, ζητάμε να υπολογίσουμε την πιθανότητα των j επιτυχιών σε n επαναλήψεις:

$$p(x=j)=\frac{n!}{j!(n-j)!}p^j(1-p)^{(n-j)}$$

Παράδειγμα 20

Έστω ότι η πιθανότητα ανόδου είναι $p = 0.5$. Ζητάμε την πιθανότητα να έχουμε δύο συνεχείς ανόδους.

Λύση

$$p(Su^2)=\frac{2!}{2!(2-2)!}0.5^2(1-0.5)^{(2-2)}=\frac{2}{2}0.25=0.25$$

Δραστηριότητα 29/Κεφάλαιο 1

Έστω ότι η πιθανότητα ανόδου είναι $p = 0.5$. (α) Να υπολογιστεί η πιθανότητα μιας ανόδου ακολουθούμενης από μια πτώση. (β) Να υπολογιστεί η πιθανότητα δύο συνεχόμενων πτώσεων της τιμής.

Την απάντηση θα βρείτε στο Παράρτημα, στο τέλος του κεφαλαίου.

Παράδειγμα 21

Ας υποθέσουμε ότι η πληροφορία στην αγορά εισέρχεται ανεξάρτητα, τυχαία και με ασυνέχειες, με μέσο ρυθμό 10 πληροφορίες ανά λεπτό. Ποια είναι η πιθανότητα να φτάσουν στην αγορά μόνο 8 πληροφορίες το επόμενο λεπτό;

Λύση

n = 60 και p = 1/6, δηλαδή μια διαδικασία κατά την οποία κάθε δευτερόλεπτο είτε φτάνει μια πληροφορία στην αγορά είτε καμία πληροφορία δεν εισέρχεται στην αγορά. Υπάρχουν, δηλαδή, 61 πιθανά ενδεχόμενα: 0 εάν δεν φτάνει πληροφορία στην αγορά έως 60, όπου 1 πληροφορία ανά δευτερόλεπτο φτάνει στην αγορά. Αυτή η διωνυμική κατανομή (60, 1/6) έχει αναμενόμενη τιμή 60 * 1/6 = 10.

Για το πιθανό ενδεχόμενο j = 8, η αντίστοιχη πιθανότητα είναι:

$$p(j=8)=\frac{60!}{8!(60-8)!}\left(\frac{1}{6}\right)^{8}\left(\frac{5}{6}\right)^{(60-8)}\approx 0.1162$$

Δραστηριότητα 30/Κεφάλαιο 1

Να επαναλάβετε το προηγούμενο παράδειγμα, όταν η πληροφορία φτάνει στην αγορά (α) ανά μισό δευτερόλεπτο, δηλαδή (120, 1/12), (β) όταν (240, 1/24), (γ) (480, 1/44) και (δ) (960, 1/96). Να σχολιάσετε τι παρατηρείτε.

Την απάντηση θα βρείτε στο Παράρτημα, στο τέλος του κεφαλαίου.

- **Η κατανομή Poisson**

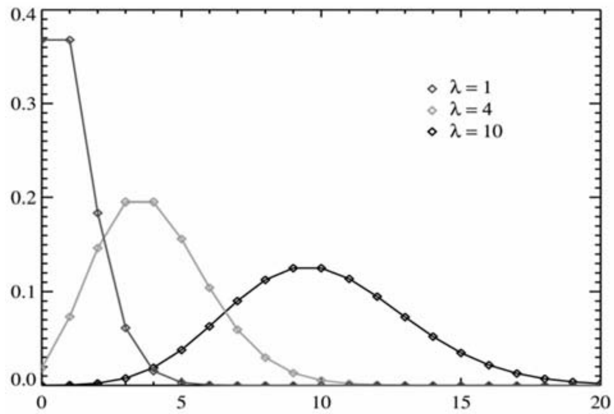
Η κατανομή Poisson είναι το όριο της διωνυμικής κατανομής. Εξετάζει το πλήθος εμφάνισης ενός γεγονότος σε δεδομένο χρονικό διάστημα και εξαρτάται μόνο από την παράμετρο λ, η οποία εκφράζει τον μέσο ρυθμό εμφάνισης του γεγονότος. Ο γενικός της τύπος είναι:

$$X \sim Poisson(\lambda) \Leftrightarrow f(x)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^{X}}{X!}$$

Στην κατανομή αυτή ο μέσος και η διακύμανση είναι η παράμετρος λ:

$$E(X) = \mathrm{var}(X) = \lambda.$$

Η γραφική της παράσταση για διάφορες τιμές του λ, είναι:



Πηγή: *http://en.wikipedia.org*

Η κατανομή Poisson χρησιμοποιείται σε ίδιες με τη διωνυμική κατανομή περιπτώσεις, με τη διαφορά ότι στην Poisson, ο αριθμός των επιτυχιών j είναι πολύ μικρός και ο αριθμός των επαναλήψεων n είναι πολύ μεγάλος.

Παράδειγμα 22

Ας υποθέσουμε ότι η πληροφορία στην αγορά εισέρχεται ανεξάρτητα, τυχαία και με ασυνέχειες με μέσο ρυθμό 10 πληροφορίες ανά λεπτό. Ποια είναι η πιθανότητα να φτάσουν στην αγορά μόνο 8 πληροφορίες το επόμενο λεπτό με την Poisson; $P(X) = \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^{X}}{X!} = \dfrac{e^{-10}10^{8}}{8!} = 0.1126$

Παράδειγμα 23

Ο ταμίας μιας τράπεζας κάνει σφάλματα όταν εγγράφει καταθέσεις και αναλήψεις πελατών στα βιβλία της τράπεζας με μια μέση συχνότητα 0,75 σφαλμάτων σε κάθε σελίδα του βιβλίου της τράπεζας. Ποια είναι η πιθανότητα σε ένα τυχαίο δείγμα τεσσάρων σελίδων να υπάρξουν δύο ή περισσότερα σφάλματα, εάν η κατανομή σφαλμάτων ακολουθεί την κατανομή Poisson;

Λύση

Υποθέτουμε ότι X ο αριθμός των σφαλμάτων σε 4 σελίδες και η τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί την κατανομή Poisson, άρα ισχύει ότι: 0,75 σφάλματα σε κάθε σελίδα σημαίνει ότι έχουμε 3 σφάλματα σε 4 σελίδες.

Άρα:

$$\begin{aligned} P(X \geq 2) &= 1 - P(X < 2) = 1 - P(X \leq 1) = \\ &= 1 - P(X = 0) - P(X = 1) = \\ &= 1 - \frac{e^{-3}3^{x=0}}{0!} - \frac{e^{-3}3^{x=1}}{1!} = 0.8008 \end{aligned}$$

Παράδειγμα 24

Στο διάστημα 15/1/1999 – 31/12/1999 οι ημερήσιες μεταβολές στις τιμές κλεισίματος του γενικού δείκτη του ΧΑ υψηλότερες του 5% ήταν 8 ή πιθανότητα 0.033 ανά ημέρα. Ζητάμε την πιθανότητα να εμφανιστεί μια μόνο μεταβολή μεγαλύτερη του 5%. Θα είναι, λοιπόν:

$$P(X=r)=\frac{e^{-\mu}\mu^{r}}{r!}$$

$$P(X=1)=\frac{e^{-8}8^{1}}{1!}=0.002684$$

Η πιθανότητα να παρατηρήσουμε τουλάχιστον τρεις ανόδους στην τιμή κλεισίματος κατά 3% το επόμενο έτος βρίσκεται εάν υπολογίσουμε για X=0, X=1 και X=2, προσθέσουμε και αφαιρέσουμε από τη μονάδα. Αναλυτικότερα:

$$P(X=0)=\frac{e^{-8}8^{0}}{0!}=0.000335$$
$$P(X=1)=\frac{e^{-8}8^{1}}{1!}=0.002684$$
$$P(X=2)=\frac{e^{-8}8^{2}}{2!}=0.010735$$
$$P(X\geq 3)=1-[P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)]=1-0.013754=0.9826$$

Δηλαδή, η πιθανότητα να παρατηρηθούν τουλάχιστον τρεις μεταβολές κατά 5% και υψηλότερες στις τιμές κλεισίματος του γενικού δείκτη του ΧΑ το επόμενο έτος, ισούται με 98.26%. {Παρατήρηση: το επόμενο έτος, 2000, σημειώθηκαν ακριβώς 5 ημέρες με μεταβολή στην τιμή κλεισίματος του γενικού δείκτη του ΧΑ μεγαλύτερη ή ίση του 5%}.

1.2.7 Συνεχείς κατανομές

- **Η Κανονική Κατανομή**

Έστω, $g(x)=e^{-\frac{x^2}{2}},-\infty<x<\infty$. Για να κανονικοποιήσουμε την g ώστε να αντιπροσωπεύει πυκνότητα, θα πρέπει να υπολογίσουμε το αόριστο ολοκλήρωμα της παράστασης δεξιά του ίσον, από το οποίο προκύπτει ότι $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=\sqrt{2\pi}$. Η πυκνότητα αυτή είναι γνωστή ως *τυπική κανονική πυκνότητα*, δηλαδή: $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}},-\infty<x<+\infty$, η οποία είναι προφανώς συμμετρική και, συνεπώς, ισχύει: $F(-x) = 1 - F(x)$, $-\infty<x<+\infty$.

Έστω, X μια τυχαία μεταβλητή που έχει τυπική κανονική πυκνότητα και έστω, $Y = \mu + \sigma X$, με $\sigma>0$. Αποδεικνύεται ότι η πυκνότητα της Y, έστω g, δίνεται από τη σχέση: $g(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}},-\infty<y<\infty$. Η πυκνότητα αυτή ονομάζεται *κανονική πυκνότητα* με μέσο μ και διακύμανση σ^2. Η αντίστοιχη συνάρτηση κατανομής F, είναι:

$$P(Y \le y) = P(\mu + \sigma X \le y) = P(X \le \frac{y-\mu}{\sigma}) = F(\frac{y-\mu}{\sigma})$$

και εάν η Y *κατανέμεται όπως η* $n(\mu,\sigma^2)$ *και* $a \le b$,

τότε θα είναι: $P(a \le Y \le b) = F(\frac{b-\mu}{\sigma}) - F(\frac{a-\mu}{\sigma})$.

Ας υποθέσουμε, για παράδειγμα, ότι η Y ακολουθεί την κατανομή $n(1, 4)$ και έστω ακόμα ότι $a = 0$ και $b = 3$. Τότε, από τον πίνακα της τυπικής κανονικής συνάρτησης κατανομής θα έχουμε:

$$P(0 \le Y \le 3) = F(1) - F(-1/2) = F(1) - [1 - F(1/2)] = 0.8413 - 0.3085 = 0.5328.$$

Ιδιότητες κανονικής κατανομής

Το πεδίο ορισμού της κανονικής κατανομής, θεωρητικά, είναι ολόκληρο το σύνολο των πραγματικών αριθμών, παρόλ' αυτά το μεγαλύτερο πλήθος των τιμών της βρίσκεται σε ένα διάστημα μεταξύ (μ–3σ, μ+3σ). Το πεδίο τιμών της κατανομής είναι $(0, \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}})$.

Η συνάρτηση της κανονικής κατανομής είναι αύξουσα για μικρές τιμές της μ ($x < \mu$) και φθίνουσα για μεγαλύτερές της ($x > \mu$). Για $x = \mu$ παρουσιάζει τη μέγιστη τιμή της (= $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$).

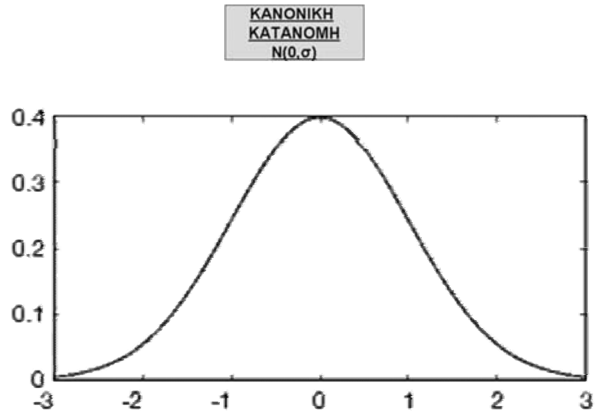
Η κωδωνοειδής καμπύλη της κανονικής κατανομής είναι κοίλη στο διάστημα ($\mu - \sigma$, $\mu + \sigma$) και κυρτή στο προηγούμενο και στο επόμενό του. Παρουσιάζει δύο σημεία καμπής που απέχουν ίσες αποστάσεις σ, δεξιά και αριστερά. Με άλλα λόγια, *όσο μεγαλώνει η διακύμανση της κατανομής, τόσο μεγαλώνει το εύρος στο οποίο αυτή είναι κοίλη (δηλαδή πιο πλατύκυρτη) και, ακόμα, τόσο ελαττώνεται το μέγιστό της. Αντίστροφα, όσο μικρότερη είναι η διακύμανση της κατανομής τόσο αυξάνεται η αιχμηρότητά της.*

Η επικρατέστερη τιμή της κανονικής κατανομής είναι η $x = \mu$ ως προς την οποία είναι και συμμετρική και, συνεπώς, ο συντελεστής ασυμμετρίας της ισούται με το μηδέν, ενώ ο συντελεστής κύρτωσης ισούται με 3 (μεσόκυρτη).

Το εμβαδόν κάτω από την κωδωνοειδή καμπύλη, μεταξύ της μέσης τιμής της κατανομής και δοθέντος αριθμού τυπικών αποκλίσεων αριστερά (ή δεξιά) της μέσης τιμής της κατανομής, είναι το ίδιο ανεξάρτητα από τις τιμές της μέσης τιμής και της τυπικής απόκλισης.

Σε κάθε μεταβολή των παραμέτρων μ και σ, η συνάρτηση πυκνότητας μας δίνει μια οικογένεια από καμπύλες κανονικής κατανομής, με αποτέλεσμα να πρέπει να υπολογίζουμε ένα νέο ολοκλήρωμα της συνάρτησης πυκνότητας, που είναι πολύ δύσκολο. Για τον λόγο αυτό, χρησιμοποιούμε την τυπική τυχαία μεταβλητή $Z = \frac{x-\mu}{\sigma}$, που ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή μηδέν και διακύμανση τη μονάδα. Το γράφημα της συνάρτησης πυκνότητας λέγεται *τυποποιη-*

μένη κανονική καμπύλη. Από τους αντίστοιχους πίνακες μπορούμε να υπολογίσουμε την περιοχή κάτω από αυτή την καμπύλη για τιμές από 0 έως z, όπου $0 \le z \le 3.99$ (άλλοι πίνακες δίνουν τιμές από το –4 έως το +4).



Ο έλεγχος για την κανονικότητα μιας σειράς μπορεί να γίνει και με τη στατιστική JB, όπου κάτω από τη μηδενική υπόθεση κατανέμεται με τη χ^2 με 2 βαθμούς ελευθερίας:

$$JB = n\left[\frac{S^2}{6} - \frac{(K-3)^2}{24}\right]$$

Παράδειγμα 25
Η υπόθεση της αποτελεσματικής αγοράς και το υπόδειγμα του τυχαίου περιπάτου

Στο παράδειγμα αυτό θα συζητήσουμε την υπόθεση της ανεξαρτησίας και της ισονομίας (ταυτονομίας) στο πλαίσιο της χρηματοοικονομικής και συγκεκριμένα στη θεωρία των αποτελεσματικών αγορών, αφού πρώτα δώσουμε τους απαραίτητους ορισμούς.

Ορίζουμε *πείραμα τύχης* τον μηχανισμό εκείνο, όπου (i) όλα τα δυνατά αποτελέσματα του πειράματος είναι γνωστά εκ των προτέρων (δειγματικός χώρος), αλλά (ii) σε κάθε επανάληψη του πειράματος το αποτέλεσμα δεν είναι γνωστό από πριν και (iii) οι συνθήκες κάτω από τις οποίες επαναλαμβάνεται το πείραμα είναι όμοιες (*συνθήκη ταυτονομίας (ή ομοκατανομής)* –ο χώρος πιθανοτήτων μένει ο ίδιος– και *συνθήκη ανεξαρτησίας* –το αποτέλεσμα από κάθε επανάληψη του πειράματος δεν εξαρτάται από τα προηγούμενα αποτελέσματα του πειράματος). Σύμφωνα με τα παραπάνω, ένα σύνολο ανεξάρτητων και ταυτόνομων δοκιμών θα ονομάζεται *τυχαίο δείγμα*. Συνεπώς, ο *στατιστικός χώρος* αποτελείται από τον χώρο των πιθανοτήτων και το τυχαίο δείγμα.

Τυχαία μεταβλητή X σε έναν χώρο πιθανότητας θα είναι μια συνάρτηση X με πεδίο ορισμού τα δυνατά αποτελέσματα του πειράματος (Ω) και πεδίο τιμών ένα πεπερασμένο ή αριθμήσιμα άπειρο υποσύνολο των πραγματικών αριθμών, η οποία έχει την ιδιότητα το $\{\omega: X(\omega) = x_i\}$. Δηλαδή, σε κάθε στοιχείο (ω) του δειγματικού χώρου (Ω) θα πρέπει να αντιστοιχεί μια μόνο τιμή (x_i), της τυχαίας μεταβλητής X.

Η συνθήκη της ανεξαρτησίας σημαίνει ότι η συνδιακύμανση μεταξύ δύο διαδοχικών παρατηρήσεων είναι μηδέν. Η συνθήκη της ταυτονομίας θέτει ότι κάθε αλλαγή έχει τον ίδιο τύπο κατανομής πιθανότητας με τις ίδιες παραμέτρους, δηλαδή ίδιους μέσους και διακυμάνσεις.

Η υπόθεση της ανεξαρτησίας είναι σημαντική στη χρηματοοικονομική ανάλυση. Κατ' αρχάς, εάν οι αποδόσεις των περιουσιακών στοιχείων, που είναι τυχαίες μεταβλητές, μπορούν να θεωρηθούν ανεξάρτητες παρατηρήσεις, τότε οι τυχαίες αυτές μεταβλητές προέρχονται από έναν κανονικό πληθυσμό $N(\mu, \sigma^2)$. Συνεπώς, μπορούμε να έχουμε εκτίμηση της μέσης τιμής μ και της διακύμανσης σ^2 από δείγμα ιστορικών δεδομένων και να χρησιμοποιήσουμε την πληροφορία αυτή για τη δημιουργία της κατανομής για την αυριανή μεταβολή της τιμής του περιουσιακού στοιχείου.

Ύστερα, οι ανεξάρτητες παρατηρήσεις έχουν μια ενδιαφέρουσα ιδιότητα, η οποία απλοποιεί και διευκολύνει την ανάλυση: η από κοινού τους κατανομή είναι, απλά, το γινόμενο των οριακών τους κατανομών.

Τέλος, υπάρχουν ικανοί οικονομικοί λόγοι που μας κάνουν να πιστεύουμε ότι η υπόθεση αυτή αποτελεί μια καλή προσέγγιση της πραγματικότητας. Η υπόθεση της αποτελεσματικότητας της αγοράς (efficient market hypothesis) θέτει ότι κάθε διαθέσιμη πληροφορία είναι ενσωματωμένη άμεσα και πλήρως στα τρέχοντα επίπεδα τιμών. Συνεπώς, κάθε μεταβολή των τιμών οφείλεται στην είσοδο νέας πληροφορίας στην αγορά, η οποία δεν είναι προβλέψιμη (ειδάλλως, δεν θα ήταν *νέα* πληροφορία). Αυτό σημαίνει ότι οι μεταβολές στις τιμές των περιουσιακών στοιχείων δεν μπορεί να είναι προβλέψιμες και, συνεπώς, ο ορισμός για πραγματικά τυχαίες μεταβλητές επαληθεύεται. Αν και ο ορισμός αυτός δεν μπορεί να είναι απόλυτα αληθής σε κάθε περίπτωση, πάντως, προσφέρεται ως μια ικανοποιητική εξήγηση της συμπεριφοράς των χρηματοοικονομικών τιμών. Η υπόθεση αυτή είναι γνωστή ως θεωρία τυχαίου περιπάτου, που σημαίνει ότι η δεσμευμένη (υπό συνθήκη) κατανομή των αποδόσεων εξαρτάται μόνο από τα τρέχοντα επίπεδα τιμών και όχι από τις ιστορικές τιμές. Η υπόθεση αυτή είναι αντίθετη με την υπόθεση των τεχνικών αναλυτών, ότι δηλαδή οι ιστορικές τιμές μπορούν να προβλέψουν τις μελλοντικές, κάτω από προϋποθέσεις. Βέβαια, οι κατανομές των χρηματοοικονομικών αποδόσεων, συνήθως, παρουσιάζουν μακριές ουρές. Επίσης, οι διακυμάνσεις δεν είναι σταθερές και επιδεικνύουν εμμονή. Ακόμα, οι αναμενόμενες αποδόσεις δεν παρουσιάζουν σταθερότητα στον χρόνο.

Άσκηση Αυτοαξιολόγησης 2/Κεφάλαιο 1

Εξηγήστε τις ιδιότητες της ανεξαρτησίας και ταυτονομίας των χρηματοοικονομικών αποδόσεων. Ανατρέξτε στο προηγούμενο παράδειγμα, καθώς και στο Παράρτημα στο τέλος του κεφαλαίου.

Παραδείγματα

1. Να υπολογιστεί η πιθανότητα $P(Z \leq 1.74)$. Σε πίνακα της τυποποιημένης κανονικής κατανομής βρίσκουμε την τιμή 1.7 στην αριστερή κολώνα και κινούμαστε κατά μήκος της γραμμής αυτής μέχρι να συναντήσουμε την κολώνα 0.04. Στην τομή της γραμμής 1.7 και της στήλης 0.04 βρίσκεται η τιμή 0.9591. Συνεπώς, $P(Z \leq 1.74) = 0.9591$.
2. Να υπολογιστεί η πιθανότητα $P(-1.97 \leq Z \leq 0.86) = F(0.86) - F(-1.97) = 0.8051 - 0.0244 = 0.7807$. Να σημειωθεί ότι $\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$, δηλαδή $\Phi(-1.97) = 1 - \Phi(1.97) = 1 - 0.9756 = 0.0244$.
3. Να υπολογιστεί η πιθανότητα $P(Z \geq 3) = 1 - \Phi(3) = 1 - 0.99865 = 0.00135$.
4. Να υπολογιστεί η τιμή του k, έτσι ώστε $P(Z > k) = 0.3015 = 1 - \Phi(k) \Leftrightarrow \Phi(k) = 0.6985$, όπου από τον πίνακα προκύπτει ότι $k = 0.52$ (γραμμή 0.5 και στήλη 0.02).
5. Η τυχαία μεταβλητή Χ ακολουθεί την κανονική κατανομή με $\mu = 50$ και $\sigma = 10$. Να υπολογιστεί η πιθανότητα η τυχαία μεταβλητή X να πάρει τιμή στο διάστημα μεταξύ 45 και 62. Υπολογίζουμε τις τιμές z_1 και z_2 της τυχαίας μεταβλητής Z: $z_1 = \frac{45-50}{10} = -0.5$, $z_2 = \frac{62-50}{10} = 1.2$, που αντιστοιχούν στις τιμές $x_1 = 45$ και $x_2 = 62$, αντίστοιχα. Συνεπώς, $P(45 < X < 62) = P(-0.5 < X < 1.2) = P(Z < 1.2) - P(Z < -0.5) = 0.8849 - 0.3085 = 0.5764$.
6. Η τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί την κανονική κατανομή με $\mu = 40$ και $\sigma = 6$. Να υπολογιστεί η τιμή της x που έχει (α) το 45% της επιφάνειας κάτω από την κανονική καμπύλη αριστερά της και (β) το 14% της επιφάνειας της κανονικής καμπύλης δεξιά της.

   (α) $P(Z<k) = 0.45 \Leftrightarrow k = -0.13$. Συνεπώς, $x = 6(-0.13) + 40 = 39.22$ (αφού $Z = \frac{x-\mu}{\sigma} \Leftrightarrow x = \sigma z + \mu$).

   (β) $P(Z<k) = 0.86 \Leftrightarrow k = 1.08$. Συνεπώς, $x = 6(1.08) + 40 = 4648$.

Παράδειγμα 26

Έστω ότι το ύψος των δανείων που χορηγεί μια τράπεζα είναι κατά μέσο όρο ύψους € 20,000 με τυπική απόκλιση € 5,000. Υποθέτοντας ότι, η κατανομή των δανείων είναι κανονική, τότε το 68% τον χορηγούμενων δανείων κυμαίνονται από 20,000–5,000 = € 15,000 μέχρι και 20,000+5,000 = € 25,000.

Παράδειγμα 27

Σε συνέχεια του προηγούμενου παραδείγματος, αν θέλουμε να υπολογίσουμε την πιθανότητα ένας νέος δανειολήπτης να αιτηθεί για τη λήψη δανείου ύψους λιγότερων από € 20,000, τότε υπολογίζουμε την τιμή Z η οποία είναι:

$$Z=(20{,}000–20{,}000)/5{,}000=0$$

Λόγω του ότι η πιθανότητα του δανείου να είναι μικρότερο από €20,000 ισούται με την πιθανότητα της τιμής Z να είναι μικρότερη του μηδενός, δηλαδή $P(X<20) = P(Z<0)$, από τον πίνακα της τυποποιημένης κανονικής κατανομής βρίσκουμε την πιθανότητα η τιμή Z να είναι μικρότερη από 0. Ο Πίνακας της κατανομής Z μας δείχνει την πιθανότητα μιας τυποποιημένης κανονικής μεταβλητής να εμφανίζει τιμή μεγαλύτερη από την τιμή Z που υπολογίζουμε βάσει του προαναφερθέντος τύπου. Στην περίπτωση του παραδείγματός μας, πρέπει να βρούμε την πιθανότητα που βρίσκεται στη νοητή τομή της τιμής 0 της πρώτης στήλης και της τιμής 0 της πρώτης γραμμής και να την αφαιρέσουμε από το 1. Η πιθανότητα αυτή είναι 0.5 (50% δηλαδή), μία απάντηση αναμενόμενη φυσικά αφού εξαρχής γνωρίζαμε ότι η κατανομή των δανείων είναι κανονική με μέσο € 20,000, οπότε το 50% των παρατηρήσεων έχουν τιμή μικρότερη από € 20,000 και το 50% των παρατηρήσεων έχουν τιμή μεγαλύτερη από € 20,000.

Παράδειγμα 28

Ας εξετάσουμε μία άλλη περίπτωση, λίγο πιο σύνθετη. Έστω ότι θέλουμε να υπολογίσουμε την πιθανότητα, ο επόμενος δανειολήπτης να αιτηθεί για τη λήψη δανείου ύψους μεταξύ € 20,000 και € 24,000. Για την τιμή € 20,000, η αντίστοιχη τιμή Z είναι μηδέν, ενώ για τιμή € 24,000, η αντίστοιχη τιμή Z είναι $X=(24{,}000–20{,}000)/5{,}000 = 0.8$. Επομένως, $P(20<X<24) = P(0<Z<0.8) = 0.5 - 0.2119 = 0{,}2881$ ή 28.82%. Η τιμή αυτή βρίσκεται ως εξής: Η πιθανότητα της τιμής Z να βρίσκεται μεταξύ 0 και 0.8 είναι ίση με την πιθανότητα η τιμή Z να είναι μεγαλύτερη από 0.5 μείον την πιθανότητα η τιμή Z να είναι μεγαλύτερη από 0.8. Η τομή της πρώτης στήλης και της πρώτης γραμμής για τις τιμές 0 και 0 είναι 0.5, ενώ η τομή της πρώτης στήλης και της πρώτης γραμμής για τις τιμές 0.8 και 0 είναι 0.2119.

Παράδειγμα 29

Αν επιθυμούμε να υπολογίσουμε μία πιθανότητα η τιμή Z να είναι μεγαλύτερη από μία αρνητική τιμή, τότε υπολογίζουμε την πιθανότητα η τιμή Z να είναι μικρότερη από την αντίστοιχη θετική τιμή. Για παράδειγμα, έστω ότι επιθυμούμε να υπολογίσουμε την πιθανότητα η τιμή Z να είναι μεγαλύτερη από –1.5. Τότε, υπολογίζουμε την πιθανότητα η τιμή Z να είναι μικρότερη από 1.5, άρα 1–0.0668 ή 93.32%.

Επίσης, στην περίπτωση που θέλουμε να υπολογίσουμε μία τιμή Z να είναι μικρότερη από μία αρνητική τιμή, τότε υπολογίζουμε την πιθανότητα η τιμή να είναι μεγαλύτερη από την αντίστοιχη θετική τιμή.

Δραστηριότητα 31/Κεφάλαιο 1

Η κατανομή των ετήσιων αποδόσεων ενός μετοχικού χαρτοφυλακίου κατανέμεται κανονικά με αναμενόμενη αξία 40 εκατ.€ και κίνδυνο (τυπική απόκλιση) 16 εκατ.€. Να υπολογίσετε την πιθανότητα να είναι η αξία του χαρτοφυλακίου, το επόμενο έτος, μεταξύ 39 εκατ.€ και 43 εκατ.€.

Την απάντηση θα βρείτε στο Παράρτημα, στο τέλος του κεφαλαίου

Δραστηριότητα 32/Κεφάλαιο 1

Οι αποδόσεις μιας μετοχής κατανέμονται κανονικά. Η μέση τιμή των αποδόσεων και η τυπική απόκλιση (κίνδυνος αποδόσεων) είναι, αντίστοιχα, 10% και 21%. Θέλουμε να υπολογίσουμε την πιθανότητα οι αποδόσεις του επομένου έτους να κυμαίνονται μεταξύ 15% και 25%.

Την απάντηση θα βρείτε στο Παράρτημα, στο τέλος του κεφαλαίου.

Κεντρικό Οριακό Θεώρημα

Η βάση της υπόθεσης ότι οι τυχαίες μεταβλητές κατανέμονται κανονικά βρίσκεται στο κεντρικό οριακό θεώρημα (κ.ο.θ.).

Έστω οι τυχαίες μεταβλητές X_1, X_2, ..., X_n, οι οποίες είναι ανεξάρτητες και ομοκατανεμημένες με μέσο μ και διακύμανση σ^2. Έστω η τυχαία μεταβλητή $\bar{X} = (X_1 + X_2 + ... + X_n)/n$. Η κατανομή της:

$$\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}},$$

τείνει να ακολουθεί την κανονική κατανομή όσο $n \to \infty$.

Το κ.ο.θ. μας λέει ότι ακόμα και εάν οι κατανομές n τυχαίων μεταβλητών είναι άγνωστες, η κατανομή του αθροίσματος ανεξάρτητων, ομοκατανεμημένων τυχαίων μεταβλητών, προσεγγίζει την κανονική κατανομή (υπό την προϋπόθεση ότι υπάρχει μεγάλο πλήθος τυχαίων μεταβλητών στο άθροισμα), με μέση τιμή $n\mu$ και διακύμανση $n\sigma^2$.

- **Λογαριθμοκανονική κατανομή (lognormal distribution)**

Σε πολλά οικονομικά φαινόμενα, οι τιμές της συνεχούς τυχαίας μεταβλητές δεν ακολουθούν την κανονική κατανομή, ακολουθούν όμως οι λογάριθμοι των τιμών των μεταβλητών αυτών (π.χ. οι αποδόσεις πολλών χρηματοοικονομικών περιουσιακών στοιχείων). Θα λέμε ότι η συνεχής τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί τη λογαριθμική κανονική κατανομή, εάν η τυχαία μεταβλητή $Y = \ln(X)$ ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέσο μ και τυπική απόκλιση σ. Η συνάρτηση πυκνότητας είναι:

$$f(x) = \begin{Bmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\ \sigma x} e^{-[\ln(x)-\mu]^2/(2\sigma^2)}, x \geq 0 \\ 0, \qquad\qquad x < 0 \end{Bmatrix}.$$

Η μέση τιμή και η διακύμανση δίνονται, αντίστοιχα:

$$E(X) = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}} \text{ και } Var(X) = e^{2\mu+\sigma^2}(e^{\sigma^2} - 1).$$

Η λογαριθμοκανονική κατανομή χρησιμοποιείται όταν θέλουμε να περιγράψουμε μια κατανομή συχνοτήτων που εμφανίζουν θετική ασυμμετρία, όπως οι αποδόσεις των μετοχών, η κατανομή μισθών, η κατανομή εισοδημάτων κ.ά., που δεν μπορούν να έχουν αρνητικές τιμές.

Δραστηριότητα 33/Κεφάλαιο 1

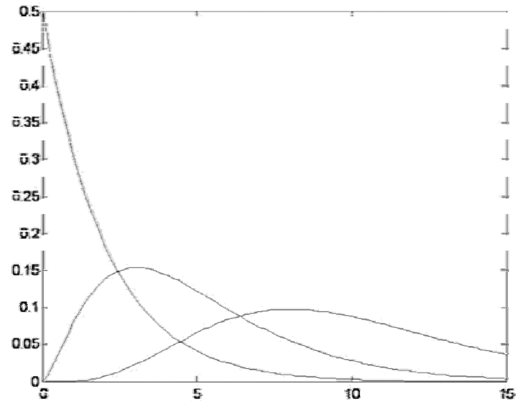
Για μια λογαριθμοκανονική μεταβλητή X γνωρίζουμε ότι ln(X) ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή μηδέν και τυπική απόκλιση 0.2. Να υπολογίσετε την αναμενόμενη τιμή της X.

Την απάντηση θα βρείτε στο Παράρτημα, στο τέλος του κεφαλαίου.

- **Κατανομή χ^2**

Θεωρούμε ν κανονικοποιημένες μεταβλητές, δηλαδή η καθεμιά από αυτές ως μεταβλητή μόνη της ακολουθεί την κανονική κατανομή, τότε θέτουμε την ποσότητα $Z = \sum_{k=1}^{n} z_k^2$ όπου αυτή είναι η κατανομή X^2 με ν βαθμούς ελευθερίας που έχει ασυμμετρία που εξαρτάται από το ν, έχει μέση τιμή ν και διακύμανση 2ν και είναι γραμμική ως προς σταθερούς συντελεστές:

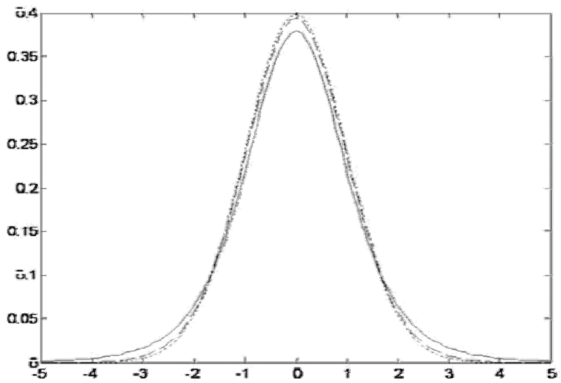
ΚΑΤΑΝΟΜΗ
Chi - Square



- **Κατανομή t**

Αν θεωρήσουμε τη Z_1 κανονικοποιημένη και τη Z_2 να κατανέμεται κατά χ^2 με $\varkappa$ βαθμούς ελευθερίας και ανεξάρτητη από τη Z_1 τότε ορίζουμε την t – κατανομή με γενικό τύπο $N_t = \dfrac{Z_1}{\sqrt{\dfrac{Z_2}{k}}}$, με $\varkappa$ βαθμούς ελευθερίας, με μέση τιμή 0 και διακύμανση $\varkappa/\varkappa$–2.

ΚΑΤΑΝΟΜΗ
t



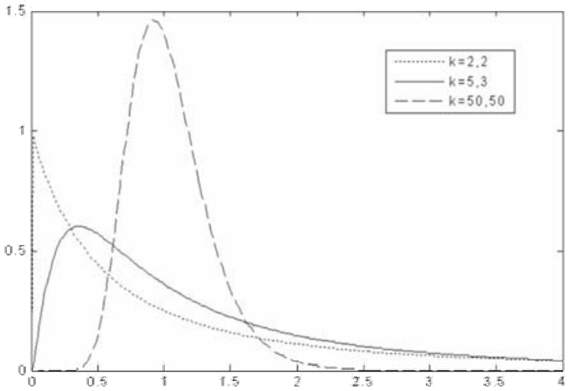
- **Κατανομή F**

Θεωρούμε δύο μεταβλητές τη Z_1 και τη Z_2 να ακολουθούν τη χ^2 με k_1 και k_2 βαθμούς ελευθερίας αντίστοιχα, τότε ορίζουμε την F – κατανομή με γενικό τύπο:

$$F = \frac{Z_1 / k_1}{Z_2 / k_2}$$

Η κατανομή έχει δεξιά ασυμμετρία, έχει μέση τιμή $E = \dfrac{k_2}{k_2 - 2}$ και διακύμανση $Var = \dfrac{2k_2^2(k_1 + k_2 - 2)}{k_1(k_2 - 2)^2(k_2 - 4)}$.

ΚΑΤΑΝΟΜΗ F



Ενότητα 1.3

ΕΠΑΓΩΓΙΚΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ: ΕΚΤΙΜΗΤΙΚΗ, ΔΙΑΣΤΗΜΑΤΑ ΕΜΠΙΣΤΟΣΥΝΗΣ ΚΑΙ ΕΛΕΓΧΟΣ ΥΠΟΘΕΣΕΩΝ

Η Συμπερασματική στατιστική περιλαμβάνει την εκτιμητική (εκτίμηση παραμέτρων), τα διαστήματα εμπιστοσύνης (κατασκευή διαστημάτων που περιέχουν με μεγάλη πιθανότητα μια άγνωστη παράμετρο) και τον έλεγχο στατιστικών υποθέσεων, όπου γίνεται ο έλεγχος των ισχυρισμών για τις άγνωστες παραμέτρους. Η επαγωγική στατιστική, μελετώντας διάφορα χαρακτηριστικά ενός αντιπροσωπευτικού δείγματος, προσπαθεί να γενικεύσει στον πληθυσμό από τον οποίο προέρχεται το δείγμα και διαιρείται σε δύο βασικές περιοχές: την *εκτίμηση των παραμέτρων του πληθυσμού* και τον *έλεγχο υποθέσεων*. Στο Κεφάλαιο αυτό θα παρουσιάσουμε σύντομα τα βασικά σημεία της επαγωγικής στατιστικής, αφού πρώτα δώσουμε τις βασικές έννοιες και ορισμούς.

1.3.1 Τυχαίο δείγμα, κατανομή δείγματος και συνάρτηση πιθανοφάνειας

΄Εστω ένας πληθυσμός που περιγράφεται από την τυχαία μεταβλητή X και έχει συνάρτηση πιθανότητας (ή πυκνότητας εάν η τυχαία μεταβλητή είναι συνεχής) $f(x)$. Από τον πληθυσμό αυτό παίρνουμε τυχαίο δείγμα μεγέθους n παρατηρήσεων: $x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, ..., x_n^{(1)}$ και επαναλαμβάνουμε τον ίδιο μηχανισμό επιλογής δείγματος m φορές: $x_1^{(2)},x_2^{(2)},...,x_n^{(2)}$, ..., $x_1^{(m)},x_2^{(m)},...,x_n^{(m)}$. Από κάθε δείγμα (το $1^{ο}$, το $2^{ο}$, το $3^{ο}$, ... το m–ιοστό δείγμα), παίρνουμε την πρώτη παρατήρηση $(x_1^{(1)},x_1^{(2)},...x_1^{(m)})$ το σύνολο των οποίων ορίζουν την τυχαία μεταβλητή X_1, με συνάρτηση πιθανότητας ή συνάρτηση πυκνότητας $f_1(x_1)$. Επαναλαμβάνουμε την ίδια διαδικασία για όλες τις παρατηρήσεις των δειγμάτων και, έτσι, ορίζουμε τις τυχαίες μεταβλητές X_2: $(x_2^{(1)},x_2^{(2)},...x_2^{(m)})$, ..., X_n: $(x_n^{(1)},x_n^{(2)},...x_n^{(m)})$ με αντίστοιχες συναρτήσεις $f_2(x_2)$, ..., $f_n(x_n)$.

΄Ετσι, ορίζουμε δείγμα τυχαίων μεταβλητών X_1, X_2, ..., X_n. Σύμφωνα με τον ορισμό του πειράματος τύχης, θα λέμε ότι το δείγμα των τυχαίων μεταβλητών X_1, X_2, ..., X_n είναι τυχαίο δείγμα εάν ικανοποιούνται οι συνθήκες της ανεξαρτησίας και της ταυτονομίας (ή ομοκατανομής):

$f(x_1, x_2, ..., x_n) = f_1(x_1).\, f_2(x_2).\, ...\, f_n(x_n) = \prod_{i=1}^{n} f\,(x_i)$ – ανεξαρτησία και

$$f_1(x_1) = f_2(x_2) = \ldots\ldots = f_n(x_n) = f(x) \text{ – \underline{ομοκατανομή}}$$

αντίστοιχα, όπου $f(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n)$ είναι η από κοινού συνάρτηση πιθανότητας (ή πυκνότητας) των τυχαίων μεταβλητών $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

Αν υποθέσουμε ότι η συνάρτηση πυκνότητας εξαρτάται από τις παραμέτρους θ_i, $i = 1, 2, \ldots, \lambda$, του πληθυσμού, τότε η συνάρτηση πυκνότητας του πληθυσμού θα είναι $f(x \mid \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_\lambda)$, δηλαδή η συνάρτηση πυκνότητας παίρνει τιμές υπό τον περιορισμό ότι οι τιμές των παραμέτρων θ_i είναι δοσμένες. Το θ ονομάζεται άγνωστη παράμετρος και έχει τιμή σε κάποιο (γνωστό) σύνολο Θ που λέγεται παραμετρικός χώρος. Η παρακάτω συνάρτηση είναι γνωστή ως *συνάρτηση πιθανοφάνειας*, που μας επιτρέπει να πάρουμε δείγμα ως συνάρτηση των τιμών των παραμέτρων θ_i, $i = 1, 2, \ldots, \lambda$:

$$f(x_1, x_2, \ldots. x_n / \theta_1, \theta_2, \ldots. \theta_\lambda) = f(x_1 / \theta_1, \theta_2, \ldots. \theta_\lambda) f(x_2 / \theta_1, \theta_2, \ldots. \theta_\lambda) \ldots. f(x_n / \theta_1, \theta_2, \ldots. \theta_\lambda) =$$

$$= \prod_{i=1}^{n} f(x_i / \theta_1, \theta_2, \ldots. \theta_\lambda)$$

Έτσι, η τυχαία μεταβλητή είναι αυτή που μας δίνει τη δυνατότητα, παραμένοντας στον ίδιο χώρο πιθανότητας, να εκφράσουμε όλα τα δυνατά αποτελέσματα του πειράματος με αριθμούς. Αν οι τιμές που παίρνει η τυχαία μεταβλητή X είναι οποιοσδήποτε πραγματικός αριθμός σε ένα διάστημα [α, β] ή (α, β), τότε αυτή θα λέγεται *συνεχής τυχαία μεταβλητή*. Αν οι τιμές της είναι ένας αριθμός από κάποιο πεπερασμένο διακεκριμένων αριθμών, θα λέγεται *διακριτή τυχαία μεταβλητή* και, αν οι τιμές της είναι από κάποιο άπειρο σύνολο αριθμήσιμο, θα λέγεται *απαριθμητή τυχαία μεταβλητή*. Ακόμα, μια τυχαία μεταβλητή X θα λέγεται *συμμετρική τυχαία μεταβλητή* αν η $+X$ και η $-X$ έχουν την ίδια συνάρτηση κατανομής.

Εκτιμητής $g(\theta)$ είναι μια συνάρτηση $T(X)$ του δείγματος $X = (x_1, x_2, x_3 \ldots. x_n)$, η οποία δεν πρέπει να περιέχει την άγνωστη παράμετρο θ. Η τιμή του εκτιμητή $T(X)$ για την παρατηρούμενη τιμή x του X ονομάζεται εκτίμηση της τιμής του $g(\theta)$.

Παράδειγμα 30

Ένα παράδειγμα στη διατύπωση της εκτιμητικής είναι το λεγόμενο exit poll. Επιλέγονται τυχαία εκλογικά τμήματα και προκύπτει το δείγμα του γενικού πληθυσμού. Έστω:

$$X_i = \begin{cases} 1 \text{ αν στο δείγμα το } i \text{ ψηφοδέλτιο είναι υπέρ του δικού μας υποψήφιου} \\ 0 \text{ αν στο δείγμα το } i \text{ ψηφοδέλτιο δεν είναι υπέρ του δικού μας υποψήφιου} \end{cases}$$

Ο αριθμός του δείγματος είναι $i = 1,2,......n$. Άρα, ένας εκτιμητής του ποσοστού θ (θετική προτίμηση στον υποψήφιό μας) στον γενικό πληθυσμό, είναι το αντίστοιχο ποσοστό θ στο δείγμα. Μια εκτίμηση του θ είναι $T = \frac{\sum X_i}{n}$, ο μέσος.

1.3.2 Κριτήρια επιλογής εκτιμητών

Θα δούμε τώρα ότι μπορούμε να πάρουμε κάποιους εκτιμητές συναρτήσεις χωρίς το θ, που οι κυριότεροι είναι το Μέσο Τετραγωνικό Σφάλμα, ο Αμερόληπτος και ο Μεροληπτικός Εκτιμητής.

Το απόλυτο σφάλμα $|T(X) - g(\theta)|$ παρότι είναι ένας φυσικός τρόπος μέτρησης της εγκυρότητας του T, δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως κριτήριο αξιολόγησής του γιατί είναι τυχαία μεταβλητή και, συνεπώς, δεν έχει συγκεκριμένη τιμή.

Ως κριτήριο μπορεί να ληφθεί το <u>Μέσο Τετραγωνικό Σφάλμα</u> (ΜΤΣ) ή αλλιώς η μέση τετραγωνική απόκλιση του εκτιμητή από την εκτιμώμενη ποσότητα $g(\theta)$ που εκφράζεται από τη σχέση:

$$\text{ΜΤΣ}(T;\theta) = E_\theta[\mathrm{T}(X) - g(\theta)]^2 .$$

Βάσει ορισμού θα λέμε ότι ένας εκτιμητής T_2 θα είναι καλύτερος του T_1 ως προς το ΜΤΣ, αν:

$$\text{ΜΤΣ}(T_2,\theta) \le \text{ΜΤΣ}(T_1,\theta) \text{ για κάθε } \theta \text{ και } \exists \theta_0 \in \Theta : \text{ΜΤΣ}(T_2,\theta_0) \prec \text{ΜΤΣ}(\mathrm{T}_1,\theta_0)$$

Τότε, ο T_1 ονομάζεται μη αποδεκτός εκτιμητής. Επίσης, λέμε έναν εκτιμητή T <u>άριστο</u> ή βέλτιστο αν είναι καλύτερος από κάθε άλλο εκτιμητή. Ισχύει ότι:

$$\text{ΜΤΣ}(T,\theta) = \mathrm{var}_\theta(T(X)) + [E_\theta(\mathrm{T}(X) - g(\theta)]^2 .$$

Διακρίνουμε τα εξής:

- Ο T λέγεται <u>Αμερόληπτος Εκτιμητής</u> (ΑΕ) του $g(\theta)$ εάν ισχύει $E_\theta(T(X)) = g(\theta)$, άρα από την παραπάνω σχέση όταν έχουμε αμερόληπτο εκτιμητή αυτή γίνεται: $\text{ΜΤΣ}(T,\theta) = \mathrm{var}_\theta(T(X))$. Αν δεν ισχύει $E_\theta(T(X)) = g(\theta)$, τότε θα λέμε ότι ο εκτιμητής είναι μεροληπτικός (παρουσιάζει συστηματικό σφάλμα) και έχουμε: $bias(\hat{\theta}) = E(\hat{\theta}) - \theta$
- Θα λέμε ότι στην κλάση των αμερόληπτων εκτιμητών, αυτός με τη μικρότερη διασπορά είναι ο Αμερόληπτος Εκτιμητής Ομοιόμορφης Ελάχιστης Διασποράς (ΑΕΟΕΔ).

Κατανομή δειγματικού μέσου και δειγματικής διακύμανσης

Κάτω από την υπόθεση της ανεξαρτησίας και ταυτονομίας του δείγματος των ν παρατηρήσεων, μπορούμε να αρχίσουμε να εκτιμάμε τις παραμέτρους που μας ενδιαφέρουν, όπως τη δειγματική μέση τιμή (αναμενόμενη απόδοση), τη διακύμανση (κίνδυνο) και τις άλλες ροπές.

Έστω $X = (x_1, x_2, x_3.....x_n)$, τυχαίο δείγμα από μια κατανομή $f(x;\theta)$ και $g(\theta) = \mu$ η μέση τιμή της κατανομής, τότε ο $\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$ είναι ο αμερόληπτος εκτιμητής του μ, με $\operatorname{var}_\theta(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$ η διασπορά δειγματικός μέσος της κατανομής. Η εκτίμηση της διακύμανσης από τις τιμές του δείγματος είναι: $s^2 = \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{X})^2$.

Είναι φανερό ότι οι τιμές των εκτιμητών εξαρτώνται από το συγκεκριμένο δείγμα και, συνεπώς, δεν μπορούν να θεωρηθούν σταθεροί. Εάν μια μεταβλητή X ακολουθεί κανονική κατανομή, η μέση τιμή του δείγματος ακολουθεί επίσης κανονική κατανομή, με μέσο μ και διακύμανση σ^2/n. Σε αντίθετη περίπτωση, σύμφωνα με το κεντρικό οριακό θεώρημα, αυτή η κατανομή ισχύει μόνο ασυμπτωτικά, δηλαδή για μεγάλα δείγματα. Ο δειγματικός μέσος κατανέμεται σύμφωνα με:

$$\bar{X} \sim X\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right).$$

Η παραπάνω σχέση δείχνει ότι όταν το μέγεθος του δείγματος αυξάνει, το τυπικό σφάλμα του δειγματικού μέσου μειώνεται με ποσοστό $1/\sqrt{n}$, με αποτέλεσμα να μεγαλώνει η ακρίβεια του εκτιμητή όσο περισσότερες παρατηρήσεις διαθέτουμε.

Το διάστημα που περιλαμβάνει την τιμή της παραμέτρου του πληθυσμού, μ, είναι $\bar{X} \pm 2\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$. Η δειγματική τυπική απόκλιση έχει κανονική κατανομή με τυπικό σφάλμα: $se(\hat{\sigma}) = \sigma\sqrt{\frac{1}{2n}}$. Η δειγματική τυπική απόκλιση θα χρησιμοποιηθεί στον έλεγχο υποθέσεων (στον παρονομαστή της τυποποιημένης κανονικής μεταβλητής ή στον παρονομαστή του ελέγχου με την κατανομή Τ όταν δεν γνωρίζουμε τη διακύμανση του πληθυσμού).

Για την κατανομή της δειγματικής διακύμανσης, μπορεί να δειχθεί ότι, όταν η X ακολουθεί την κανονική κατανομή, ο λόγος είναι:

$$\frac{(n-1)\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(n-1)}, \text{ με (n–1) βαθμούς ελευθερίας.}$$

Παράδειγμα 31

Υπολογίσαμε τις ημερήσιες αποδόσεις του γενικού δείκτη του ΧΑ στο διάστημα 15/1/1999 – 31/12/1999, δηλαδή n = 241 παρατηρήσεις. Υπολογίσαμε τη μέση ημερήσια απόδοση ίση με 0.27% και την τυπική απόκλιση (κίνδυνο) ίση με 2.33% (ημερήσια). Το τυπικό σφάλμα του δειγματικού μέσου είναι $0.00233 \big/ \sqrt{241} = 0.15\%$ και το τυπικό σφάλμα της εκτιμηθείσας διακύμανσης είναι $0.00233 \big/ \sqrt{2*241} = 0.106\%$.

Μπορούμε να κατασκευάσουμε τα διαστήματα εμπιστοσύνης:

$$\left[\bar{X} - 1.96 * se(\bar{X}),\ \bar{X} + 1.96 * se(\bar{X})\right] = [-0.024\%,\ 0.565\%]$$

$$[s - 1.96 * se(s),\ s + 1.96 * se(s)] = [2.122\%,\ 2.54\%]$$

Για να ολοκληρώσουμε τη συζήτηση εδώ, θα πρέπει να αναφέρουμε ότι δεν ελέγξαμε εάν η μέση απόδοση είναι διάφορη του μηδενός ούτε υπολογίσαμε την ακρίβεια των εκτιμητών μας. Αυτά θα γίνουν παρακάτω στον έλεγχο υποθέσεων.

1.3.3 Μέθοδοι εκτίμησης

Δύο είναι οι κύριες μέθοδοι εκτίμησης: η μέθοδος της Μέγιστης Πιθανοφάνειας και η Μέθοδος Ελαχίστων Τετραγώνων.

Εκτιμητές Μέγιστης Πιθανοφάνειας (ΕΜΠ)

Καταρχήν, όλοι οι αμερόληπτοι εκτιμητές είναι σε ένα σύνολο, μαζί και ο ΑΕΟΕΔ. Πολλές φορές όμως συμβαίνει ο ΑΕΟΕΔ να είναι είτε λογικοφανής αλλά αυθαίρετος, είτε να υπάρχει ένας μεροληπτικός μικρότερου ΜΤΣ (άρα να υπάρχει καλύτερος από αυτόν) είτε να μην υπάρχει κανένας ΑΕ (άρα και ΑΕΟΕΔ) και, τέλος, μπορεί να παίρνει και τιμές εκτός συνόλου τιμών της παραμέτρου που εκτιμά.

Ορισμός

Η συνάρτηση $L(\theta) = f(x, \theta)$ στο Θ ονομάζεται συνάρτηση Πιθανοφάνειας και ο εκτιμητής $\hat{\theta}(\mathrm{X})$ ονομάζεται εκτιμητής μέγιστης πιθανοφάνειας του θ αν για $X = x$ η τιμή $\hat{\theta}(\mathrm{X})$ ικανοποιεί τις σχέσεις:

$$\hat{\theta}(x) \in \Theta \text{ και } L[\hat{\theta}(x)] = \max L(\theta).$$

Η εκτίμηση με τη μέγιστη πιθανοφάνεια για το θ μεγιστοποιεί την L ή πολλές φορές τον λογάριθμό της ($\log L$). Μερικές βασικές ιδιότητες της εκτίμησης αυτής είναι:

1. Οι εκτιμητές μέγιστης πιθανοφάνειας είναι, υπό ορισμένες συνθήκες, συνεπείς εκτιμητές.
2. Οι εκτιμητές μέγιστης πιθανοφάνειας είναι, υπό ορισμένες συνθήκες, ασυμπτωτικά κανονικοί και αποδοτικοί εκτιμητές.
3. Παίρνουν τιμές μέσα στο σύνολο των δυνατών τιμών της παραμετρικής συνάρτησης που εκτιμούν $g(\theta)$.
4. Είναι πάντα συνάρτηση της ελάχιστης επαρκούς ΣΣ, εάν είναι μοναδικός.
5. Αν $\hat{\theta}$ είναι ΕΜΠ εκτιμητής, τότε και $g(\hat{\theta})$ είναι επίσης.
6. Για μεγάλα δείγματα οι ΑΟΕΔ και οι ΕΜΠ δίνουν ίδια εκτίμηση.

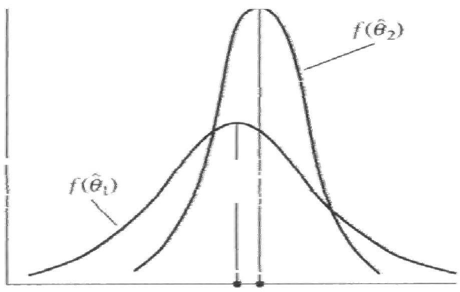
Εκτιμητής Ελαχίστων Τετραγώνων

Το <u>μέσο τετραγωνικό σφάλμα</u> (MSE) ενός εκτιμητή θ ορίζεται ως:

$$MSE(\hat{\theta}) = \mathrm{E}(\hat{\theta} - \theta)^2$$

$$\mathrm{var}(\hat{\theta}) = \mathrm{E}[\hat{\theta} - \mathrm{E}(\hat{\theta})]^2$$

Μετά από πράξεις προκύπτει ότι $MSE(\hat{\theta}) = \mathrm{var}(\hat{\theta}) + bias(\hat{\theta})$. Η ελαχιστοποίηση του MSE αποσκοπεί στην ελαχιστοποίηση ενός συνόλου κριτηρίων. Αυτό που προκύπτει είναι μια διαδικασία ελαχιστοποίησης της διακύμανσης και περιορισμού της μεροληψίας.



Παράδειγμα 32

Έστω $X = (X_1, \ldots X_n)$ ένα τυχαίο δείγμα ανεξάρτητων τ.μ. που ακολουθούν την ομοιόμορφη κατανομή U(0,θ). Τότε:

(α) να δείξετε ότι η T = 2X είναι ΑΕ για τη θ και

(β) να βρεθεί ΑΕ για την g(θ) = 2θ+5.

Λύση

(α) Αρχικά βρίσκουμε τον δειγματικό μέσο που είναι $\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{1}^{n}X_i$. Καθεμιά από αυτές τις μεταβλητές ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή δηλαδή X_i ´ $U\left(0,\theta\right)$, άρα για καθεμιά έχουμε ότι $E(X_i)=\frac{\theta}{2}$. Θεωρούμε την $T=2X$ και θα δείξουμε ότι είναι αμερόληπτος εκτιμητής. Άρα, αρκεί να δείξουμε ότι μεροληψία = 0, δηλαδή $E(T)=\theta$. Έχουμε:

$$E(2\bar{X})=2E(\bar{X})=2E(\frac{\sum_{1}^{n}X_i}{n})=\frac{2}{n}E(\sum X_i)=\frac{2}{n}\sum E(X_i)=\frac{2}{n}n\frac{\theta}{2}=\theta$$

Άρα Μεροληψία = 0.

(β) Ψάχνουμε την T εκείνη που να δίνει μηδενική μεροληψία. Θα είναι, λοιπόν:

$$E(2\bar{X})=\theta \Leftrightarrow 2E(\bar{X})=2\theta \Leftrightarrow 2E(2\bar{X})+5=2\theta+5 \Leftrightarrow$$
$$2E(2\bar{X})+5=g(\theta) \Leftrightarrow E(4\bar{X}+5)=g(\theta)$$

Άρα είναι $T(\bar{X})=4\bar{X}+5$ ο ΑΕ

Παράδειγμα 33

Έστω $X=(X_1,X_2,....X_n)$ τυχαίο δείγμα με X_i ´ $N\left(\theta,1\right)$. Να δείξετε ότι $T_1=\bar{X},T_2=\frac{1}{2}(X_1+X_2)$ είναι ΑΕ για το θ. Να συγκριθούν μεταξύ τους.

Λύση

Αρχικά ελέγχουμε αν είναι οι T_1,T_2 εκτιμητές για την $g(\theta)$ και είναι, γιατί:

$$E_{\theta_1}(\bar{X})=E(\frac{1}{n}\sum_{i}^{n}X_i)=\frac{1}{n}\sum_{1}^{n}E(X_i)=\frac{1}{n}n\theta=\theta \text{ και}$$

$$E_{\theta_2}(\frac{1}{2}X_1+X_2)=\frac{1}{2}E(X_1+X_2)=\frac{1}{2}[E(X_1)+E(X_2)]=\frac{1}{2}(\theta+\theta)=\theta$$

άρα είναι ΑΕ και οι δύο.

Γνωρίζουμε ότι ένας εκτιμητής είναι καλύτερος από έναν άλλο, δηλαδή για τους T_1,T_2, αν ισχύει ότι: $MTS(T_1,\theta)\le MTS(T_2,\theta)$ για κάποιο θ, (ιδανικό θα είναι να συγκλίνει ή να είναι 0). Επίσης, γνωρίζουμε ότι ΜΤΣ(Τ,θ) = var(θ) + bias(θ). Αλλά, είναι bias(θ) = 0 διότι είναι ΑΕ ο καθένας στην περίπτωση μας και, άρα, έχουμε:

$$MTS(T_1)=\text{var}(\bar{X})=\text{var}(\frac{1}{4}\sum_{1}^{n}X_i)=\frac{1}{4^2}\sum \text{var}(\bar{X})=\frac{1}{4}$$

και

$$MTS(T_2) = \text{var}[\frac{1}{2}(X_1 + X_2)] = \frac{1}{4}[\text{var}(X_1) + \text{var}(X_2)] = \frac{1}{2}$$

Άρα, ο T_1 καλύτερος του T_2.

Παράδειγμα 34 (ΑΕΟΕΔ)

Έστω η παράσταση $\{F(X,\theta)/\theta \in \Theta\}$. Από τη θεωρία, επειδή υποθέτουμε ανεξαρτησία και ταυτονομία, έχουμε:

$$X_i' \sim f_1(x_i;\theta) \Leftrightarrow f(\bar{x};\theta) = \prod_{\iota=1}^{n} f_1(x_i;\theta) \text{ και έπειτα τη γράφουμε αυτή ως:}$$

$$F(X,\theta) = e^{A(\theta)+B(\bar{X})+C(\theta)D(\theta)}$$

Αν ισχύει ότι (α) το S σύνολο είναι ανεξάρτητο του θ, (β) το Θ είναι ανοικτό υποσύνολο του R, (γ) η πρώτη παράγωγος του $C(\theta)$ είναι συνεχής και διάφορη του 0, τότε ο ΑΟΕΔ θα είναι η $D(\bar{X})$.

Παράδειγμα 35 (Μέγιστη Πιθανοφάνεια)

Έστω $X_1, X_2, ...X_n$ με $n \geq 2$ ένα τυχαίο δείγμα από την κανονική κατανομή $N(\mu, \sigma^2)$, τότε να βρεθούν οι ΕΜΠ των άγνωστων παραμέτρων.

$$f(x,\theta) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\theta)^2}{2\sigma^2}}$$

Λύση

Οι περιπτώσεις που συναντάμε είναι τρεις:

1η ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ όπου **var** γνωστό και **μ = θ** το άγνωστο

Έχουμε:

$$f(x,\theta) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\theta)^2}{2\sigma^2}} \text{ και επομένως είναι η συνάρτηση πιθανοφάνειας.}$$

Είναι:

$$L(\theta) = f(x,\theta) = \prod_{1}^{n} f(x,\theta) = \frac{1}{\sigma^n (2\pi)^{n/2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum(x-\theta)^2} \Leftrightarrow \text{(λογαριθμίζουμε)}$$

$$\log L(\theta) = -\frac{n}{2}\log\sigma^2 - \frac{n}{2}\log 2\pi - \frac{1}{2\sigma^2}\sum(\chi-\theta)^2 \Leftrightarrow \text{(παράγωγος)}$$
$$(\log L)' = \frac{1}{\sigma^2}\sum(\chi-\theta)$$

και επειδή το πρώτο μέλος είναι 0, έχουμε ότι:

$$\sum(x-\theta) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\theta = \bar{X} = \frac{1}{n}\sum X_i \Leftrightarrow$$
$$\hat{\theta} = \bar{X}$$

παρατηρούμε δηλαδή ότι ο ΕΜΠ του θ είναι ο ΑΟΕΔ του θ

2η ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ όπου **μ** το γνωστό και **var = θ** το άγνωστο

Προκύπτει με τον ίδιο τρόπο ότι:

$$L(\theta) = \frac{1}{\theta^{n/2}(2\pi)^{n/2}} e^{-\frac{1}{2\theta}\sum(\chi-\mu)^2} \Leftrightarrow$$
$$\log L = -\frac{n}{2}\log\theta - \frac{n}{2}\log(2\pi) - \frac{1}{2\theta}\sum(\chi-\mu)^2 \Leftrightarrow \text{(παράγωγος)}$$
$$(\log L)' = -\frac{n}{2\theta} + \frac{1}{2\theta^2}\sum(\chi-\mu)^2 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\theta = \frac{1}{n}\sum(x-\mu)^2$$

η τιμή αυτή του θ αντιστοιχεί στον ΕΜΠ, δηλαδή $\hat{\theta}(\bar{X}) = \frac{1}{n}\sum(\chi-\mu)^2$

3η ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ όπου η μέση τιμή **μ** και η διασπορά **σ** άγνωστα.

Θέτουμε $\theta = (\mu, \sigma^2)$, άρα έχουμε κατά τον ίδιο τρόπο ότι:

$$L(\theta) = \frac{1}{\sigma^n(2\pi)^{n/2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum(\chi-\mu)^2} \Leftrightarrow$$
$$\log L = -\frac{n}{2}\log\sigma^2 - \frac{n}{2}\log(2\pi) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum(\chi-\mu)^2 \Leftrightarrow \text{(παράγωγος)}$$
$$(\log L)' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \mu : \frac{1}{2\sigma^2}\sum(\chi-\mu)^2 = 0 \\ \textit{και} \\ \sigma : -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4}\sum(\chi-\mu)^2 = 0 \end{cases}$$

(προσοχή παίρνουμε παραγώγους ως προς **μ** και ως προς **σ**, γιατί το θ είναι συνδυασμός των δύο). Αυτό το σύστημα αν λυθεί δίνει τους ΕΜΠ, που είναι:

$$\hat{\theta} = (\hat{\mu}, \hat{\sigma}^2) = \begin{cases} \hat{\mu} = \bar{X} = \dfrac{\sum X_i}{n} \\ \text{και} \\ \hat{\sigma}^2 = \dfrac{\sum (X_i - \bar{X})^2}{n} \end{cases}$$

1.3.4 Έλεγχος στατιστικών υποθέσεων

Έστω ότι τυχαία μεταβλητή Χ με γνωστή PDF $f(x;\theta)$ και θ η παράμετρος κατανομής. Εάν υπάρχει ένα τυχαίο δείγμα, μπορεί να εκτιμηθεί η $\hat{\theta}$. Εάν το πραγματικό θ είναι γνωστό, ψάχνουμε να βρούμε εάν το $\hat{\theta}$ είναι συμβατό με κάποια τιμή του θ, έστω θ^*. Αλλιώς μπορεί το δείγμα να προέρχεται από την PDF $f(x;\theta) = \theta^*$. Η υπόθεση $\theta = \theta^*$ ονομάζεται μηδενική υπόθεση και συμβολίζεται με H_0. Η εναλλακτική υπόθεση, H_1, είναι ότι $\theta \neq \theta^*$. Με άλλα λόγια, η μηδενική υπόθεση είναι η υπόθεση που ελέγχουμε και θα γίνει αποδεκτή μέσα από τη διαδικασία ενός στατιστικού κριτηρίου. Η εναλλακτική είναι η υπόθεση που μπορούμε να αποδεχθούμε εάν απορριφθεί η μηδενική υπόθεση. Μια υπόθεση καλείται απλή εάν καθορίζει τις τιμές μιας κατανομής, αλλιώς καλείται σύνθετη.

Παράδειγμα 36

Εάν $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$. Η $H_0 = \mu = 15$ και $\sigma^2 = 2$ είναι μια απλή υπόθεση, ενώ η $H_0 = \mu = 15$ και $\sigma^2 > 2$ είναι μια σύνθετη υπόθεση.

Με βάση τους στατιστικούς ελέγχους μπορούμε να κάνουμε δύο ειδών σφάλματα, το πρώτο είναι να απορρίψουμε τη μηδενική υπόθεση, η οποία στην πραγματικότητα είναι αληθής (Σφάλμα Τύπου Ι) και το δεύτερο είναι να δεχτούμε τη μηδενική υπόθεση, η οποία δεν είναι αληθής (Σφάλμα Τύπου ΙΙ).

Το Σφάλμα Τύπου Ι το ονομάζουμε Έλεγχο Σημαντικότητας. Έτσι, όταν επιλέγουμε επίπεδο σημαντικότητας α=0.05 ή α=0.01, αυτό σημαίνει ότι δεχόμαστε 5% ή 1% πιθανότητα να απορρίψουμε τη μηδενική υπόθεση, ενώ αυτή στην πραγματικότητα είναι αληθής. Αντίθετα, η πιθανότητα να πέσουμε σε Σφάλμα Τύπου ΙΙ εξαρτάται από τη διαφορά μεταξύ της τιμής που θέλουμε να ελέγξουμε και της πραγματικής τιμής της παραμέτρου του πληθυσμού και συμβολίζεται με β. Όσο μεγαλύτερη είναι η απόσταση μεταξύ των δύο αυτών τιμών, τόσο μικρότερη είναι η πιθανότητα β, και αντίστροφα. Η διαφορά 1–β ονομάζεται δύναμη του κριτηρίου και εκφράζεται ως συνάρτηση των τιμών της μηδενικής και της εναλλακτικής υπόθεσης. Όσο μεγαλύτερες είναι οι τιμές της συνάρτησης 1–β, τόσο πιο δυνατό είναι το κριτήριο ελέγχου και, συνεπώς, τόσο περισσότερο αυξάνει η πιθανότητα να εξάγουμε σωστά συμπεράσματα. Ακόμα, όσο μειώνουμε την τιμή του επιπέδου σημαντικότητας α, τόσο μειώνεται το β, και αντίστροφα. Δηλαδή, οι πιθανότητες να κάνουμε σφάλμα τύπου Ι και ΙΙ μεταβάλλονται αντίστροφα.

Άσκηση Αυτοαξιολόγησης 3/Κεφάλαιο 1

Τι ονομάζουμε σφάλμα τύπου Ι και ΙΙ; Να ελέγξετε την απάντησή σας μελετώντας την προηγούμενη παράγραφο (βλ. και Παράρτημα, στο τέλος του κεφαλαίου).

΄Ελεγχος του μέσου όρου μ

Μονόπλευρος

΄Εστω $\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu > \mu_0 \end{cases}$ και $\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu < \mu_0 \end{cases}$.

Α. Εάν η <u>διακύμανση είναι γνωστή</u>, τότε σε επίπεδο σημαντικότητας α, εάν:

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} > Z_a (\mu > \mu_0) \text{ ή } Z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} < -Z_a (\mu > \mu_0) \text{ τ}$$

μπορούμε να απορρίψουμε τη μηδενική υπόθεση H_0.

Β. Εάν η <u>διακύμανση είναι άγνωστη</u>, τότε χρησιμοποιούμε την αμερόληπτη εκτίμηση αυτής: $s^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \overline{x} \right)^2}{n-1}$ και αντικαθιστούμε στο κριτήριο Ζ. Εάν το δείγμα είναι μικρό και η διακύμανση του πληθυσμού άγνωστη, χρησιμοποιούμε $t = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} > t_{n-1,2a\%}, (\mu > \mu_0)$ ή $t = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} < -t_{n-1,2a\%}, (\mu > \mu_0)$, τότε απορρίπτουμε τη μηδενική υπόθεση H_0.

Δίπλευρος

΄Εστω $\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu \neq \mu_0 \end{cases}$

Α. Η <u>διακύμανση είναι γνωστή:</u> $Z = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} > Z_{a/2}$ ή $Z = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} < -Z_{a/2}$ τότε απορρίπτουμε τη μηδενική υπόθεση H_0.

Β. Η <u>διακύμανση είναι άγνωστη:</u> $t = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} > t_{n-1,a\%}$ ή $t = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} < -t_{n-1,a\%}$ τότε απορρίπτουμε τη μηδενική υπόθεση H_0.

Δραστηριότητα 34/Κεφάλαιο 1

Το τμήμα παρακολούθησης πιστωτικού κινδύνου μιας τράπεζας έχει αναπτύξει δύο εναλλακτικές μεθόδους πρόβλεψης επισφαλών δανείων σε 12 νομούς της χώρας, στους οποίους δραστηριοποιείται. Στο τέλος του έτους, οι αρχικές προβλέψεις συγκρίθηκαν με τα πραγματικά αποτελέσματα και υπολογίστηκε ο δείκτης της απόλυτης διαφοράς των πραγματικών αποτελεσμάτων σε σχέση με τα προϋπολογισθέντα. Τα απόλυτα ποσοστά λανθασμένης πρόβλεψης για τις δύο μεθόδους ήταν:

Νομός	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Μ1	12.3	15.4	5.3	9.2	8.6	14.2	5.2	4.1	5.3	4.1	3.6	5.6
Μ2	7.3	12.1	7.4	8.1	11.3	12.3	3.1	0.6	5.5	2.8	4.3	1.7

Αν υποθέσουμε ότι τα αποτελέσματα του δείκτη και στις δύο μεθόδους ακολουθούν την κανονική κατανομή, η διοίκηση της τράπεζας επιθυμεί να μάθει αν κάποια από τις δύο μεθόδους υπερτερεί ή αν τα μέσα απόλυτα ποσοστά λάθους και των δύο μεθόδων είναι τα ίδια.

Την απάντηση θα βρείτε στο Παράρτημα, στο τέλος του κεφαλαίου.

Δραστηριότητα 35/Κεφάλαιο 1

Ο χρόνος σε μήνες καθυστέρησης αποπληρωμής σε δείγμα 30 δανείων μιας τράπεζας είναι: 1, 2, 5, 2, 5, 2, 5, 2, 5, 2, 5, 6, 5, 2, 5, 2, 5, 3, 5, 25, 5, 2 5, 2, 5, 2, 5, 2, 5, 2, 5. (α) Να υπολογίσετε μέσο, διάμεσο και γεωμετρικό μέσο. Ποια είναι η εκτίμησή σας για τον μέσο χρόνο αποπληρωμής; (β) Σε επίπεδο σημαντικότητας 5% να ελέγξετε την ισχύ της μηδενικής υπόθεσης ότι ο μέσος χρόνος καθυστέρησης αποπληρωμής των δανείων είναι 5 μήνες.

Την απάντηση θα βρείτε στο Παράρτημα, στο τέλος του κεφαλαίου.

Έλεγχος της διαφοράς των μέσων μ

Τώρα έχουμε δύο μέσους. Πάλι έχουμε τη μονόπλευρη και τη δίπλευρη περίπτωση, έχοντας τις υποπεριπτώσεις αν είναι γνωστή ή άγνωστη η διακύμανση. Είναι λοιπόν:

Μονόπλευρος

Είναι: $\begin{cases} H_0 : \mu_1 = \mu_2 \\ H_1 : \mu_1 > \mu_2 \end{cases}$ ή $\begin{cases} H_0 : \mu_1 = \mu_2 \\ H_1 : \mu_1 < \mu_2 \end{cases}$

Α. Η διακύμανση είναι γνωστή: $Z = \dfrac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{\sqrt{\dfrac{\sigma^2}{n_1} + \dfrac{\sigma^2}{n_2}}} > Z_a, \quad \mu_1 > \mu_2,$ ή

$Z = \dfrac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{\sqrt{\dfrac{\sigma^2}{n_1} + \dfrac{\sigma^2}{n_2}}} < -Z_a,\ \mu_1 < \mu_2$ τότε απορρίπτουμε τη μηδενική υπόθεση H_0.

Β. Οι δύο διακυμάνσεις είναι άγνωστες αλλά ίσες τότε:
$t = \dfrac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{s\sqrt{\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}}} > t_{n_1+n_2-2,2a\%}$ ή $t = \dfrac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{s\sqrt{\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}}} < -t_{n_1+n_2-2,2a\%}$.

Δίπλευρος

Α. Η διακύμανση είναι γνωστή: $Z = \dfrac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{\sqrt{\dfrac{\sigma^2}{n_1} + \dfrac{\sigma^2}{n_2}}} > Z_{a/2}, \quad \mu_1 > \mu_2,$ ή

$Z = \dfrac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{\sqrt{\dfrac{\sigma^2}{n_1} + \dfrac{\sigma^2}{n_2}}} < -Z_{a/2},\ \mu_1 < \mu_2$, τότε απορρίπτουμε τη μηδενική υπόθεση H_0.

Β. Οι δύο διακυμάνσεις είναι άγνωστες αλλά ίσες, τότε:
$t = \dfrac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{s\sqrt{\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}}} > t_{n_1+n_2-2,a\%}$ ή $t = \dfrac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{s\sqrt{\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}}} < -t_{n_1+n_2-2,a\%}$, τότε απορρίπτουμε τη μηδενική υπόθεση H_0.

Όπου

$$s = \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

Γ. Οι διακυμάνσεις είναι άγνωστες και άνισες
Τα δύο δείγματα πληθυσμών έχουν διακυμάνσεις άγνωστες και άνισες, όπου έστω s_1^2 και s_2^2 οι εκτιμήσεις αυτών.
Τότε:

$$t = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{\sqrt{\dfrac{s_1^2}{n_1} + \dfrac{s_2^2}{n_2}}} > t_{n_1+n_2-2,a\%}$$

Όπου απορρίπτουμε τη μηδενική υπόθεση H_0

Έλεγχος ποσοστού (ή και δύο πληθυσμών)

Μονόπλευρος

Είναι: $\begin{cases} H_0 : P = p_0 \\ H_1 : P > p_0, P < p_0 \end{cases}$

Χρησιμοποιείται η στατιστική $t = \dfrac{p - P_0}{\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}} > (<) t_{n-1,2a\%}$ και για δύο πληθυσμούς είναι: $t = \dfrac{p_1 - p_2}{\sqrt{\dfrac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \dfrac{p_2(1-p_2)}{n_2}}} > (<) t_{\sum n-1,a\%}$, τότε απορρίπτουμε τη μηδενική υπόθεση H_0.

Δίπλευρος

Είναι: $\begin{cases} H_0 : P = p_0 \\ H_1 : P \neq p_0 \end{cases}$.

Χρησιμοποιείται η στατιστική $t = \dfrac{p - P_0}{\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}} > (<) t_{n-1,a/2\%}$ και για δύο πληθυσμούς η στατιστική $t = \dfrac{p_1 - p_2}{\sqrt{\dfrac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \dfrac{p_2(1-p_2)}{n_2}}} > (<) t_{\sum n-1,a/2\%}$ και τότε απορρίπτουμε τη μηδενική υπόθεση H_0.

Έλεγχος διακύμανσης

Έστω s^2 η διακύμανση τυχαίου δείγματος μεγέθους n από κανονικό πληθυσμό με μέσο μ και διακύμανση σ^2. Τότε η τυχαία μεταβλητή:

$$X = \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{(X_i - \overline{X})^2}{\sigma^2}$$

ακολουθεί την κατανομή χ^2 με $(n-1)$ βαθμούς ελευθερίας.

Μονόπλευρος έλεγχος

Α. Για τον έλεγχο υποθέσεων της διακύμανσης έχουμε τις περιπτώσεις:

$$H_0 : s^2 = \sigma^2 \text{ (ή } s^2 \leq \sigma^2\text{)}$$
$$H_1 : s^2 > \sigma^2$$

Από τον πίνακα της κατανομής χ^2 βρίσκουμε τις τιμές χ_U^2 και χ_L^2 σε (n–1) βαθμούς ελευθερίας και επίπεδο σημαντικότητας δοσμένο, α. χ_U^2 = $\chi^2_{(1-a/2),(n-1)}$ και $\chi_L^2 = \chi^2_{a/2,(n-1)}$.

Μπορούμε να αποδεχθούμε τη μηδενική υπόθεση, εάν $X \leq$ χ_U^2. Αντίθετα, απορρίπτουμε την υπόθεση μηδέν.

Β. Για τον έλεγχο της μορφής:

$$H_0 : s^2 = \sigma^2 \text{ (ή } s^2 \geq \sigma^2 \text{)}$$
$$H_1 : s^2 < \sigma^2$$

Μπορούμε να αποδεχθούμε τη μηδενική υπόθεση εάν $X \geq \chi_L^2$. Αντίθετα, απορρίπτουμε την υπόθεση μηδέν.

Δίπλευρος έλεγχος

$$H_0 : s^2 = \sigma^2$$
$$H_1 : s^2 \neq \sigma^2$$

Μπορούμε να αποδεχθούμε τη μηδενική υπόθεση εάν $\chi_L^2 \leq X \leq \chi_U^2$. Αντίθετα, απορρίπτουμε την υπόθεση μηδέν, αν $X < \chi_L^2$ ή $X > \chi_U^2$.

1.3.5 Διαστήματα εμπιστοσύνης

Έστω ένας εκτιμητής $T(\tilde{X})$. Σε πολλές περιπτώσεις ο υπολογισμός της τιμής του T δεν είναι αρκετός, αλλά πρέπει συγχρόνως να δοθεί μια ιδέα για την ακρίβεια και το πιθανό σφάλμα της εκτίμησης. Έτσι, συχνά, ως εκτιμητή έχουμε το $T(\tilde{X}) + \varepsilon$ όπου ε είναι το τυπικό σφάλμα του $T(\tilde{X})$ ή κάποιος εκτιμητής του ε. Στην πραγματικότητα θα ψάχνουμε τη ε–γειτονιά, δηλαδή το διάστημα $[\,T(\tilde{X}) - \varepsilon\,,\ T(\tilde{X}) + \varepsilon\,]$ και εκεί θα ζητάμε να περιέχεται η τιμή του $g(\theta)$.

Γενικότερα, έστω $T_1 = T_1(\bar{X})$ και $T_2 = T_2(\bar{X})$ στατιστικές συναρτήσεις με $T_1 < T_2$. Τότε το τυχαίο διάστημα $[T_1(\bar{X}), T_2(\bar{X})]$ ονομάζεται <u>Διάστημα Εμπιστοσύνης</u> για την πραγματική συνάρτηση $g(\theta)$ με επίπεδο εμπιστοσύνης (ΣΕ) 100(1–α)% που μετριέται ως:

$$P[T_1(\bar{X}) \leq g(\theta) \leq T_2(\bar{X})] = 1 - a$$

Διάστημα Εμπιστοσύνης Κανονικής Κατανομής

Η μελέτη στην κανονική κατανομή με τις περιπτώσεις της ακολουθεί αμέσως παρακάτω. Αν $X_i' \sim N(\mu, \sigma^2)$ τότε έχουμε:

Α) Το σ^2 γνωστό και το μ άγνωστο

Το τυχαίο δείγμα είναι τα $X_i \sim N\left(\mu,\sigma^2\right)$. Η στατιστική συνάρτηση και εκτιμητής του **μ** είναι η $X_i \sim N\left(\mu,\dfrac{\sigma^2}{n}\right)$ με **n** το πλήθος τους. Ορίζουμε την ποσότητα οδηγό που είναι η $T=\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$, που προφανώς δεν εξαρτάται από το **μ**, άρα υπάρχουν οι σταθερές c_1, c_2 :

$$P[\overline{X}-c_2\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le \mu \le \overline{X}-c_1\frac{\sigma}{\sqrt{n}}]=1-a \Leftrightarrow$$

$$\Delta\mathrm{E}=[\overline{\mathrm{X}}-c_2\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\overline{\mathrm{X}}-c_1\frac{\sigma}{\sqrt{n}}]$$

Ειδικά τώρα έχουμε ότι $\Phi(c_1)+1-\Phi(c_2)=a$ με την $\Phi \sim \mathrm{N}(0,1)$ και για κάθε ποσοστό μέχρι το **α** έχουμε:

$$c_1=Z_{\frac{a}{2}}, c_2=Z_{\frac{a}{2}} \text{ με } \Phi(Z)\sim N(0,1)$$

Άρα το διάστημα εμπιστοσύνης γίνεται:

$$\Delta\mathrm{E}=[\overline{X}-Z_{a/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\overline{X}+Z_{a/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}]$$

Πρακτικά παίρνουμε το δειγματικό μέσο του τυχαίου δείγματος το $\overline{X}$, βρίσκουμε τον λόγο $Z=\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$ και το διάστημα

$\Delta\mathrm{E}=[\overline{X}-Z_{a/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}},\overline{X}+Z_{a/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}]$ είναι το διάστημα εμπιστοσύνης (ή πιο απλά είναι το $\mu \pm \Phi(\mathrm{Z}_{\alpha/2})(\dfrac{\sigma}{n})^a$). Το διάστημα εμπιστοσύνης καλείται δεκτή περιοχή και οι περιοχές εκτός από τις κριτικές περιοχές. Η απόφαση να γίνει δεκτή μια υπόθεση εξαρτάται από το επίπεδο σημαντικότητας.

Παράδειγμα 37

Έστω το τυχαίο δείγμα με 25 παρατηρήσεις κανονικής κατανομής, το **μ** είναι άγνωστο, το **σ** είναι 100 και ο δειγματικός μέσος μας δίνει 73,2 τότε να βρούμε το διάστημα εμπιστοσύνης για 90%.

Λύση

Έχουμε $n = 25$ μέση τιμή, που είναι άγνωστη, και $\sigma = 100$, γνωστό. Ο δειγματικός μέσος είναι $\overline{X} = 73,2$. Το ΔΕ είναι για 90%, άρα $1 - a = 0,90 \Leftrightarrow a = 0,1$. Από τους στατιστικούς πίνακες βρίσκουμε την τιμή της $Z_{0.05} \sim N(0,1) = 1,645$. Άρα το διάστημα εμπιστοσύνης είναι:

$$\Delta E = [\overline{X} - Z_{a/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + Z_{a/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}] = [73.2 - 1.645 \cdot \frac{10}{5}, 73.2 + 1.645 \cdot \frac{10}{5}]$$
$$\Delta E = [69.71, 76.49]$$

Β) Το σ^2 άγνωστο και το μ γνωστό

Με την ίδια λογική ομοίως ισχύουν περίπου τα ίδια, μόνο που αυτή τη φορά η Z ακολουθεί την t κατανομή, άρα προκύπτουν τα εξής:

$$T = \frac{\overline{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t_{n-1} \text{ με το S να είναι ο ΑΟΕΔ δηλαδή: } S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$$

Άρα το αντίστοιχο διάστημα εμπιστοσύνης είναι:

$$\Delta\text{E} = [\overline{X} - t_{n-1,a/2}\frac{S}{\sqrt{n}}, \overline{X} + t_{n-1,a/2}\frac{S}{\sqrt{n}}]$$

Παράδειγμα 38

Έχουμε 15 παρατηρήσεις και από την κατανομή την κανονική έχουμε δειγματικό μέσο 27,38 με $S^2 = 5,10$. Να βρούμε ελάχιστου μήκους **μ** διάστημα για 90%

Λύση

Ομοίως ορίζουμε τα δεδομένα και έχουμε ότι είναι:

$n = 15$, $S^2 = 5,10$, $a = 0,1$. Από πίνακες έχουμε: $t_{n-1,a/2} = t_{14,0.05} = 1.761$

Άρα το διάστημα εμπιστοσύνης είναι:

$$\Delta E = [27.38 - 1.761 \cdot \frac{\sqrt{5,10}}{\sqrt{15}}, 27.38 + 1.761 \cdot \sqrt{\frac{5.10}{15}}] = ...$$

Δραστηριότητα 36/Κεφάλαιο 1

Σε δείγμα 60 μηνιαίων αποδόσεων του γενικού δείκτη του χρηματιστηρίου αξιών, υπολογίστηκε μέση απόδοση 1.125% και τυπική απόκλιση 2.5%. Να υπολογιστεί το διάστημα εμπιστοσύνης με πιθανότητα 95% της μέσης απόδοσης.

Την απάντηση θα βρείτε στο Παράρτημα, στο τέλος του κεφαλαίου.

Διάστημα Εμπιστοσύνης της Διαφοράς των Μέσων

1. Οι δύο πληθυσμοί είναι κανονικοί με γνωστές διακυμάνσεις. Ο τύπος είναι:

$$P[\left(\bar{X}_1-\bar{X}_2\right)-c_2\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}} \le \mu_1-\mu_2 \le \left(\bar{X}_1-\bar{X}_2\right)-c_1\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}]=1-a$$

και $c_1 = Z_{\frac{a}{2}}, c_2 = Z_{\frac{a}{2}}$

2. Οι δύο πληθυσμοί είναι κανονικοί με άγνωστες ίσες διακυμάνσεις και ο τύπος είναι:

$$P[\left(\bar{X}_1-\bar{X}_2\right)-t_a s\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}} \le \mu_1-\mu_2 \le \left(\bar{X}_1-\bar{X}_2\right)-t_a s\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}]=1-a$$

3. Οι δύο πληθυσμοί είναι κανονικοί αλλά με άγνωστες διακυμάνσεις και ο τύπος είναι:

$$P[\left(\bar{X}_1-\bar{X}_2\right)-t_a\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}} \le \mu_1-\mu_2 \le \left(\bar{X}_1-\bar{X}_2\right)-t_a\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}]=1-a$$

Παράδειγμα 39

Για την πρόσληψή τους σε μια τράπεζα, οι υποψήφιοι υποβάλλονται σε γραπτές εξετάσεις βασικών γνώσεων τραπεζικής διοικητικής. Οι βαθμολογίες που απαιτούνται για την πρόσληψη έχουν μέση τιμή 500 και τυπική απόκλιση 120.

(α) Εάν επιλέξουμε τυχαία 36 υποψήφιους και βρούμε μέση βαθμολογία 546, μπορούμε να ισχυριστούμε ότι η μέση βαθμολογία τους είναι διαφορετική από τη μέση βαθμολογία που απαιτείται από όλους τους υποψήφιους; Επίπεδο σημαντικότητας 5%. (β) Να γίνει ο έλεγχος εάν το δείγμα μας είναι 16 υποψήφιοι.

Λύση

(α) Η μηδενική και η εναλλακτική υπόθεση είναι:

$H_0 : \mu = 500$

$H_1 : \mu \neq 500$

Εφαρμόζουμε τη Z μεταβλητή:

$$z = \frac{\bar{x}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{546-500}{\frac{120}{\sqrt{36}}} = \frac{46}{20} = 2.3$$

που σημαίνει ότι η μέση τιμή του δείγματος 546 των 36 υποψηφίων είναι 2.3 τυπικές αποκλίσεις από τον μέσο του πληθυσμού. Σε επίπεδο σημαντικότητας α=0.05 από τους πίνακες της N(0, 1) βρίσκουμε ότι $z_{\alpha/2} = z_{(0.05)/2} = z_{0.025} = 1.96$. Συνεπώς, αφού 2.30>1.96 μπορούμε να απορρίψουμε τη μηδενική υπόθεση. Για την κατασκευή των διαστημάτων εμπιστοσύνης σε επίπεδο εμπιστοσύνης 95% του μέσου του πληθυσμού, θα έχουμε:

$$546 \pm 1.96*(\frac{120}{\sqrt{36}}) = 546 \pm 39.2$$

Το κάτω όριο είναι 546 – 39.2 = 506.8 και το άνω όριο είναι 546 + 39.2 = 585.2. Μπορούμε να πούμε ότι η μέση βαθμολογία του πληθυσμού από τον οποίο πήραμε το δείγμα βρίσκεται μεταξύ 507 και 585 μονάδων.

(β) Θα χρησιμοποιήσουμε τη στατιστική *t* λόγω του μικρού δείγματος.

$$t = \frac{\bar{x}-\mu}{s/\sqrt{n}} = \frac{546-500}{12/\sqrt{16}} = \frac{46}{30} = 1.53$$

Οι βαθμοί ελευθερίας είναι 16 – 1 = 15. Από τους πίνακες της κατανομής σε επίπεδο σημαντικότητας 0.05 και 15 βαθμούς ελευθερίας βρίσκουμε τιμή 1.753. Έτσι, αφού 1.53<1.753 δεν μπορούμε να αποδεχτούμε τη μηδενική υπόθεση.

Παράδειγμα 40

Η μέση μηνιαία απόδοση της μετοχής Μ για δεδομένη χρονική περίοδο 60 παρατηρήσεων βρέθηκε ίση με 1.25% και τυπική απόκλιση 2.5%. Να ελεγχθεί η υπόθεση ότι η μέση απόδοση της Μ είναι μεγαλύτερη από 1.20% σε επίπεδα σημαντικότητας 10%, 5% και 1%.

Λύση

Μπορούμε να αποδεχθούμε την υπόθεση μηδέν $H_0 : \mu = 1.20\%$, έναντι της εναλλακτικής $H_0 : \mu > 1.20\%$, εάν:

$Z = \frac{\bar{X}-\mu}{s/\sqrt{n}} \leq z$, όπου z είναι η τιμή πίνακα σε επίπεδο σημαντικότητας α. Έτσι, είναι: $Z = \frac{\bar{X}-\mu}{s/\sqrt{n}} = \frac{1.25-1.20}{2.5/\sqrt{60}} = 1.155$. Από την τυποποιημένη κανονική βρίσκουμε σε επίπεδα σημαντικότητας: (i) 1% τιμή 2.326, (ii) 5% τιμή 1.645 και (iii) 10% τιμή 1.28.

Η τιμή του κριτηρίου Z είναι μικρότερη από τις τιμές του πίνακα. Συνεπώς, δεν μπορούμε να απορρίψουμε τη μηδενική υπόθεση, ότι η μηνιαία απόδοση της M είναι ίση με 1.20%.

Παράδειγμα 41

Μια μεγάλη εταιρία διαχείρισης χαρτοφυλακίων θέλει να προσδιορίσει εάν υπάρχει διαφορά στην απόδοση χαρτοφυλακίων που διαρθρώνονται και αναδιαρθρώνονται με κανόνες τεχνικής ανάλυσης (μέθοδος ΤΑ) έναντι χαρτοφυλακίων που δεν ακολουθούν τη μέθοδο αυτή, αλλά βασίζονται στην αντίληψη του διαχειριστή (μέθοδος ΔΧΡ). Επιλέχθηκαν τυχαία 100 χ/φ που επενδύουν με τη μέθοδο ΤΑ και βρέθηκε μέση απόδοση 74.3% και τυπική απόκλιση 16%. Άλλα 100 χ/φ που ακολουθούν τη μέθοδο ΔΧΡ είχαν μέση απόδοση 69.7% και τυπική απόκλιση 18%. Υπάρχει διαφορά στη μέση απόδοση των δύο ομάδων χ/φ; Επίπεδο σημαντικότητας 5%. Να υπολογίσετε και το διάστημα εμπιστοσύνης ε επίπεδο 95%.

Λύση

Η μηδενική και η εναλλακτική υπόθεση είναι:

$$H_0 : \mu_{TA} = \mu_{\Delta XP}$$
$$H_1 : \mu_{TA} \neq \mu_{\Delta XP}$$

	Μέθοδος ΤΑ	Μέθοδος ΔΧΡ
Μέση Απόδοση	74.3	69.7
Διακύμανση	16*16 = 256	18*18 = 324
N	100	100

Η διαφορά στις αποδόσεις μεταξύ των δύο μεθόδων είναι = 74.3 – 69.7 = 4.6

Τυπικό σφάλμα = $\sqrt{\dfrac{256}{100} + \dfrac{324}{100}}$ = 2.408

Υπολογισμός κριτηρίου Z = 4.6/2.408 = 1.91. Από τον πίνακα της τυποποιημένης κανονικής σε επίπεδο σημαντικότητας 5% βρίσκουμε 1.96, που είναι μικρότερη της 2.408. Συνεπώς, δεν μπορούμε να απορρίψουμε τη μηδενική υπόθεση ότι οι αποδόσεις των δύο μεθόδων είναι ίσες.

Το διάστημα εμπιστοσύνης 95% είναι:

Κάτω όριο: 4.6 – 1.96*2.408 = –0.12

Άνω όριο: 4.6 + 1.96*2.408 = 9.32

Το διάστημα εμπιστοσύνης [–0.12, 9.32] περιλαμβάνει και την τιμή 0. Αυτό επιβεβαιώνει την υπόθεση ότι δεν υπάρχει διαφορά στις μέσες αποδόσεις του πληθυσμού.

Παράδειγμα 42

Ο υπεύθυνος του Τμήματος Πιστωτικών Καρτών μιας τράπεζας επιθυμεί να ελέγξει εάν το μέσο μηνιαίο απλήρωτο ποσό των καρτών είναι 400€, σε επίπεδο σημαντικότητας 5%. Επιλέγοντας τυχαίο δείγμα 172 πελατών βρίσκει ότι το μέσο απλήρωτο υπόλοιπο είναι 407€ με τυπική απόκλιση 38€. Θα μπορούσε να αποφανθεί ότι το μέσο απλήρωτο ποσό είναι μεγαλύτερο των 400€;

Λύση

Η μηδενική και η εναλλακτική υπόθεση είναι:

$\begin{matrix} H_0 : \mu \leq 400€ \\ H_1 : \mu > 400€ \end{matrix}$. Η στατιστική $Z = \dfrac{\overline{X} - \mu}{s/\sqrt{n}} = \dfrac{407 - 400}{38\sqrt{172}} = 2.42$. Από τον πίνακα της κατανομής προκύπτει η τιμή 1.645<2.42, που σημαίνει ότι η μηδενική υπόθεση δεν μπορεί να γίνει αποδεκτή. Άρα, μπορεί να καταλήξει ο υπεύθυνος ότι το μέσο μηνιαίο απλήρωτο ποσό είναι μεγαλύτερο από 400€.

Παράδειγμα 43

Σε 40 παρατηρήσεις υπολογίσαμε τη διακύμανση της μετοχής Μ ίση με 23 και θέλουμε να ελέγξουμε εάν είναι μικρότερη από 25 σε επίπεδο εμπιστοσύνης 5%.

Λύση

$$\begin{matrix} H_0 : s^2 = 25 \\ H_1 : s^2 < 25 \end{matrix}.$$

Είναι Χ = (39*23)/25 = 35.88. Από τον πίνακα της x^2 βρίσκουμε χ_L^2 =45.722 και χ_U^2 =16.047. Συνεπώς, μπορούμε να αποδεχθούμε τη μηδενική υπόθεση.

Ενότητα 1.4

ΑΝΑΛΥΣΗ ΠΑΛΙΝΔΡΟΜΗΣΗΣ ΚΑΙ ΧΡΟΝΟΛΟΓΙΚΕΣ ΣΕΙΡΕΣ

Στην *εμπειρική οικονομική έρευνα* ελέγχουμε τις οικονομικές υποθέσεις, συνήθως, με την κατασκευή *οικονομετρικών* υποδειγμάτων και την εκτίμηση των παραμέτρων τους. Για παράδειγμα, στην πιο απλή μορφή του CAPM, η αναμενόμενη απόδοση $E(R_i)$ του περιουσιακού στοιχείου i μπορεί να εκφραστεί με την ακόλουθη σχέση:

$$E(R_i) = R_f + \beta_i[E(R_m) - R_f] + \text{σφάλμα}_\text{i}$$

Όπου,

$E(R_i)$: η αναμενόμενη απόδοση της μετοχής (του περιουσιακού στοιχείου) *i*.

R_f: το χωρίς κίνδυνο επιτόκιο της αγοράς.

$E(R_m)$: η αναμενόμενη απόδοση του χαρτοφυλακίου της αγοράς που περιλαμβάνει όλα τα περιουσιακά στοιχεία της αγοράς.

β_i: ο συστηματικός κίνδυνος της μετοχής *i* ο οποίος εκφράζει την κλίση (slope) της γραμμής της παλινδρόμησης των επιπλέον αποδόσεων της μετοχής *i* με τις επιπλέον αποδόσεις του χαρτοφυλακίου της αγοράς.

Το υπόδειγμα που θα μελετήσουμε στο κεφάλαιο αυτό είναι η παρακάτω συνάρτηση, Y είναι η εξαρτημένη μεταβλητή, X είναι η ανεξάρτητη μεταβλητή, α και β είναι η προς εκτίμηση παράμετροι και $\hat{\varepsilon}$ είναι τα εκτιμημένα σφάλματα (ή κατάλοιπα):

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + \varepsilon_i \text{ και η εκτίμηση } Y_i = \hat{\alpha} + \hat{\beta} X_i + \hat{\varepsilon}_i = \hat{Y}_i + \hat{\varepsilon}_i$$

$$\hat{\varepsilon}_i = Y_i - \hat{Y}_i = Y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta} X_i$$

1.4.1 Εκτίμηση των παραμέτρων με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων

Έστω το υπόδειγμα $Y_i = \alpha + \beta X_i + \varepsilon_i$. Η εκτίμηση των παραμέτρων α και β με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων, συνίσταται στην ελαχιστοποίηση της παράστασης:

$$\text{A} = \min \sum_{i=1}^{n} \hat{\varepsilon}_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta} X_i)^2$$

Είναι προφανές ότι το άθροισμα των τετραγώνων των καταλοίπων είναι συνάρτηση των εκτιμητών των παραμέτρων α και β. Για διαφορετικές τιμές των εκτιμητών θα έχουμε διαφορετικές τιμές των τετραγώνων των καταλοίπων. Θα επιλέγουμε τους εκτιμητές εκείνους που δίνουν το μικρότερο άθροισμα των τετραγώνων των καταλοίπων, $\sum \hat{\varepsilon}_i^2$.

$$\hat{\beta} = \frac{n\sum X_i Y_i - \sum X_i \sum Y_i}{n\sum X_i^2 - \left(\sum X_i\right)^2} = \frac{\sum (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sum (X_i - \bar{X})^2} = \frac{\operatorname{cov} ariance(X_i, Y_i)}{\operatorname{var} iance(X_i)} \tag{1a}$$

$$\hat{\alpha} = \frac{\sum X_i^2 \sum Y_i - \sum X_i \sum X_i Y_i}{n\sum X_i^2 - \left(\sum X_i\right)^2} = \bar{Y} - \hat{\beta}\bar{X} \tag{1b}$$

Από τα παραπάνω, εύκολα προκύπτει ότι:

1. Η γραμμή παλινδρόμησης περνάει από το σημείο $(\bar{X}, \bar{Y})$, όπως προκύπτει από τη σχέση (1b).
2. Η μέση τιμή των εκτιμημένων τιμών, $\hat{Y}_i$, ισούται με τη μέση τιμή , δηλαδή $\bar{\hat{Y}}_i = \bar{Y}$, όταν η παλινδρόμηση περιλαμβάνει και σταθερό όρο.
3. Οι εκτιμητές ελαχίστων τετραγώνων είναι συνάρτηση των τιμών του δείγματος.
4. Τα κατάλοιπα δεν συσχετίζονται με τις τιμές των Y_i και X_i.

Δραστηριότητα 37/Κεφάλαιο 1

Ο παρακάτω πίνακας παρουσιάζει τις μηνιαίες τιμές κλεισίματος και τις μηνιαίες αποδόσεις του Γενικού Δείκτη (R(GD)) και της Εθνικής Τράπεζας της Ελλάδος R(ETE) για το διάστημα 31/1/2000 έως 31/1/2002. (α) Να εκτιμήσετε την εξίσωση παλινδρόμησης $R(ETE)_t = \alpha + \beta R(GD)_t + e_t$ και να ερμηνεύσετε τα αποτελέσματα. Να παρουσιάσετε τα αποτελέσματα με εφαρμογή "Tools $\rightarrow$ Data Analysis $\rightarrow$ Regression" στο excel. (β) Να παρουσιάσετε διαγραμματικά τη γραμμή παλινδρόμησης. (γ) Να παρουσιάσετε τα εκτιμημένα κατάλοιπα.

	ΓΕΝΙΚΟΣ ΔΕΙΚΤΗΣ		ΕΘΝΙΚΗ ΤΡΑΠΕΖΑ	
Date	Close	R(GD)	Close	R(ETE)
31/1/2000	4990.02		31.713	
29/2/2000	5002.23	0.002444	34.516	0.084696
31/3/2000	4793.47	-0.04263	36.0128	0.042451
27/4/2000	4249.45	-0.12047	32.361	-0.10692
31/5/2000	4608.24	0.081056	34.7547	0.071361
30/6/2000	4054.41	-0.12804	28.7448	-0.18986
31/7/2000	3988.28	-0.01645	28.9708	0.007832
31/8/2000	3557.15	-0.1144	26.6388	-0.08392
29/9/2000	4178.96	0.161103	32.5151	0.199336
31/10/2000	3797.84	-0.09563	31.2926	-0.03832
30/11/2000	3245.77	-0.15708	25.2519	-0.21448
29/12/2000	3388.86	0.043141	28.3236	0.114794
31/1/2001	3264.76	-0.03731	27.7251	-0.02136
28/2/2001	3129.06	-0.04245	26.4368	-0.04758
30/3/2001	3044.55	-0.02738	26.9969	0.020965
30/4/2001	3286.67	0.076522	30.6236	0.126049
31/5/2001	3088.66	-0.06214	28.6352	-0.06713
29/6/2001	2741.18	-0.11935	24.4905	-0.15635
31/7/2001	2727.21	-0.00511	21.704	-0.12079
31/8/2001	2762.12	0.012719	22.5861	0.039838
28/9/2001	2226.05	-0.21577	16.551	-0.31089
31/10/2001	2468.26	0.103285	19.9677	0.187669
30/11/2001	2694.02	0.087521	19.1835	-0.04007
28/12/2001	2591.56	-0.03877	18.7074	-0.02513
31/1/2002	2596.75	0.002001	18.7214	0.000748

Την απάντηση θα βρείτε στο Παράρτημα, στο τέλος του κεφαλαίου.

Υποθέσεις της Μεθόδου Ελαχίστων Τετραγώνων

1) Το υπόδειγμα της παλινδρόμησης είναι γραμμικό ως προς τις παραμέτρους του:

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + \varepsilon_i$$

Ο λόγος για τον οποίο υποθέτουμε γραμμικότητα ως προς τις παραμέτρους είναι η ευκολία και η ευχρηστία της υπόθεσης αυτής.

2) Οι τιμές της ανεξάρτητης μεταβλητής X είναι σταθερές από δείγμα σε δείγμα, δηλαδή η X είναι μη–στοχαστική. Δηλαδή, οι τιμές της παραμένουν σταθερές, αλλά δεν είναι όλες ίσες μεταξύ τους, που σημαίνει ότι η διακύμανση των τιμών της X στο δείγμα είναι διάφορη του μηδενός. Εάν όλες οι τιμές της X είναι ίδιες, τότε $X_i = \overline{X}$ και η διακύμανση της X θα ήταν μηδέν, δηλαδή θα ήταν αδύνατο να πάρουμε τιμή για τον εκτιμητή β [εξ. 1(α)].
Αυτό είναι το απλό κλασικό γραμμικό υπόδειγμα, δηλαδή η ανάλυσή μας είναι δεσμευμένη ανάλυση παλινδρόμησης, που σημαίνει ότι είναι δεσμευμένη στις δεδομένες τιμές της ανεξάρτητης μεταβλητής X.

3) Για δεδομένες τιμές της X ο μέσος όρος των σφαλμάτων ε είναι μηδέν (με άλλα λόγια, ο δεσμευμένος μέσος των σφαλμάτων). Η υπόθεση αυτή σημαίνει ότι οι παράγοντες –εκτός της X– που δεν συμπεριλαμβάνονται στο υπόδειγμα και, συνεπώς, εννοούνται στον όρο των σφαλμάτων (καταλοίπων), δεν επηρεάζουν συστηματικά τη μέση τιμή της εξαρτημένης μεταβλητής Y.

$$E(\varepsilon_i / X_i) = 0$$

4) **Ομοσκεδαστικότητα**. Για δοσμένες τιμές της X, η διακύμανση των σφαλμάτων είναι ίση για όλες τις παρατηρήσεις της X:

$$\mathrm{var}(\varepsilon_i / X_i) = E[\varepsilon_i - E(\varepsilon_i / X_i)]^2 = E(\varepsilon_i^2 / X_i) = \sigma^2$$

Η ιδιότητα αυτή σημαίνει ότι η διασπορά των τιμών του διαταρακτικού όρου γύρω από τη γραμμή παλινδρόμησης είναι η ίδια για δοσμένες τιμές της X. Η υπόθεση αυτή, ακόμα, σημαίνει ότι οι δεσμευμένες διακυμάνσεις της Y είναι, επίσης, σταθερές: $\mathrm{var}(Y_i / X_i) = \sigma^2$. Να σημειωθεί, ωστόσο, ότι ακόμα και εάν τα σφάλματα δεν σχετίζονται με τις ανεξάρτητες μεταβλητές, δεν σημαίνει ότι το τετράγωνο των σφαλμάτων ή η απόλυτη τιμή τους δεν σχετίζεται με τις ανεξάρτητες μεταβλητές (σε αυτό βασίζονται πολλοί έλεγχοι της ετεροσκεδαστικότητας).

5) **Μη–αυτοσυσχέτιση των καταλοίπων**. Για δύο διαφορετικές τιμές της X, η συσχέτιση μεταξύ των τιμών των καταλοίπων είναι μηδέν:

$$\mathrm{cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j / X_i, X_j) = 0$$

Αυτή η υπόθεση θέτει ότι για δεδομένες τιμές της X, οι αποκλίσεις των τιμών της Y από τη μέση τους τιμή δεν ακολουθεί κάποιον συγκεκριμένο προβλέψιμο σχηματισμό.

Οι υποθέσεις 3, 4 και 5 δηλώνουν ότι τα σφάλματα κατανέμονται κανονικά και ανεξάρτητα με μέσο 0 και διακύμανση σ^2, σταθερή: ε_i ~NID $(0, \sigma^2)$.

6) Η συνδιακύμανση των τιμών της X και των τιμών του διαταρακτικού όρου είναι μηδέν: $\operatorname{cov}(\varepsilon_i, X_i) = 0$.

7) **Δεν υπάρχει τέλεια πολυσυγγραμμικότητα**, μεταξύ των τιμών των ανεξάρτητων μεταβλητών.

Άσκηση Αυτοαξιολόγησης 4/Κεφάλαιο 1

Να παρουσιάσετε τις υποθέσεις του απλού γραμμικού υποδείγματος. Να ξαναδιαβάσετε την παραπάνω ενότητα για επαλήθευση (βλ. και Παράρτημα στο τέλος του κεφαλαίου).

Τυπικά Σφάλματα Εκτιμητών

Οι εκτιμητές ελαχίστων τετραγώνων εξαρτώνται από την τιμή του δείγματος και κατανέμονται κανονικά. Συνεπώς, για τη μέτρηση της αξιοπιστίας τους θα χρησιμοποιήσουμε τα τυπικά τους σφάλματα:

$$se(\hat{\beta}) = \frac{\sigma}{\sqrt{\sum (X_i - \bar{X})^2}} \quad \text{και} \quad \mathrm{se}(\hat{\alpha}) = \sqrt{\frac{\sum X_i^2}{n\sum (X_i - \bar{X})^2}}\ \sigma \quad \text{όπου} \quad \sigma = \sqrt{\frac{\sum \hat{\varepsilon}_\mathrm{i}^2}{\text{n-2}}}$$

σ είναι το τυπικό σφάλμα της παλινδρόμησης, δηλαδή η τυπική απόκλιση των τιμών της Y γύρω από την ευθεία της παλινδρόμησης. Όσο μικρότερη είναι η τιμή της, τόσο καλύτερη είναι η παλινδρόμηση. Από τις παραπάνω σχέσεις προκύπτει ότι:

1) Όσο μεγαλύτερο είναι το μέγεθος του δείγματος, τόσο μικρότερη θα είναι η τιμή των τυπικών σφαλμάτων.
2) Όσο μεγαλύτερη είναι η σ^2 τόσο μεγαλύτερη η διασπορά των καταλοίπων και, συνεπώς, μεγαλύτερη η αβεβαιότητα του υποδείγματος.
3) Η διακύμανση του εκτιμητή β είναι ανάλογη της σ^2 και αντιστρόφως ανάλογη του αθροίσματος $\sum (X_i - \bar{X})^2$. Τούτο σημαίνει ότι όσο μεγαλύτερη είναι η μεταβλητότητα των τιμών της X τόσο μικρότερη θα είναι η διακύμανση του εκτιμητή β και, συνεπώς, μεγαλύτερη η ακρίβειά του. Επίσης, όσο το μέγεθος του δείγματος αυξάνει τόσο αυξάνεται και το άθροισμα $\sum (X_i - \bar{X})^2$.
4) Η διακύμανση του εκτιμητή α είναι ανάλογη της σ^2 και του αθροίσματος των τετραγώνων των τιμών της ανεξάρτητης μεταβλητής X και, αντιστρόφως, ανάλογη του δείγματος n και του αθροίσματος $\sum (X_i - \bar{X})^2$.

5) Η συνδιακύμασνη των εκτιμητών ισούται με $-\bar{X}\,\mathrm{var}(\hat{\beta})$ και εξαρτάται από το πρόσημο της μέσης τιμής της X.

Ο Συντελεστής Προσδιορισμού

Η συνολική μεταβλητότητα των πραγματικών τιμών της Y γύρω από τη μέση τους τιμή (TSS), ισούται με: $\sum (Y_i - \bar{Y})^2 = \sum y_i^2 \;=\; \hat{\beta}^2 \sum x_i^2 \;+\; \sum \hat{\varepsilon}_i^2$.

Δηλαδή, ισούται με τη μεταβλητότητα που ερμηνεύεται από την παλινδρόμηση (ESS) + τη μεταβλητότητα που οφείλεται σε άλλους παράγοντες (RSS).

$$\text{ESS} = \sum \hat{y}_i^2 = \hat{\beta}^2 \sum x_i^2 \text{ και RSS} = \sum \hat{\varepsilon}_i^2 .$$

TSS = ESS + RSS, από όπου προκύπτει ο συντελεστής προσδιορισμού

$$R^2 = \frac{ESS}{TSS} = 1 - \frac{RSS}{TSS} = \hat{\beta}^2 \left(\frac{\sum x_i^2}{\sum y_i^2} \right) = \rho^2_{(X,Y)}$$

Στην απλή παλινδρόμηση, ο συντελεστής προσδιορισμού ισούται με το τετράγωνο του συντελεστή γραμμικής συσχέτισης των μεταβλητών X και Y. Ο συντελεστής προσδιορισμού παίρνει τιμές μεταξύ του) και του 0 (= δεν υπάρχει σχέση μεταξύ Y και X) και του +1 (= υπάρχει τέλεια σχέση μεταξύ Y και X).

΄Ελεγχος στατιστικής σημαντικότητας και διάστημα εμπιστοσύνης εκτιμητών

Διάστημα Εμπιστοσύνης: $\hat{\beta} \pm t_{\alpha/2,(n-2)} se(\hat{\beta})$. ΄Ιδια για τον σταθερό όρο.

΄Ελεγχος σημαντικότητας H_0: $\beta=0$: $t = \dfrac{\hat{\beta}}{se(\hat{\beta})}$. ΄Ιδια για τον σταθερό όρο. Εάν $|t| > t_{\alpha/2,(n-2)}$, τότε απορρίπτεται η μηδενική υπόθεση.

{Κανόνας «2–t»: Εάν ο αριθμός των βαθμών ελευθερίας είναι μεγαλύτερος του 20 και εάν το επίπεδο σημαντικότητας είναι α=0.05, τότε η μηδενική υπόθεση απορρίπτεται, εάν $|t| > 2$}.

Ο έλεγχος της στατιστικής σημαντικότητας του εκτιμητή β μπορεί να γίνει και με τη στατιστική:

$$F = \frac{\hat{\beta}^2 \sum x_i^2}{\sum \hat{\varepsilon}_i^2 /(n-2)}$$

η οποία ακολουθεί την κατανομή F με 1 βαθμό ελευθερίας στον αριθμητή και (n–2) βαθμούς ελευθερίας στον παρονομαστή. Είναι γνωστό ότι το τετράγωνο μιας t τιμής με k βαθμούς ελευθερίας είναι μία F τιμή με 1 βαθμό ελευθερίας στον αριθμητή και k βαθμούς ελευθερίας στον παρονομαστή, δηλαδή $t_k^2 = F_k^1$.

Παράδειγμα 44

Θεωρήσαμε τις εβδομαδιαίες τιμές κλεισίματος της μετοχής της Εθνικής Τράπεζας και του Γενικού Δείκτη τιμών του Χρηματιστηρίου Αξιών Αθηνών για το χρονικό διάστημα 9/1/2002 – 31/12/2003. Τις τιμές αυτές τις μετασχηματίσαμε ως $\ln(p_t/p_{t-1})$ και παλινδρομήσαμε τις αποδόσεις της μετοχής του ΟΤΕ επί των αποδόσεων του δείκτη FTSE. Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στον παρακάτω πίνακα.

Πίνακας 1
Εκτίμηση σε όλη τη χρονική περίοδο

SUMMARY OUTPUT				
Regression Statistics				
Multiple R	0.730253			
R Square	0.533269			
Adjusted F	0.528648			
Standard E	0.030217			
Observatio	103			
ANOVA				
	df	*SS*	*MS*	*F*
Regressior	1	0.105367	0.105367	115.3989
Residual	101	0.09222	0.000913	
Total	102	0.197587		
	Coefficients	*Standard Err*	*t Stat*	*P-value*
Intercept	-0.00336	0.002987	-1.12629	0.26271
X Variable	1.086677	0.101158	10.74239	2.09E-18

Από τα αποτελέσματα, παρατηρούμε ότι

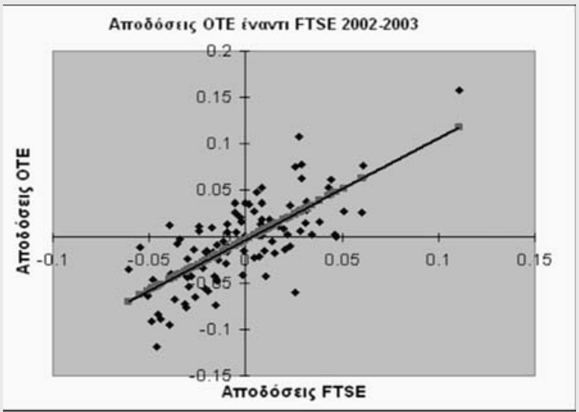
1) Ο συντελεστής προσδιορισμού (R Square) είναι 0.5333, που σημαίνει ότι το 53.33% της μεταβολής των αποδόσεων της μετοχής του ΟΤΕ ερμηνεύεται από τις μεταβολές των αποδόσεων του FTSE, δηλαδή από την αγορά. Η υπόλοιπη μεταβλητότητα οφείλεται σε τυχαίους παράγοντες (πίνακας ANOVA).

2) Ο ο συντελεστής βήτα (ή γωνιακός συντελεστής) ίσος με 1.0866. Όταν η απόδοση του FTSE αυξηθεί μια ποσοστιαία μονάδα, για παράδειγμα, η απόδοση του ΟΤΕ αναμένεται να αυξηθεί κατά μέσο όρο 1.086%. Επειδή $\beta > 1$, λέμε ότι η μετοχή του ΟΤΕ είναι επιθετική μετοχή. Ο συντελεστής βήτα ονομάζεται και **συστηματικός κίνδυνος** ή έκθεση στις διακυμάνσεις της αγοράς.

3) Οι τιμές της στατιστικής t είναι για τον συντελεστή της παλινδρόμησης 10.74. Ο συντελεστής της παλινδρόμησης β είναι στατιστικά σημαντικός (διάφορος του μηδενός), ενώ ο σταθερός όρος δεν είναι στατιστικά σημαντικός, σύμφωνα με τον κανόνα «2–*t*». Για να ελέγξουμε την υπόθεση ότι ο συντελεστής βήτα είναι ίσος με τη μονάδα, θα υπολογίσουμε $\frac{1.086677-1.0}{0.101158} = 0.8568 < 2$, συνεπώς δεν μπορούμε να απορρίψουμε τη μηδενική υπόθεση, ότι δηλαδή $\beta = 1$.

4) Από τον πίνακα της ανάλυσης της μεταβλητότητας (ANOVA), μπορούμε να επιβεβαιώσουμε ότι η τιμή της στατιστικής F είναι πολύ υψηλότερη από την τιμή του πίνακα της F με 1 βαθμό ελευθερίας στον αριθμητή και 102 βαθμούς ελευθερίας στον παρονομαστή (= 3.94 σε επίπεδο σημαντικότητας α = 0.05). Επίσης, επιβεβαιώνεται ότι $t_k^2 = F_k^1$, δηλαδή $(10.74)^2 = 115.347$ περίπου.

Τέλος, στο Διάγραμμα που ακολουθεί, στον οριζόντιο άξονα είναι οι αποδόσεις FTSE και στον κάθετο άξονα οι αποδόσεις του ΟΤΕ, ενώ φαίνεται και η ευθεία της παλινδρόμησης που εκτιμήθηκε με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων.



Δραστηριότητα 38/Κεφάλαιο 1

Να υπολογίσετε το διάστημα εμπιστοσύνης του γωνιακού συντελεστή (συντελεστής βήτα) του παραπάνω παραδείγματος.

Την απάντηση θα βρείτε στο Παράρτημα, στο τέλος του κεφαλαίου.

Δραστηριότητα 39/Κεφάλαιο 1

Στο υπόδειγμα CAPM των αποδόσεων της μετοχής *Y* έναντι εκείνων του γενικού δείκτη ΓΔ, βρήκαμε: Συντελεστή συσχέτισης των αποδόσεων *Y* και *X* = 0.678, Κίνδυνο αγοράς *X* = 22%, Κίνδυνο μετοχής *Y* = 30%. Να υπολογίσετε τον συστηματικό κίνδυνο της μετοχής *Y*.

Την απάντηση θα βρείτε στο Παράρτημα, στο τέλος του κεφαλαίου.

Δραστηριότητα 40/Κεφάλαιο 1

Ένας διαχειριστής χαρτοφυλακίου εκτίμησε τη σχέση μεταξύ των αποδόσεων του Γενικού Δείκτη Τιμών του χρηματιστηρίου και των αποδόσεων του χαρτοφυλακίου των μετοχών μικρής κεφαλαιοποίησης, για τα τελευταία 15 έτη, με την παρακάτω παλινδρόμηση: A = –0.5 + 1.85 (B). Τυπική απόκλιση καταλοίπων (Residual Standard Error) = 21.32. R^2

(Coefficient of determination) = 0.3535. Πλήθος παρατηρήσεων N = 180. F–value = 102.4 με 1 και 76 βαθμούς ελευθερίας (κριτική τιμή σε επίπεδο σημαντικότητας 5% = 4.00). Να απαντήσετε στα ερωτήματα:

(α) Εάν η απόδοση του Γενικού Δείκτη τιμών είναι 25%, τότε ποια αναμένεται να είναι η απόδοση του χαρτοφυλακίου των μετοχών μικρής κεφαλαιοποίησης;

(β) Με τι ισούται η τυπική απόκλιση των διαφορών μεταξύ των πραγματικών και των εκτιμηθεισών αποδόσεων του χαρτοφυλακίου των μετοχών μικρής κεφαλαιοποίησης;

(γ) Με τι ισούται ο συντελεστής γραμμικής συσχέτισης μεταξύ των αποδόσεων του χαρτοφυλακίου των μετοχών μικρής κεφαλαιοποίησης και των αποδόσεων του δείκτη της αγοράς;

Την απάντηση θα βρείτε στο Παράρτημα, στο τέλος του κεφαλαίου.

Δραστηριότητα 41/Κεφάλαιο 1

Ένας αναλυτής εκτίμησε την εξίσωση παλινδρόμησης:

$$S_t = a + b(p_\$ - p_{EU}) + e_t$$

όπου S είναι η ισοτιμία \$/euro και p είναι το επίπεδο του πληθωρισμού. Τα αποτελέσματα, έδωσαν a = 0.003 με τυπικό σφάλμα εκτιμητή s.e.(a) = 0.007, b = 0.15 με τυπικό σφάλμα εκτιμητή s.e.(b) = 0.83 και $R^2 = 0.003$ και κατέληξε στο συμπέρασμα: «Η συναλλαγματική ισοτιμία οδηγείται από παράγοντες άλλους από τη διαφορά του τρέχοντος επιπέδου πληθωρισμού των δύο οικονομιών». Να τεκμηριώσετε σύντομα, εάν η θέση του αυτή στηρίζεται από τα εμπειρικά ευρήματα.

Την απάντηση θα βρείτε στο Παράρτημα, στο τέλος του κεφαλαίου.

1.4.2 Μη γραμμική παλινδρόμηση και υποδείγματα

Συζητάμε για υποδείγματα γραμμικά ως προς τις παραμέτρους τους, άσχετα αν είναι γραμμικά ή όχι ως προς τις μεταβλητές. Εάν ένα υπόδειγμα είναι μη–γραμμικό στις παραμέτρους είναι μη–γραμμικό, άσχετα αν είναι γραμμικό ή όχι ως προς τις μεταβλητές. Καλά είναι να διαχωρίσουμε μεταξύ σύμφυτης και εγγενούς μη–γραμμικότητας στα υποδείγματα που μας ενδιαφέρουν. Εάν ένα υπόδειγμα μη–γραμμικό στις παραμέτρους μπορεί να μετασχηματιστεί σε γραμμικό (στις παραμέτρους) τότε θα λέμε ότι η μη–γραμμικότητα είναι σύμφυτη. Αν, αντίθετα, δεν μπορεί να μετασχηματιστεί σε γραμμικό (ως προς τις παραμέτρους), τότε θα λέμε ότι είναι εγγενές.

Ας πάρουμε το εκθετικό υπόδειγμα, που χρησιμοποιείται για να πάρουμε ποσοστά ανάπτυξης μιας μεταβλητής (π.χ. του ΑΕΠ ή της προσφοράς χρήματος κ.λπ.) και ας προσπαθήσουμε να πάρουμε τις κανονικές εξισώσεις:

$$Y_i = \alpha e^{\beta X_i} + \varepsilon_i \Leftrightarrow \varepsilon_i = Y_i - \alpha e^{\beta X_i} \quad \kappa\alpha\iota \quad \sum \varepsilon_i^2 = \sum (Y_i - \alpha e^{\beta X_i})^2 = f(\alpha, \beta)$$

$$\frac{\partial \sum \varepsilon_i^2}{\partial \alpha} = 2\sum (Y_i - \alpha e^{\beta X_i})(-1 e^{\beta X_i})$$

$$\frac{\partial \sum \varepsilon_i^2}{\partial \beta} = 2\sum (Y_i - \alpha e^{\beta X_i})(-\alpha e^{\beta X_i} X_i)$$

Normal Equations

$$\sum \mathrm{Y_i} e^{\hat{\beta} X_i} = \alpha e^{2\hat{\beta} X_i} \quad \kappa\alpha\iota \quad \sum Y_i X_i e^{\beta X_i} = \hat{\alpha} \sum X_i e^{2\hat{\beta} X_i}$$

Παρατηρούμε εδώ ότι οι άγνωστες παράμετροι α και β βρίσκονται και στις δύο πλευρές των κανονικών εξισώσεων, δηλαδή οι παράμετροι είναι συναρτήσεις του εαυτού τους και των δεδομένων και, συνεπώς, δεν μπορούμε να πάρουμε λύση στο σύστημα των κανονικών εξισώσεων. Η λύση, ωστόσο, βρίσκεται με την εφαρμογή των μη γραμμικών ελαχίστων τετραγώνων (NLLS).

Παράδειγμα 45

Ας πάρουμε το παράδειγμα, όπου έχουμε κατατάξει 12 Αμοιβαία Κεφάλαια ανάλογα με την αξία του Ενεργητικού τους (*X*, Net Asst Value: NAV) και συγκεντρώσαμε τα έξοδα που πληρώνουν στους διαχειριστές τους (*Y*, Fee). Θέλουμε να εκτιμήσουμε το ποσοστό της μεταβολής των εξόδων ανάλογα με την αξία του Ενεργητικού των Αμοιβαίων Κεφαλαίων. Είναι προφανές ότι όσο μεγαλύτερη η αξία του Ενεργητικού τους, τόσο μικρότερο το κόστος διαχείρισης και, συνεπώς, μια καλή επιλογή είναι ένα εκθετικό υπόδειγμα σαν αυτό που συζητήσαμε στην ενότητα αυτή.

Τα αποτελέσματα της εκτίμησης έδωσαν:

$\alpha = 0.5089$ (t–statistic = 68.2246) και $\beta = -0.0059$ (t–statistic = -12.3150)

$R^2 = 0.9385$ Durbin–Watson statistic = 0.3493

Συνεπώς, το εκτιμημένο υπόδειγμα είναι: $\hat{Fee}_i = 0.5089 NAV^{-0.0059}$.

Να σημειωθεί ότι οι εκτιμητές με τη μέθοδο αυτή δεν είναι αμερόληπτοι, δεν ακολουθούν την κανονική κατανομή και δεν είναι ελάχιστης διακύμανσης σε μικρά δείγματα. Συνεπώς, δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τα αποτελέσματα των στατιστικών *F*, *t* κ.λπ. για στατιστική επαγωγή. Ωστόσο, η στατιστική συμπερασματολογία για τις παραμέτρους της παλινδρόμησης στη μη–γραμμική παλινδρόμηση βασίζονται στη θεωρία για μεγάλα δείγματα (ασυμπτωτική θεωρία).

Το ποσοστό μεταβολή των εξόδων ανάλογα με την αξία του Ενεργητικού των Αμοιβαίων Κεφαλαίων, είναι:.

Για παράδειγμα, για X=20 εκατ., η αναμενόμενη μεταβολή των εξόδων διαχείρισης είναι περίπου –0.0031%.

1.4.3 Πολλαπλή παλινδρόμηση

Θεωρούμε το υπόδειγμα $Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_{2i} + \beta_3 X_{3i} + \varepsilon_i$. Με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων παίρνουμε τους εκτιμητές (θεωρούμε τις μεταβλητές ως αποκλίσεις από τους μέσους και τις σημειώνουμε με μικρά γράμματα):

$$\hat{\beta}_2 = \frac{(\sum y_i x_{2i})(\sum x_{3i}^2) - (\sum y_i x_{3i})(\sum x_{2i} x_{3i})}{(\sum x_{2i}^2)(\sum x_{3i}^2) - (\sum x_{2i} x_{3i})^2}$$

$$\hat{\beta}_3 = \frac{(\sum y_i x_{3i})(\sum x_{2i}^2) - (\sum y_i x_{2i})(\sum x_{2i} x_{3i})}{(\sum x_{2i}^2)(\sum x_{3i}^2) - (\sum x_{2i} x_{3i})^2}$$

$$\hat{\beta}_1 = \overline{Y} - \hat{\beta}_2 \overline{X}_2 - \hat{\beta}_3 \overline{X}_3$$

Τα τυπικά σφάλματα των εκτιμητριών, που θα μας χρειαστούν στον έλεγχο στατιστικών υποθέσεων, είναι:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum \hat{\varepsilon}_i^2}{n-3} = \frac{\sum y_i^2 - \hat{\beta}_2 \sum y_i x_{2i} - \hat{\beta}_3 \sum y_i x_{3i}}{n-3}$$

$$\mathrm{var}(\hat{\beta}_1) = \left[\frac{1}{n} + \frac{\overline{X}_2^2 \sum x_{3i}^2 + \overline{X}_3^2 \sum x_{2i}^2 - 2\overline{X}_2 \overline{X}_3 \sum x_{2i} x_{3i}}{\sum x_{2i}^2 \sum x_{3i}^2 - (\sum x_{2i} x_{3i})^2} \right] \sigma^2$$

$$\mathrm{var}(\hat{\beta}_2) = \frac{\sum x_{3i}^2}{\sum x_{2i}^2 \sum x_{3i}^2 - (\sum x_{2i} x_{3i})^2} \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{\sum x_{2i}^2 (1 - \rho_{23}^2)}$$

$$\mathrm{var}(\hat{\beta}_3) = \frac{\sum x_{2i}^2}{\sum x_{2i}^2 \sum x_{3i}^2 - (\sum x_{2i} x_{3i})^2} \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{\sum x_{3i}^2 (1 - \rho_{23}^2)}$$

$$\mathrm{cov}(\hat{\beta}_2, \hat{\beta}_3) = \frac{-\rho_{23} \sigma^2}{(1 - \rho_{23}^2) \sqrt{x_{2i}^2} \sqrt{x_{3i}^2}}$$

Όσο υψηλότερη είναι η τιμή του ϱ_{23} τόσο υψηλότερη είναι η διακύμανση των συντελεστών παλινδρόμησης. Εάν είναι πολύ υψηλή, τότε δεν μπορούμε να έχουμε ακριβείς εκτιμητές.

Ο όρος $\dfrac{1}{(1-\rho_{23}^2)}$, ονομάζεται VIF (variance inflating factor) και δείχνει πόσο μεγαλώνουν η διακύμανση και η συνδιακύμανση, όπου ϱ_{23} είναι ο συντελεστής γραμμικής συσχέτισης (και όχι αιτιότητας) μεταξύ των μεταβλητών X_2 και X_3. Όταν οι μεταβλητές X_2 και X_3 έχουν τέλεια γραμμική εξάρτηση, ο παρονομαστής γίνεται μηδέν, αφού στην περίπτωση αυτή έχουμε $\varrho_{23} = 1$.

Ο συντελεστής προσδιορισμού R^2, υπολογίζεται από την παρακάτω σχέση:

$$R^2 = \frac{ESS}{TSS} = \frac{\hat{\beta}_2 \sum y_i x_{2i} + \hat{\beta}_3 \sum y_i x_{3i}}{\sum y_i^2} = 1 - \frac{RSS}{TSS} = 1 - \frac{\sum \hat{\varepsilon}_i^2}{\sum y_i^2}$$

Μια από τις ιδιότητες του συντελεστή προσδιορισμού είναι ότι είναι μια μη–φθίνουσα συνάρτηση του αριθμού των ανεξάρτητων μεταβλητών. Δηλαδή, όσο αυξάνεται ο αριθμός των ανεξάρτητων μεταβλητών ο συντελεστής προσδιορισμού πάντα αυξάνεται και ποτέ δεν μειώνεται. Ταυτόχρονα, με την αύξηση του αριθμού των ανεξάρτητων μεταβλητών το RSS μειώνεται (ή, τουλάχιστον, δεν αυξάνεται). Μεταξύ δύο υποδειγμάτων με την ίδια εξαρτημένη μεταβλητή και ίδιο αριθμό παρατηρήσεων, αλλά διαφορετικό αριθμό ανεξάρτητων μεταβλητών, επιλέγουμε εκείνο με την υψηλότερη τιμή του συντελεστή προσδιορισμού.

Στο απλό μονομεταβλητό υπόδειγμα, ϱ είναι ο συντελεστής γραμμικής συσχέτισης μεταξύ των μεταβλητών (y, x). Στο υπόδειγμα της πολλαπλής παλινδρόμησης, το ισοδύναμό του είναι ο συντελεστής πολλαπλής συσχέτισης, R, ο οποίος μετράει τον βαθμό συσχέτισης μεταξύ της εξαρτημένης μεταβλητής y και όλων των ανεξάρτητων μεταβλητών, ταυτόχρονα. Η διαφορά μεταξύ ϱ και R είναι ότι ο πρώτος μπορεί να πάρει τιμές στο διάστημα $[-1, +1]$, ενώ ο δεύτερος παίρνει πάντα θετικές τιμές. Ακόμα, υπάρχει μια ενδιαφέρουσα σχέση μεταξύ του συντελεστή προσδιορισμού R^2 και των διακυμάνσεων των μερικών συντελεστών παλινδρόμησης (που θα χρησιμοποιήσουμε στην ενότητα για την πολυσυγγραμμικότητα):

$\mathrm{var}(\hat{\beta}_j) = \dfrac{\sigma^2}{\sum x_j^2}\left(\dfrac{1}{1-R_j^2}\right)$, όπου $\hat{\beta}_j$ είναι ο συντελεστής της μερικής παλινδρόμησης της ανεξάρτητης μεταβλητής X_j και R_j^2 είναι ο συντελεστής προσδιορισμού R^2 της παλινδρόμησης της X_j επί των υπόλοιπων $(k-2)$ ανεξάρτητων μεταβλητών.

Μπορούμε να θεωρήσουμε και τον διορθωμένο συντελεστή προσδιορισμού, $\overline{R}^2$:

$\overline{R}^2 = 1 - \dfrac{\sum \hat{\varepsilon}_i^2 /(n-k)}{\sum y_i^2 /(n-1)} = 1 - \dfrac{\hat{\sigma}^2}{\mathrm{var}(y_i)}$. Μεταξύ των δύο συντελεστών προσδιορισμού υπάρχει η σχέση: $\overline{R}^2 = 1-(-R^2)\dfrac{n-1}{n-k}$, από την οποία εύκολα βλέπουμε ότι για $k>1$, $\overline{R}^2 < R^2 \quad και \quad \overline{R}^2 = R^2 = 1 \quad εαν \quad R^2 = 1$. Ακόμα, ο διορθωμένος συντελεστής προσδιορισμού μπορεί να πάρει και αρνητικές τιμές. Πρακτικά, στην περίπτωση που πάρει αρνητική τιμή, θεωρούμε ότι ισούται με το μηδέν. Στο πλαίσιο αυτής της συνολικής στατιστικής, ο Goldberger πρότεινε τον τροποποιημένο συντελεστή προσδιορισμού, $R^2_{\mathrm{mod}} = \left(1-\dfrac{k}{n}\right)R^2$.

Ο συντελεστής προσδιορισμού R^2 είναι μια τυχαία μεταβλητή, αφού Y και X είναι τυχαίες μεταβλητές. Ο έλεγχος σημαντικότητας του συντελεστή προσδιορισμού γίνεται με τη στατιστική F με έναν βαθμό ελευθερίας στον αριθμητή και (n–2) βαθμούς ελευθερίας στον παρονομαστή:

$$\frac{R^2}{\dfrac{\left(1-R^2\right)}{\left(n-2\right)}}.$$

Δραστηριότητα 42/Κεφάλαιο 1

Σε προηγούμενο παράδειγμα, θεωρήσαμε τις 103 εβδομαδιαίες τιμές κλεισίματος της μετοχής της Εθνικής Τράπεζας και του Γενικού Δείκτη τιμών του Χρηματιστηρίου Αξιών Αθηνών για το χρονικό διάστημα 9/1/2002 – 31/12/2003. Από τα αποτελέσματα προέκυψε ότι ο συντελεστής προσδιορισμού του υποδείγματος ήταν ίσος με 0.5333. (α) Να κάνετε έλεγχο στατιστικής σημαντικότητας του συντελεστή προσδιορισμού σε επίπεδο σημαντικότητας 5%. (β) Με τι ισούται ο συντελεστής συσχέτισης των αποδόσεων της ΕΤΕ και του ΓΔ του ΧΑ;

Την απάντηση θα βρείτε στο Παράρτημα, στο τέλος του κεφαλαίου.

Για τον συνολικό έλεγχο του υποδείγματος H_0: $\beta_2=\beta_3=...=\beta_k=0$ έναντι της εναλλακτικής H_1: «δεν είναι όλοι οι συντελεστές ταυτόχρονα ίσοι με το μηδέν», μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε και το κριτήριο:

$F = \dfrac{ESS/(k-1)}{RSS/(n-k)} = \dfrac{R^2/(k-1)}{(1-R^2)/(n-k)}$, που ακολουθεί την κατανομή F με k–1 και n–k βαθμούς ελευθερίας.

ANOVA

Πηγή Μεταβλητότητας	Άθροισμα Τετραγώνων	Βαθμοί Ελευθερίας	MSS
ESS (που οφείλεται στις ανεξάρτητες μεταβλητές)	$\hat{\beta}_2 \sum y_i x_{2i} + \hat{\beta}_3 \sum y_i x_{3i}$	2	ESS/2
RSS (που οφείλεται στα κατάλοιπα)	$\sum \hat{\varepsilon}_i^2$	$n - 3$	RSS/n–3
Συνολική	$\sum y_i^2$	$n - 1$	

Η στατιστική F υπολογίζεται από τον λόγο (ESS/df)/(RSS/df).
Γενικά, έστω το υπόδειγμα:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \beta_3 X_{3i} + ... + \beta_k X_{ki} + \varepsilon_i$$

$$\text{ή } Y = X\beta + \varepsilon$$

Υπό μορφή μητρών γράφεται:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ . \\ . \\ . \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \mathrm{x}_{11} & x_{21} & ... & \mathrm{x}_{k1} \\ 1 & x_{12} & \mathrm{x}_{22} & ... & \mathrm{x}_{k2} \\ . & & & & \\ . & & & & \\ . & & & & \\ 1 & x_{1n} & \mathrm{x}_{2n} & ... & x_{kn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ . \\ . \\ . \\ \beta_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ . \\ . \\ . \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}$$

Σύμφωνα με το θεώρημα Gauss–Markov, ο καλύτερος (δηλαδή ελάχιστης διακύμανσης) αμερόληπτος εκτιμητής των παραμέτρων του υποδείγματος είναι εκείνος, ο οποίος προκύπτει από την ελαχιστοποίηση του αθροίσματος των τετραγώνων των καταλοίπων:

$$L = \hat{\varepsilon}'\hat{\varepsilon} = (y - X\beta)'(y - X\beta) = \begin{bmatrix} \hat{\varepsilon}_1 & \hat{\varepsilon}_2 & ... & \hat{\varepsilon}_\mathrm{n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\varepsilon}_1 \\ \hat{\varepsilon}_2 \\ . \\ . \\ . \\ \hat{\varepsilon}_\mathrm{n} \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \hat{\varepsilon}_i^2$$

Από την ελαχιστοποίηση προκύπτει το διάνυσμα των εκτιμητών:

$$\hat{\beta} = \begin{bmatrix} \hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \\ . \\ . \\ . \\ \hat{\beta}_k \end{bmatrix} = \left(\mathrm{X'X}\right)^{-1} X'Y$$

Στο k–υπόδειγμα παλινδρόμησης με (k–1) ανεξάρτητες μεταβλητές, ισχύει:

$\mathrm{var}(\hat{\beta}_j) = \dfrac{\sigma^2}{\sum x_j^2}\left(\dfrac{1}{1-R_j^2}\right)$, όπου R_j^2 είναι ο συντελεστής προσδιορισμού της παλινδρόμησης της μεταβλητής X_j επί των υπόλοιπων ανεξάρτητων μεταβλητών. Τόσο αυτή η σχέση όσο και το VIF θα μας φανούν χρήσιμα στη συζήτηση για την πολυσυγγραμμικότητα.

1.4.4 Πρόβλεψη με το απλό γραμμικό υπόδειγμα

Σε προηγούμενο παράδειγμα θεωρήσαμε τις μηνιαίες τιμές κλεισίματος και τις μηνιαίες αποδόσεις του Γενικού Δείκτη (R(GD)) και της Εθνικής Τράπεζας της Ελλάδος R(ΕΤΕ) για το διάστημα 31/1/2000 έως 31/1/2002 και εκτιμήσαμε την παλινδρόμηση:

$$R(E\hat{T}E) = 0.010912 + 1.207841 R(\hat{G}D)$$

Εάν ο γενικός δείκτης τον επόμενο μήνα σημειώσει αρνητική μεταβολή ίση με 10%, για παράδειγμα, τότε, σύμφωνα με την εκτίμηση του υποδείγματος, θα περιμένουμε κατά μέσο όρο μεταβολή στη μετοχή της ΕΤΕ ίση με:

$$0.010912–1.27841(–0.10715) = –11.85\%$$

Το τυπικό σφάλμα της εκτίμησης αυτής δίνεται από το τυπικό σφάλμα της παλινδρόμησης $\sigma = \sqrt{\dfrac{\sum \hat{\varepsilon}_\iota^2}{\text{n-2}}}$, που είναι η τυπική απόκλιση των εκτιμημένων σφαλμάτων. Το διάστημα πρόβλεψης για την εξαρτημένη μεταβλητή Y, υπολογίζεται ως εξής:

$$\hat{Y} \pm t_\alpha \sigma \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{\left(X_{new} - \overline{X}\right)^2}{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2}}$$

1.4.5 Έλεγχος ισότητας δύο συντελεστών παλινδρόμησης

Συχνά, ο ερευνητής, που εργάζεται σε μια παλινδρόμηση, όπως: $Y_i = \alpha + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \beta_3 X_{3i} + \varepsilon_i$ ενδιαφέρεται για τον έλεγχο της υπόθεσης της ισότητας δύο συντελεστών, για παράδειγμα: $H_0 : \beta_2 = \beta_3 \;\; \eta \;\; \beta_2 - \beta_3 = 0$ έναντι της εναλλακτικής ότι είναι διάφοροι (η διαφορά τους είναι διάφορη του μηδενός).

Για παράδειγμα, έστω ότι η παραπάνω εξίσωση παλινδρόμησης παριστάνει μια συνάρτηση ζήτησης ενός προϊόντος, με Y = τη ζητούμενη ποσότητα, X_1 = την τιμή του προϊόντος, X_2 = το εισόδημα του καταναλωτή και X_3 = την περιουσία του καταναλωτή, όπου τα X και το Y είναι σε λογαριθμική μορφή. Η μηδενική υπόθεση παραπάνω συνεπάγεται τον έλεγχο ότι οι ελαστικότητες εισοδήματος και περιουσίας είναι ίδιες.

Ο έλεγχος γίνεται, κατά τα γνωστά, με το κριτήριο της στατιστικής t, όπως παρακάτω: $t = \dfrac{\hat{\beta}_2 - \hat{\beta}_3}{\sqrt{\mathrm{var}(\hat{\beta}_2) + \mathrm{var}(\hat{\beta}_3) - 2\,\mathrm{cov}(\hat{\beta}_2, \hat{\beta}_3)}}$. Στη συνέχεια, η απόρριψη ή η αποδοχή της μηδενικής υπόθεση γίνεται κατά τα γνωστά (t > *t–πίνακα* ισοδυναμεί με τη μη αποδοχή της μηδενικής υπόθεσης, ότι δηλαδή $\beta_i = \beta_j$).

Έλεγχος σταθερότητας παραμέτρων: *Chow test (1960)*

Συχνά, χρησιμοποιούμε υποδείγματα παλινδρόμησης σε δεδομένα χρονολογικών σειρών. Ωστόσο, πιθανόν να έχουν συμβεί κάποιες διαρθρωτικές μεταβολές στη σχέση της εξαρτημένης μεταβλητής με τις ανεξάρτητες μεταβλητές. Οι μεταβολές αυτές μπορεί να οφείλονται σε εξωτερικούς παράγοντες (πόλεμος, εμπάργκο από τον ΟΠΕΚ, συστηματικές καιρικές μεταβολές κ.ά.) ή να οφείλονται σε αλλαγή πολιτικής (όπως με το σύστημα συναλλαγματικών ισοτιμιών) ή, ακόμα, να οφείλονται σε ενέργειες θεσμικών οργάνων (ρυθμιστικές αλλαγές, φορολογικές μεταβολές, μεταβολές στους μισθούς) ή σε άλλους παράγοντες, όπως μεταβολή στις καταναλωτικές προτιμήσεις ή στην επενδυτική συμπεριφορά κ.λπ.

Στις περιπτώσεις αυτές θέλουμε να ελέγξουμε εάν οι συντελεστές παλινδρόμησης (σταθερός όρος και γωνιακός συντελεστής) παραμένουν σταθεροί πριν και μετά τη μεταβολή. Ο έλεγχος που ακολουθούμε είναι γνωστός ως Chow test, από το όνομα του Gr.Chow (1960) αν και πρόκειται για τη στατιστική F.

Οι υποθέσεις της εφαρμογής του Chow test είναι: (i) τα σφάλματα των παλινδρομήσεων πριν και μετά τη μεταβολή ακολουθούν την κανονική κατανομή με σταθερή (ομοσκεδαστική) διακύμανση, (ii) τα σφάλματα σε αυτές τις παλινδρομήσεις κατανέμονται ανεξάρτητα και (iii) γνωρίζουμε το σημείο της διαρθρωτικής μεταβολής.

Διαδικασία: Έστω ότι έχουμε δεδομένα πλήθους n παρατηρήσεων. Χωρίζουμε το δείγμα μας στο σημείο της διαρθρωτικής μεταβολής και δημιουργούμε δύο υποδείγματα, το ένα *Πριν* με $(n_1 - k)$ παρατηρήσεις και το άλλο *Μετά* το σημείο με $(n_2 - k)$ παρατηρήσεις.

(1) Εκτιμάμε το συνολικό υπόδειγμα σε όλο το μέγεθος του δείγματος, n και υπολογίζουμε το άθροισμα τετραγώνων των καταλοίπων (RSS_3) με (n_1+n_2-k) βαθμούς ελευθερίας.

(2) Εκτιμούμε χωριστά καθεμιά από τις παλινδρομήσεις, πριν και μετά το σημείο της διαρθρωτικής μεταβολής και υπολογίζουμε το άθροισμα των τετραγώνων των καταλοίπων, *Πριν*: RSS_1 και *Μετά*: RSS_2 με $(n_1 - k)$ και $(n_2 - k)$ βαθμούς ελευθερίας, αντίστοιχα.

(3) Αφού τα δείγματα είναι ανεξάρτητα, προσθέτουμε $RSS_1 + RSS_2$ για να πάρουμε το $RSS_{UR} = RSS_1 + RSS_2$ με (n_1+n_2-2k) βαθμούς ελευθερίας.

(4) Η ιδέα του Chow test είναι ότι εάν οι συντελεστές των παλινδρομήσεων *Πριν* και *Μετά* είναι ίδιοι (δηλαδή δεν υπάρχει δομική μεταβολή), τότε το άθροισμα των τετραγώνων των καταλοίπων RSS_3 δεν πρέπει να διαφέρει στατιστικά σημαντικά από το άθροισμα των καταλοίπων RSS_{UR}:

$$F = \frac{(RSS_3 - RSS_{UR})/k}{RSS_{UR}/(n_1 + n_2 - 2k)} \rightarrow F_{[k,(n_1+n_2-2k)]}$$

(5) Δεν μπορούμε να απορρίψουμε τη μηδενική υπόθεση της σταθερότητας των παραμέτρων (δηλαδή ότι δεν υπάρχει διαρθρωτική μεταβολή) εάν η υπολογισθείσα τιμή της F είναι μικρότερη από την κριτική τιμή της F, που παίρνουμε από τους πίνακες της κατανομής της F σε δεδομένο επίπεδο σημαντικότητας.

Ο έλεγχος σταθερότητας των παραμέτρων, όταν αυξάνεται το μέγεθος του δείγματος (Fisher, 1970)

Ο έλεγχος του Chow μπορεί να εφαρμοστεί όταν οι πρόσθετες παρατηρήσεις είναι περισσότερες από το πλήθος των παραμέτρων. Εάν, όμως, είναι λιγότερες, τότε μπορούμε να εφαρμόσουμε την παρακάτω διαδικασία:

(α) Εκτιμάμε το επαυξημένο υπόδειγμα (Ι) με $n_1 + n_2 - k$ βαθμούς ελευθερίας και υπολογίζουμε το άθροισμα των τετραγώνων των καταλοίπων, RSS.

(β) Εκτιμάμε την παλινδρόμηση μόνο με τις παρατηρήσεις του αρχικού δείγματος, (ΙΙ), n_1 και υπολογίζουμε το άθροισμα των τετραγώνων των καταλοίπων, RSS_1 με $n_1 - k$ βαθμούς ελευθερίας.

(γ) Υπολογίζουμε τη διαφορά $RSS - RSS_1$ με n_2 βαθμούς ελευθερίας.

(δ) Υπολογίζουμε τον λόγο $F_* = \dfrac{(RSS - RSS_1)/n_2}{RSS_1/(n_1 - k)}$.

Η μηδενική υπόθεση, δηλαδή της ισότητας των συντελεστών των παλινδρομήσεων (Ι) και (ΙΙ) θα μπορεί να απορριφθεί εάν η τιμή του λόγου F_* είναι μεγαλύτερη από την κριτική τιμή από τον πίνακα της κατανομής F σε επίπεδο σημαντικότητας a και βαθμούς ελευθερίας του αριθμητή n_2 και του παρονομαστή $(n_1 - k)$.

Ο έλεγχος της προβλεπτικής ικανότητας της παλινδρόμησης

Ο έλεγχος του Chow μπορεί να τροποποιηθεί σε έλεγχο για την εξέταση της προβλεπτικής ικανότητας της παλινδρόμησης, ο οποίος απαιτεί την εκτίμηση της παλινδρόμησης σε ολόκληρο το δείγμα και της παλινδρόμησης σε μια μόνο από τις υπο–περιόδους.

Ο έλεγχος αυτός απαιτεί την εκτίμηση της παλινδρόμησης σε ένα μεγάλο μέρος του δείγματος (δηλαδή, χρησιμοποιώντας τις περισσότερες από τις διαθέσιμες παρατηρήσεις) και, στη συνέχεια, τη χρησιμοποίηση των εκτιμημένων παραμέτρων για την πρόβλεψη της τιμής της εξαρτημένης μεταβλητής (Y) στο υπόλοιπο δείγμα. Τέλος, αυτές οι προβλέψεις συγκρίνονται με τις πραγματικές παρατηρήσεις. Η μηδενική υπόθεση του ελέγχου θέτει ότι τα σφάλματα πρόβλεψης είναι μηδέν.

Η διαδικασία είναι η εξής:

1. Εκτίμηση της παλινδρόμησης σε ολόκληρο το δείγμα, από όπου παίρνουμε το άθροισμα των τετραγώνων των καταλοίπων RSS,
2. Εκτίμηση της παλινδρόμησης στο μεγαλύτερο μέρος του δείγματος, από όπου παίρνουμε το άθροισμα των τετραγώνων των καταλοίπων RSS_1 και
3. Υπολογισμός της στατιστικής:

$$PFT = \frac{RSS - RSS_1}{RSS_1} * \frac{n_1 - k}{n - n_1}$$

όπου PFT είναι τα αρχικά Predictive Failure Test, n είναι το σύνολο των παρατηρήσεων, n_1 είναι το σύνολο των παρατηρήσεων της «μεγάλης» περιόδου που εκτιμάμε και k είναι το πλήθος των παραμέτρων που εκτιμάμε.

Παράδειγμα 46

Θεωρήσαμε τις ημερήσιες τιμές κλεισίματος της μετοχής της Εθνικής Τράπεζας και του Γενικού Δείκτη τιμών του Χρηματιστηρίου Αξιών Αθηνών για το χρονικό διάστημα 9/1/2002 – 19/1/2004. Τις τιμές αυτές τις μετασχηματίσαμε ως $\ln(p_t/p_{t-1})$ και παλινδρομήσαμε τις αποδόσεις της Εθνικής επί των αποδόσεων του Γενικού Δείκτη για όλη τη χρονική περίοδο. Τα αποτελέσματα είναι στον Πίνακα 1 του Παραδείγματος. Στη συνέχεια εκτιμήσαμε την ίδια παλινδρόμηση στις 397 πρώτες παρατηρήσεις (Πίνακας 2 του παραδείγματος).

Πίνακας 1
Εκτίμηση σε όλη τη χρονική περίοδο

	A	B	(Formula Bar)		E	F	G	H	I
1	SUMMARY OUTPUT								
2									
3	*Regression Statistics*								
4	Multiple R	0.821479							
5	R Square	0.674828							
6	Adjusted F	0.674173							
7	Standard E	0.011351							
8	Observatio	499							
9									
10	ANOVA								
11		*df*	*SS*	*MS*	*F*	*ignificance F*			
12	Regressior	1	0.132887	0.132887	1031.42	2.5E-123			
13	Residual	497	0.064033	0.000129					
14	Total	498	0.19692						
15									
16		*Coefficients*	*tandard Err*	*t Stat*	*P-value*	*Lower 95%*	*Upper 95%*	*ower 95.0%*	*pper 95.0%*
17	Intercept	7.23E-05	0.000508	0.142199	0.88698	-0.00093	0.001071	-0.00093	0.001071
18	X Variable	1.406523	0.043795	32.11573	2.5E-123	1.320476	1.49257	1.320476	1.49257

Πίνακας 2
Εκτίμηση στην περίοδο 9/1/2002 – 18/3/2003

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	SUMMARY OUTPUT								
2									
3	*Regression Statistics*								
4	Multiple R	0.822422							
5	R Square	0.676378							
6	Adjusted F	0.675558							
7	Standard E	0.011612							
8	Observatio	397							
9									
10	ANOVA								
11		*df*	*SS*	*MS*	*F*	*ignificance F*			
12	Regressior	1	0.111312	0.111312	825.5588	8.3E-99			
13	Residual	395	0.053259	0.000135					
14	Total	396	0.164571						
15									
16		*Coefficients*	*tandard Err*	*t Stat*	*P-value*	*Lower 95%*	*Upper 95%*	*ower 95.0%*	*pper 95.0%*
17	Intercept	5.06E-05	0.000583	0.086848	0.930837	-0.0011	0.001197	-0.0011	0.001197
18	X Variable	1.401363	0.048773	28.73254	8.3E-99	1.305476	1.497249	1.305476	1.497249

$PFT = \dfrac{RSS - RSS_1}{RSS_1} * \dfrac{n_1 - k}{n - n_1} = \dfrac{0.064033 - 0.053259}{0.53259} * \dfrac{397-2}{102} = 0.07833$. Η κριτική τιμή σε επίπεδο σημαντικότητας α=0.05 είναι F(102, 395) = 1.32. Συνεπώς, η μηδενική υπόθεση ότι το υπόδειγμα μπορεί να προβλέψει τις τελευταίες 102 παρατηρήσεις, δεν μπορεί να απορριφθεί.

1.4.6 Οι Έλεγχοι: Λόγος Συναρτήσεων Πιθανοφάνειας (LR), Wald (W) και του Πολλαπλασιαστή Lagrange (LM)

Οι έλεγχοι αυτοί στηρίζονται στη συνάρτηση μέγιστης πιθανοφάνειας. Έστω θ το σύνολο των παραμέτρων του υποδείγματος (στην περίπτωσή μας, ο σταθερός όρος, οι συντελεστές των ανεξάρτητων μεταβλητών και η τυπική απόκλιση των σφαλμάτων) και $L(\theta)$ η συνάρτηση πιθανοφάνειας. Υποθέσεις, όπως $\beta = 0$ ή $\beta = 1$ αποτελούν περιορισμούς επί των παραμέτρων. Με τη μέθοδο της μέγιστης πιθανοφάνειας εκτιμώνται (i) το υπόδειγμα χωρίς περιορισμούς, $L(\hat{\theta}_{UR})$ και (ii) το υπόδειγμα με τους περιορισμούς, $L(\hat{\theta}_R)$.

Ο έλεγχος του λόγου συναρτήσεων πιθανοφάνειας προκύπτει από τη διαίρεση: $\lambda = \dfrac{\max\ \mathrm{L}(\hat{\theta}_R)}{\max\ L(\hat{\theta}_{UR})}$, $0 < \lambda < 1$. Η τιμή του λόγου λ είναι απαραίτητα μικρότερη της μονάδας, αφού η τιμή του αριθμητή δεν μπορεί να είναι μεγαλύτερη από αυτή του παρονομαστή. Εάν η τιμή του λ είναι πλησίον του μηδενός, τότε η μηδενική υπόθεση δεν μπορεί να γίνει αποδεκτή, που σημαίνει ότι οι περιορισμοί δεν ασκούν επίδραση στη μέγιστη τιμή της συνάρτησης πιθανοφάνειας. Αντίθετα, εάν πλησιάζει τη μονάδα, τότε οι περιορισμοί ασκούν επίδραση και η μηδενική υπόθεση μπορεί να γίνει αποδεκτή.

Χωρίς να τους αναλύσουμε περισσότερο, αρκεί να σημειώσουμε ότι:

$$\text{[Neyman and Pearson (1928)]:} LR = n\log\left(\frac{1}{(1-R^2)}\right) \to \chi^2 \quad \mu\varepsilon \ \ r \ \ \beta.\varepsilon.$$

$$\text{[Abraham Wald (1943)]:} W = \frac{nR^2}{(1-R^2)} \to \chi^2 \quad \mu\varepsilon \ \ r \ \beta.\varepsilon.$$

$$\text{[C.R.Rao (1948)]:} LM = nR^2 \to \chi^2 \quad \mu\varepsilon \ \ r \ \ \beta.\varepsilon.$$

όπου r είναι ο αριθμός των περιορισμών. Ισχύει $W \geq LR \geq LM$, που σημαίνει ότι μπορεί η στατιστική W να απορρίψει μια υπόθεση, η οποία γίνεται αποδεκτή από τη στατιστική LM.

Στην πολλαπλή παλινδρόμηση για τον έλεγχο της μηδενικής υπόθεσης $\beta_i = 0$ με τα παραπάνω στατιστικά κριτήρια, αντικαθιστούμε τον συντελεστή προσδιορισμού με τον μερικό συντελεστή προσδιορισμού. Στην περίπτωση που θέλουμε να ελέγξουμε τη μηδενική υπόθεση $\beta_1 = \beta_2 = ... = \beta_k = 0$, αντικαθιστούμε με τον πολλαπλό συντελεστή προσδιορισμού.

Για να ελέγξουμε οποιονδήποτε γραμμικό περιορισμό:

$$LR = n\ln\left(\frac{RSS_R}{RSS_{UR}}\right)$$

$$W = \frac{RSS_R - RSS_{UR}}{RSS_{UR}/n}$$

$$LM = \frac{RSS_R - RSS_{UR}}{RSS_R/n}$$

που ακολουθούν την κατανομή χ^2 με r βαθμούς ελευθερίας.

1.4.7 Ετεροσκεδαστικότητα

Μία από τις βασικές υποθέσεις του κλασικού γραμμικού υποδείγματος της παλινδρόμησης είναι ότι η διακύμανση κάθε διαταρακτικού όρου ε_i –δεδομένων των τιμών των ανεξάρτητων μεταβλητών– είναι κάποιος σταθερός αριθμός σ^2. Αυτή είναι η υπόθεση της *ομοσκεδαστικότητας*.

Ωστόσο, υπάρχουν πολλά παραδείγματα στην εφαρμοσμένη έρευνα, όπου οι διακυμάνσεις των σφαλμάτων (και της εξαρτημένης μεταβλητής) δεν είναι σταθερές από δείγμα σε δείγμα: η αποταμίευση αυξάνεται όσο αυξάνεται το εισόδημα, όσο το εισόδημα αυξάνει, τόσο αυξάνεται και η καταναλωτική δαπάνη, όσο μια εταιρία (π.χ. μια τράπεζα ή οποιαδήποτε άλλη μεγάλη εταιρία) που διαχειρίζεται πλήθος δεδομένων βελτιώνει τα συστήματα συλλογής, επεξεργασίας και παρακολούθησης δεδομένων, τόσο λιγότερα σφάλματα (λειτουργικός κίνδυνος) κάνει και, συνεπώς, η διακύμανση βαίνει μειούμενη κ.λπ. Μια άλλη πηγή ετεροσκεδαστικότητας προέρχεται από την *ασυμμετρία* στην κατανομή μιας ή περισσότερων ανεξάρτητων μεταβλητών, όπως π.χ. εισόδημα, εκπαίδευση κ.ά., όπου είναι γνωστό ότι παρατηρείται η μεγαλύτερη συγκέντρωσή τους σε λίγους στις υψηλόμισθες τάξεις.

Ακόμα, το πρόβλημα της ετεροσκεδαστικότητας μπορεί να εμφανίζεται σε διαστρωματικά στοιχεία. Για παράδειγμα, εάν μελετάμε στοιχεία μισθολογικών καταστάσεων σε ένα σύνολο εταιριών ανάλογα με το μέγεθός τους, τότε το πιθανότερο είναι οι μεγαλύτερες εταιρίες να πληρώνουν υψηλότερους μισθούς από τις μικρότερες. ΄Η ακόμα, όταν θέλουμε να μελετήσουμε τη σχέση μεταξύ επενδυτικής δαπάνης και αύξηση των πωλήσεων σε έναν κλάδο διαφορετικών εταιριών ή της σχέση μεταξύ δαπάνης marketing και πωλήσεων σε ένα σύνολο διαφορετικών προϊόντων που παράγει η ίδια εταιρία ή την κατανάλωση σε σχέση με το εισόδημα μέσα από στοιχεία οικογενειακών προϋπολογισμών κ.λπ.

1. Γενικά, στα διπλο–λογαριθμικά οικονομετρικά υποδείγματα παλινδρόμησης, το πρόβλημα της ετεροσκεδαστικότητας αναμένεται να είναι μικρότερο, ωστόσο, δεν θεραπεύεται μόνο με αυτόν τον τρόπο.

2. Ένας πρώτος τρόπος να παρατηρήσουμε την ύπαρξη ετεροσκεδαστικότητας σε ένα υπόδειγμα είναι μέσω του διαγράμματος των τετραγώνων των καταλοίπων επί των τιμών της $\hat{Y}$ ή των τετραγώνων των καταλοίπων επί της ανεξάρτητης μεταβλητής *X*. Εάν παρατηρήσουμε κάποια συστηματική σχέση, τότε δεν μπορούμε να απορρίψουμε την υπόθεση της παρουσίας ετεροσκεδαστικών καταλοίπων στο υπόδειγμα.
3. Εάν υπάρχει ετεροσκεδαστικότητα στα κατάλοιπα, τότε οι εκτιμητές των συντελεστών είναι αμερόληπτοι ως προς την παράμετρο του πληθυσμού, ωστόσο, δεν έχουν την ελάχιστη διακύμανση.
4. Για να μειώσουμε το πρόβλημα, μπορούμε (1) να πάρουμε τους λογαρίθμους των μεταβλητών ή (2) να διαιρέσουμε τις τιμές των μεταβλητών με κάποιο μέγεθος, ωστόσο η στατιστική επαγωγή πρέπει να γίνει στο αρχικό υπόδειγμα.
5. Γενικά, αναμένουμε το τυπικό σφάλμα του σταθερού όρου να είναι ιδιαιτέρα υψηλό στην περίπτωση των ετεροσκεδαστικών καταλοίπων. Αναφορικά με το τυπικό σφάλμα του συντελεστή παλινδρόμησης: (i) εάν η διακύμανση των καταλοίπων σχετίζεται με το τετράγωνο της ανεξάρτητης μεταβλητής (που, συνήθως, παρατηρείται στα οικονομικά φαινόμενα) –ή μιας από τις ανεξάρτητες μεταβλητές, στην πολλαπλή παλινδρόμηση– τότε το τυπικό σφάλμα του συντελεστή της παλινδρόμησης θα είναι πολύ μικρό, με επιπτώσεις στο διάστημα εμπιστοσύνης του εκτιμητή. (ii) εάν σχετίζονται αρνητικά, τότε το τυπικό σφάλμα θα είναι πολύ μεγάλο.

Έλεγχοι ετεροσκεδαστικότητας

Να σημειωθεί, ωστόσο, ότι ακόμα και εάν τα σφάλματα δεν σχετίζονται με τις ανεξάρτητες μεταβλητές, δεν σημαίνει ότι τα τετράγωνα των σφαλμάτων, για παράδειγμα, δεν σχετίζονται με τις ανεξάρτητες μεταβλητές. Η υπόθεση πίσω από κάθε έλεγχο ετεροσκεδαστικότητας είναι ότι $\text{var}(\varepsilon_i) = \sigma_i^2 = \sigma^2 f(z_i)$, όπου *z* είναι μια άγνωστη μεταβλητή και όλοι οι έλεγχοι χρησιμοποιούν διαφορετικές προσεγγίσεις για την *f*(*z*).

Ο έλεγχος του White (1980)

Ο έλεγχος αυτός δεν είναι ευαίσθητος στην υπόθεση της κανονικότητας. Η διαδικασία εφαρμογής του είναι απλή και συνίσταται στην παλινδρόμηση του τετραγώνου των καταλοίπων επάνω σε όλες τις ανεξάρτητες μεταβλητές (x_1, x_2, ..., x_k), τα τετράγωνά τους $(x_1^2, x_2^2, \ ..., \ x_k^2)$, καθώς και στα γινόμενά τους ανά δύο x_1x_2, x_1x_3, ..., x_1x_k, x_2x_3,......κοκ. Θα μπορούσαν να προστεθούν οι ανεξάρτητες μεταβλητές στην παλινδρόμηση αυτή υψωμένες και σε μεγαλύτερη δύναμη.

Από την παραπάνω βοηθητική παλινδρόμηση υπολογίζουμε τον συντελεστή προσδιορισμού. Κάτω από τη μηδενική υπόθεση, ότι δηλαδή δεν υπάρχει ετεροσκεδαστικότητα στο υπόδειγμα, μπορεί να δειχθεί ότι το γινόμενο του μεγέθους του δείγματος επί την τιμή του συντελεστή προσδιορισμού επακολουθεί την κατανομή *χι*–τετράγωνο με βαθμούς ελευθερίας ίσους με τον αριθμό των ανεξάρτητων μεταβλητών (εκτός του σταθερού όρου) της βοηθητικής παλινδρόμησης:

$$n \ * \ R^2 \xrightarrow[asy]{} \chi^2$$

Για παράδειγμα, εάν έχουμε ένα υπόδειγμα με τρεις ανεξάρτητες μεταβλητές, τότε οι ανεξάρτητες μεταβλητές της βοηθητικής παλινδρόμησης (και συνεπώς, οι βαθμοί ελευθερίας) θα είναι ίσες με 9 (πλην του σταθερού όρου).

Ο έλεγχος ARCH (Engle, 1982)

Ένας άλλος έλεγχος ανίχνευσης της παρουσίας ετεροσκεδαστικών καταλοίπων προτάθηκε από τον Engle το 1982 και αναφέρεται ως ARCH test (AutoRegressive Conditional Heteroskedasticity). Η διαδικασία είναι απλή:

Εκτιμάμε το υπόδειγμά μας και παίρνουμε τα κατάλοιπα.

Παλινδρομούμε το τετράγωνο των καταλοίπων επί των q υστερήσεών τους και υπολογίζουμε τον συντελεστή προσδιορισμού της παλινδρόμησης

Ο στατιστικός έλεγχος ορίζεται ως $n \ * \ R^2 \xrightarrow[asy]{} \chi^2$.

Παράδειγμα 47

Ελέγξαμε την υπόθεση της ομοσκεδαστικότητας των καταλοίπων με τον έλεγχο ARCH στην παλινδρόμηση της γραμμής της αγοράς των αποδόσεων της μετοχής του ΟΤΕ επί του δείκτη FTSE–20 μετοχών (δείκτης μετοχών υψηλής κεφαλαιοποίησης στο Χ.Α.Α.) στις ημερήσιες παρατηρήσεις των τιμών των κλεισιμάτων για το έτος 2003.

Η παλινδρόμηση:

$$R(OTE)_t = a + bR(FTSE\_20)_t + u_t$$

έδωσε:

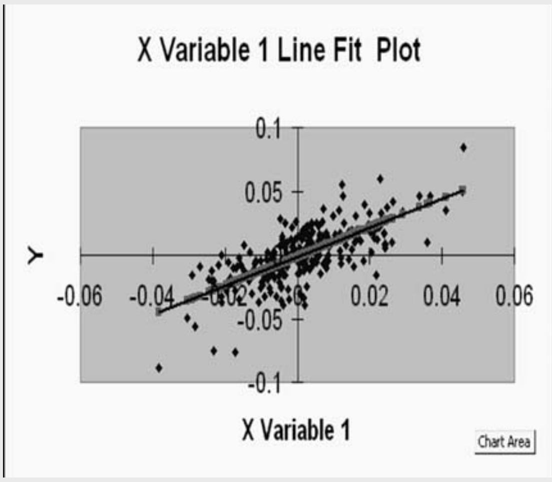
SUMMARY OUTPUT

Regression Statistics	
Multiple R	0.711981509
R Square	0.506917669
Adjusted R Square	0.50489684
Standard Error	0.015225952
Observations	246

ANOVA

	df	SS	MS	F
Regression	1	0.058153614	0.058154	250.8464
Residual	244	0.056566424	0.000232	
Total	245	0.114720038		

	Coefficients	Standard Error	t Stat	P-value
Intercept	-0.001415969	0.00097453	-1.45298	0.147515
R(FTSE_20)	1.14060513	0.072016401	15.83813	2.45E-39



Οι αποδόσεις του δείκτη των 20 εταιριών μεγάλης κεφαλαιοποίησης ερμηνεύουν το 50% περίπου της μεταβολής των αποδόσεων του ΟΤΕ. Ο συντελεστής της παλινδρόμησης (*συντελεστής βήτα της μετοχής του ΟΤΕ*) είναι στατιστικά σημαντικός και ίσος με 1.14 (επιθετικός) για το έτος 2003.

Το παραπάνω διάγραμμα παριστάνει τη γραμμή παλινδρόμησης. Στη συνέχεια, εφαρμόζουμε τη διαδικασία για τον έλεγχο ARCH καταλοίπων. Παλινδρομήσαμε το τετράγωνο των καταλοίπων που πήραμε από την παραπάνω παλινδρόμηση στο τετράγωνο των καταλοίπων με υστερήσεις –1, –2, –3, –4 και –5. Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στον παρακάτω πίνακα.

SUMMARY OUTPUT

Regression Statistics	
Multiple R	0.155598
R Square	0.024211
Adjusted F	0.003882
Standard E	0.000388
Observatio	246

ANOVA

	df	SS	MS	F
Regressior	5	8.95E-07	1.79E-07	1.190955
Residual	240	3.61E-05	1.5E-07	
Total	245	3.7E-05		

	Coefficients	Standard Err	t Stat	P-value
Intercept	0.000171	3.88E-05	4.403183	1.61E-05
X Variable	0.019146	0.064386	0.297357	0.766451
X Variable	0.025891	0.063883	0.405282	0.685631
X Variable	0.015607	0.063882	0.244308	0.807201
X Variable	0.125502	0.063869	1.964993	0.050569
X Variable	0.072554	0.064332	1.12779	0.260535

Ο έλεγχος της μηδενικής υπόθεσης, ότι δηλαδή δεν υπάρχει ετεροσκεδαστικότητα είναι $H_{0:}\ \gamma_1 = \gamma_2 = ... = \gamma_5 = 0$, όπου γ_i είναι οι συντελεστές της παλινδρόμησης. Υπολογίζουμε nR^2 = 246*0.024211 = 5.9559. Η κριτική τιμή σε επίπεδο σημαντικότητα 5% και βαθμούς ελευθερίας 5 είναι 11.07. Συνεπώς, δεν μπορούμε να απορρίψουμε την υπόθεση της ομοσκεδαστικότητας, δηλαδή την παρουσία των ARCH καταλοίπων.

Η μέθοδος των Γενικευμένων Ελαχίστων Τετραγώνων (Generalized Least Squares Method, GLSM)

Έστω το υπόδειγμα $Y_i = \beta_1 X_{0i} + \beta_2 X_i + \varepsilon_i$. Ας υποθέσουμε ότι η ετεροσκεδαστική διακύμανση των καταλοίπων είναι γνωστή και ας διαιρέσουμε με την τετραγωνική της ρίζα τις μεταβλητές του υποδείγματος:

$$\frac{Y_i}{\sigma_i} = \beta_1\left(\frac{X_{0i}}{\sigma_i}\right) + \beta_2\left(\frac{X_i}{\sigma_i}\right) + \left(\frac{\varepsilon_i}{\sigma_i}\right) \quad \text{εναλλακτικά}$$

$$Y_i^* = \beta_1^* X_{0i}^* + \beta_2^* X_i^* + \varepsilon_i^*$$

Τώρα, η διακύμανση των καταλοίπων $Var(\varepsilon_i^*) = E(\varepsilon_i^*)^2 = 1$, δηλαδή είναι ομοσκεδαστική και μπορούμε να εφαρμόσουμε τα ελάχιστα τετράγωνα στο τροποποιημένο υπόδειγμα.

Εάν θέσουμε $w_i = \dfrac{1}{\sigma_i^2}$ ως σταθμίσεις, τότε ο εκτιμητής του συντελεστή παλινδρόμησης θα είναι:

$$\hat{\beta}_2^* = \frac{\left(\sum_i w_i\right)\left(\sum_i w_i X_i Y_i\right) - \left(\sum_i w_i X_i\right)\left(\sum_i w_i Y_i\right)}{\left(\sum_i w_i\right)\left(\sum_i w_i X_i^2\right) - \left(\sum_i w_i X_i\right)^2}$$

που συμπίπτει με τον εκτιμητή των ελαχίστων τετραγώνων, εάν $w_i = w$ σταθερά. Με άλλα λόγια, η GLS ελαχιστοποιεί το άθροισμα των τετραγώνων των σταθμισμένων καταλοίπων, όπου η στάθμιση ισούται με $w_i = \dfrac{1}{\sigma_i^2}$.

Διόρθωση της ετεροσκεδαστικότητας

Θα διακρίνουμε δύο περιπτώσεις

(1) *Όταν η διακύμανση των καταλοίπων είναι γνωστή*. Στην περίπτωση αυτή θα χρησιμοποιούμε τη μέθοδο εκτίμησης των γενικευμένων ελαχίστων τετραγώνων (ή σταθμισμένη μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων).

Παράδειγμα 48

Ένας αναλυτής Αμοιβαίων Κεφαλαίων θέλει να μελετήσει τη σχέση μεταξύ του αριθμού των Αμοιβαίων Κεφαλαίων (*Y*) στις χώρες της Ευρώπης και του μεγέθους της Κεφαλαιοποίησης (*X*) της κάθε αγοράς. Τα Αμοιβαία Κεφάλαια που θεώρησε σε κάθε χώρα είναι τα: {property funds, derivatives funds, venture capital funds, fund of funds, speculative funds, opened end funds, closed end funds, equities funds, bond funds, διαχείρισης διαθεσίμων, κερδοσκοπικά, μεικτά και λοιπά}. Τις χώρες τις κατέταξε ανάλογα με τη συνολική τους κεφαλαιοποίηση (size).

Από τον αντίστοιχο πίνακα που κατασκεύασε (δεν παρουσιάζεται εδώ, αλλά τα στοιχεία αντλήθηκαν από την Ετήσια Έκθεση της Επιτροπής Κεφαλαιαγοράς, 2001) φαίνεται η ανομοιογένεια και οι διαφοροποιήσεις ανάμεσα στις χώρες, συνεπώς, η ετεροσκεδαστικότητα, στο υπόδειγμα $Y=\alpha + \beta X + \varepsilon$ που θέλει να μελετήσει, θα έχει μεγάλη πιθανότητα εμφάνισης.

Υπολόγισε, λοιπόν, τη διασπορά για κάθε κατηγορία Αμοιβαίων Κεφαλαίων σε κάθε χώρα και στάθμισε την εξαρτημένη και την ανεξάρτητη μεταβλητή με το μέγεθος αυτό, όπως στον παρακάτω πίνακα. Στη συνέχεια, εκτίμησε την παλινδρόμηση:

$$Y_i/\sigma_i = \beta_1^*(1/\sigma_i) + \beta_2^*(X_i/\sigma_i) + (\varepsilon_i/\sigma_i)$$

	MEAN # FUNDS	SIZE	Y/σ	X/σ
ΑΥΣΤΡΙΑ	-0.1866	9	-3.0112	145.2236
ΒΕΛΓΙΟ	11.077	7	0.8403	0.531
ΓΑΛΛΙΑ	7.4615	3	0.5405	0.217
ΓΕΡΜΑΝΙΑ	22.92307	2	0.3141	0.0274
ΔΑΝΙΑ	487.92307	12	0.3352	0.008245
ΕΛΒΕΤΙΑ	250.6153	4	0.2911	0.004647
ΕΛΛΑΔΑ	1.384615	8	0.3066	1.7716
ΑΓΓΛΙΑ	805.46154	1	0.884	0.0010975
ΙΡΛΑΝΔΙΑ	424.0769	10	0.7914	0.0187
ΙΣΠΑΝΙΑ	84.3846	6	0.5581	0.039688
ΙΤΑΛΙΑ	103.92308	5	0.5946	0.028607
ΠΟΡΤΟΓΑΛΙΑ	401.1538	11	0.51638	0.01416
ΛΟΥΞΕΜΒ.	62.07692	13	0.35903	0.075188

Τα αποτελέσματα της παλινδρόμησης δίνονται στον παρακάτω πίνακα. Να σημειωθεί ότι: (α) η παλινδρόμηση αυτή δεν έχει σταθερό όρο και (β) δεν αναφέρεται ο συντελεστής προσδιορισμού διότι δεν έχει συγκρισιμότητα, όταν η παλινδρόμηση περνάει από την αρχή των αξόνων (απουσία σταθερού όρου).

ANOVA				
	df	*SS*	*MS*	*F*
Regressior	2	9.067672	4.533836	16.57946
Residual	11	3.008071	0.273461	
Total	13	12.07574		
	Coefficients	*tandard Err*	*t Stat*	*P-value*
Intercept	0	#N/A	#N/A	#N/A
X Variable	-1.83937	1.002613	-1.83458	0.093734
X Variable	16.36782	9.023213	1.813968	0.097025

Έτσι, η εκτιμηθείσα παλινδρόμηση είναι:

$$\left(\hat{Y}_i/\sigma_i\right) = -1.834(1/\sigma_i) + 16.367(X_i/\sigma_i)$$
$$t \qquad (-1.834) \qquad (1.814)$$

που είναι στατιστικά σημαντική (οριακά) σε επίπεδο σημαντικότητας 10%.

(2) *Όταν η διακύμανση των καταλοίπων είναι άγνωστη*. Στην περίπτωση αυτή ακολουθείται η διαδικασία του White (1982).

1.4.8 Αυτοσυσχέτιση

Τόσο στην περίπτωση των διαστρωματικών στοιχείων, όσο και στην περίπτωση όπου ο αναλυτής εργάζεται με διαθέσιμα στοιχεία χρονολογικών σειρών, το πρόβλημα της αυτοσυσχέτισης των καταλοίπων μπορεί να εμφανιστεί. Στην πρώτη περίπτωση (για παράδειγμα, όταν μελετάμε οικογενειακούς προϋπολογισμούς ή όταν μελετάμε χαρακτηριστικά και συμπεριφορές νοικοκυριών ή, ακόμα, όταν μελετάμε χαρακτηριστικά επιχειρήσεων) έχει παρατηρηθεί ότι ο τυχαίος όρος του ενός νοικοκυριού, επιχείρησης κ.λπ. συσχετίζεται με αυτόν του άλλου νοικοκυριού, επιχείρησης κ.λπ. Αυτή η αυτοσυσχέτιση ονομάζεται χωρική αυτοσυσχέτιση. Ακόμα περισσότερο, όμως, είναι εμφανής στην περίπτωση των χρονολογικών σειρών. Για παράδειγμα, όταν μελετάμε τις ημερήσιες/εβδομαδιαίες... αποδόσεις ενός περιουσιακού στοιχείου είναι πολύ συνηθισμένο να έχουμε αυτοσυσχέτιση.

Το πρόβλημα της αυτοσυσχέτισης μπορεί να οφείλεται (i) σε καθαρή αυτοσυσχέτιση στο υπόδειγμα, (ii) σε παράλειψη σημαντικής ανεξάρτητης μεταβλητής και (iii) σε κακή εξειδίκευση του υποδείγματος (συναρτησιακή μορφή).

Θα ορίζουμε:

$\varepsilon_t,\ \varepsilon_{t-1}$ first order autocorrelation, ρ_1

$\varepsilon_t,\ \varepsilon_{t-2}$ second order autocorrelation, ρ_2

$\varepsilon_t,\ \varepsilon_{t-k}$ autocorrelation of order k, ρ_k

Γενικά, σε ένα πλήθος *n* παρατηρήσεων θα έχουμε ($n - 1$) αυτοσυσχετίσεις, που φυσικά δεν είναι δυνατόν να τις υπολογίζουμε όλες, αλλά θα περιοριστούμε στις πρώτες και τις δεύτερες.

Υπάρχουν διάφοροι λόγοι, που οδηγούν στην εμφάνιση της αυτοσυσχέτισης. Για παράδειγμα, το τμήμα marketing μιας βιομηχανίας αυτοκινήτων θέλει να εκτιμήσει τη συνάρτηση της ζητούμενης ποσότητας των αυτοκινήτων μάρκας που παράγει, BMW (Y), ως συνάρτηση της τιμής των αυτοκινήτων BMW (X_2), του εισοδήματος των καταναλωτών (X_3) και της τιμής ανταγωνιστικής βιομηχανίας, Mercedes (X_4), όπως στην εξίσωση (1), παρακάτω. Έστω, όμως, ότι αντί του ορθού υποδείγματος (1), ο αναλυτής εκτιμά το υπόδειγμα (2), δηλαδή τη σχέση μεταξύ της ζητούμενης ποσότητας των αυτοκινήτων μάρκας που παράγει, BMW (Y), ως συνάρτηση της τιμής των αυτοκινήτων BMW (X_2) και του εισοδήματος των καταναλωτών (X_3). Τότε, αυτή η *παράλειψη της μιας μεταβλητής* ισοδυναμεί με τη σχέση (3).

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \beta_3 X_{3t} + \beta_4 X_{4t} + \varepsilon_t \quad (1)$$

$$\mathrm{Y_t} = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \beta_3 X_{3t} + \nu_t \quad (2)$$

$$\nu_{\mathrm{t}} = \beta_4 X_{4t} + \varepsilon_t \quad (3)$$

Στην περίπτωση που η τιμή της ανταγωνιστικής μάρκας αυτοκινήτων Mercedes επηρεάζει, πράγματι, τη ζήτηση των αυτοκινήτων τύπου BMW, τότε ο τυχαίος παράγοντας ν_t θα αντικατοπτρίζει ένα συστηματικό δρομολόγιο, δημιουργώντας (λανθασμένη) αυτοσυσχέτιση.

Ένας γρήγορος και απλός τρόπος είναι να εκτιμήσουμε και την (1) και την (2) και να ελέγξουμε εάν εξαφανίζεται η αυτοσυσχέτιση όταν εκτιμάμε τη συνάρτηση (1).

Μια άλλη περίπτωση εμφάνισης της αυτοσυσχέτισης είναι όταν ο ερευνητής επιλέξει *λάθος υπόδειγμα ή λάθος συναρτησιακή μορφή*. Για παράδειγμα, για την εκτίμηση του οριακού κόστους (Y) ενός προϊόντος χρησιμοποιούμε τη συνάρτηση (1), παρακάτω, ενώ ο αναλυτής μας εκτίμησε τη συνάρτηση (2), έτσι, ο τυχαίος όρος $\nu_t = (X_2)^2 + \varepsilon_t$ θα συλλάβει τη συστηματική επίδραση της μεταβλητής X_2 επί του οριακού κόστους του προϊόντος, όπου η μεταβλητή X_2 παριστάνει την παραγόμενη ποσότητα.

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \beta_3 X_{2t}^2 + \varepsilon_t \quad (1)$$

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \nu_t \quad (2)$$

Μια τρίτη περίπτωση εμφάνισης της αυτοσυσχέτισης είναι στα υποδείγματα χρονολογικών σειρών, όπου η ανεξάρτητη μεταβλητή είναι η ίδια η εξαρτημένη μεταβλητή με *χρονική υστέρηση* (αυτοπαλινδρόμηση).

Επίσης, σε πολλές εφαρμογές, για παράδειγμα, στην ανάλυση οικογενειακών προϋπολογισμών, όπου οι σχετικές έρευνες διενεργούνται ανά 10–ετία και ο αναλυτής χρειάζεται στοιχεία για την ενδιάμεση περίοδο, συνήθως οδηγείται στη δημιουργία τέτοιων στοιχείων με κατάλληλη *διαχείριση των δεδομένων*, μέσω μεθόδων παρεμβολής (γραμμικής ή μη–γραμμικής). Σε τέτοιες περιπτώσεις «επιβάλλονται» συστηματικά αποτελέσματα που δεν θα υπήρχαν στα πραγματικά δεδομένα.

Τέλος, στην περίπτωση όπου οι μεταβλητές που επεξεργαζόμαστε *δεν είναι στάσιμες*, τότε και ο τυχαίος όρος δεν θα είναι στάσιμος (όχι, όμως, αναγκαία) και, συνεπώς, θα εκδηλώνει το πρόβλημα της αυτοσυσχέτισης.

Έστω το υπόδειγμα $Y_t = \alpha + \beta X_t + \varepsilon_t$ και έστω ότι $E(\varepsilon_t \varepsilon_{t+s}) \neq 0 \quad (\mathrm{s} \neq 0)$. Ακόμα, ας υποθέσουμε ότι ο διαταρακτικός όρος προέρχεται από την παρακάτω διαδικασία:

$\varepsilon_t = \rho\varepsilon_{t-1} + u_t, \quad -1 < \rho < +1$, γνωστή ως *αυτοπαλίνδρομο σχήμα Markov πρώτης τάξης*, AR(1), κάτω από τις υποθέσεις για τα σφάλματα u_t ότι:

$$E(u_t)=0, \quad \mathrm{var}(\mathrm{u_t})=\sigma_u^2, \quad \mathrm{cov}(u_t,u_{t+s})=\gamma_{t+s}=\begin{cases}\sigma_u^2 & \varepsilon\alpha\nu \quad t=s\\ 0 & \varepsilon\alpha\nu \quad \mathrm{s}\neq \mathrm{t}\end{cases}$$

Η διαδικασία που ικανοποιεί τις παραπάνω σχέσεις στα σφάλματα ονομάζεται *λευκός θόρυβος μηδενικού μέσου*.

Αποδεικνύεται ότι στο υπόδειγμα AR(1) ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις:

$$\mathrm{var}(\varepsilon_t)=E(\varepsilon_t^2)=\frac{\sigma_u^2}{1-\rho^2}, \ \mathrm{cov}(\varepsilon_t,\varepsilon_{t+s})=E(\varepsilon_t\varepsilon_{t-s})=\rho^s\frac{\sigma_u^2}{1-\rho^2}, \ correl(\varepsilon_t,\varepsilon_{t+s})=\rho^s$$

Προκύπτει, λοιπόν, ότι η διακύμανση του διαταρακτικού όρου ε_t είναι ομοσκεδαστική. Ακόμα, $|\rho|<1$, που αποτελεί τη συνθήκη η διαδικασία AR(1) να είναι στάσιμη, δηλαδή ο μέσος, η διακύμανση και η συνδιακύμανση του διαταρακτικού όρου να μην μεταβάλλεται στον χρόνο. Επιπλέον, σημαίνει ότι η τιμή της συνδιακύμανσης θα μειώνεται όσο πηγαίνουμε πίσω στο παρελθόν.

Έστω το υπόδειγμα: $y_t=\alpha+\beta x_t+\varepsilon_t, \qquad \varepsilon_t=\rho\varepsilon_{t-1}+u_t$. Γράφουμε το υπόδειγμα με μια χρονική υστέρηση (y_{t-1}) και πολλαπλασιάζουμε με ϱ. Στη συνέχεια, αφαιρούμε τη νέα σχέση από το αρχικό υπόδειγμα και θα έχουμε:

$y_t-\rho y_{t-1}=\alpha(1-\rho)+\beta(x_t-\rho x_{t-1})+u_t$, που ονομάζεται και quasi–difference του αρχικού υποδείγματος. Το υπόδειγμα αυτό, τώρα, μπορεί να εκτιμηθεί με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων, δηλαδή $y_t^*=\alpha+\beta x_t^*+\varepsilon_t$, όπου y_t^* = $y_t-\rho y_{t-1}$ και $x_t^*=x_t-\rho x_{t-1}$ και, $\hat{\beta}=\dfrac{\sum_{t=2}^n x_t^* y_t^*}{\sum_{t=2}^n x_t^{*2}}$, *με* $\mathrm{var}(\hat{\beta})=\dfrac{\sigma^2}{\sum_{t=2}^n x_t^{*2}}$.

Με τον τρόπο αυτό, βέβαια, χάνουμε την πρώτη παρατήρηση των δεδομένων μας, λόγω του γεγονότος ότι θεωρήσαμε τις πρώτες διαφορές. Να σημειωθεί, ακόμα, ότι η μέθοδος αυτή δεν είναι ακριβώς ισοδύναμη με την GLS, όπου η τελευταία χρησιμοποιεί όλη την πληροφορία από το δείγμα και y_t^* = $\sqrt{y_t-\rho^2}$ $\mathrm{y_t}$ και $x_t^*=\sqrt{x_t-\rho^2}\ x_t$.

Οι συνέπειες, εάν δεν λάβουμε υπόψη μας την αυτοσυσχέτιση, είναι σημαντικές:

(1) Η διακύμανση των καταλοίπων υποεκτιμά το μέγεθος της πραγματικής διακύμανσης.
(2) Η τιμή του συντελεστή προσδιορισμού R^2 είναι υπερεκτιμημένη (ως αποτέλεσμα της συνέπειας (1)).
(3) Οι έλεγχοι στατιστικής σημαντικότητας με τις *t* και *F* δεν είναι αξιόπιστοι.

Η στατιστική Durbin–Watson (1951)

Ο πιο απλός τρόπος είναι να εξετάσουμε τη συσχέτιση μεταξύ ε_t και ε_{t-1}, δηλαδή τη στατιστική σημαντικότητα στον συντελεστή της συσχέτισης ϱ. Η ευρύτατα χρησιμοποιούμενη στατιστική είναι αυτή των Durbin και Watson (d), η οποία ορίζεται:

$$d = \frac{\sum_{t=2}^{n}(\hat{\varepsilon}_t - \hat{\varepsilon}_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^{n}\hat{\varepsilon}_t^2} = \frac{\sum\hat{\varepsilon}_t^2 + \sum\hat{\varepsilon}_{t-1}^2 - 2\sum\hat{\varepsilon}_t\hat{\varepsilon}_{t-1}}{\sum_{t=1}^{n}\hat{\varepsilon}_t^2} \approx 2\left(\frac{\sum\hat{\varepsilon}_t^2}{\sum_{t=1}^{n}\hat{\varepsilon}_t^2} - \frac{\sum\hat{\varepsilon}_t\hat{\varepsilon}_{t-1}}{\sum_{t=1}^{n}\hat{\varepsilon}_t^2}\right) = 2(1-\hat{\rho}) .$$

Εάν ο συντελεστής συσχέτισης ισούται με τη μονάδα, τότε η στατιστική d ισούται με το μηδέν. Εάν τα σφάλματα στη χρονική στιγμή t και t–1 είναι ασυσχέτιστα, τότε $\varrho=0$ και $d=2$. Όταν η τιμή της στατιστικής d είναι κοντά στο 0, τότε υπάρχει ισχυρή ένδειξη θετικής αυτοσυσχέτισης των καταλοίπων, ενώ όταν είναι κοντά στο 4, τότε τα σφάλματα συσχετίζονται ισχυρά αρνητικά.

Επειδή η δειγματική κατανομή της d προκύπτει δύσκολα, αφού εξαρτάται από τις τιμές της ανεξάρτητης μεταβλητής (X) –αφού η d υπολογίζεται από τα σφάλματα ε, που εξαρτώνται από τις τιμές της X– οι Durbin και Watson κατασκεύασαν δύο όρια, το άνω όριο (d_U) και το κάτω όριο (d_L), ώστε εάν η τιμή της d βρίσκεται εντός των ορίων αυτών να μπορεί να ληφθεί απόφαση σχετικά με την ύπαρξη της αυτοσυσχέτισης (θετικής ή αρνητικής). Έτσι, ο έλεγχος υπόθεσης είναι: H_0: $\varrho = 0$ έναντι της εναλλακτικής H^+_a: για την ύπαρξη θετικής αυτοσυσχέτισης και H^-_a: για την ύπαρξη αρνητικής αυτοσυσχέτισης

Κανόνες απόφασης με τη στατιστική Durbin–Watson

$0 < d < d_L$	$d_L < d < d_U$	$d_U < d < 4 - d_U$	$4 - d_U < d < 4 - d_L$	$4 - d_L < d < 4$
Ένδειξη για θετική αυτοσυσχέτιση	Δεν μπορεί να ληφθεί απόφαση(1)	Ένδειξη για τη μη–ύπαρξη αυτοσυσχέτισης	Δεν μπορεί να ληφθεί απόφαση(1)	Ένδειξη για αρνητική αυτοσυσχέτιση

(1) Όσο μεγαλώνει το δείγμα μας, τόσο μικρότερη είναι η περιοχή της μη–λήψης απόφασης.

Παράδειγμα 49

Στον παρακάτω πίνακα δίνονται οι τιμές του Γενικού Δείκτη του Χ.Α.Α. και του όγκου των συναλλαγών για την περίοδο 9/1/2002 έως 19/1/2004 (στήλες B και C). Με τα δεδομένα του πίνακα αυτού εκτιμήθηκε η παλινδρόμηση των αποδόσεων του Γενικού Δείκτη του Χ.Α.Α. επί των μεταβολών του όγκου των συναλλαγών. Τα αποτελέσματα της παλινδρόμησης και η τιμή της στατιστικής Durbin–Watson παρουσιάζονται παρακάτω.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Date	Close	Volume	R(Volume)	R(Close)	*Residuals*	u(t-1)	(u(t) - u(t-1))^2	u(t)^2
2	9/1/2002	2582.26	17612						
3	10/1/2002	2587.41	19596	0.11265	0.001994	0.00173			2.99298E-06
4	11/1/2002	2574.68	22388	0.142478	-0.00492	-0.00537	0.00173	5.04056E-05	2.88333E-05
5	14/1/2002	2523.85	15782	-0.29507	-0.01974	-0.01747	-0.00537	0.00014648	0.00030529
6	15/1/2002	2521.63	17267	0.094095	-0.00088	-0.00103	-0.01747	0.000270401	1.05818E-06

....

....

....

496	12/1/2004	2404.33	24854	-0.25003	0.000412	0.002402	-0.0015	1.51847E-05	5.76788E-06
497	13/1/2004	2446.19	47297	0.902993	0.01741	0.012234	0.002402	9.66742E-05	0.000149669
498	14/1/2004	2482.35	42838	-0.09428	0.014782	0.015804	0.012234	1.27451E-05	0.000249766
499	15/1/2004	2481	46811	0.092745	-0.00054	-0.00068	0.015804	0.000271869	4.68516E-07
500	16/1/2004	2494.91	33506	-0.28423	0.005607	0.007809	-0.00068	7.21362E-05	6.09777E-05
501	19/1/2004	2469.34	43558	0.300006	-0.01025	-0.01168	0.007809	0.000379717	0.000136364
502						SUM		**0.116002501**	**0.064007673**

503	*Regression Statistics*				
504	Multiple R	0.22585			
505	R Square	0.051008			
506	Adjusted R Squ	0.049099			
507	Standard Error	0.011348			
508	Observations	499			
509					
510	ANOVA				
511		*df*	*SS*	*MS*	*F*
512	Regression	1	0.0034	0.00344	26.71381
513	Residual	497	0.064	0.000129	
514	Total	498	0.0674		
515					
516		*Coefficients*	*andard E*	*t Stat*	*P-value*
517	Intercept	-0.00044	0.0005	-0.84738	0.397193
518	X Variable 1	0.006215	0.0012	5.168541	3.42E-07
519					
520	Durbin-Watson	1.812322			

Από τα αποτελέσματα παρατηρούμε ότι η ανεξάρτητη μεταβλητή (μεταβολές του όγκου των συναλλαγών) είναι στατιστικά σημαντική (τιμές των στατιστικών t, F). Ωστόσο, οι μεταβολές του όγκου των συναλλαγών δεν μπορούν να ερμηνεύσουν παρά το 5.1% των αποδόσεων του Γενικού Δείκτη του Χ.Α.Α. στο συγκεκριμένο χρονικό διάστημα.

Η στατιστική Durbin–Watson υπολογίστηκε από τον λόγο (H502/I502) και βρέθηκε ίση με 1.8123. Σε επίπεδο σημαντικότητας $\alpha=0.05$ και 499 παρατηρήσεις, το άνω και κάτω όριο της στατιστικής είναι 1.77 και 1.75 αντίστοιχα. Παρατηρούμε ότι η τιμή της στατιστικής D–W είναι κοντά στο 2 και, σε κάθε περίπτωση πάντως, βρίσκεται μεταξύ του άνω ορίου $d(u)=1.77$ και $4–d(u)=2.23$, δηλαδή στην περιοχή που δεν μπορούμε να απορρίψουμε τη μηδενική υπόθεση $H0$: δεν υπάρχει θετική (αρνητική) αυτοσυσχέτιση.

Να σημειωθεί ότι η στατιστική των Durbin και Watson χρησιμοποιείται κάτω από τις παρακάτω υποθέσεις:

(α) Υπάρχει σταθερός όρος στο υπόδειγμα που μελετάμε.
(β) Οι ανεξάρτητες μεταβλητές είναι μη–στοχαστικές.
(γ) Ο στοχαστικός όρος ακολουθεί το υπόδειγμα AR(1) και όχι υψηλότερου βαθμού.
(δ) Ο στοχαστικός όρος κατανέμεται σύμφωνα με την κανονική κατανομή.
(ε) Δεν περιλαμβάνονται στο υπόδειγμα ως ανεξάρτητες μεταβλητές που είναι η εξαρτημένη μεταβλητή σε διάφορες χρονικές υστερήσεις, γιατί στην περίπτωση αυτή η τιμή της στατιστικής *d* τείνει στην τιμή 2. Στην περίπτωση αυτή χρησιμοποιείται η στατιστική *h* του Durbin (1970).
(στ) Δεν πρέπει να λείπουν παρατηρήσεις από το δείγμα μας.
(ε) Ακόμα, να σημειωθεί ότι η στατιστική D–W ελέγχει μόνο την περίπτωση της αυτοσυσχέτισης πρώτου βαθμού.

Έλεγχος όταν υπάρχει η εξαρτημένη μεταβλητή με χρονική υστέρηση στο σύνολο των ανεξάρτητων μεταβλητών

Έστω το υπόδειγμα $y_t = \beta_1 + \beta_2 x_t + \beta_3 y_{t-1} + \varepsilon_t$, το οποίο περιέχει ως μια ανεξάρτητη μεταβλητή την εξαρτημένη μεταβλητή με μια χρονική υστέρηση. Σε αυτά τα υποδείγματα, για τον έλεγχο της αυτοσυσχέτισης, θα χρησιμοποιούμε τη στατιστική *h*:

$$h = \hat{\rho}\sqrt{\frac{n}{1 - n[\mathrm{var}(\hat{\beta}_3)]}} \qquad h \sim N(0,\, 1)$$

που κατανέμεται σύμφωνα με την τυποποιημένη κανονική κατανομή. ϱ είναι ο εκτιμητής πρώτου βαθμού συσχέτισης, που προκύπτει από τη σχέση $\hat{\rho} = \dfrac{\sum \hat{\varepsilon}_t \hat{\varepsilon}_{t-1}}{\sum \hat{\varepsilon}_t^2}$. Έτσι, για παράδειγμα, εάν σε μια εφαρμογή βρούμε $|h| > 1.96$, τότε μπορούμε να απορρίψουμε τη μηδενική υπόθεση ότι $\varrho = 0$, δηλαδή ότι δεν υπάρχει αυτοσυσχέτιση πρώτου βαθμού σε επίπεδο σημαντικότητας α=0.05.

Ο έλεγχος ARCH–LM (Engle 1982)

Έστω το υπόδειγμα $y_t = \beta y_{t-1} + \varepsilon_t$. Στο υπόδειγμα αυτό, ο μη δεσμευμένος μέσος είναι ίσος με μηδέν και η μη δεσμευμένη διακύμανση ίση με $\dfrac{\sigma^2}{1-\beta^2}$. Ο δεσμευμένος μέσος ισούται με $E(y_t / y_{t-1}) = \beta y_{t-1}$ που εξαρτάται από τον χρόνο *t*, αλλά η δεσμευμένη διακύμανση $\mathrm{var}(y_t / y_{t-1}) = \sigma^2$ είναι σταθερή. Το υπόδειγμα ARCH είναι μια γενίκευση αυτού στο ότι η δεσμευμένη διακύμανση είναι, επίσης, μια συνάρτηση του παρελθόντος $\mathrm{var}(y_t / y_{t-1}) = h_t = a_0 + a_1\varepsilon_{t-1}^2 + ... + a_p\varepsilon_{t-p}^2$.

Γενικότερα, έστω το υπόδειγμα $y_t = \beta_1 + \beta_2 x_{2t} + ... + \beta_k x_{kt} + \varepsilon_t$, όπου υποθέτουμε ότι η διακύμανση του σφάλματος ακολουθεί μια ARCH(p) διαδικασία: $\mathrm{var}(y_t / y_{t-1}) = h_t = a_0 + a_1\varepsilon_{t-1}^2 + ... + a_p\varepsilon_{t-p}^2$. Εάν εκτιμήσουμε το υπόδειγμα, τότε θα πάρουμε μια τιμή της στατιστικής Durbin–Watson σημαντική, λόγω του αποτελέσματος ARCH, που δίνεται με τη συνάρτηση της διακύμανσης. Δηλαδή η σημαντικότητα της στατιστικής d δεν οφείλεται στην αυτοσυσχέτιση των σφαλμάτων, αλλά στις συνέπειες ARCH. Η διαδικασία του ελέγχου είναι:

(1) Εκτιμάμε το υπόδειγμα και υπολογίζουμε τα κατάλοιπα.
(2) Παλινδρομούμε το τετράγωνο των εκτιμημένων καταλοίπων επί μιας σταθεράς και των τετραγώνων των καταλοίπων με χρονική υστέρηση $p = 1, 2, ...$
(3) Υπολογίζουμε τη στατιστική LM: $(n - p)R^2 \sim \chi^2$ με p βαθμούς ελευθερίας.
(4) Η μηδενική υπόθεση $H_0 : a_1 = a_2 = ... = a_p = 0$ απορρίπτεται εάν $LM - statistic > \chi^2_{p,\alpha}$, σε δεδομένο επίπεδο σημαντικότητας α.

<u>Εκτίμηση υποδείγματος εάν απορριφθεί η μηδενική υπόθεση $H0$: $\varrho = 0$</u>

1. ϱ γνωστό

$(y_t - \rho y_{t-1}) = \beta_1(1-\rho) + \beta_2(x_t - \rho x_{t-1}) + (\varepsilon_t - \rho\varepsilon_{t-1})$, δηλαδή η παλινδρόμηση:

$y_t^* = \beta_1^* + \beta_2^* x_t^* + u_t$, με τις γνωστές αντιστοιχίες.

2. ϱ άγνωστο

Η τιμή του ϱ είναι σπάνια γνωστή στην πράξη, επειδή η εκτίμηση του ϱ υπόκειται σε σφάλματα δειγματοληψίας και μπορούμε να πάρουμε τις πρώτες διαφορές – $y^* = y_t - y_{t-1}$ και $x^* = x_t - x_{t-1}$ – εάν η τιμή της στατιστικής D–W είναι πολύ μικρή ή η τιμή του συντελεστή προσδιορισμού στην αρχική παλινδρόμηση είναι πολύ υψηλή. Ως γενικό κανόνα, μπορούμε να ακολουθούμε: «*εκτιμούμε την παλινδρόμηση χρησιμοποιώντας τις πρώτες διαφορές των μεταβλητών όταν* $d < R^2$ » (Maddala, 2003) και η τιμή του συντελεστή συσχέτισης, ϱ, είναι πολύ υψηλή.

Εάν, όμως, δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις πρώτες διαφορές (εάν ο συντελεστής συσχέτισης δεν έχει τιμή τη μονάδα ή πολύ κοντά σε αυτή), μπορούμε να πάρουμε μια εκτίμηση: $\hat{\rho} \approx 1 - \frac{d}{2}$. Έτσι, <u>για μεγάλα δείγματα</u> μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε αυτή την εκτίμηση για να μετασχηματίσουμε τις μεταβλητές μας: $y_t - \rho y_{t-1} = \alpha(1-\rho) + \beta(x_t - \rho x_{t-1}) + u_t$, όπου α και β είναι οι συντελεστές παλινδρόμησης. Εάν <u>το δείγμα μας είναι μικρό</u>, οι Theil και Nagar προτείνουν την εκτίμηση $\hat{\rho} = \dfrac{n^2\left(1 - \frac{d}{2}\right) + k^2}{(n^2 - k^2)}$. Ακόμα, μπορούμε να πάρουμε την εκτίμηση του ϱ από την παλινδρόμηση AR(1) των καταλοίπων.

Εκτός των παραπάνω υπάρχουν και οι επαναληπτικές μέθοδοι εκτίμησης του συντελεστή ϱ. Μεταξύ αυτών είναι και η Hildreth–Lu:

Η μέθοδος Hildreth–Lu (1960)

(i) Επιλογή του ϱ μεταξύ –1 και +1, έστω ϱ_1 και εκτίμηση του υποδείγματος των μετασχηματισμένων μεταβλητών (όπως παραπάνω, βήμα (iii)) για κάθε τιμή ανά διάστημα 0.1.

(ii) Για καθεμιά εκτιμημένη εξίσωση υπολογίζουμε τα κατάλοιπα και το άθροισμα τετραγώνων των καταλοίπων RSS($\varrho_{\iota 1}$), ι=1,2,... 10.

(iii) Επιλογή της τιμής του ϱ, εκείνης που ελαχιστοποιεί το RSS (δηλαδή, που μεγιστοποιεί την τιμή του συντελεστή προσδιορισμού).

Στα παραπάνω υποδείγματα διαφορών υποθέσαμε ότι ο συντελεστής συσχέτισης ισούται με τη μονάδα. Ο έλεγχος που ακολουθείται για τη μηδενική υπόθεση ότι η πραγματική τιμή της παραμέτρου $\varrho = 1$ γίνεται με τη στατιστική g των **Berenblutt–Weibb (1973):** $g = \dfrac{\sum_{t=2}^{n} \hat{v}_t^2}{\sum_{t=1}^{n} \hat{\varepsilon}_t^2}$, όπου στον αριθμητή είναι τα κατάλοιπα από την παλινδρόμηση στις πρώτες διαφορές των τιμών των μεταβλητών και στον παρονομαστή τα κατάλοιπα από την αρχική παλινδρόμηση στα επίπεδα των τιμών.

1.4.9 Πολυσυγγραμμικότητα

Ο όρος πολυσυγγραμμικότητα οφείλεται στον Ragnar Frisch (Publication, No 5, Oslo University 1934) για να περιγράψει την περίπτωση εκείνη που οι ανεξάρτητες μεταβλητές αλληλοσυσχετίζονται ισχυρά μεταξύ τους. Ως αποτέλεσμα, δεν μπορούμε να ξεχωρίσουμε την επίδραση της καθεμιάς ανεξάρτητης μεταβλητής επί της εξαρτημένης μεταβλητής.

Στην πολυμεταβλητή παλινδρόμηση με ανεξάρτητες μεταβλητές $X_1, X_2, X_3, ...X_k$ (όπου $X_1 = 1$ για όλες τις παρατηρήσεις, για να επιτρέψουμε την ύπαρξη σταθερού όρου), θα λέμε ότι υπάρχει ακριβής γραμμική σχέση εάν ικανοποιείται η παρακάτω συνθήκη: $\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + ... + \lambda_k X_k = 0$, όπου λ είναι σταθερές, έτσι ώστε να μην είναι όλες μαζί ταυτόχρονα ίσες με το μηδέν.

Ένα από τα συμπτώματα της πολυσυγγραμμικότητας, που συχνά αναφέρεται, είναι ότι τα τυπικά σφάλματα των εκτιμητών θα είναι πολύ υψηλά. Ωστόσο, υψηλές τιμές της συσχέτισης δύο ανεξάρτητων μεταβλητών δεν οδηγούν κατ' ανάγκη σε υψηλά τυπικά σφάλματα. Συνεπώς, η διακύμανση του συντελεστή παλινδρόμησης β_2, για παράδειγμα, θα είναι υψηλή εάν: (**α**) σ^2 έχει υψηλή τιμή, (**β**) $\sum x_{2i}^2$ έχει χαμηλή τιμή, (γ) ρ_{23}^2 έχει υψηλή τιμή. Ακόμα και εάν ισχύουν τα (α) και (γ), αλλά $\sum x_{2i}^2$ έχει υψηλή τιμή, δεν θα έχουμε το πρόβλημα των υψηλών τιμών στα τυπικά σφάλματα. Με λίγα λόγια, υψηλές τιμές του ρ_{23}^2 δεν συνεπάγονται τίποτα για την ύπαρξη της πολυσυγγραμμικότητας στο υπόδειγμα.

Στην περίπτωση της ύπαρξης πολύ υψηλού βαθμού πολυσυγγραμμικότητας, οι επιπτώσεις θα είναι:

(1) Οι εκτιμητές θα εξακολουθούν να είναι αμερόληπτοι, αλλά όχι ακριβείς.

(2) Οι εκτιμητές –και τα τυπικά τους σφάλματα– είναι ευαίσθητοι σε μικρές μεταβολές των δεδομένων, με συνέπειες στα διαστήματα εμπιστοσύνης των παραμέτρων.

(3) Αν και είναι πιθανό η στατιστική t να είναι στατιστικά ασήμαντη (όχι κατ' ανάγκη), ο συντελεστής προσδιορισμού R^2 έχει πολύ υψηλή τιμή.

Στην ενότητα για την πολλαπλή παλινδρόμηση συζητήσαμε για τον συντελεστή $VIF = \dfrac{1}{(1-\rho_{23}^2)}$. Όσο μεγαλύτερη είναι η τιμή VIF τόσο μεγαλύτερο το πρόβλημα της πολυσυγγραμμικότητας. Μπορούμε να γράψουμε τη διακύμανση των συντελεστών ως:

$$\operatorname{var}(\hat{\beta}_2) = \frac{\sum x_{3i}^2}{\sum x_{2i}^2 \sum x_{3i}^2 - (\sum x_{2i}x_{3i})^2}\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{\sum x_{2i}^2(1-\rho_{23}^2)} = \frac{\sigma^2}{\sum x_{2i}^2}VIF$$

$$\operatorname{var}(\hat{\beta}_3) = \frac{\sum x_{2i}^2}{\sum x_{2i}^2 \sum x_{3i}^2 - (\sum x_{2i}x_{3i})^2}\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{\sum x_{3i}^2(1-\rho_{23}^2)} = \frac{\sigma^2}{\sum x_{3i}^2}VIF$$

που δείχνει ότι οι διακυμάνσεις των συντελεστών είναι ανάλογες της VIF. Κοιτώντας τις παραπάνω σχέσεις, μπορούμε να ερμηνεύσουμε το μέγεθος VIF $(\hat{\beta}_i)$ ως τον λόγο της διακύμανσης του εκτιμητή β προς τη διακύμανση που θα είχε ο εκτιμητής εάν η μεταβλητή X_i ήταν ασυσχέτιστη με τις υπόλοιπες ανεξάρτητες μεταβλητές.

Το αντίστροφο της VIF είναι το επίπεδο αντοχής (TOL): $TOL_j = \dfrac{1}{VIF_j} = (1-R_j^2)$, όπου R_j^2 είναι ο συντελεστής προσδιορισμού της παλινδρόμησης της μεταβλητής X_j επί των υπόλοιπων $(k-2)$ ανεξάρτητων μεταβλητών. Στην περίπτωση που ο συντελεστής R_j^2 =1 τότε έχουμε τέλεια πολυσυγγραμμικότητα. Θα είναι TOL = 1, εάν η μεταβλητή j δεν συσχετίζεται με τις υπόλοιπες, και TOL = 0, εάν υπάρχει τέλεια συσχέτιση μεταξύ της j και των υπόλοιπων ανεξάρτητων μεταβλητών (τέλεια πολυσυγγραμμικότητα).

Αποκάλυψη της πολυσυγγραμικότητας

Μερικοί εμπειρικοί κανόνες μπορεί να είναι οι παρακάτω, αν και έχει ασκηθεί κριτική σχετικά με την ικανότητά τους να υποδείξουν την ύπαρξη πολυσυγγραμμικότητας.

1. Υψηλός συντελεστής προσδιορισμού (και, συνεπώς, στατιστικά σημαντικό F), αλλά μη–στατιστικά σημαντικά t–statistics.
2. Εάν VIF > 10, τότε υπάρχει πρόβλημα πολυσυγγραμμικότητας.
3. Όσο TOL $\rightarrow$ 0 τόσο μεγαλύτερος είναι ο βαθμός πολυσυγγραμμικότητας.
4. Υψηλός συντελεστής γραμμικής συσχέτισης μεταξύ των ανεξάρτητων μεταβλητών.
5. Εάν ο λόγος [VIF /αριθμός ανεξάρτητων μεταβλητών] > 1.
6. Παλινδρομούμε καθεμιά ανεξάρτητη μεταβλητή επί των υπόλοιπων ανεξάρτητων μεταβλητών και υπολογίζουμε τον συντελεστή προσδιορισμού $R^2_{x_i.x_2x_3...x_k}$, όπου k είναι το πλήθος των ανεξάρτητων μεταβλητών (συμπεριλαμβανομένου και του σταθερού όρου). Αυτές οι παλινδρομήσεις ονομάζονται <u>βοηθητικές παλινδρομήσεις</u> (auxiliary regression). Σε κάθε παλινδρόμηση υπολογίζουμε τη στατιστική $F = \dfrac{R^2_{x_i.x_2x_3...x_k}/(k-2)}{(1-R^2_{x_i.x_2x_3...x_k})/(n-k-1)}$. Εάν η υπολογισμένη τιμή της F είναι μεγαλύτερη από την κρίσιμη τιμή F, αυτό σημαίνει ότι η συγκεκριμένη ανεξάρτητη μεταβλητή X_i είναι γραμμικά εξαρτημένη με κάποια από τις άλλες ανεξάρτητες μεταβλητές.
7. Ένας εμπειρικός κανόνας θέτει ότι η πολυσυγγραμικότητα σε ένα υπόδειγμα αποτελεί πρόβλημα, όταν οι συντελεστές προσδιορισμού που παίρνουμε από τις βοηθητικές παλινδρομήσεις έχουν υψηλότερη τιμή από τον συντελεστή προσδιορισμού της συνολικής παλινδρόμησης, δηλαδή της παλινδρόμησης της Y επί όλων των ανεξάρτητων μεταβλητών.
8. Υπολογίζουμε την τετραγωνική ρίζα του λόγου της μέγιστης ιδιοτιμής (χαρακτηριστική ρίζα) λ_{max} προς την ελάχιστη λ_{min} της μήτρας $(X'X)$. Εάν το αποτέλεσμα είναι μια τιμή κοντά στη μονάδα, τότε δεν υπάρχει πρόβλημα πολυσυγγραμμικότητας. Αυτός ο λόγος ονομάζεται *condition number*: $CN = \sqrt{\lambda_{max}/\lambda_{min}}$.
9. Τα μεγέθη VIF και CN θεωρούν τις συσχετίσεις μεταξύ των ανεξάρτητων μεταβλητών. Ένα μέγεθος, ωστόσο, που θεωρεί τη συσχέτιση μεταξύ της εξαρτημένης και της ανεξάρτητης μεταβλητής είναι το μέγεθος του Theil το οποίο ορίζεται από την παρακάτω σχέση: $m = R^2 - \sum_{i=1}^{k}(R^2 - R^2_{-i})$, όπου R^2_{-i} είναι ο συντελεστής προσδιορισμού της παλινδρόμησης της εξαρτημένης μεταβλητής Y επί των ανεξάρτητων μεταβλητών, αφού πρώτα αφαιρεθεί η μεταβλητή X_i. Εάν οι ανεξάρτητες μεταβλητές είναι ασυσχέτιστες, τότε η τιμή του μεγέθους του Theil θα είναι ίση με μηδέν. Αντίθετα, μπορεί να είναι αρνητική ή υψηλά θετική. Ωστόσο, το μέγεθος αυτό δεν μπορεί να μας πει πόσο σοβαρό μπορεί να είναι το μέγεθος της πολυσυγγραμμικότητας.

Διόρθωση του προβλήματος

1. Αφαιρούμε από το υπόδειγμα τη μεταβλητή που πιστεύουμε ότι συνεισφέρει περισσότερο στο πρόβλημα της πολυσυγγραμμικότητας.
2. Προσθέτουμε τις μεταβλητές που έχουν υψηλό βαθμό συσχέτισης.
3. Χρησιμοποιούμε εκ των προτέρων πληροφορία, εάν την έχουμε.
4. Προσθέτουμε περισσότερα δεδομένα εάν διαθέτουμε.
5. Χρησιμοποιούμε άλλες τεχνικές, όπως την παλινδρόμηση Ridge (Hoerl & Kennard, *Technometrics*, 12, 1977) ή τη μέθοδο Κυριότερων Συνιστωσών (Principal Components Analysis).
6. Δεν κάνουμε τίποτα (Blanchard, *Journal of Business and Economic Statistics*, 5, 1967).

Ridge Regression

Η μέθοδος της Ridge Regression συνίσταται στο να προσθέσουμε ένα θετικό όρο *k* στα διαγώνια στοιχεία της μήτρας $(X'X)^{-1}$, δηλαδή τις διακυμάνσεις των παλινδρομητών με αποτέλεσμα να μειώνεται η συσχέτιση μεταξύ των ανεξάρτητων μεταβλητών και το διάνυσμα των εκτιμητών θα είναι: $\hat{\beta} = (X'X + kI_p)^{-1} X'Y, \quad k > 0$. Ο εκτιμητής αυτός δεν είναι αμερόληπτος, ωστόσο οι διακυμάνσεις είναι πολύ μικρές. Έτσι, δοκιμάζουμε διάφορες τιμές της παραμέτρου *k* και παίρνουμε τις αντίστοιχες εκτιμήσεις. Στη συνέχεια, επιλέγουμε την τιμή της *k* εκείνη στην οποία «το σύστημα σταθεροποιείται». Το πρόβλημα της επιλογής του *k* παραμένει και αρκετοί ερευνητές έχουν κατά καιρούς προτείνει διάφορες μαθηματικές προσεγγίσεις και γραφικές τεχνικές.

Μέθοδος Κυριότερων Συνιστωσών

Έστω ότι οι αρχικές ανεξάρτητες μεταβλητές είναι $x_1, x_2, ..., x_k$ με μέσο μηδέν (αποκλίσεις από τους μέσους), μήτρα διακυμάνσεων Σ (*k*x*k*) και οι κύριες συνιστώσες που θέλουμε να βρούμε είναι p_1, p_2, ..., p_k. Αυτές οι κύριες συνιστώσες είναι ανεξάρτητοι γραμμικοί συνδυασμοί των αρχικών δεδομένων και παράγονται με φθίνουσα τάξη σπουδαιότητας, έτσι ώστε η πρώτη κύρια συνιστώσα εξηγεί το μεγαλύτερο μέρος της μεταβλητότητας των αρχικών μεταβλητών κ.ο.κ. Η μέθοδος αυτή αναπτύχθηκε από τον H. Hotelling το 1933.

Θα είναι:

$$
\begin{aligned}
p_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + ...+ a_{1k}x_k \\
p_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + ...+ a_{2k}x_k \\
p_3 &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + ...+ a_{3k}x_k \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
p_k &= a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + a_{k3}x_3 + ...+ a_{kk}x_k
\end{aligned}
$$

όπου a_{ij} είναι οι συντελεστές που πρέπει να υπολογιστούν (factor loadings) και παριστάνουν τον συντελεστή της j–ιοστής ανεξάρτητης μεταβλητής στην i–ιοστή κύρια συνιστώσα.

Στο διάνυσμα (σταθερό, kx1) των a_j επιβάλλουμε τον κανόνα τυποποίησης $a'_j a_j = \sum_{j=1}^{k} a_{ij}^2 = 1$, για κάθε i = 1, 2, 3, ..., k. Για να βρούμε την πρώτη κύρια συνιστώσα, επιλέγουμε το a_1 που μεγιστοποιεί τη διακύμανση του p_1 κάτω από τον παραπάνω περιορισμό:

$$\max L(a_1, \lambda) = a_1' \Sigma a_1 - \lambda(a_1' a_1 - 1)$$

όπου λ είναι ο πολλαπλασιαστής Lagrange. Οι συνθήκες πρώτης τάξης γράφονται:

$$(\Sigma - \lambda I)a_1 = 0$$

όπου I είναι η μοναδιαία μήτρα (kxk), που είναι ομογενής εξίσωση και έχει μηδενικές λύσεις μόνο όταν η μήτρα (Σ–λI) είναι ορίζουσα:

$$|\Sigma - \lambda I| = 0 .$$

Οι τιμές του λ που ικανοποιούν τη σχέση αυτή είναι οι **ιδιοτιμές** (eigenvalues), που είναι μη–αρνητικές και, υποθέτουμε ότι είναι διαφορετικές μεταξύ τους και $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3 > ......\lambda_k \geq 0$.

Για να βρούμε τη δεύτερη κύρια συνιστώσα επιβάλλουμε τον κανόνα τυποποίησης, αλλά και τον περιορισμό ότι η δεύτερη κύρια συνιστώσα p_2 είναι ανεξάρτητη της πρώτης, p_1.

Το άθροισμα των διακυμάνσεων των αρχικών μεταβλητών (που ισούται με 3, αφού οι μεταβλητές είναι κανονικοποιημένες) είναι ίσο με το άθροισμα των διακυμάνσεων των κυριότερων συνιστωσών, έτσι ώστε να μπορούμε να πούμε ότι η i κύρια συνιστώσα εξηγεί ένα ποσοστό $\xi_i = \dfrac{\lambda_i}{\sum_{i=1}^{k} \lambda_i}$ και ότι οι πρώτες r κύριες συνιστώσες εξηγούν ένα ποσοστό $\dfrac{\sum_{i=1}^{r} \lambda_i}{\sum_{i=1}^{k} \lambda_i}$ της συνολικής διακύμανσης των αρχικών μεταβλητών.

Ας υποθέσουμε ότι μόνο οι πρώτες r κύριες συνιστώσες ($0<r<k$) είναι αρκετές να ερμηνεύσουν τη μεταβλητότητα της μήτρας (X΄X) των ανεξάρτητων μεταβλητών και οι υπόλοιπες (k–r) ανεξάρτητες μεταβλητές αφαιρούνται.

Η παλινδρόμηση που εκτιμάμε είναι αυτή της Y επί των r κυριότερων συνιστωσών:

$$Y_t = \gamma_0 + \gamma_1 p_{1t} + \gamma_2 p_{2t} + ... + \gamma_r p_{rt} + \varepsilon_t .$$

Οι εκτιμητές της παλινδρόμησης αυτής είναι μεροληπτικοί, αλλά καλύτεροι αυτών της μεθόδου των ελαχίστων τετραγώνων, αφού είναι απαλλαγμένοι της πλεονάζουσας πληροφορίας. Είναι απλοί γραμμικοί συνδυασμοί των αρχικών εκτιμητών των ελαχίστων τετραγώνων, $\hat{\beta}$: $\hat{\gamma}_r = P_r'\hat{\beta}$, όπου P είναι η μήτρα των πρώτων r κυριότερων συνιστωσών.

Υπολογισμός των ιδιοτιμών και ιδιοδιανυσμάτων

Έστω **A** μια συμμετρική (nxn) μήτρα. Θέλουμε να ελαχιστοποιήσουμε την τετραγωνική μορφή **x'Ax** υπό τον περιορισμό ότι **x'x**=1. Εισάγοντας τον πολλαπλασιαστή Lagrange λ θα είναι: **x'Ax** – λ(**x'x**–1). Παίρνοντας τις παραγώγους ως προς **x** και εξισώνοντας με το μηδέν, θα έχουμε: 2**Ax** – 2λ**x** = 0 ή (**A**–λ**I**)=0. Για να έχουμε μη–μηδενικές λύσεις $|\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}|=0$. Οι ρίζες αυτής της εξίσωσης καλούνται **χαρακτηριστικές ρίζες**. Αντίστοιχα, σε κάθε λύση λ_i υπάρχει ένα διάνυσμα **x** που είναι λύση της $(\mathbf{A} - \lambda_i)\mathbf{x} = 0$. Αυτά τα διανύσματα καλούνται **χαρακτηριστικά διανύσματα**.

Για παράδειγμα, η μήτρα $\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ έχει χαρακτηριστική εξίσωση $\begin{bmatrix} 4\text{-}\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{bmatrix}$ ή $(4 - \lambda)(1 - \lambda) - 4 = 0 \Leftrightarrow \lambda(\lambda - 5) = 0$, δηλαδή δύο ρίζες λ = 0 και λ = 5. Το άθροισμά τους ισούται με το άθροισμα των διαγώνιων στοιχείων της μήτρας. Αυτές είναι οι χαρακτηριστικές ρίζες.

Για $\underline{\lambda = 0}$, το χαρακτηριστικό διάνυσμα είναι

$\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, δηλαδή $\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 = 0 \\ 2x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$ από όπου προκύπτει το χαρακτηριστικό διάνυσμα $\left(1/\sqrt{5},\ -2/\sqrt{5} \right)$. Για $\underline{\lambda = 5}$ προκύπτει το χαρακτηριστικό διάνυσμα $\left(2/\sqrt{5},\ 1/\sqrt{5} \right)$.

Παράδειγμα 50
(Fase, *European Economic Review*, 1973)

Μια από τις ενδιαφέρουσες μελέτες είναι τα επιτόκια διάφορων λήξεων. Κατ' αρχάς, αφού τα επιτόκια έχουν την ίδια μονάδα μέτρησης, παρόλο που έχουν διαφορετικές λήξεις, δεν υπάρχει πρόβλημα επιλογής μονάδων μέτρησης. Η εφαρμογή της ανάλυσης των κυριότερων συνιστωσών μπορεί να είναι χρήσιμη, στη συγκεκριμένη περίπτωση, για παράδειγμα, στην κατανομή κεφαλαίου και τη διάρθρωση χαρτοφυλακίων ή στην ανάλυση των πηγών μεταβλητότητας κ.λπ.

Ο Fase μελέτησε τα μηνιαία Ολλανδικά επιτόκια την περίοδο 1962–1970 (108 μήνες). Πρώτα, κανονικοποιούμε τις μεταβλητές, έτσι ώστε να έχουμε μέσο μηδέν και διακύμανση ίση με τη μονάδα (τυποποιημένη κανονική μεταβλητή). Από τις 10 ιδιοτιμές που υπολόγισε οι τρεις μεγαλύτερες είναι 9.57, 0.20 και 0.09. Από αυτό φαίνεται ότι η πρώτη κύρια συνιστώσα είναι αρκετή για να περιγράψει την κοινή μεταβλητότητα των επιτοκίων υπό μελέτη. Αυτή ερμηνεύει, περίπου, πλέον του 95% (ο λόγος ξ_i ισούται με 95.7%). Ακόμα, εκτίμησε τους συντελεστές a των δύο πρώτων συνιστωσών (δηλαδή τα a_{j1}, και a_{j2}) και βρήκε ότι οι τιμές του a_{j1}, για όλες τις σειρές επιτοκίων, είναι πολύ κοντά στη μονάδα. Οι δύο αυτοί συντελεστές μπορούν να ερμηνευτούν ως οι συσχετίσεις μεταξύ των επιτοκίων, j και, της πρώτης και της δεύτερης κύριας συνιστώσας, αντίστοιχα.

Το ότι ο πρώτος συντελεστής δίνει τιμές κοντά στη μονάδα για όλες τις μελετούμενες σειρές επιτοκίων, σημαίνει πως μπορούμε να τεκμηριώσουμε ότι η πρώτη κύρια συνιστώσα μπορεί να ερμηνευτεί ως ένας ισοσταθμισμένος συνδυασμός (χαρτοφυλάκιο) όλων των επιτοκίων της αγοράς. Η δεύτερη κύρια συνιστώσα (η οποία ερμηνεύει μόνο το 2% της μεταβλητότητας των επιτοκίων) έχει διαφοροποιημένες τιμές για τις σειρές επιτοκίων, αρνητικές, θετικές ή και μηδενικές και, πολύ μικρές. Οι θετικές μικρές τιμές αποδίδονται στο αίτιο της μικρής εμπορευσιμότητας των συγκεκριμένων σειρών επιτοκίων, χαμηλό πιστωτικό κίνδυνο, το χαμηλό turnover, το χαμηλό κόστος συναλλαγών και, συνεπώς, είναι λιγότερο ευαίσθητες στις μεταβολές του γενικού επιπέδου των επιτοκίων. Συνεπώς, η δεύτερη συνιστώσα μπορεί να ερμηνευτεί ότι σχετίζεται με τον πιστωτικό κίνδυνο και το κόστος συναλλαγών.

Παράδειγμα 51
Πολυσυγγραμμικότητα και τεχνική ανάλυση

Οι τεχνικοί αναλυτές χρησιμοποιούν πολλούς δείκτες –οι περισσότεροι των οποίων προκύπτουν από την αρχική σειρά των τιμών– προκειμένου να προβλέψουν τη μελλοντική τάση των τιμών. Στην προσπάθειά τους αυτή πέφτουν συχνά στην παγίδα της πολυσυγγραμμικότητας των τεχνικών δεικτών που χρησιμοποιούν, με την έννοια ότι δεν κερδίζουν σε πληροφορία. Πράγματι, όταν δύο ή περισσότεροι τεχνικοί δείκτες παρουσιάζουν πολυσυγγραμμικότητα, τότε είναι αμφίβολα τα αποτελέσματα της ανάλυσης. Ακόμα ισχυρότερο είναι το πρόβλημα όταν οι αναλυτές χρησιμοποιούν τεχνητά νευρωνικά δίκτυα. Μια λύση στην περίπτωση της τεχνικής ανάλυσης είναι να κατηγοριοποιήσουμε τους τεχνικούς δείκτες που θέλουμε να χρησιμοποιήσουμε σε Δείκτες Τάσης, Δείκτες Όγκου Συναλλαγών, Δείκτες Μεταβλητότητας κ.λπ. και να μην χρησιμοποιούμε περισσότερους από έναν δείκτη από κάθε κατηγορία.

1.4.10 Χρήση ψευδομεταβλητών

Ας υποθέσουμε το υπόδειγμα αγοράς για τις αποδόσεις μιας μετοχής. Έστω ότι τόσο ο σταθερός όρος α όσο και ο γωνιακός συντελεστής β δεν παραμένουν σταθεροί μεταξύ δύο υποπεριόδων, που θέλουμε να ελέγξουμε. Έτσι, θα πρέπει να εκτιμήσουμε δύο υποδείγματα, ένα για κάθε περίοδο:

$$R_t = \alpha_1 + \beta_1 R_{Mt} + \varepsilon_t, \quad t = 1, \ldots, T_B$$
$$R_t = \alpha_2 + \beta_2 R_{Mt} + \varepsilon_t, \quad t = T_{B+1}, \ldots, T$$

όπου με την ψευδομεταβλητή γίνεται:

$$R_t = \alpha + \beta R_{Mt} + \delta_1 D_t + \delta_2 D_t R_{Mt} + \varepsilon_t, \quad t = 1, .., T$$

Όταν $D_t = 0$, το υπόδειγμα γίνεται:

$$R_t = \alpha + \beta R_{Mt} + \varepsilon_t, \quad t = 1, \ldots, T_B$$

Στην περίπτωση αυτή είναι $\alpha_1 = \alpha$ και $\beta_1 = \beta$. Όταν $D_t = 1$, τότε είναι:

$$R_t = (\alpha + \delta_1) + (\beta + \delta_2) R_{Mt} + \varepsilon_t, \quad t = T_{B+1}, \ldots, T$$

όπου $\alpha_2 = \alpha + \delta_1$ και . Η υπόθεση ότι δεν υπάρχει δομική μεταβολή γίνεται:

$$H_0 : \delta_1 = 0 \text{ και } \delta_2 = 0 \;\; vs. \;\; H_1 : (\delta_1 \neq 0 \vee \delta_2 \neq 0) \vee (\delta_1 \wedge \delta_2 \neq 0)$$

Η *F*–στατιστική για αυτόν τον από κοινού έλεγχο υπόθεσης είναι:

$$F_{\delta_1 = 0, \delta_2 = 0} = \frac{\left(RSS_R - RSS_{UR}\right) / 2}{RSS_{UR} / \left(T - 4\right)}$$

αφού υπάρχουν 2 περιορισμοί και 4 παράμετροι προς εκτίμηση στο χωρίς περιορισμούς υπόδειγμα.

Το υπόδειγμα χωρίς περιορισμούς είναι το υπόδειγμα με την ψευδομεταβλητή, το οποίο επιτρέπει να διαφέρουν τόσο ο σταθερός όρος όσο και ο συντελεστής της κλίσης της παλινδρόμησης στις δύο υποπεριόδους. Το υπόδειγμα με περιορισμούς αναφέρεται στην παλινδρόμηση, όπου οι παράμετροι περιορίζονται να είναι ίδιες στις δύο υποπεριόδους.

Σημείωση: Μπορούμε να υπολογίσουμε το άθροισμα των τετραγώνων των καταλοίπων της παλινδρόμησης χωρίς περιορισμούς και με τον εξής τρόπο, κάτω από την υπόθεση της ανεξαρτησίας των δειγμάτων των δύο υποπεριόδων: Εκτιμούμε μια παλινδρόμηση για κάθε υποπερίοδο (υποπερίοδο 1 και υποπερίοδο 2), υπολογίζουμε το άθροισμα των τετραγώνων των καταλοίπων για καθεμία χωριστά RSS_1 και RSS_2 και: $RSS_{UR} = RSS_1 + RSS_2$.

Παράδειγμα 52

Έστω ότι έχουμε εκτιμήσει το υπόδειγμα αγοράς για τη μετοχή Α:

$$\underset{}{\hat{R}_{A,t}} = \underset{(0.0065)}{-0.0001} + \underset{(0.0845)}{0.3388R_{Mt}} + \underset{(0.0092)}{0.0002D_t} + \underset{(0.1377)}{0.3158D_tR_{Mt}}, \quad R^2 = 0.311$$

$$\hat{\sigma}_\varepsilon = 0.050, \quad RSS_{UR} = 0.288379$$

και η παλινδρόμηση με περιορισμούς δίνει:

$$\hat{R}_{A,t} = \underset{(0.0046)}{-0.005} + \underset{(0.0675)}{0.4568R_{Mt}}, \quad R^2 = 0.279, \quad \dot{\sigma}_\varepsilon = 0.051, \quad RSS_R = 0.301558$$

Η τιμή της F–στατιστικής για τον έλεγχο της μηδενικής υπόθεσης $H_0 : \delta_1 = 0$ και $\delta_2 = 0$ είναι:

$$F_{\delta_1=0,\delta_2=0} = \frac{(0.301558 - 0.288379)/2}{0.288379/116} = 2.651$$

και η κριτική τιμή, σε επίπεδο σημαντικότητας 5%, είναι: $F_{(2),(116)}(0.05) \approx 3.07$. Αφού η υπολογισθείσα τιμή της F–στατιστικής είναι μικρότερη από την κριτική τιμή, τότε δεν μπορούμε να απορρίψουμε τη μηδενική υπόθεση με πιθανότητα 95%.

Σημειώστε ότι όταν επιτρέπουμε και στην παράμετρο του σταθερού όρου και στην παράμετρο της κλίσης της παλινδρόμησης να διαφέρουν ανάμεσα στις δύο υποπεριόδους, δεν μπορούμε να απορρίψουμε την υπόθεση ότι αυτές οι δύο παράμετροι είναι ίδιες. Ωστόσο, όταν επιτρέπουμε μόνο στην παράμετρο της κλίσης της παλινδρόμησης (συντελεστής βήτα) να είναι διαφορετική ανάμεσα στις δύο υποπεριόδους, τότε μπορούμε να απορρίψουμε την υπόθεση ότι ο συντελεστής β είναι ο ίδιος.

1.4.11 Ολοκλήρωση – Συνολοκλήρωση

Εάν η σειρά των σφαλμάτων ικανοποιεί τις συνθήκες:

$E(\varepsilon_t) = 0$ $\text{var}(\varepsilon_t) = \sigma^2$, $\forall t$ και $\text{cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-k}) = \sigma^2 \rho_k$ ανεξάρτητη του χρόνου, τότε θα λέμε ότι ε_t είναι <u>στάσιμη σειρά</u> (covariance stationary series).

Οι περισσότερες οικονομικές χρονολογικές σειρές δεν είναι στάσιμες, με την έννοια ότι μέσος και διακύμανση εξαρτώνται από τον χρόνο και τείνουν να αποκλίνουν όσο περνάει ο χρόνος. Στην περίπτωση που οι τιμές κινούνται προς μια κατεύθυνση (ανοδική ή καθοδική) θα λέμε ότι παρουσιάζουν *τάση*. Για να μελετήσουμε τέτοιες σειρές πρέπει πρώτα να τις καταστήσουμε στάσιμες και να απαλείψουμε την τάση. Αυτό μπορεί να γίνει: (α) εκτιμώντας την παλινδρόμηση στον χρόνο και (β) παίρνοντας τις πρώτες, δεύτερες κ.ο.κ. διαφορές.

΄Εστω το υπόδειγμα $y_t = a + bt + \varepsilon_t$. Η σειρά απαλλαγμένη της χρονικής τάσης είναι η σειρά των καταλοίπων ε, αφού $\sum \hat{\varepsilon}_t = 0$ *και* $\sum t\hat{\varepsilon}_t = 0$. Εάν χρησιμοποιούσαμε τις πρώτες διαφορές, θα παίρναμε $\Delta y_t = y_t - y_{t-1} = b + \varepsilon_t - \varepsilon_{t-1}$.

Από την άλλη, έστω το υπόδειγμα $y_t - y_{t-1} = b + u_t$, όπου u είναι στάσιμη σειρά. Στην περίπτωση αυτή η πρώτη διαφορά της y_t είναι στάσιμη με μέσο b. Αυτό το υπόδειγμα είναι γνωστό ως <u>υπόδειγμα τυχαίου περιπάτου</u> (βηματισμού ή τυχαίας διαδρομής). Αθροΐζοντας την y_t, αρχίζοντας από μια αρχική τιμή y_0, θα πάρουμε:

$$y_t = y_0 + bt + \sum_{i=1}^{t} u_i .$$

Η διαφορά του υποδείγματος αυτού από το υπόδειγμα $y_t = a + bt + \varepsilon_t$ είναι ότι τα σφάλματα είναι μη–στάσιμη σειρά αφού η διακύμανσή τους $t\sigma^2$ αυξάνεται με τον χρόνο.

Οι Nelson & Plosser (Journal of Monetary Economics, 10, 1982) ονόμασαν το υπόδειγμα:

$$y_t = a + bt + \varepsilon_t \rightarrow \text{Trend–Stationary Process (TSP)}$$
$$y_t - y_{t-1} = b + u_t \rightarrow \text{Difference–Stationary Process (DSP)},$$

όπου και τα δύο υποδείγματα παρουσιάζουν γραμμική τάση, αλλά η μέθοδος απαλοιφής της διαφέρει. Εάν στο DSP υπόδειγμα είναι $b = 0$ τότε θα μιλάμε για ένα υπόδειγμα <u>τυχαίου περιπάτου χωρίς τάση</u> (ή μηδενικής μετατόπισης).

΄Ελεγχος TSP έναντι DSP

Από τις κλασικές μετατροπές μίας μη–στάσιμης χρονοσειράς, είναι η διαφοροποίηση της σειράς (difference stationary) και η απαλοιφή της τάσης (detrending).

΄Ετσι, η διαφορά μεταξύ ενός *difference stationary* υποδείγματος (DSP) και ενός *trend stationary* (TSP) είναι σημαντική. Εάν μία σειρά είναι DSP, τότε η επίδραση ενός σοκ είναι διαρκής. Αντίθετα, εάν είναι TSP, τότε η επίδραση ενός σοκ σβήνει σιγά–σιγά. Για παράδειγμα, αφού οι νομισματικές αναταραχές δεν έχουν μόνιμη επίδραση στο ΑΕΠ, εάν το πραγματικό ΑΕΠ είναι DSP, τότε οι διακυμάνσεις του πραγματικού ΑΕΠ μπορούν να ερμηνευτούν μόνον από πραγματικά σοκ και όχι από νομισματικά σοκ. Οι Nelson & Plosser (1982) έδειξαν ότι η πλειοψηφία των μακροοικονομικών χρονολογικών σειρών ανήκουν στην τάξη των DSP υποδειγμάτων, με εξαίρεση το ποσοστό της ανεργίας. Ακόμα, έδειξαν ότι η διαδικασία TS είναι κατάλληλη μόνον εάν τα σφάλματα στο υπόδειγμα $y_t = a + bt + \varepsilon_t$ έχουν υψηλή αυτοσυσχέτιση. Συνοψίζοντας, έχει μεγάλη σημασία εάν χρησιμοποιήσουμε παλινδρόμηση στον χρόνο (TSP) ενώ η σειρά μας είναι DSP (πρόβλημα υπο–διαφοροποίησης) ή το αντίστροφο (πρόβλημα υπερ–διαφοροποίησης).

Μία διαδικασία, ακόμα και εάν είναι στάσιμη στο μέσο δεν είναι αναγκαίο να είναι στάσιμη και στη διακύμανση και τη συνδιακύμανση. Αντίθετα, εάν μία διαδικασία είναι μη–στάσιμη στο μέσο θα είναι μη–στάσιμη, επίσης, και στη διακύμανση και συνδιακύμανση.

Οι Nelson & Plosser (1982) ανάπτυξαν έναν έλεγχο βασιζόμενοι στη στατιστική των Dickey & Fuller (1979) για τον έλεγχο της μηδενικής υπόθεσης H_0*: η σειρά ανήκει στην τάξη των TS διαδικασιών* έναντι της εναλλακτικής H_α*: η σειρά ανήκει στην τάξη των DS διαδικασιών*. Η διαδικασία είναι η παρακάτω:

Εκτιμάμε το υπόδειγμα $y_t = a + \rho y_{t-1} + bt + \varepsilon_t$. Εάν:

1. $\varrho = 1$ και $b = 0$, τότε η διαδικασία είναι DS
2. $|\varrho| < 1$, τότε η διαδικασία είναι TS.

Έτσι ο έλεγχος υπόθεσης συνίσταται σε H_0: $\varrho = 1$ και $b = 0$ έναντι της εναλλακτικής H_α: $|\varrho| < 1$, γνωστός ως «*έλεγχος μοναδιαίας ρίζας*».

1. Στο υπόδειγμα αυτό, εάν $a = 0$, $b = 0$ και $\varrho = 1$, τότε θα λέμε ότι πρόκειται για ένα καθαρό υπόδειγμα τυχαίου περιπάτου, δηλαδή $y_t = y_{t-1} + \varepsilon_t$, το οποίο είναι μη–στάσιμο υπόδειγμα. Ωστόσο, εάν γράψουμε $y_t - y_{t-1} = \varepsilon_t$ τότε το υπόδειγμα καθίσταται στάσιμο. Άρα το υπόδειγμα του καθαρού τυχαίου περιπάτου (ή τυχαίος περίπατος χωρίς μετατόπιση) είναι ένα υπόδειγμα DS.

2. Στο ίδιο υπόδειγμα, εάν $a \neq 0$, $b = 0$ και $\varrho = 1$, τότε έχουμε το υπόδειγμα τυχαίου περιπάτου με μετατόπιση, δηλαδή $y_t = a + y_{t-1} + \varepsilon_t$, το οποίο είναι μη–στάσιμο. Εάν το γράψουμε ως $y_t - y_{t-1} = a + \varepsilon_t$, τότε σημαίνει ότι η y παρουσιάζει θετική (αν $\alpha > 0$) ή αρνητική (αν $\alpha < 0$) τάση. Τέτοια τάση καλείται στοχαστική τάση. Το υπόδειγμα αυτό είναι DS επειδή μπορεί να καταστεί στάσιμο παίρνοντας τις πρώτες διαφορές. Θα λέμε ότι το υπόδειγμα του τυχαίου περιπάτου με μετατόπιση είναι ολοκληρώσιμο πρώτου βαθμού, $I(1)$.

3. Στο ίδιο υπόδειγμα, εάν $a \neq 0$, $b \neq 0$ και $\varrho = 0$, παίρνουμε $y_t = a + bt + \varepsilon_t$, το οποίο είναι το υπόδειγμα TS, με μέσο μη–σταθερό και ίσο με $a + bt$ και διακύμανση σταθερή και ίση με σ^2. Εάν από τις τιμές της y αφαιρέσουμε τον μέσο, τότε το αποτέλεσμα είναι στάσιμη σειρά (trend stationary).

4. Στο ίδιο υπόδειγμα, εάν $a \neq 0$, $b \neq 0$ και $\varrho = 1$, τότε έχουμε το αρχικό υπόδειγμα $y_t = a + \rho y_{t-1} + bt + \varepsilon_t$, το οποίο είναι γνωστό ως υπόδειγμα τυχαίου περιπάτου με μετατόπιση και προσδιοριστική τάση.

Στην περίπτωση που τα σφάλματα παρουσιάζουν αυτοσυσχέτιση, χρησιμοποιούμε τον επαυξημένο έλεγχο D–F (ADF):

$$y_t = a + \beta t + \rho y_{t-1} + \sum_{j=1}^{k} \theta_j \Delta y_{t-j} + \varepsilon_t$$

Επιλέγουμε τόσες υστερήσεις k όσες χρειάζεται για να απαλείψουμε την αυτοσυσχέτιση των καταλοίπων.

Για τους ελέγχους DF και ADF, οι Dieckey και Fuller κατασκεύασαν πίνακες με κριτικές τιμές τ. Παρέχουν, επίσης, πίνακες με τις τροποποιημένες τιμές της στατιστικής F για τον έλεγχο της από κοινού υπόθεσης $\alpha = \varrho = 0$.

Κριτικές τιμές τ για έλεγχο μοναδιαίας ρίζας για μέγεθος δείγματος > 500 παρατηρήσεων

	10%	5%	1%
Χωρίς σταθερό όρο και τάση	–1.62	–1.95	–1.62
Με σταθερό όρο χωρίς τάση	–2.57	–2.86	–3.43
Με σταθερό όρο και τάση	–3.12	–3.41	–3.96

Εάν μια μη–στάσιμη χρονολογική σειρά πρέπει να διαφοροποιηθεί d–φορές για να καταστεί στάσιμη, θα λέμε ότι είναι ολοκληρώσιμη d–βαθμού, $I(d)$. Για παράδειγμα, εάν η σειρά Y_t είναι $I(2)$, τότε $d=2$ και για να καταστεί στάσιμη πρέπει να πάρουμε τις δεύτερες διαφορές της, δηλαδή:

$$\Delta\Delta Y_t = \Delta(\Delta Y_t) = \Delta(Y_t - Y_{t-1}) = \Delta Y_t - \Delta Y_{t-1} = (Y_t - Y_{t-1}) - (Y_{t-1} - Y_{t-2}) = Y_t - 2Y_{t-1} - Y_{t-2}$$

Θα λέμε ότι μια χρονοσειρά Y_t είναι ολοκληρώσιμη πρώτου βαθμού, $I(1)$, εάν ΔY_t είναι στάσιμη χρονοσειρά. Μια στάσιμη χρονοσειρά θα λέμε ότι είναι $I(0)$.

Ιδιότητες

Εάν X, Y και Z είναι τρεις χρονολογικές σειρές, τότε ισχύουν:

1. Εάν $X_t \sim I(0)$ και $Y_t \sim I(1)$, τότε $Z_t = (X_t + Y_t) = I(1)$. Δηλαδή ο γραμμικός συνδυασμός (ή το άθροισμα) μιας στάσιμης και μιας μη–στάσιμης χρονοσειράς παράγει μια μη–στάσιμη χρονοσειρά.
2. Εάν $X_t \sim I(d)$, τότε $Z_t = (a + bX_t) = I(d)$: ο γραμμικός συνδυασμός μιας $I(d)$ σειράς είναι $I(d)$, $d = 0, 1, 2, \ldots$
3. Εάν $X_t \sim I(d_1)$ και $Y_t \sim I(d_2)$ με $d_1 < d_2$, τότε $Z_t = (aX_t + bY_t) \sim I(d_2)$.
4. Εάν $X_t \sim I(d)$ και $Y_t \sim I(d)$, τότε $Z_t = (aX_t + bY_t) \sim I(d^*)$, όπου $d = d^*$
5. αλλά και $d^* < d$.
6. Η ιδιότητα 4 οδηγεί σε ένα πολύ σημαντικό συμπέρασμα στην οικονομετρία. Εάν $Y_t \sim I(1)$ και $X_t \sim I(1)$, οι χρονοσειρές Y και X θα **συνολοκληρώνονται** (Engle & Granger, 1987) εάν υπάρχει παράμετρος β, έτσι ώστε ο συνδυασμός $Z_t = (Y_t - \beta X_t) \sim I(0)$. Θα λέμε, στην περίπτωση αυτή, ότι οι X και Y είναι CI(1, 1), που σημαίνει ότι η παλινδρόμηση $Y_t = \beta X_t + \varepsilon_t$ έχει νόημα και οι μεταβλητές X και Y δεν απέχουν μεταξύ τους στον χρόνο. Εάν οι μεταβλητές δεν συνολοκληρώνονται, τότε $Z_t = (Y_t - \beta X_t) \sim I(1)$ και δεν επιδεικνύουν κοινή τάση. Η παράμετρος β είναι ο *μακροχρόνιος πολλαπλασιαστής*.

Παράδειγμα 53

(α) Εάν οι αποδόσεις δύο χρηματιστηριακών αγορών συνολοκληρώνονται, τότε δεν υπάρχουν ενδείξεις για οφέλη από διαφοροποίηση, εάν έχει ο διαχειριστής ένα χαρτοφυλάκιο αυτών των δύο αγορών.

(β) Θα λέμε ότι το εισόδημα και η κατανάλωση συνολοκληρώνονται εάν η αποταμίευση (= εισόδημα – κατανάλωση) είναι I(0).

Η ύπαρξη τάσης σε μια χρονολογική σειρά αποτελεί ένα σημαντικό πρόβλημα στην εφαρμοσμένη οικονομετρία. Η ύπαρξη της τάσης είτε αυτή είναι στοχαστική, είτε είναι προσδιοριστική οδηγεί σε ψευδείς παλινδρομήσεις με μη ερμηνεύσιμα αποτελέσματα της στατιστικής **t** και άλλων στατιστικών κριτηρίων, που συνήθως έχουν πολύ υψηλή τιμή. Στα οικονομικά, οι περισσότερες χρονολογικές σειρές παρουσιάζουν κάποιας μορφής τάση. Βέβαια, θεωρώντας τις $1^{ες}$ διαφορές της σειράς οδηγούμαστε στην απώλεια των μακροχρόνιων ιδιοτήτων της αφού το υπόδειγμα στις $1^{ες}$ διαφορές δεν έχει μακροχρόνια λύση. Έτσι, θα ζητούσαμε την ανάπτυξη ενός οικονομετρικού υποδείγματος, το οποίο θα συνδύαζε τις βραχυχρόνιες και μακροχρόνιες χαρακτηριστικές της μεταβλητής και το οποίο συγχρόνως θα διατηρούσε την ιδιότητα της στασιμότητας.

Η έννοια της συνολοκλήρωσης είναι σημαντική γιατί μας επιτρέπει να περιγράψουμε τη σχέση ισορροπίας –αν υπάρχει– ή στασιμότητας μεταξύ δύο ή περισσότερων οικονομικών χρονοσειρών, καθεμία από τις οποίες είναι μη στάσιμη. Θα πρέπει εδώ να διευκρινίσουμε την έννοια της ισορροπίας. Ορίζουμε ως μια κατάσταση ισορροπίας εκείνη στην οποία δεν υπάρχει τάση αλλαγής, δηλαδή μια κατάσταση στην οποία έλκεται το σύστημα. Η έκφραση μακροχρόνια ισορροπία χρησιμοποιείται για να δηλώσει τη σχέση ισορροπίας στην οποία συγκλίνει ένα σύστημα με τον χρόνο. Με άλλα λόγια, μια σχέση μακροχρόνιας ισορροπίας συνεπάγεται τη συστηματική γραμμική κίνηση μεταξύ των οικονομικών μεταβλητών, που θέτει το παράδειγμα ενός οικονομικού συστήματος, μακροχρόνια. Η έννοια αυτή είναι γενικότερη από την έννοια της ισορροπίας στην οικονομική θεωρία γιατί περιλαμβάνει κάθε συμπεριφορά που μπορεί να εκδηλώσουν οι διαφορετικές μορφές ενός συστήματος.

Αν υποθέσουμε δύο μεταβλητές Z_t , Y_t να βρίσκονται σε μακροχρόνια (γραμμική) σχέση ισορροπίας μεταξύ τους, δηλαδή $Z_t = \beta Y_t$, τότε η διαφορά τους $Z_t - \beta Y_t$, που δηλώνει την απόκλιση από την κατάσταση ισορροπίας, περιέχει σημαντική πληροφορία, αφού κατά μέσο όρο το σύστημα τείνει προς αυτή την κατάσταση ισορροπίας. Συνεπώς, η διαφορά αυτή είναι ενδεικτική ως προς τη μελλοντική συμπεριφορά της μεταβλητής Z_t. Αν, για παράδειγμα, η διαφορά είναι θετική τότε η Z_t θα είναι πολύ μεγαλύτερη της Y_t και κατά μέσο όρο θα περιμένουμε μια πτώση της Z_t μελλοντικά. Ο όρος $Z_{t-1} - \beta Y_{t-1}$ ονομάζεται μηχανισμός διόρθωσης σφάλματος και δηλώνει την προηγούμενη κατάσταση ανισορροπίας, ενώ συχνά ενσωματώνεται στην παλινδρόμηση. Στην πράξη, η υποδειγματοποίηση συνολοκληρωμένων σειρών είναι στενά συνδεδεμένη με τον μηχανισμό διόρθωσης σφάλματος. Η συμπεριφορά διόρθωσης σφάλματος προκαλεί τη συνολοκλήρωση μεταξύ των χρονοσειρών και αντίστροφα. Δηλαδή αν υπάρχει μακροχρόνια σχέση μεταξύ δύο (ή περισσότερων) μη στάσιμων χρονοσειρών και η απόκλισή τους από αυτή τη μακροχρόνια σχέση είναι στάσιμη, τότε οι μεταβλητές θα λέμε ότι συνολοκληρώνονται. Να σημειωθεί ότι οι σειρές συνολοκληρώνονται μόνο όταν είναι ολοκληρωμένες ίδιου βαθμού και η διαφορά ή ο γραμμικός τους συνδυασμός, $Z_t - \beta Y_t$ είναι στάσιμη σειρά. Για το παράδειγμά μας, θα γράφουμε **CI(1,1)** και η διαφορά θα είναι **I(0)**, δηλαδή ολοκληρωμένη σε βαθμό χαμηλότερο κατά μία μονάδα μικρότερη από τις μεταβλητές Z_t και Y_t. Υπάρχουν τουλάχιστον τρεις λόγοι για τους οποίους η έννοια της συνολοκλήρωσης είναι σημαντική στα οικονομετρικά υποδείγματα ολοκληρωμένων χρονολογικών σειρών και στην εξέταση της μακροχρόνιας ισορροπίας μεταξύ αυτών των μεταβλητών:

1. Συνδέει σειρές υψηλότερου βαθμού ολοκλήρωσης, για τις οποίες υπάρχει ένας γραμμικός συνδυασμός χαμηλότερου βαθμού ολοκλήρωσης, που μπορεί να χαρακτηρίσει τη σχέση ισορροπίας μεταξύ αυτών των σειρών.
2. Ως συνέπεια της συνολοκλήρωσης με ισορροπία, προκύπτει η διαφοροποίηση της ψευδοπαλινδρόμησης έναντι της ερμηνεύσιμης παλινδρόμησης. Παλινδρομήσεις που σχετίζουν τα επίπεδα (levels) των χρονοσειρών έχουν νόημα όταν και μόνο όταν οι μεταβλητές είναι συνολοκληρωμένες. Έτσι, ο έλεγχος συνολοκλήρωσης μπορεί να είναι χρήσιμος στην αναγνώριση μεταξύ ψευδοπαλινδρόμησης και παλινδρόμησης με ερμηνευτική δυνατότητα.
3. Τέλος, αν ένα σύνολο μεταβλητών συνολοκληρώνεται, τότε έχουν μια παρουσίαση διόρθωση σφάλματος. Δηλαδή η σχέση τους μπορεί να εκφραστεί από ένα υπόδειγμα στο οποίο περιέχεται η απόκλιση των παρατηρούμενων τιμών από την κατάσταση μακροχρόνιας ισορροπίας.

Άσκηση Αυτοαξιολόγησης 5/Κεφάλαιο 1

Τι είναι η συνολοκλήρωση και γιατί είναι σημαντική; Να ανατρέξετε στην προηγούμενη υποενότητα και να ελέγξετε την απάντησή σας (βλ. και Παράρτημα στο τέλος του κεφαλαίου).

Μια γενίκευση του ορισμού της συνολοκλήρωσης για την περίπτωση **n** μεταβλητών, είναι η παρακάτω:

*«Αν Z_t είναι ένα **n×1** διάνυσμα των σειρών $Z_{1t}, Z_{2t}, ..., Z_{nt}$ και*
** Καθεμία από αυτές είναι I(d) και*
Υπάρχει ένα n×1 μη μηδενικό διάνυσμα **β, τέτοιο ώστε **Z'$_t$ β** ´I(d–b), τότε:*
***Z'$_t$ β** ´ CI(d,b). Το διάνυσμα **β** καλείται διάνυσμα συνολοκλήρωσης».*

1.4.12 Υποδείγματα διόρθωσης σφάλματος (Error Correction Models)

Ένα σημαντικό θεώρημα, γνωστό ως Granger representation theorem, θέτει ότι εάν δύο μεταβλητές X και Y συνολοκληρώνονται, τότε η μεταξύ τους σχέση μπορεί να παρασταθεί από ένα υπόδειγμα διόρθωσης σφάλματος. Ας υποθέσουμε τη μακροχρόνια σχέση ισορροπίας:

$$Y_t = a_0 + a_1 Z_t$$

Όπως είπαμε, οι μεταβλητές $\boldsymbol{Y}$ και $\boldsymbol{Z}$ δεν βρίσκονται πάντα σε σχέση ισορροπίας. Ας το δούμε ως δυναμικό υπόδειγμα. Τότε θα είναι:

$$\begin{cases} Y_t = \beta_0 + \beta_1 Z_t + \beta_2 Z_{t-1} + \gamma_1 Y_{t-1} + e_t \\ a_0 = \dfrac{\beta_0}{1-\gamma_1} \quad , \; a_1 = \dfrac{\beta_1 + \beta_2}{1-\gamma_1} \end{cases}$$

Θεωρούμε λοιπόν τη σχέση $Y_t = \beta_0 + \beta_1 Z_t + \beta_2 Z_{t-1} + \gamma_1 Y_{t-1} + e_t$ και κάνουμε τους εξής μετασχηματισμούς, με τη σειρά:

1. Αφαιρούμε και από τα δύο μέλη το Y_{t-1}, οπότε γίνεται $\Delta Y_t = \beta_0 + \beta_1 Z_t + \beta_2 Z_{t-1} - (1-\gamma_1) Y_{t-1} + e_t$.
2. Προσθέτουμε και αφαιρούμε τον όρο $\beta_1 Z_{t-1}$ και προκύπτει $\Delta Y_t = \beta_0 + \beta_1 \Delta Z_t + (\beta_1 + \beta_2) Z_{t-1} - (1-\gamma_1) Y_{t-1} + e_t$.
3. Αντικαθιστούμε τα ίσα της βασικής σχέσης για τους όρους $a_0 = \dfrac{\beta_0}{1-\gamma_1}$, $a_1 = \dfrac{\beta_1+\beta_2}{1-\gamma_1}$ και προκύπτει η ακόλουθη βασική σχέση.

$$\Delta Y_t = \beta_1 \Delta Z_t - (1-\gamma_1)(Y_{t-1} - a_0 - a_1 Z_{t-1}) + e_t$$

Από δω φαίνεται καθαρά πως οι μεταβολές της $\boldsymbol{Y}$ εξαρτώνται από τις μεταβολές της $\boldsymbol{Z}$ και από το λάθος ανισορροπίας της προηγούμενης περιόδου που παριστάνει ο όρος $(Y_{t-1} - a_0 - a_1 Z_{t-1})$. Με αλλά λόγια, το λάθος ανισορροπίας της προηγούμενης περιόδου για την $\boldsymbol{Y}$ διορθώνεται, για αυτό και τα υποδείγματα λέγονται Υποδείγματα Διόρθωσης Σφάλματος. Η διόρθωση είναι μερική και εξαρτάται από το συντελεστή γ_1, $0 < \gamma_1 < 1$.

Έλεγχος Συνολοκλήρωσης και Υποδείγματος

Τεχνικά, ο έλεγχος συνολοκλήρωσης **CI(*d*,*b*)** στην περίπτωση όπου $d = b$, είναι ανάλογος με τον έλεγχο ολοκλήρωσης. Με τη βοήθεια των στατιστικών **DF**, **ADF** μπορούμε να προσδιορίσουμε αν ο γραμμικός συνδυασμός δύο ή περισσότερων μεταβλητών είναι ***I*(0)**. Αν $b < d$, το διάνυσμα συνολοκλήρωσης δεν είναι στάσιμο και δεν έχει οικονομική ερμηνεία.

Οι Engle & Granger (1987), πρότειναν μια μέθοδο για τον έλεγχο συνολοκλήρωσης σε δύο στάδια. Υποθέτοντας ότι δύο μεταβλητές Y_t, X_t είναι ολοκληρωμένες 1^{ης} τάξης, δηλαδή **I(1)**, εκτιμάμε την εξίσωση συνολοκλήρωσης:

$$Y_t = \alpha + \beta X_t + z_t$$

και εξετάζουμε αν τα κατάλοιπα, z_t, είναι στάσιμα δηλαδή **I(0).** Αν τα κατάλοιπα της εξίσωσης συνολοκλήρωσης είναι **I(0)**, τότε οι σειρές μας είναι συνολοκληρωμένες και υπάρχει μακροχρόνια σχέση ισορροπίας και β είναι το διάνυσμα συνολοκλήρωσης. Ο έλεγχος μοναδιαίας ρίζας γίνεται, κατά τα γνωστά, με τη στατιστική Dickey–Fuller. Δεν θα συμπεριλάβουμε, όμως, τη μεταβλητή της τάσης (*t*) γιατί αυτό ισοδυναμεί με την υπόθεση ότι τα σφάλματα έχουν τάση.

1.4.13 Αιτιότητα κατά Granger

Η διατύπωση των αιτιακών σχέσεων είναι η προσπάθεια κάθε αναλυτή. Η παλινδρόμηση είναι μια ανάλυση μιας σχέσης μεταξύ των μεταβλητών αλλά δεν συνεπάγεται και αιτιότητα, γιατί θεωρείται δεδομένη. Συγκεκριμένα, αυτό που δεν μπορεί να δικαιολογήσει μια παλινδρόμηση ή μια χρονοσειρά, είναι το γεγονός ότι οι μεταβολές μιας **Y** δεν προηγούνται, έπονται ή είναι συγχρονισμένες με τις μεταβολές μιας **X** μεταβλητής. Η διαπίστωση της προηγήσεως (precedence) είναι ο σκοπός της ανάλυσης αιτιότητας κατά Granger, (Granger causality).

΄Εστω τα ακόλουθα υποδείγματα δύο χρονολογικών σειρών **Y** και **X**:

$$\begin{cases} Y_t = \sum\left(a_i Y_{t-i}\right) + \sum\left(\beta_t X_{t-i}\right) + e_t \quad , \ \text{(I)} \\ X_t = \sum\left(\gamma_i Y_{t-i}\right) + \sum\left(\delta_t X_{t-i}\right) + \varepsilon_t \quad , \ \text{(II)} \end{cases}$$

Υποθέτουμε πως οι τρέχουσες τιμές της **Y** είναι επηρεασμένες από τις παρελθοντικές τιμές της και από τιμές του παρελθόντος της **X** και ομοίως για τη **X**. Υποθέτουμε επίσης πως οι διαταρακτικοί όροι των δύο υποδειγμάτων δεν ταυτίζονται και δεν συσχετίζονται. Διακρίνουμε λοιπόν τις εξής περιπτώσεις:

1. Οι συντελεστές β_t των μεταβλητών X_{t-i} είναι στατιστικά σημαντικοί, ενώ οι συντελεστές γ_i της Y_{t-i} δεν είναι στατιστικά σημαντικοί. Τότε λέμε πως υπάρχει αιτιότητα κατά Granger της **X** προς την **Y**.
2. Οι συντελεστές β_t των μεταβλητών X_{t-i} δεν είναι στατιστικά σημαντικοί, ενώ οι συντελεστές γ_i της Y_{t-i} είναι στατιστικά σημαντικοί. Τότε λέμε πως υπάρχει αιτιότητα κατά Granger της **Y** προς τη **X**.
3. Οι συντελεστές β_t και γ_i είναι στατιστικά σημαντικοί. Τότε λέμε πως υπάρχει αιτιότητα κατά Granger της **X** προς την **Y**, αμφίδρομα.
4. Οι συντελεστές β_t και γ_i δεν είναι στατιστικά σημαντικοί. Τότε λέμε πως υπάρχει ανεξαρτησία.

Ο έλεγχος γίνεται με την ***F*** στατιστική, όπου το υπόδειγμα χωρίς περιορισμούς είναι το (Ι) και το (ΙΙ) και με περιορισμούς, όταν στο (Ι) β=0 και στο (ΙΙ), όταν γ=0.

Σύμφωνα με τον Έλεγχο Sims, το υπόδειγμα περιλαμβάνει και τις τιμές της προήγησης (Lead values), δηλαδή

$$Y_t = \sum\left(a_i Y_{t-i}\right) + \sum\left(\beta_t X_{t-i}\right) + \sum\left(\lambda_i Y_{t+i}\right) + e_t$$

Αν γίνει αποδεκτό ότι το μέλλον δεν προκαλεί το παρόν ή το παρελθόν, τότε αν υπάρχει αιτιότητα κατά Granger από τη **Χ** στην **Υ** θα πρέπει να υπάρχει σχέση ανάμεσα στη **Χ** και την **Υ** με προήγηση. Άρα θα πρέπει οι συντελεστές λ_i να είναι διάφοροι του μηδέν. Δηλώνουμε ως μηδενική υπόθεση, κατά Sims, ότι $H_0 : \lambda_i = 0$ όπου αν απορριφθεί σημαίνει αιτιότητα Granger από τη **Χ** στην **Υ**. Ο έλεγχος της μηδενικής υπόθεσης γίνεται με τη στατιστική F.

1.4.14 Αυτοπαλίνδρομα διανύσματα VAR

Γνωρίζουμε από το υπόδειγμα **AR(p)** ότι έχει τη μορφή:

$$Y_t = a_0 + a_1 Y_{t-1} + a_2 Y_{t-2} + ... + a_p Y_{t-p} + e_t$$

Αν υποθέσουμε τώρα ότι η μεταβλητή **Υ** δεν είναι μία, αλλά είναι ένα διάνυσμα μεταβλητών, **k** τον αριθμό, διάνυσμα στήλης **kX1**, τότε η **Υ** είναι ένα διάνυσμα που εκφράζεται ως συνάρτηση των χρονικών υστερήσεων του και λέγεται αυτοπαλίνδρομο διάνυσμα, VAR. Το σύστημα λοιπόν που δημιουργείται από το **k** τάξης διάνυσμα του **Υ** είναι ένα σύστημα που αποτελείται από εξαρτημένες μεταβλητές με χρονικές υστερήσεις και όχι από ερμηνευτικές μεταβλητές. Ένα τέτοιο σύστημα για δύο χρονικές υστερήσεις, θα είχε τη μορφή:

$$\begin{cases} Y_{1t} = a_1 + a_{11} Y_{1,t-1} + a_{12} Y_{2,t-2} + e_{1t} \\ Y_{2t} = a_2 + a_{21} Y_{1,t-1} + a_{22} Y_{2,t-2} + e_{2t} \end{cases}$$

Όπως βλέπουμε, έχουμε δύο μεταβλητές που καθεμιά εκφράζεται ως συνδυασμός του εαυτού της με χρονική υστέρηση και της άλλης μεταβλητής πάλι με χρονική υστέρηση. Το σύστημα αυτό για **k = 2** και **p = 1** το ονομάζουμε **VAR(1)**. Η κυριότερη χρήση των υποδειγμάτων **VAR** είναι για βραχυχρόνιες προβλέψεις. Η μορφή του υποδείγματος 2Χ2, σε μήτρες, θα είναι:

$$Y_t = A_0 + A Y_{t-1} + E_t$$

$$Y_t = \begin{bmatrix} Y_{1t} \\ \\ Y_{2t} \end{bmatrix}, A_0 = \begin{bmatrix} a_1 \\ \\ a_2 \end{bmatrix}, Y_{t-1} = \begin{bmatrix} Y_{1,t-1} \\ \\ Y_{2,t-1} \end{bmatrix}, E_t = \begin{bmatrix} e_{1t} \\ \\ e_{2t} \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Τα e_{1t} και e_{2t} είναι λευκός θόρυβος. Υποθέτουμε ότι τα διανύσματα των διαταρακτικών όρων δεν αυτοσυσχετίζονται ή αυτοσυσχετίζονται στην ίδια χρονική περίοδο. Η γενική μορφή ενός υποδείγματος **VAR(k,p)**, (**k** μεταβλητές, **p** τάξης), είναι η εξής:

$$Y_t = A_0 + A_1 Y_{t-1} + A_2 Y_{t-2} + ... + A_p Y_{t-p} + E_t$$

Οι μήτρες A_i είναι για **i = 1,....p** των συντελεστών a_{ij} , $i, j = 1, 2......k$.

Για την εκτίμηση ενός τέτοιου υποδείγματος, θα πρέπει να ικανοποιείται η συνθήκη της στασιμότητας και η συνθήκη των διαταρακτικών όρων. Άρα το διάνυσμα των μεταβλητών **Y**, έχει σταθερό μέσο και σταθερές συνδιακυμάνσεις. Οι εκτιμητές θα είναι συνεπείς. Σε αυτή την περίπτωση, λοιπόν, το σύστημα **VAR** μπορεί να εκτιμηθεί με μια **MLS** σε κάθε εξίσωση ξεχωριστά. Για το **VAR(1)** μπορούμε να πούμε ότι οι εκτιμητές θα είναι, για παράδειγμα:

$$\hat{C}_i = \left(X^T X\right)^{-1} X^T Y_i$$

Όπου, $\hat{C}_i = \begin{bmatrix} a_i \\ a_{i1} \\ a_{i2} \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} 1 & Y_{1,t-1} & Y_{2,t-1} \end{bmatrix}$ είναι η **(T–1)X3** μήτρα των παρατηρήσεων των παλινδρομητών της **i** εξίσωσης για **i = 1,2** και $Y_i = \begin{bmatrix} Y_{i2} \\ ... \\ Y_{iT} \end{bmatrix}$.

Με τον τρόπο αυτό αναγόμαστε σε συστήματα εξισώσεων.

Παράδειγμα 54
(Vector Autoregressive)

Θα υποθέσουμε ότι παίρνουμε την απλή περίπτωση 2Χ2. Είναι λοιπόν:

$$\begin{cases} Y_{1t} = a_{11} Y_{1,t-1} + a_{12} Y_{2,t-1} + e_{1t} \\ Y_{2t} = a_{21} Y_{1,t-1} + a_{22} Y_{2,t-1} + e_{2t} \end{cases}$$

Έχουμε δύο μεταβλητές που η *Y*1 δείχνει το Εισόδημα και η *Y*2 δείχνει την Κατανάλωση για την περίοδο 1960–1978 σε τρίμηνα. Η καθεμιά εκφράζεται ως συνδυασμός του εαυτού της με χρονική υστέρηση και της άλλης μεταβλητής πάλι με χρονική υστέρηση. Το σύστημα αυτό είναι **VAR(1).**

Τα e_{1t} και e_{2t} είναι λευκός θόρυβος. Θα εξάγουμε τα αποτελέσματα στο πρόγραμμα E*VIEWS*. Η λύση είναι λοιπόν:

Vector Autoregression Estimates		
Sample(adjusted): 1960:3 1978:4		
Standard errors in () & t–statistics in []		
	INC	**CS**
INC(–1)	**1.074482**	**0.275163**
	(0.14517)	(0.09713)
	[7.40144]	[2.83283]
CS(–1)	**0.022906**	**0.679420**
	(0.21624)	(0.14468)

R – squared	**0.999332**	**0.999578**	
Adj. R – squared	**0.999303**	**0.999560**	
Sum sq. resids	**12694.81**	**5683.263**	
S.E. equation	**13.46679**	**9.010520**	
F – statistic	**34911.43**	**55265.70**	
Log likelihood	**–295.3621**	**–265.6264**	
Akaike AIC	**8.090869**	**7.287201**	
Schwarz SC	**8.215413**	**7.411745**	
Mean dependent	**1137.635**	**981.5541**	
S.D. dependent	**510.2608**	**429.5053**	

Δηλαδή:

$$Y_t = \hat{A}Y_{t-1} + \hat{E}_t$$

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} \hat{a}_{11} & \hat{a}_{21} \\ \hat{a}_{12} & \hat{a}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.074 & 0.275 \\ 0.022 & 0.679 \end{bmatrix}$$

1.4.15 Υποδείγματα μεταβλητότητας

Πολλές οικονομικές χρονολογικές σειρές δεν έχουν σταθερό μέσο και χαρακτηρίζονται από περιόδους μεγάλης μεταβλητότητας ή αστάθειας. Για παράδειγμα, στη διεθνή βιβλιογραφία έχει καταγραφεί το συμπέρασμα ότι οι αγορές χρήματος και κεφαλαίου είναι περισσότερο ευμετάβλητες την τελευταία δεκαετία από ό,τι ήταν πριν. Συγκεκριμένα, οι χρηματοοικονομικές μεταβλητές παρουσιάζουν συχνά περιόδους με μεγάλες μεταβολές, (π.χ. απότομες ανοδικές ή καθοδικές κινήσεις χρηματιστηριακών δεικτών ή επιτοκίων), ακολουθούμενες από περιόδους σταθερότητας (π.χ. περιόδους σταθερών αποδόσεων), κ.ο.κ.

Με λίγα λόγια εμπειρικά διαφαίνεται μια μεταβλητότητα στις χρηματοοικονομικές μεταβλητές η οποία δεν παραμένει «σταθερή» μέσα στον χρόνο, αλλά είναι χρονικά εξαρτώμενη (time varying), με σημαντικές επιπτώσεις στην επενδυτική συμπεριφορά και τις στρατηγικές διαχείρισης του κινδύνου. Οι αλλαγές της διακύμανσης των χρηματοοικονομικών μεταβλητών είναι σημαντικές στην κατανόηση της λειτουργίας των αγορών.

Η χρηματοοικονομική θεωρία στην απλούστερή της μορφή προσδιορίζει χαρτοφυλάκια τα οποία διαμορφώνονται ως συνάρτηση των αναμενόμενων μέσων και διακυμάνσεων των αποδόσεων των αξιών που απαρτίζουν το χαρτοφυλάκιο. Η ζήτηση των αξιών μεταβάλλεται όταν η αναμενόμενη μέση απόδοση ή η αναμενόμενη διακύμανση των αποδόσεων μεταβληθούν. Ένας επενδυτής θα «ζητήσει» μεγαλύτερη αναμενόμενη απόδοση από μια μετοχή η οποία χαρακτηρίζεται από μεγάλη επικινδυνότητα, δηλαδή μεγάλη διακύμανση.

Έτσι, η σύγχρονη ανάλυση χρονολογικών σειρών ασχολείται με υποδείγματα που επεκτείνουν τη μεθοδολογία Box–Jenkins με σκοπό την ανάλυση των ιδιαίτερων χαρακτηριστικών των οικονομικών χρονοσειρών.

Μια στοχαστική μεταβλητή με σταθερή διακύμανση ονομάζεται ομοσκεδαστική σε αντίθεση με την ετεροσκεδαστική. Για τις χρονοσειρές που παρουσιάζουν μεταβλητότητα, η μη υπό συνθήκη διακύμανση μπορεί να είναι σταθερή, ακόμα και αν η διακύμανση σε υποπεριόδους είναι ιδιαίτερα μεγάλη.

Ειδικότερα, πρέπει να αναφέρουμε έναν αριθμό «εμπειρικών κανονικοτήτων» (empirical regularities) που παρατηρούνται κυρίως στις αποδόσεις χρηματιστηριακών αξιών και τις οποίες προσπαθεί να «αντιμετωπίσει» η σύγχρονη ανάλυση χρονολογικών σειρών με βάση τα υποδείγματα μεταβλητότητας.

1. **Thick Tails:** Οι αποδόσεις των αξιών τείνουν να είναι λεπτόκυρτες. Αυτό οδήγησε στην προσπάθεια υποδειγματοποίησής τους ως **iid** μεταβλητές από μια thick tail κατανομή.
2. **Συγκέντρωση της αστάθειας (volatility clustering)**: Μεγάλες (μικρές) αλλαγές στην αστάθεια τείνουν να ακολουθούνται από μεγάλες (μικρές) αλλαγές του ίδιου προσήμου κατά την πάροδο του χρόνου.
3. **Παθητικά αποτελέσματα (leverage effects):** Το χαρακτηριστικό αυτό αναφέρεται στην παρατήρηση ότι αλλαγές στις τιμές των αξιών είναι αρνητικά συσχετισμένες με αλλαγές στην αστάθεια.
4. **Περίοδοι κλειστής αγοράς (non–trading periods)**: Φαίνεται ότι σε περιόδους που η χρηματιστηριακή αγορά παραμένει κλειστή, η πληροφόρηση των επενδυτών συσσωρεύεται και η εκδήλωσή της αντανακλάται στην αυξημένη αστάθεια των αποδόσεων κατά την επαναλειτουργία της αγοράς.
5. **Προβλέψιμα γεγονότα (forecastable events)**: Η δημοσιοποίηση πληροφοριών σχετικών με την κερδοφορία των επιχειρήσεων ή την πορεία μακροοικονομικών μεγεθών και γενικά πληροφοριών που μπορούν να ενσωματωθούν σε κά-

ποια διαδικασία πρόβλεψης, είναι θετικά συσχετισμένη με άνοδο της αστάθειας.

6. **Αυτοσυσχέτιση και αστάθεια (serial correlation and volatility)**: Φαίνεται να υπάρχει μια αντίστροφη σχέση της διακύμανσης και της συσχέτισης των αποδόσεων.
7. **Σύγχρονες και ομοιόμορφες αλλαγές των ασταθειών (co–movements in volatilities)**: Φαίνεται ότι ποσοστιαίες αλλαγές της διακύμανσης των δεικτών τυπικά υπονοούν ισοδύναμες αλλαγές της διακύμανσης των αποδόσεων των μετοχών. Επιπλέον, οι αλλαγές αυτές σε κάθε απόδοση φαίνονται να κινούνται προς την ίδια κατεύθυνση.

Τα υποδείγματα μεταβλητότητας –ή αλλιώς τα υπό συνθήκη ετεροσκεδαστικά υποδείγματα (Conditional Heteroskedasticity Models)– πρωτοεμφανίζονται από τον Engle (1982) και στοχεύουν στη χρησιμοποίηση της διαθέσιμης πληροφόρησης για την πρόβλεψη της υπό συνθήκης διακύμανσης μιας χρονοσειράς ή ενσωματώνουν την υπό συνθήκη διακύμανση στην εκτίμηση υποδειγμάτων, όπως αυτό της απλής παλινδρόμησης, αποσκοπώντας στη βελτιστοποίηση των διαστημάτων εμπιστοσύνης των προβλέψεων και στην υποδειγματοποίηση των παραπάνω εμπειρικών παρατηρήσεων. Τα πιο γνωστά είναι το υπόδειγμα ARCH και GARCH.

Στο απλό γραμμικό υπόδειγμα παλινδρόμησης $Y_t = X_t\beta + e_t$, ο υπό συνθήκη μέσος $E_{t-1}(Y_t) = X_t\beta$ μεταβάλλεται στον χρόνο και απώτερος σκοπός μας είναι η πρόβλεψή του. Στα υποδείγματα μεταβλητότητας, η υπό συνθήκη διακύμανση της μεταβλητής Y_t, η $Var(Y_t|I_{t-1})$, εξαρτάται από τη διαθέσιμη πληροφόρηση I_{t-1} μέχρι τη χρονική στιγμή **t–1** και απώτερος σκοπός μας είναι η πρόβλεψή της σε συνδυασμό με την πρόβλεψη του υπό συνθήκη μέσου.

1.4.16 Υπό συνθήκη και μη υπό συνθήκη μέσος και διακύμανση στάσιμων χρονολογικών σειρών

Για τον μέσο

Ως γνωστόν, $E(Y_t) = \mu$ είναι ο μη υπό συνθήκη μέσος της σειράς, ο οποίος δεν είναι τυχαία μεταβλητή και υποθέτουμε ότι όλες οι παρατηρήσεις της χρονολογικής σειράς είναι **iid,** δηλαδή είναι απλώς ένας αριθμός. Μπορούμε επίσης να ερμηνεύσουμε τον μη υπό συνθήκη μέσο ως την καλύτερη πρόβλεψη της χρονοσειράς μας όταν δεν διαθέτουμε καμία πληροφορία από τις προηγούμενες τιμές της σειράς.

Η ανάλυση της παλινδρόμησης μπορεί να μας βοηθήσει να υποδειγματοποιήσουμε τον υπό συνθήκη μέσο της σειράς, που είναι εξαρτώμενος από τον χρόνο. Ο υπό συνθήκη μέσος είναι $m_t = E(Y_t|I_{t-1}) = E_{t-1}(Y_t)$, ο οποίος χρησιμοποιεί πληροφόρηση από το παρελθόν, I_{t-1}, και μπορεί να προβλεφθεί. Ως προηγούμενη πληροφορία μπορεί να χρησιμοποιηθούν και οι παρελθοντικές τιμές της ίδιας της χρονοσειράς. Ακόμα, ενώ η διαφορά $Y_t - \mu$ μπορεί να προβλεφθεί, η διαφορά $Y_t - m_t = e_t$ δεν μπορεί να προβλεφθεί με βάση μόνο το σύνολο των πληροφοριών I_{t-1}. Έτσι ο υπό συνθήκη μέσος είναι χρονικά εξαρτώμενος και μπορεί να υποδειγματοποιηθεί.

Για τη διακύμανση

Με βάση την ίδια λογική, η μη υπό συνθήκη και η υπό συνθήκη διακύμανση θα είναι αντίστοιχα:

1. Μη υπό συνθήκη διακύμανση: $\sigma^2 = E(Y_t - \mu)^2$
2. Υπό συνθήκη Διακύμανση: $\sigma_t^2 = E[(Y_t - m_t)^2 \mid I_{t-1}] = E_{t-1}(Y_t - m_t)^2$

Δηλαδή η υπό συνθήκη διακύμανση είναι επίσης μια χρονολογική σειρά, όπως και ο υπό συνθήκη μέσος, που παριστάνει τη διακύμανση της υπό συνθήκη κατανομής της χρονολογικής μας σειράς. Στην περίπτωση όπου η χρονολογική σειρά που μελετάμε δεν είναι στάσιμη, τότε ο μη υπό συνθήκη μέσος και η μη υπό συνθήκη διακύμανση είναι απροσδιόριστα μεγέθη. Αφού $Y_t - m_t = e_t$ μπορούμε να εκφράσουμε την υπό συνθήκη διακύμανση, σ_t, σε συνάρτηση με το τετράγωνο των παρελθοντικών τιμών των καταλοίπων, δηλαδή:

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 e_{t-1}^2$$

Βεβαίως υποθέτουμε ότι μια μόνο υστέρηση είναι κατάλληλη. Τα βασικά στοιχεία που μας ενδιαφέρουν εδώ είναι ο καθορισμός του υπό συνθήκη μέσου, ο καθορισμός της υπό συνθήκη διακύμανσης και ο καθορισμός της υπό συνθήκη πυκνότητας του διαταρακτικού όρου. Είναι εύκολο να σκεφτούμε οικονομικά παραδείγματα που θέλουμε ώστε να προβλέψουμε την υπό συνθήκη διακύμανση. Για παράδειγμα, αν υποθέσουμε ότι η υπό μελέτη χρονοσειρά Y_t αναφέρεται στις αποδόσεις ενός περιουσιακού στοιχείου, τότε αυτό που ενδιαφέρει τον κάτοχό του, είναι η απόδοση και η διακύμανση για την περίοδο που θα κρατήσει το στοιχείο αυτό στο χαρτοφυλάκιό του, ενώ η μη υπό συνθήκη διακύμανση δεν παίζει μεγάλο ρόλο για τον επενδυτή που θα κρατήσει το στοιχείο κατά το χρονικό διάστημα από τη στιγμή **t** μέχρι τη στιγμή **t+1**.

Για τον υπολογισμό του υπό συνθήκη μέσου **k** περιόδους μπροστά, θεωρούμε την πληροφορία που έχουμε από το πρόσφατο παρελθόν της σειράς, $E(Y_t \mid I_t) = E_t Y_t$, και θα είναι για διάφορες μελλοντικές περιόδους, **1,2,..**:

- $E_t Y_{t+1} = a + \beta Y_t$
- $E_t Y_{t+2} = a(1+\beta) + \beta^2 Y_t$
- .....
- $E_t Y_{t+k} = a(1+\beta+\beta^2+\ldots\beta^{k-1}) + \beta^k Y_t$

Η υπό συνθήκη διακύμανση για διαφορετικούς ορίζοντες πρόβλεψης ορίζεται:

$$\mathrm{var}(Y_{t+k}\left|I_t\right.) = \sigma_e^2(1+\beta^2+\beta^4+...+\beta^{2k-2}) = \sigma_e^2\sum_{j=0}^{k-1}\beta^{2j}$$

Συγκρίνοντας την μη υπό συνθήκη με την υπό συνθήκη διακύμανση, παρατηρούμε ότι η τελευταία είναι πάντα μικρότερη από την πρώτη σε κάθε ορίζοντα πρόβλεψης, γιατί χρησιμοποιεί την πληροφορία της στοχαστικής συμπεριφοράς της Y_t. Όσο βέβαια το **k → +∞,** τόσο η υπό συνθήκη διακύμανση πλησιάζει τη μη υπό συνθήκη διακύμανση αφού το σύνολο πληροφόρησης I_t, μέχρι την περίοδο **t**, «απομακρύνεται» τόσο ώστε να καθίσταται ασήμαντο για τις οποιεσδήποτε προβλέψεις.

Παράδειγμα 55

Ας θεωρήσουμε ένα απλό **AR(1)** υπόδειγμα με ή χωρίς σταθερό μέσο. Αν η Y_t δίνεται ως $Y_t = a_1Y_{t-1} + e_t$, τότε χρησιμοποιώντας τις γνωστές μας σχέσεις έχουμε τα ακόλουθα. Ο μη υπό συνθήκη μέσος και η μη υπό συνθήκη διακύμανση της σειράς:

1. $\mu = E(Y_t) = E(\sum_{j=0}^{+\infty} a_1^j e_{t-j}) = 0$

2. $\sigma_{Y_t}^2 = Var(Y_t) = \dfrac{\sigma_e^2}{1-a_1^2}$

Ο υπό συνθήκη μέσος και η υπό συνθήκη διακύμανση δίνονται αντίστοιχα από τις σχέσεις:

1. $E_{t-1}(Y_t) = a_1Y_{t-1}$

2. $Var(Y_t\left|Y_{t-1}\right.) = a_1^2Var(Y_{t-1}\left|Y_{t-1}\right.) + Var(e_t\left|Y_{t-1}\right.) + 2Cov(a_1Y_{t-1}, e_t\left|Y_{t-1}\right.) = \sigma_e^2$.

Αν η Y_t δίνεται από ένα **AR(1)** υπόδειγμα με σταθερό όρο, $Y_t = a + \beta Y_{t-1} + e_t$, $|\beta| < 1$, τότε:

1. Ο μη υπό συνθήκη μέσος είναι $\mu = E(Y_t) = \dfrac{a}{1-\beta}$

2. Η μη υπό συνθήκη διακύμανση είναι: $Var(Y_t) = \sigma_{Y_t}^2 = \dfrac{\sigma_e^2}{1-\beta^2} = \sigma_e^2\sum_{j=0}^{+\infty}\beta^{2j}$

Από την άλλη πλευρά θα είναι:

1. Ο υπό συνθήκη μέσος: $E_{t-1}(Y_t) = a + \beta Y_{t-1}$

2. Η υπό συνθήκη διακύμανση της σειράς μας θα είναι, $E([Y_t - E_{t-1}(Y_t)])^2 = E(Y_t - a - \beta Y_{t-1})^2 = E(e_t)^2 = \sigma_e^2$.

1.4.17 Το Υπόδειγμα ARCH

Έστω το γνωστό μας γραμμικό πολλαπλό υπόδειγμα:

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_{t1} + \beta_2 X_{t2} + ... + \beta_k X_{tk} + \varepsilon_t$$

Ας υποθέσουμε ότι η διακύμανση του διαταρακτικού όρου μεταβάλλεται διαχρονικά και η μεταβολή αυτή σχετίζεται με το ποσό ευαισθησίας της μεταβλητότητας (volatility) της προηγούμενης χρονικής στιγμής ή των προηγούμενων χρονικών στιγμών γενικότερα. Αυτό σημαίνει ότι ο διαταρακτικός όρος έχει μια ετεροσκεδαστικότητα που εξαρτάται από τις προηγούμενες τιμές του. Ας πάρουμε την απλή περίπτωση όπου εξαρτάται από την προηγούμενη τιμή του και μόνο. Τότε θα έχει τη μορφή:

$$\sigma_t^2 = a_0 + a_1 \varepsilon_{t-1}^2$$

Η σχέση αυτή μας δείχνει ότι έχουμε μια υπό συνθήκη διακύμανση του διαταρακτικού όρου από την προηγούμενη τιμή του. Ας θεωρήσουμε σφάλματα $e_t \sim N(0,1)$, που κατανέμονται με μέσο μηδενικό και διακύμανση σταθερή ίση με τη μονάδα. Τότε δημιουργούμε τη σχέση:

$$\varepsilon_t = e_t \left(a_0 + a_1 \varepsilon_{t-1}^2 \right)^{1/2} \qquad \text{(σχέση α)}$$

Η σχέση (α), είναι μια διαδικασία Αυτοπαλίνδρομης Υπό Συνθήκη Ετεροσκεδαστικότητας $1^{ης}$ τάξης, (First Order Autoregressive Heteroskedasticity) ή αλλιώς μια διαδικασία ARCH(1). Η γενική μορφή αυτής της διαδικασίας για **p** τάξεις, είναι η ακόλουθη:

$$\varepsilon_t = e_t \left(a_0 + a_1 \varepsilon_{t-1}^2 + a_2 \varepsilon_{t-2}^2 + ... + a_p \varepsilon_{t-p}^2 \right)^{1/2} \qquad \text{(σχέση β)}$$

Οι βασικές ιδιότητες μιας διαδικασίας **ARCH**, είναι:

1. $E\left(\varepsilon_t\right) = 0$
2. $\sigma\left(\varepsilon_t\right) = \sigma^2 = \dfrac{a_0}{1-a_1}$, $a_0 > 0$, $\left|a_1\right| < 1$
3. $E\left(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}\right) = 0$
4. $\sigma\left(\varepsilon_t / \varepsilon_{t-1}\right) = \sigma_t^2 = a_0 + a_1 \varepsilon_{t-1}^2$

Άρα σε μια τέτοια περίπτωση παλινδρόμησης τα κατάλοιπα δεν εμφανίζουν απλώς αυτοσυσχέτιση, αλλά εμφανίζουν το λεγόμενο Φαινόμενο ARCH, που οφείλεται στο γεγονός ότι η διακύμανση του διαταρακτικού όρου είναι συνάρτηση των παρελθόντων τιμών του. Ο έλεγχος για την ύπαρξη **ARCH**, είναι ουσιαστικά ένας έλεγχος της μηδενικής υπόθεσης, $H_0 : a_1 = a_2 = ... = 0$. Τα στάδια ελέγχου της μηδενικής υπόθεσης αυτής είναι τα εξής:

1. Υπολογίζουμε τα κατάλοιπα $\hat{\varepsilon}_t$, του αρχικού υποδείγματος.
2. Εκτιμάμε τους συντελεστές, $a_0, a_1, a_2.....$, μέσω του υποδείγματος, $\hat{\varepsilon}_t = a_0 + a_1 \hat{\varepsilon}_{t-1}^2 + a_2 \hat{\varepsilon}_{t-2}^2 + ... + a_p \hat{\varepsilon}_{t-p}^2 + u_t$.

3. Θεωρούμε τη μηδενική υπόθεση $H_0 : a_1 = a_2 = ... = 0$. Για τον έλεγχό της, συγκρίνουμε με τη στατιστική ***F*** ή με το κριτήριο $(LM)_{(n-p)} \sim \chi_p^{\,2}$. Ο συντελεστής προσδιορισμού είναι της βοηθητικής παλινδρόμησης. Αν $(n-p) < \chi^2_{(\alpha,\rho)}$ ή $F < F^{(C)}$ τότε δεχόμαστε τη μηδενική υπόθεση.

1.4.18 Το Υπόδειγμα GARCH

Είπαμε ότι στο υπόδειγμα **ARCH** το φαινόμενο **ARCH** είναι:

$$\sigma_t^2 = a_0 + a_1\varepsilon_{t-1}^2 + ... + a_p\varepsilon_{t-p}^2$$

Γενικεύοντας τώρα το υπόδειγμα **ARCH**, προσθέτοντας την υπό συνθήκη διακύμανση του διαταρακτικου όρου, να είναι επιπλέον συνάρτηση των τιμών της με χρονική υστέρηση, προκύπτει το υπόδειγμα GARCH (Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity) με σχέση:

$$\sigma_t^2 = a_0 + a_1\varepsilon_{t-1}^2 + ... + a_p\varepsilon_{t-p}^2 + c_1\sigma_{t-1}^2 + ... + c_q\sigma_{t-q}^2$$

Για τιμές των χρονικών υστερήσεων **p, q**, πολύ υψηλές έχουμε δυσκολία στην εκτίμηση και την αντιμετώπιση της διαδικασίας. Ας υποθέσουμε ότι **p, q = 1**. Τότε έχουμε το υπόδειγμα GARCH(1,1), που είναι:

$$\sigma_t^2 = a_0 + a_1\varepsilon_{t-1}^2 + c_1\sigma_{t-1}^2$$

Αντικαθιστώντας διαδοχικά με τα ίσα της διακύμανσης κάθε χρονική υστέρηση, προκύπτει ότι:

$$\sigma_t^2 = \frac{a_0}{1-c_1} + a_1\sum_{i=1}^{\infty}\left(c_1^{i-1}\varepsilon_{t-i}^2\right)$$

Άρα η τρέχουσα διακύμανση είναι εξαρτημένη όλων των τετραγώνων των προηγούμενων, παρελθόντων, διαταρακτικών όρων. Αν $0 < c_1 < 1$, τότε γεωμετρικά τα c_1^i τείνουν στο μηδέν.

Παράδειγμα 56

Ας πάρουμε την απλούστερη περίπτωση ενός **ARCH(1)** υποδείγματος και ας υποθέσουμε ότι τα σφάλματα ακολουθούν το γραμμικό υπόδειγμα:

$$e_t = Y_t - \beta X_t$$

Ας δεχτούμε στη συνέχεια ότι τα κατάλοιπα ακολουθούν τη διαδικασία:

$$e_t = v_t(a_0 + a_1e_{t-1}^2)^{1/2}$$

έτσι ώστε η υπό συνθήκη διακύμανση είναι:

$$\sigma_t^2 = a_0 + \alpha_1 e_{t-1}^2$$

Συνεπώς, η κατάλληλη συνάρτηση πιθανοφάνειας θα είναι:

$$\log L = -\left(\frac{T}{2}\right)\ln(2\pi) - \left(\frac{T}{2}\right)\ln\sigma_t^2 - \left(\frac{1}{2\sigma_t^2}\right)\sum_{t=1}^{T}(Y_t - \beta X_t)^2$$

όπου:

$$\sigma_t^2 = a_0 + \alpha_1 e_{t-1}^2 = a_0 + a_1\left(Y_{t-1} - \beta X_{t-1}\right)^2$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω μεγιστοποιούμε την logL ως προς τις τρεις παραμέτρους a_0, a_1, β. Σε αυτή τη διαδικασία αριστοποίησης, απαιτούνται αρχικές τιμές για τις παραμέτρους αυτές. Συνήθως αρχική τιμή για την a_0 μπορεί να είναι η διακύμανση των καταλοίπων από μια απλή παλινδρόμηση. Για την παράμετρο β, ως αρχική τιμή μπορεί να θεωρηθεί η εκτίμηση του συντελεστή αυτού από την παλινδρόμηση της y_t στην X_t. Τέλος, η αρχική τιμή για την a_1 μπορεί να είναι οποιοσδήποτε πολύ μικρός αριθμός.

Παράδειγμα 57

Στο σημείο αυτό παρουσιάζουμε μερικά αποτελέσματα της εφαρμογής των υποδειγμάτων αυτών στις αποδόσεις διάφορων χρηματοοικονομικών χρονολογικών σειρών.

Στον επόμενο πίνακα δίνονται τα αποτελέσματα για έναν αριθμό από χρηματοοικονομικές σειρές για την περίοδο 1990–1994 (Jorion, 1997).

Πίνακας
Υποδείγματα κινδύνου: Εκτιμήσεις GARCH, 1990-1994

Παράμετρος	Ισοτιμία $/Br.Pou.	Ισοτιμία DM/$	Ισοτιμία DM/Pr.Pou.	Μετοχές ΗΠΑ	Τριακονταετή Ομόλογα	Αγορά Ομολόγων
σ (%)	11.33	11.48	7.08	12.02	9.72	3.78
A_0	0.00695	0.01185	0.00316	0.00233	0.00410	0.00067
A_1	0.0678	0.0507	0.0979	0.0213	0.0256	0.0132
β	0.9186	0.9260	0.8908	0.9740	0.9634	0.9749
			Εμμονή			
$\alpha_1 + \beta$	0.9864	0.9767	0.9887	0.9953	0.9890	0.9881

Αν και υπάρχουν σημαντικές διαφορές μεταξύ των επιπέδων μεταβλητότητας των σειρών, σε όλες τις σειρές η μεταβλητότητα του κινδύνου είναι σημαντική. Επίσης, η εμμονή της αστάθειας είναι αρκετά υψηλή και πλησιάζει τη μονάδα (μεταξύ 0.97 και 0.99).

Στον επόμενο πίνακα εκτιμήθηκε ένα στοχαστικό–GARCH υπόδειγμα στις ημερήσιες και εβδομαδιαίες αποδόσεις του γενικού δείκτη του Χρηματιστηρίου Αξιών Αθηνών για τη χρονική περίοδο 1986–1993.

Πίνακας
Εκτιμήσεις στοχαστικού-GARCH υποδείγματος στον γενικό δείκτη του ΧΑΑ (1986-1993)

Παράμετροι	α_0	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5
Ημερήσιες Παρατηρήσεις	–2.40	0.19	0.14	0.08	0.02	0.12
Εβδομαδιαίες παρατηρήσεις	–2.94	0.21	0.11			

Το άθροισμα των συντελεστών είναι μικρότερο της μονάδας, επιβεβαιώνοντας την πολύ καλή προσαρμογή του υποδείγματος.

Η μεθοδολογία των υποδειγμάτων GARCH έχει χρησιμοποιηθεί τελευταία πολύ στη χρηματοοικονομική βιβλιογραφία. Το RiskMetrics της JP Morgan έχει αναπτύξει και χρησιμοποιεί ένα εκθετικό–GARCH υπόδειγμα

$$h_t = \lambda h_{t-1} + (1-\lambda) r_{t-1}^2$$

όπου για την παράμετρο λ (decay factor) ισχύει λ < 1. Το υπόδειγμα αυτό αποτελεί μια ειδική περίπτωση των υποδειγμάτων GARCH, όπου $\alpha_0 = 0$ και ΣΑ = 1· Μετά από ανάλογους πειραματισμούς η JP Morgan επέλεξε για την παράμετρο λ την τιμή λ = 0.97 (για περισσότερες πληροφορίες βλέπε *το Technical Manual* της JP Morgan, 1997).

Σύνοψη

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάσαμε σύντομα τις βασικές γνώσεις της στατιστικής και της οικονομετρίας που είναι χρήσιμες στη μελέτη του παρόντος τόμου και, γενικότερα στη διαχείριση χρηματοοικονομικού κινδύνου.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ
Απαντήσεις σε Ασκήσεις Αυτοαξιολόγησης

Άσκηση Αυτοαξιολόγησης 1

	X	Y	Z
X	1	σxy	σxz
Y	σyx	1	σyz
Z	σzx	σzy	1

(α)

	X	Y	Z
X	1		
Y	σyx	1	
Z	σzx	σzy	1

(β)

Άσκηση Αυτοαξιολόγησης 2

Σε μια πλήρως αποτελεσματική αγορά θα πρέπει οι μεταβολές των τιμών των περουσιακών στοιχείων να είναι ανεξάρτητες και ταυτόνομες, δηλαδή οι αποδόσεις $r_i \sim iid$.

Άσκηση Αυτοαξιολόγησης 3

Αναφερθείτε στον έλεγχο στατιστικών υποθέσεων, υποενότητα 1.3.4.

Άσκηση Αυτοαξιολόγησης 4

Διαβάστε τις υποθέσεις του γραμμικού υποδείγματος.

Άσκηση Αυτοαξιολόγησης 5

Συζητήστε τη σημαντικότητα της συνολοκλήρωσης. Για παράδειγμα, εάν οι αποδόσεις των δεικτών δύο χρηματιστηριακών αγορών συνολοκληρώνονται, τότε τα οφέλη από τη διαφοροποίηση χ/φ στις δύο αγορές αναμένεται να είναι μειωμένα.

Απαντήσεις σε Δραστηριότητες

Δραστηριότητα 1

Εάν όλοι οι επενδυτές σκέφτονται να μεγιστοποιήσουν την αναμενόμενη απόδοσή τους (expected return maximizers) και $f_2 > E({}_1r_2)$ δεν θα βρισκόταν κάποιος που θα ήθελε να κρατήσει την ομολογία 1–έτους. Αντίθετα, εάν $f_2 < E({}_1r_2)$ δεν θα βρισκόταν κάποιος που θα επέλεγε την επένδυση σε ομολογία 2–ετών. Η διαφορά $f_2 - E({}_1r_2)$ είναι το ασφάλιστρο ρευστότητας.

Δραστηριότητα 2

(α) Στο τέλος του πρώτου χρόνου θα έχουμε φτάσει στα 1060 € άρα προστίθενται 60 € στο αρχικό ύψος κατάθεσης. Στο τέλος του δεύτερου χρόνου όμως θα έχουμε αυξήσει το ύψος κατά 1060 * 0,06 = 63,6 άρα το συνολικό ύψος κατάθεσης θα φτάσει τα 1123,6 €. Ομοίως τον τρίτο χρόνο θα φτάσει τα 1191,016 €. Άρα βλέπουμε ότι η μορφή ανάπτυξης του ετήσιου επιτοκίου είναι 1000 * $(1{,}06)^3$ = 1191,016.

(β) $$FV = 1000\left[1+\frac{0{,}06}{4}\right]^{3*4} = 1195{,}618\ .$$

Δραστηριότητα 3

α) Στο τέλος ενός έτους θα είναι $1000*(1.12)=1120$ €. Ας υποθέσουμε τώρα ότι η τράπεζα υπολογίζει τον τόκο κάθε 6 μήνες, όπου είναι, δηλαδή 12%: 2 = 6% το εξάμηνο. Άρα, σε ένα έτος θα είναι:

$$(1000*1.06)*1.06 = 1000*1.06^2 = 1123.60$$

β) Αν ο τόκος υπολογίζεται ανά μήνα, τότε θα είναι: $1000*1.01^{12} = 1126.82$.

γ) Παρατηρούμε ότι όσο πιο μεγάλη είναι η συχνότητα υπολογισμού του τόκου τόσο μεγαλύτερη είναι η αξία του κεφαλαίου στο τέλος ενός έτους.

Δραστηριότητα 4

Θα υπολογίσετε την παρούσα αξία ποσού 1 εκατ. € στο τέλος κάθε έτους για 3 έτη.

Ο υπολογισμός της PV είσπραξης ποσού 1 εκατ. € στο τέλος κάθε έτους για 3 έτη με επιτόκιο 12%.

1^{ο} έτος $PV =$ 1000000/1+0.12 = 892000

2ο έτος $PV = 1000000/(1.12)^2$ = 797000

3ο έτος $PV = 1000000/(1{,}12)^3 \; = 71100000$

Άρα το συνολικό άθροισμα είναι 2401000€, που είναι η ζητούμενη απάντηση.

Δραστηριότητα 5

Επειδή έχουμε: $V = P(1+\frac{r}{m})^{nm}$ για διακριτό ανατοκισμό και $V = Pe^{rt}$ για συνεχή ανατοκισμό με αντικατάσταση των τύπων, βρίσκουμε ότι:

$$V = 10000(1+\frac{0.03}{2})^2 = 10302$$

$$V = 10000(1+\frac{0.03}{2})^{2 \bullet 5} = 11605$$

$$V = 10000(1+\frac{0.03}{12})^{5 \bullet 12} = 11616$$

$$V = 10000e^{0.03} = 10304$$

$$V = 10000e^{0.03 \bullet 5} = 11618$$

Δραστηριότητα 6

Επειδή έχουμε τους τύπους: $PV = \frac{CF}{[1+(r/m)]^{nm}}$ για διακριτό ανατοκισμό και $PV_t = CFe^{-rt}$ για συνεχή ανατοκισμό, που μας δίνουν τις παρούσες αξίες με αντικατάσταση στους τύπους, προκύπτουν:

$$\frac{25000}{1+0.08} = 23.148$$

$$\frac{25000}{(1+0.08)^{20}} = 5363$$

$$25000e^{-1.6} = 5047$$

Δραστηριότητα 7

0.5*1.7926 = 0.8963%.

Δραστηριότητα 8

Θα είναι, αντίστοιχα, η τιμή, η πρώτη και η δεύτερη παράγωγος της ομολογίας:

$$P = f(y) = \frac{10}{(1+y)} + \frac{10}{(1+y)^2} + \frac{110}{(1+y)^3}$$

$$f'(y) = \frac{-10}{(1+y)^2} + \frac{-20}{(1+y)^3} + \frac{-330}{(1+y)^4}$$

$$f''(y) = \frac{20}{(1+y)^3} + \frac{60}{(1+y)^4} + \frac{1320}{(1+y)^5}$$

Για επιτόκιο 8.1%, η τιμή της ομολογίας θα είναι:

$$f(0.081) = \frac{10}{(1.081)} + \frac{10}{(1.081)^2} + \frac{110}{(1.081)^3} \approx 104.89$$

Η τροποποιημένη διάρκεια (MD) και η κυρτότητα (Conv), θα είναι, αντίστοιχα:

$$MD = \frac{1}{105.154}\left[\frac{-10}{(1.081)^2} + \frac{-20}{(1.081)^3} + \frac{-330}{(1.081)^4}\right] \approx -2.54$$

$$Conv = \frac{\frac{1}{105.154}\left[\frac{20}{(1.081)^3} + \frac{60}{(1.081)^4} + \frac{1320}{(1.081)^5}\right]}{2} = 4.56$$

Δραστηριότητα 9

Η τροποποιημένη διάρκεια της ομολογίας μετράει την επίδραση της μεταβολής των επιτοκίων dy, επί της μεταβολής της τιμής, dP/P. Θα είναι λοιπόν:

$$MD = -(dP/P)/dy = [(135.85 - 132.99)/134.41]/(0.001*2) = 10.63.$$

Δραστηριότητα 10

(α) 93/126 = 0.7380 ή 73.80%

(β) 93/106 = 0.8773 ή 87.73%

(γ) 33/122 = 0.2705 ή 27.05%

Από τα αποτελέσματα φαίνεται ότι η μετοχή της ΕΤΕ ήταν καθοριστική στη διαμόρφωση των τιμών του ΓΔ την περίοδο μελέτης.

Δραστηριότητα 11

Η ζητούμενη πιθανότητα ισούται με 14/22 = 0.6363 ή 63.63%, η οποία μπορεί να θεωρηθεί ικανοποιητικά υψηλή.

Δραστηριότητα 12

Η ζητούμενη πιθανότητα είναι ίση με $(0.6)^3 = 0.216$.

Δραστηριότητα 13

$$P(Γ\Delta\uparrow) = 0.6 \quad P(Γ\Delta\downarrow) = 1 - 0.6 = 0.4$$
$$P(M\uparrow) = 0.35 \quad P(M\downarrow) = 0.65$$
$$P(Γ\Delta\uparrow \text{ and } M\uparrow) = 0.4$$

Με δεδομένα τα παραπάνω στοιχεία και τη χρήση της προσθετικής ιδιότητας, θα είναι:

$$P(Γ\Delta\uparrow \cup M\uparrow) = P(Γ\Delta\uparrow) + P(M\uparrow) - P(Γ\Delta\uparrow \cap M\uparrow) = 0.6 + 0.35 - 0.4 = 0.55$$

Δραστηριότητα 14

$$P(Γ\Delta\uparrow \cap M\uparrow) = 0.6 * 0.35 = 0.21$$

Δραστηριότητα 15

Έστω A το ενδεχόμενο να ανέβει η τιμή του γενικού δείκτη σήμερα και B η πιθανότητα να ανέβει η τιμή του γενικού δείκτη αύριο. Η πιθανότητα ότι θα ανέβει τουλάχιστον μια ημέρα θα είναι:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.54 + 0.54 - 0.28 = 0.80.$$

Συνεπώς, η πιθανότητα ότι θα ανέβει καμία ημέρα είναι ίση με $1 - 0.80 = 0.20$ ή 20%.

Δραστηριότητα 16

Έστω A_i η πιθανότητα η τιμή κλεισίματος της μετοχής να πέσει την i–οστή ημέρα. Αφού τα ενδεχόμενα είναι ανεξάρτητα, θα είναι:

$$P(A_1A_2A_3A_4A_5^c) = P(A_1)P(A_2)P(A_3)P(A_4)P(A_5^c) = (0.48)^4(0.52) = 0.0276$$

Δραστηριότητα 17

$$P(A\uparrow \cap B\uparrow) = P(A\uparrow) * P(B\uparrow | A\uparrow) \Leftrightarrow$$
$$0.4 = 0.65 * P(B\uparrow | A\uparrow) \Leftrightarrow$$
$$\text{P}(B\uparrow | A\uparrow) = \frac{0.4}{0.65} = 0.6153$$

Δραστηριότητα 18

Με κριτήριο την απόδοση επιλέγεται η επένδυση Β για το 18%>12%.

Με κριτήριο τον κίνδυνο επιλέγεται η Α γιατί έχει μικρότερη τυπική απόκλιση.

Με κριτήριο τον συντελεστή μεταβλητότητας (μέτρο κινδύνου) επιλέγεται η Β γιατί έχει μικρότερο συντελεστή μεταβλητότητας.

Δραστηριότητα 19

Σύμφωνα με το προηγούμενο παράδειγμα η διαθέσιμη πληροφορία –δηλαδή οι παρελθούσες τιμές της μετοχής– δεν μπορεί να είναι χρήσιμη στην πρόβλεψη της τιμής της μετοχής την επόμενη χρονική στιγμή.

Δραστηριότητα 20

$$E[Y_t \mid I_{t-2}] = E[E[Y_t \mid I_{t-1}] \mid I_{t-2}] = E[Y_{t-1} \mid I_{t-2}] = Y_{t-2} \,.$$

Δραστηριότητα 21

$E[X]$ = 0*0.5 + 1*0.3 + 2*0.2 = 0.7

$E[3+X]$ = 3*0.5 + 4*0.3 + 5*0.2 = 3.7 = 3 + $E[X]$

$E[3X]$ = 0*0.5 + 3*0.3 + 6*0.2 = 2.1 = 3$E[X]$

$E[X^2]$ = 0*0.5 + 1*0.3 + 4*0.2 = 1.1 $\neq \{E[X]\}^2$

Var$[X]$ = $E[X^2] - \{E[X]\}^2 = 0.61$

Δραστηριότητα 22

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
#E	146	97	73	34	23	10	6	3	4	2	2
Πιθανότητα	0.365	0.242	0.182	0.085	0.057	0.025	0.015	0.0075	0.01	0.005	0.005
Αθροιστική Πιθανότητα	0.365	0.6075	0.79	0.875	0.932	0.9575	0.972	0.98	0.99	0.995	1

Συνεπώς, θα είναι:

(Α). $P(X=0) = 0.365$, $P(X \le 1) = 1 - 0.365 = 0.635$, $P(X > 5) = 1 - 0.9575 = 0.0425$, $P(X<6) = 0.9575$

(Β). $E(X) = 1.535$ και Var $(X) = 3.3787$.

Δραστηριότητα 23

Α) Είναι:

X	–500	0	500
$f(X)$	0.1	0.5	0.4

Β) Είναι:

$$\mu = E(X) = (-500)(0.1) + 0(0.5) + 500(0.4) = 150$$

Γ) Είναι:

X	$f(x)$	$xf(x)$	x^2	$x^2 f(x)$
–500	0.1	–50	250000	25000
0	0.5	0	0	0
500	0.4	200	250000	100000
Σύνολο		150		125000

$$\mu = E(X) = 150$$
$$\mathrm{var}(x) = \sum x^2 f(x) - \mu^2 = 102500$$

Δ) Είναι $\sigma = \sqrt{\mathrm{var}(x)} = 320{,}156$

Ε) Η αγορά των μετοχών είναι συμφέρουσα γιατί το αναμενόμενο κέρδος είναι 150 €.

Δραστηριότητα 24

(α) Ας θεωρήσουμε ένα σύστημα ορθοκανονικών αξόνων (X στον οριζόντιο άξονα και Y στον κάθετο άξονα), το οποίο διαιρούμε σε 4 τεταρτημόρια. Αφού οι αποδόσεις του στοιχείου X είναι θετικές και του Y είναι αρνητικές, τότε η συνδιακύμανσή τους θα παίρνει τιμή στο IV τεταρτημόριο. Έτσι, πολλαπλασιάζοντας ένα θετικό με ένα αρνητικό αριθμό, το γινόμενο θα είναι αρνητικός αριθμός.

(β) Ας θεωρήσουμε ένα σύστημα ορθοκανονικών αξόνων (X στον οριζόντιο άξονα και Y στον κάθετο άξονα), το οποίο διαιρούμε σε 4 τεταρτημόρια ως προς τους άξονες των μέσων αποδόσεων. Αφού οι αποδόσεις του στοιχείου $X > \mu_X$ και του $Y < \mu_Y$, τότε η συνδιακύμανσή τους θα παίρνει τιμή στο II τεταρτημόριο. Έτσι, πολλαπλασιάζοντας έναν θετικό με ένα αρνητικό αριθμό το γινόμενο θα είναι αρνητικός αριθμός.

Δραστηριότητα 25

Ισχύει η σχέση:

$$\rho(X,Y)=\frac{\text{cov}(X,Y)}{\sigma_X\sigma_Y}\Rightarrow 0.678=\frac{0.0123}{\sqrt{21}\,\sigma_Y}\Rightarrow \sigma_Y=\frac{0.0123}{0.678*4.5825}=0.003958$$

που είναι ο κίνδυνος των αποδόσεων της μετοχής Y ή 0.4%, περίπου.

Δραστηριότητα 26

Είναι:

$$\begin{aligned}\text{var}(0.7X+0.3Y)&=(0.7)^2\,\text{var}(X)+(0.3)^2\,\text{var}(Y)+2*0.7*0.3\,\text{cov}(X,Y)\\&=0.79\end{aligned}$$

γιατί κάθε μεταβλητή ακολουθεί την τυποποιημένη κανονική με διακύμανση ίση με τη μονάδα.

Δραστηριότητα 27

$$\rho(A,B)=\frac{\text{cov}(A,B)}{\sigma(A)\sigma(B)}\Leftrightarrow \sigma(B)=\frac{\text{cov}(A,B)}{\rho(A,B)\sigma(A)}\Leftrightarrow \sigma(B)=2.13201$$

$$\sigma^2(B)=4.55$$

Δραστηριότητα 28

(α) $P(Su^2)=0.5*0.5=0.25$, αφού τα αποτελέσματα κάθε επανάληψης είναι ανεξάρτητα.

(β) $P(Sud)=0.5*0.5=0.25$

Δραστηριότητα 29

(α) $p(Sud)=\dfrac{2!}{1!(2-1)!}0.5^1(1-0.5)^{(2-1)}=0.2$

(β) $p(Sd^2)=\dfrac{2!}{0!(n-0)!}0.5^0(1-0.5)^{(2-0)}=0.25$

Δραστηριότητα 30

(α) 0.1145

(β) 0.113534

(γ) 0.113067

(δ) 0.112834

Παρατηρούμε ότι όσο μειώνεται το μέγεθος του χρόνου εισόδου πληροφορίας στην αγορά οι υπολογισμοί γίνονται όλο και πολυπλοκότεροι (μεγάλοι αριθμοί), χωρίς να έχουμε κάποια σημαντικά διαφοροποιημένη απάντηση. Ταυτόχρονα, μοιάζει σαν να προσεγγίζει το αριθμητικό αποτέλεσμα κάποιο σημείο σύγκλισης.

Δραστηριότητα 31

Υπολογίζω:

$$z_1 = \frac{(43-45)}{16} = -0.125$$

$$z_2 = \frac{(39-45)}{16} = -0.375$$

$\Phi(-0.125) = 0.450$ και $\Phi(-0.375) = 0.354$. Συνεπώς, η διαφορά είναι $P = 0.096$ ή 9.6%.

Δραστηριότητα 32

$$z_{15\%} = \frac{(15-10)}{21} = 0.2381$$

$$z_{25\%} = \frac{(25-10)}{21} = 0.7142$$

$\Phi(0.2381) \cong 0.0948$ και $\Phi(0.7142) \cong 0.2611$. Συνεπώς, η διαφορά είναι ίση με 0.2611–0.0948 = 0.1663. Με άλλα λόγια, υπάρχει πιθανότητα ίση με 16.63% η απόδοση της μετοχής να είναι το επόμενο έτος μεταξύ 15% και 25%.

Δραστηριότητα 33

$$E(X) = \exp\left[\mu + \frac{1}{2}\sigma^2\right] = \exp\left[0 + 0.5 * 0.2^2\right] = 1.02\,.$$

Δραστηριότητα 34

H_0: $\mu_\alpha = \mu_\beta$ έναντι της εναλλακτικής υπόθεσης H_α: $\mu_\alpha \neq \mu_\beta$

$$t = \frac{\left[(12.3-7.3)+(15.4-12.1)+\ldots+(5.6-1.7)\right]/12}{\sqrt{\left[(12.3-7.3-1.3)^2+\ldots+(5.6-1.7-1.37)^2\right]/12}} = 1.96$$

Συνεπώς, η H_0: απορρίπτεται αφού 1.96>1.796 (95% και 12–1=11 βαθμοί ελευθερίας).

Δραστηριότητα 35

(α) (Αριθμητικός) Μέσος χρόνος αποπληρωμής = 4.3. Ο γεωμετρικός μέσος είναι:

$$GM = \sqrt[n]{X_1 * X_2 * ... * X_n} \Leftrightarrow \log(GM) = \frac{1}{n}(\log X_1 + \log X_2 + ... + \log X_n) \Leftrightarrow \log(GM)$$
$$= 0.5350 \Leftrightarrow GM = anti\log(0.5350) = 3.40$$

Η διάμεσος είναι 3.43. Λόγω της ύπαρξης μιας ακραίας τιμής (25) η διάμεσος ενδείκνυται στην περίπτωση αυτή.

(β) $H0$: μ=5 και $H1$: $\mu \neq 5$. α=0.05, $\alpha/2$=0.025 ή 2.5%

$Z = \dfrac{(\bar{X} - \mu)}{\left(\dfrac{s}{\sqrt{n}}\right)} = -0.91$. Z(0.025) = 1.96. Συνεπώς, μπορούμε να αποδεχτούμε τη μηδενική υπόθεση.

Δραστηριότητα 36

$$\text{Standard error (se)} = \frac{2.5}{\sqrt{60}} = 0.3227$$
$$\mu = 1.125 \pm 1.96 * 0.3227 \rightarrow 0.4925 \leq \mu \leq 1.7575$$

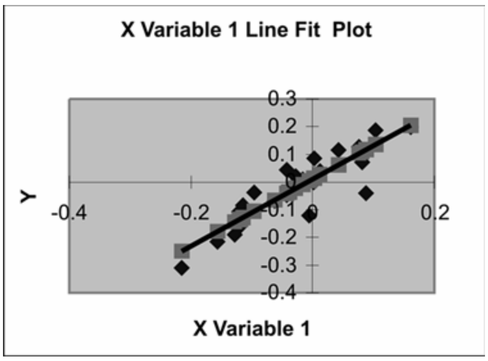
Παρατηρούμε ότι το εύρος του διαστήματος εμπιστοσύνης ισούται με 1.265, που είναι αρκετά μεγαλύτερο από τον ίδιο τον μέσο. Αυτό οφείλεται στην υψηλή τιμή του τυπικού σφάλματος. Αν ο αναλυτής χρησιμοποιούσε μεγαλύτερο δείγμα, θα μπορούσε να επιτύχει μικρότερη τιμή του τυπικού σφάλματος και, συνεπώς, θα μείωνε το εύρος του διαστήματος εμπιστοσύνης.

Δραστηριότητα 37

(α) Είναι $\hat{\alpha} = 0.010912$ και $\hat{\beta} = 1.207841$. Συνεπώς η εκτιμημένη εξίσωση θα είναι:

$$R(E\hat{T}E)_t = 0.010912 + 1.207841 R(\hat{G}D)_t$$

(β)



(γ)

R(ETE)	ΕΚΤΙΜΗΣΗ R(ETE)	ΕΚΤΙΜΗΜΕΝΑ ΚΑΤΑΛΟΙΠΑ
0.084696	0.013863393	0.0708329
0.042451	-0.040577741	0.083029188
-0.10692	-0.134591037	0.0276706
0.071361	0.108814859	-0.037454038
-0.18986	-0.143741507	-0.046116426
0.007832	-0.008951504	0.016783048
-0.08392	-0.127265986	0.04334636
0.199336	0.205498121	-0.006162323
-0.03832	-0.104594174	0.066271225
-0.21448	-0.178816012	-0.035664236
0.114794	0.063019033	0.051774946
-0.02136	-0.034149806	0.012792567
-0.04758	-0.040365626	-0.007215535
0.020965	-0.022158609	0.043123675
0.126049	0.103337683	0.022711226
-0.06713	-0.064140741	-0.002993482
-0.15635	-0.133242908	-0.023108535
-0.12079	0.004740286	-0.125528997
0.039838	0.026274605	0.013563492
-0.31089	-0.249704115	-0.061184035
0.187669	0.135663109	0.052006336
-0.04007	0.116623086	-0.156688519
-0.02513	-0.035921823	0.010790456
0.000748	0.01332798	-0.012579892

Δραστηριότητα 38

Το διάστημα εμπιστοσύνης είναι: $\left[\hat{\beta} - t_{\alpha/2,(n-2)} se(\hat{\beta}),\ \hat{\beta} + t_{\alpha/2,(n-2)} se(\hat{\beta})\right]$

ή $1.086677 - 1.66 * 0.101158 \le \beta \le 1.086677 + 1.66 * 0.101158 \Rightarrow 0.9187 \le \beta \le 1.2546$

Δραστηριότητα 39

Γνωρίζουμε ότι:

$$\rho(X,Y) = \frac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y} \Leftrightarrow \mathrm{cov}(X,Y) = \rho(X,Y)\sigma_X\sigma_Y = 0.678 * 0.22 * 0.30 = 0.044748$$

Επίσης, είναι:

$$\hat{\beta} = \frac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\sigma_X^2} = \frac{0.044748}{(0.22)^2} = 0.924545$$

Δραστηριότητα 40

(α) $A = -0.5 + 1.85\ (B) \Leftrightarrow A = -0.5 + 1.85 * 0.25 = -3.75\%$

(β) Τυπική απόκλιση καταλοίπων (Residual Standard Error) = 0.2132 ή 21.32%

(γ) Ισχύει $\rho^2(A,B) = R^2$ της παλινδρόμησης του A στο B.

Συνεπώς, $\rho(A,B) = \sqrt{R^2} = \sqrt{0.3535} = 0.5945$

Δραστηριότητα 41

Η παραπάνω εξίσωση παλινδρόμησης επιχειρεί τον εμπειρικό έλεγχο της υπόθεσης της ισοδυναμίας της αγοραστικής δύναμης των συναλλαγματικών ισοτιμιών. Ωστόσο, από τα αποτελέσματα παρατηρούμε ότι ο συντελεστής βήτα δεν είναι στατιστικά σημαντικός διάφορος του μηδενός (*t*–stat. = 0.15/0.83 = 0.1807 < 2). Επίσης, παρατηρούμε μια φτωχή προσαρμογή των δεδομένων (πολύ χαμηλή τιμή του συντελεστή προσδιορισμού) αφού η διαφορά των τιμών ερμηνεύει μόνον το 0.3% της συναλλαγματικής ισοτιμίας. Αυτό σημαίνει ότι άλλοι παράγοντες (που εμπεριέχονται στα σφάλματα) ερμηνεύουν την ισοτιμία δολαρίου και ευρώ. Συνεπώς, είναι ορθό το συμπέρασμα στο οποίο κατέληξε ο αναλυτής για τη συγκεκριμένη περίπτωση μελέτης.

Δραστηριότητα 42

(α) Εφαρμόζοντας το στατιστικό κριτήριο είναι:

$$\frac{R^2}{\frac{(1-R^2)}{(n-2)}} = \frac{0.5353}{\frac{(1-0.5353)}{(103-2)}} = \frac{0.5353}{\frac{0.4647}{101}} = \frac{0.5353}{0.0046} = 116.34452$$

Από τους πίνακες της στατιστικής $F_{(v_1=1, v_2=101), a=5\%} = 3.94 \ < 116.34452$. Συνεπώς δεν μπορούμε να κάνουμε αποδεκτή τη μηδενική υπόθεση $H_0 : R^2 = 0$.

(β) $\rho^2 = R^2 \Leftrightarrow \rho = \sqrt{R} \Leftrightarrow \rho = \sqrt{0.5353} \Leftrightarrow \rho = 0.7316$.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης μπορεί να συμβουλευθεί, μεταξύ άλλων, και τα παρακάτω συγγράμματα.

Cambell, J.Y., A.W.Lo, and A.C.MacKinley (1997) “The econometrics of financial markets”, Princeton University Press, USA.

Συριόπουλος, Κ. (1996) «Ανάλυση και έλεγχος μονομεταβλητών χρηματοοικονομικών χρονοσειρών», Τυπωθήτω–Γ.Δαρδανός, Αθήνα.

Watsham, T.J., and K.Parramore (1997) “Quantitative methods in finance”, Thomson, USA.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗ ΚΙΝΔΥΝΟΥ

Σκοπός

Στο κεφάλαιο αυτό θα συζητηθούν οι παράγοντες που οδήγησαν στη μορφή του σημερινού ανταγωνισμού στον τραπεζικό κλάδο. Στόχος είναι να δοθούν στον αναγνώστη, σύντομα, τα βασικά χαρακτηριστικά του σημερινού χρηματοπιστωτικού τομέα, από όπου θα προκύψει άμεσα η ανάγκη διαχείρισης του τραπεζικού κινδύνου.

Προσδοκώμενα Αποτελέσματα

Όταν θα έχετε ολοκληρώσει τη μελέτη αυτού του κεφαλαίου, θα είστε σε θέση να:

- διακρίνετε και να περιγράφετε τις έννοιες του κινδύνου και της αβεβαιότητας·
- αναφέρετε καινά εξηγείτε τα κύρια χαρακτηριστικά των εξελίξεων που οδήγησαν·
- στη διαχείριση κινδύνου·
- αναφέρετε και να περιγράφετε τις κατηγορίες τραπεζικών κινδύνων·
- περιγράφετε τη διαδικασία διαχείρισης κινδύνου·
- κατανοείτε τον ρόλο και τη λειτουργία του θεσμικού πλαισίου.

Έννοιες Κλειδιά

- Κίνδυνος και αβεβαιότητα
- Συνθήκη του Bretton Woods
- Μεταβλητότητα
- Τραπεζικός ανταγωνισμός, τραπεζική διεθνοποίηση
- Απορρύθμιση, αποδιαμεσολάβηση
- Κατηγορίες τραπεζικών κινδύνων
- BIS, IOSCO, G30, ISDA
- Θεσμικό πλαίσιο

Εισαγωγικές Παρατηρήσεις

Στο κεφάλαιο αυτό, που αποτελείται από τρεις ενότητες, γίνεται μια εισαγωγή στη διαχείριση του τραπεζικού κινδύνου. Στην αρχή καταγράφονται οι εξελίξεις και τα γεγονότα (μεταβλητότητα, ανταγωνισμός, τεχνολογία, απορρύθμιση, διεθνοποίηση) που οδήγησαν στην ανάγκη της αποτελεσματικότερης διαχείρισης κινδύνου (ενότητα 2.1). Στη συνέχεια, δίνονται απλά παραδείγματα για την κατανόηση των εννοιών «κίνδυνος» και «αβεβαιότητα» (ενότητα 2.2). Ακόμα, στο κεφάλαιο αυτό, παρουσιάζονται οι τραπεζικοί κίνδυνοι και ο ρόλος της διαχείρισης τραπεζικού κινδύνου υπό το πρίσμα του θεσμικού και κανονιστικού πλαισίου (ενότητα 2.3).

Ενότητα 2.1

Η ΑΝΤΑΓΩΝΙΣΤΙΚΗ ΔΟΜΗ ΤΗΣ ΣΥΓΧΡΟΝΗΣ ΤΡΑΠΕΖΙΚΗΣ

2.1.1 Το οικονομικό περιβάλλον και η συμβολή του στην εξέλιξη του τραπεζικού κλάδου

Υπάρχει μια σχετική διαμάχη ανάμεσα στους μελετητές όσον αφορά τη διαχείριση κινδύνου: κάποιοι θεωρούν ότι η διαχείριση κινδύνου αναπτύχθηκε από τους ακαδημαϊκούς και κάποιοι άλλοι ότι οι πραγματικές ανάγκες τού ταχύτατα μεταβαλλόμενου οικονομικού περιβάλλοντος ήταν εκείνες που οδήγησαν στην επιτάχυνση και τη διεύρυνση της πρακτικής του. Γεγονός είναι, πάντως, ότι η σύγχρονη διαχείριση κινδύνου γεννήθηκε και αναπτύχθηκε στη δεκαετία 1955-1965, τόσο στην ακαδημαϊκή όσο και στην επαγγελματική κοινότητα.

Στην τραπεζική, πριν από τη δεκαετία του 1970, η διαχείριση κινδύνου ήταν μια πλήρως κατανοητή εργασία, αφού οι τράπεζες ήταν χρηματοοικονομικοί διαμεσολαβητές μεταξύ των πλεονασματικών και των ελλειμματικών μονάδων, αλλά και των διαχειριστών κινδύνου. Η κερδοφορία ήταν ικανοποιητική, η ανάληψη κινδύνου ήταν αποδεκτή, ο ανταγωνισμός δεν ήταν τόσο επιθετικός όσο είναι σήμερα και η χρηματοοικονομική καινοτομία (financial innovation) ήταν σχετικά αργή.

Επίσης, ο διαχωρισμός μεταξύ των εμπορικών τραπεζών και των τραπεζών επενδύσεων ήταν σαφής, λίγοι ήταν οι τραπεζικοί οργανισμοί που κατείχαν το μεγαλύτερο μερίδιο της αγοράς, ο ανταγωνισμός ήταν περιορισμένος και δεν υπήρχε η ανάγκη για σημαντικές αλλαγές ή όξυνση του ανταγωνισμού. Οι εποπτικές αρχές ενδιαφέρονταν αποκλειστικά για την ασφάλεια των συναλλαγών και τον έλεγχο της δημιουργίας τραπεζικού χρήματος.

Όμως, στις δεκαετίες του 1970 και του 1980 (και μέχρι σήμερα), υπήρξαμε μάρτυρες των πρώτων σημαντικών αλλαγών στον τραπεζικό χώρο. Πολλοί εξωτερικοί παράγοντες έπαιξαν ρόλο στη μεταβολή του *status quo* των τραπεζών και του σκοπού τους και, κυρίως, στη διαχείριση κινδύνου. Οι βασικότεροι από αυτούς τους παράγοντες μπορούν να ταξινομηθούν σε δύο κύριες κατηγορίες, που είναι:

- *η αύξηση της μεταβλητότητας και*
- *η αύξηση της ανταγωνιστικής πίεσης.*

Α. *Αύξηση της μεταβλητότητας*

Από το 1944 μέχρι τις αρχές του 1970 η βασικότερη οικονομική μεταβλητή, η συναλλαγματική ισοτιμία, καθοριζόταν από το σύστημα της *Συνθήκης του Bretton Woods.* Η περίοδος κατά την οποία ίσχυε το σύστημα Bretton Woods των σταθερών ισοτιμιών χαρακτηρίστηκε ως μία από τις καλύτερες χρονικές περιόδους της διεθνούς οικονομίας. Οι υψηλοί ρυθμοί οικονομικής ανάπτυξης συνοδεύτηκαν από χαμηλό πληθωρισμό, κάτω από μια ενεργό πολιτική ζήτησης, που οδήγησε ομαλά τις εθνικές οικονομίες, επιτρέποντας στην παραγωγή να απορροφάται από τη ζήτηση.

Μετά τη μεταβατική μεταπολεμική περίοδο, τα νομίσματα έγιναν ανταλλάξιμα. Αυτό σημαίνει ότι τα νομίσματα μπορούσαν να αγοραστούν και να πωληθούν με άλλα νομίσματα. Έτσι, οι κεντρικές τράπεζες και οι νομισματικές αρχές, έχοντας ένα απόθεμα σε δολάρια, μπορούσαν να επεμβαίνουν στις διεθνείς αγορές συναλλάγματος προκειμένου να διατηρήσουν την ισοτιμία του νομίσματος τους στη ζώνη του 1%.

Με την εγκατάλειψη της Συνθήκης του Bretton Woods, το 1973, αναμενόταν ότι το *σύστημα των κυμαινόμενων ισοτιμιών* (floating exchange rates regime) θα εξασφάλιζε την ομαλή λειτουργία των εθνικών οικονομιών και θα εξαφάνιζε τους περιορισμούς στην εσωτερική νομισματική πολιτική.

Αντίθετα από ό,τι αναμενόταν, όμως, σημειώθηκε σημαντική συναλλαγματική αστάθεια σε νομίσματα–κλειδιά και οι παρεμβάσεις στις διεθνείς αγορές συναλλάγματος ήταν συχνές και μεγάλων ποσών. Αποτέλεσμα ήταν να παρατηρηθούν ανεπιθύμητες συνέπειες στις οικονομικές εξελίξεις και στην αποτελεσματικότητα της διεθνούς οικονομικής προσαρμογής. Η περίοδος των κυμαινόμενων ισοτιμιών σημαδεύτηκε από αστάθεια και σημαντική μείωση της οικονομικής δραστηριότητας στις χώρες του ΟΟΣΑ, όπου εκδηλώθηκαν υψηλοί ρυθμοί ανεργίας, χαμηλοί ρυθμοί ανάπτυξης και υψηλός πληθωρισμός.

Η συναλλαγματική αστάθεια έχει κόστος στην αποτελεσματική κατανομή πόρων, γεγονός που με τη σειρά του επιδρά στη διάρθρωση της παραγωγής, των επενδύσεων και της ανεργίας. Επίσης, δημιουργεί αβεβαιότητα για τις μακροπρόθεσμες συναλλαγματικές μεταβολές, με αντίκτυπο στο διεθνές εμπόριο και στην ανάπτυξη, ενώ επηρεάζει και τις νομισματικές αρχές, οι οποίες δυσκολεύονται να επιτύχουν σταθερές οικονομικές συνθήκες.

Οι μεγάλες διακυμάνσεις στις πραγματικές συναλλαγματικές ισοτιμίες, που χαρακτήρισαν την περίοδο των κυμαινόμενων ισοτιμιών, δείχνουν τη μακροοικονομική αλληλεξάρτηση ανάμεσα στις χώρες, που σημαίνει ότι πρέπει να επιλεγούν και να υποστηριχτούν οι οικονομικές πολιτικές συνεργασίες που περιέχουν διεθνείς περιορισμούς, και να τους εξομαλύνουν. Βέβαια, ακόμα και αν ακολουθείται η ορθή μακροοικονομική πολιτική δεν σημαίνει ότι επιλύεται το πρόβλημα της συναλλαγματικής αστάθειας. Έτσι, η παρέμβαση στις διεθνείς αγορές συναλλάγματος παρουσιάζεται ως ένα επιπρόσθετο όργανο πολιτικής.

Από την πλευρά της διαχείρισης του τραπεζικού κινδύνου, η κατάργηση της συμφωνίας του Bretton Woods είχε σημαντικές επιπτώσεις. Η σχέση μεταξύ τρέχουσας και προθεσμιακής συναλλαγματικής ισοτιμίας είναι άμεσα συνδεδεμένη με το επίπεδο των επιτοκίων και των διαφορών των επιτοκίων μεταξύ των διάφορων οικονομιών. Με το σύστημα των κυμαινόμενων ισοτιμιών, η μεταβλητότητα των επιτοκίων είναι μεγάλη, με αποτέλεσμα να είναι ασυνήθιστη και η μεταβλητότητα των συναλλαγματικών ισοτιμιών. Κατά συνέπεια, η διαχείριση τραπεζικού κινδύνου έγινε επιτακτική, καθώς επίσης και η δημιουργία κατάλληλων εργαλείων και τεχνικών που βοηθούν στη διαχείριση κινδύνου.

Αποτέλεσμα είναι η ευρύτητα του τομέα των χρηματοοικονομικών υπηρεσιών, γενικά, και του τραπεζικού χώρου, ειδικότερα.

Δραστηριότητα 1/Κεφάλαιο 2

Σχολιάστε σύντομα τις επιπτώσεις από την κατάργηση της Συνθήκης του Bretton Woods και τις συνέπειες της στη διαχείριση του τραπεζικού κινδύνου (80 λέξεις). Μπορείτε να ανατρέξετε, προαιρετικά, και σε άλλα εγχειρίδια, όπως στον Συριόπουλο (1999), στο κεφάλαιο1.

Β. *Αύξηση του ανταγωνισμού*

Ας δούμε ποιοι είναι οι βασικοί λόγοι που οδήγησαν στον σημερινό αυξημένο τραπεζικό ανταγωνισμό:

1. Οι κυριότεροι λόγοι του τραπεζικού ανταγωνισμού είναι:

- η *απορρύθμιση* (deregulation) και
- η *απεξειδίκευση* (despecialization) του τραπεζικού συστήματος κατά τη διάρκεια της τελευταίας δεκαπενταετίας.

Το κύμα της απορρύθμισης αναπτύχθηκε σταδιακά. Απορρύθμιση είναι η διαδικασία με την οποία εξομαλύνονται σταδιακά οι ρυθμιστικοί περιορισμοί, οι οποίοι, υπό το πρίσμα του αυξανόμενου ανταγωνισμού, λειτουργούσαν ανασταλτικά στη διεθνοποίηση και εξάπλωση του τραπεζικού συστήματος.

Στο πλαίσιο της απορρύθμισης αυτής, και κυρίως από τα μέσα της δεκαετίας του 1980, ο τραπεζικός ανταγωνισμός έχει πάρει τεράστιες διαστάσεις, τόσο ανάμεσα στις εμπορικές όσο και ανάμεσα στις τράπεζες επενδύσεων. Επίσης, επέτρεψε στα τραπεζικά ιδρύματα να επανακτήσουν μέρος της ανταγωνιστικότητας τους έναντι των χρηματαγορών και των αμοιβαίων κεφαλαίων.

Στην ανάγκη της απεξειδίκευσης των τραπεζικών ιδρυμάτων οδήγησε η επιθυμία των τραπεζικών οργανισμών για καλύτερη και αποτελεσματικότερη διαφοροποίηση (diversification) σε περιόδους αστάθειας των επιτοκίων, του πληθωρισμού και των συναλλαγματικών ισοτιμιών, με αποτέλεσμα τη μείωση του τραπεζικού κινδύνου.

Στην Ιαπωνία και στις ΗΠΑ, για παράδειγμα, απαγορευόταν από τον νόμο στις εμπορικές τράπεζες να πραγματοποιούν χρηματιστηριακές συναλλαγές και στις επενδυτικές τράπεζες να πραγματοποιούν εργασίες των εμπορικών τραπεζών, μέχρι το 1987. Στις ευρωπαϊκές χώρες, όπως στην Αγγλία, την Ολλανδία και τη Γερμανία, ίσχυε ο ίδιος διαχωρισμός, αν και δεν υπαγορευόταν από κάποιον σχετικό νόμο. Μάλιστα, στην Αγγλία μόνο τον Οκτώβριο του 1986 οι μεγάλες εμπορικές τράπεζες ασχολήθηκαν με τις χρηματιστηριακές συναλλαγές.

Έτσι, η σταδιακή απορρύθμιση στον τραπεζικό χώρο σήμαινε ότι οι εμπορικές, κυρίως, τράπεζες μπορούσαν να προσφέρουν και άλλα προϊόντα καινά συμμετάσχουν και σε άλλες αγορές. Αυτό είχε δύο σημαντικές συνέπειες:

- την αύξηση του ανταγωνισμού μεταξύ των τραπεζικών ιδρυμάτων και
- την αύξηση του ανταγωνισμού μεταξύ των τραπεζικών οργανισμών με άλλα ιδρύματα χρηματοπιστωτικής διαμεσολάβησης.

Μερικώς, η απορρύθμιση επιταχύνθηκε και από την απελευθέρωση των επιτοκίων στις αρχές της δεκαετίας του 1980, με αποτέλεσμα να επιτρέπεται στις τράπεζες να προσφέρουν ανταγωνιστικά επιτόκια σε διάφορα αποταμιευτικά προϊόντα. Ακόμα, η απορρύθμιση σημαίνει ότι, σήμερα, και οι δύο τύποι τραπεζών μπορούν να δραστηριοποιούνται στις αγορές των ανταλλαγών (swaps), των συμβολαίων μελλοντικής εκπλήρωσης (futures) και των συμβολαίων δικαιώματος προαίρεσης (options), των συναλλαγματικών ισοτιμιών κλπ., με συνέπεια ο τραπεζικός ανταγωνισμός να είναι ιδιαίτερα αυξημένος.

Με την ανταγωνιστικότητα του τραπεζικού κλάδου (και κάθε άλλου κλάδου, άλλωστε) συνδυάζονται:

- η αποτελεσματική διαχείριση,
- η παραγωγικότητα,
- η αποτελεσματικότητα και
- οι οικονομίες κλίμακας και σκοπού.

Η διατήρηση της παραγωγής δεν είναι άσχετη με την απασχόληση και στηρίζεται αποκλειστικά στην ανταγωνιστικότητα. Μάλιστα, ο Διοικητής της Εθνικής Τράπεζας της Ελλάδος Θ. Καρατζάς σε συνέντευξη του για την ανταγωνιστικότητα και την απασχόληση στον τραπεζικό κλάδο (εφ. *Το Βήμα* της 31/5/1998, σ. Α15), προχώρησε τη σχετική συζήτηση υποστηρίζοντας ότι «στην εποχή της παγκοσμιοποίησης... δεν είναι πλέον κρίσιμο ποιος έχει την ιδιοκτησία μιας τράπεζας,... αλλά αυτό που πραγματικά ενδιαφέρει είναι ποιος έχει την παραγωγή... και την απασχόληση, [η διατήρηση των οποίων] στηρίζεται αποκλειστικά στην ανταγωνιστικότητα...».

Η μέτρηση της παραγωγικότητας των πιστωτικών ιδρυμάτων δεν είναι εύκολη και στη διεθνή εμπειρική έρευνα έχουν προταθεί διάφορα μεγέθη:

- ο λόγος του μέσου ενεργητικού προς τον αριθμό των απασχολουμένων,
- ο αριθμός των λογαριασμών ενός ιδρύματος,
- ο αριθμός των συναλλαγών ανά λογαριασμό,
- η αξία των δανείων και των επενδύσεων,
- ο λόγος του λειτουργικού κόστους προς τον κύκλο εργασιών,

- ο βαθμός αξιοποίησης των διαθέσιμων πόρων (ή αποτέλεσμα δραστηριότητας),
- το μέγεθος επιβάρυνσης από το κόστος λειτουργίας κ.λπ.

Σχετικά με την κακή διαχείριση (mismanagement), τελευταία, οι αναλυτές δίνουν ιδιαίτερη προσοχή. Η κακή διαχείριση και η απάτη (fraud) με σκοπό βραχυχρόνια οφέλη είναι για πολλούς παρατηρητές οι αιτίες της τραπεζικής κρίσης. Και οι δύο αυτές περιπτώσεις στηρίζονται στην ετερογένεια που υπάρχει μεταξύ των μικρών και των μεγάλων τραπεζών (bank heterogeneity).

Απάτη, εννοείται η κατάλληλη εκείνη διάρθρωση των επενδύσεων υψηλού κινδύνου, με στόχο σημαντικά βραχυχρόνια κέρδη και μακροπρόθεσμες ζημίες και, αναλογικά, η διανομή μεγάλων μερισμάτων βραχυπρόθεσμα. Αυτή η περίπτωση αφορά, κυρίως, οικονομίες με πολύ μεγάλο αριθμό μικρών τραπεζών (όπως στις ΗΠΑ), ενώ η κακή διαχείριση είναι περισσότερο πιθανή σε μεγάλους τραπεζικούς οργανισμούς.

2. Ένας άλλος λόγος που οδήγησε στον αυξημένο τραπεζικό ανταγωνισμό είναι η μεταβολή του ρόλου των τραπεζών, γνωστή ως *αποδιαμεσολάβηση* (desintermediation). Αυτό συνέβη επειδή το σύγχρονο οικονομικό περιβάλλον και οι οικονομικές ανάγκες συνετέλεσαν στο γεγονός ότι οι αποταμιευτές, οι επενδυτές και οι δανειζόμενοι είναι περισσότερο πληροφορημένοι σε θέματα της αγοράς και των εργαλείων διαχείρισης κινδύνου. Αυτό σημαίνει, με τη σειρά του, ότι οι παραδοσιακές τραπεζικές εργασίες και λειτουργίες είναι ανεπαρκείς, αναποτελεσματικές και, συνεπώς, λιγότερο κερδοφόρες.

Η χρηματοπιστωτική διαμεσολάβηση επηρεάζεται από τέσσερις βασικούς παράγοντες:

α) τη μεταβολή στη ζήτηση για διαμεσολάβηση,
β) τη διάρθρωση χαρτοφυλακίων (portfolio) των επενδυτών, οι οποίοι ορίζουν τον τύπο και τη φύση των ζητούμενων χρηματοοικονομικών εργαλείων και προϊόντων,
γ) τις μεταβολές του χρηματοοικονομικού περιβάλλοντος των αγορών και
δ) τις μεταβολές των στόχων και των περιορισμών αυτών των ίδιων των χρηματοπιστωτικών ιδρυμάτων.

Ο συνδυασμός αυτών των παραγόντων οδηγεί σε δομικές και λειτουργικές μεταβολές των χρηματοπιστωτικών αγορών και, συνεπώς, των τραπεζικών ιδρυμάτων. Σύμφωνα, μάλιστα, με μια κατηγοριοποίηση της διαδικασίας ανάπτυξης του χρηματοπιστωτικού συστήματος (Rybcynski, 1985) διακρίνονται τρία βασικά στάδια:

α) οι τράπεζες είναι οι μόνοι χρηματοπιστωτικοί διαμεσολαβητές,
β) η κεφαλαιαγορά είναι το κανάλι επικοινωνίας μεταξύ των οικονομικών μονάδων και ικανοποιεί τις ανάγκες χρηματοδότησης και
γ) securitisation (τιτλοποίηση) και ανάπτυξη προϊόντων αναχαίτισης κινδύνου.

Σήμερα, οι περισσότερες αγορές βρίσκονται μεταξύ δεύτερου και τρίτου σταδίου, ενώ οι μεγάλες αγορές βρίσκονται ήδη στο τρίτο στάδιο. Αυτό σημαίνει ότι η σύνδεση μεταξύ των οργανισμών και η πολυπλοκότητα των μεταξύ τους συμφωνιών είναι αυξημένη, καθώς επίσης και ότι ο κίνδυνος μετακυλίεται από τους οργανισμούς στους επενδυτές. Γίνεται φανερή, επίσης, η ανάγκη για προσαρμογή του θεσμικού και ρυθμιστικού πλαισίου στη μεταβαλλόμενη δομή του χρηματοοικονομικού συστήματος.

Στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζεται η δομή χρηματοπιστωτικού συστήματος ως ποσοστό του ΑΕΠ σε οικονομίες χαμηλού, μεσαίου και υψηλού εισοδήματος, για το έτος 1990. Όπως φαίνεται, οι πλουσιότερες οικονομίες κατανέμουν περισσότερες πιστώσεις στον ιδιωτικό τομέα ως ποσοστό του ΑΕΠ. Το ίδιο σημαντικό είναι και το μέγεθος της κεφαλαιαγοράς στις πλούσιες οικονομίες.

Πίνακας 1

Δομή χρηματοπιστωτικού συστήματος ως ποσοστό του ΑΕΠ σε οικονομίες χαμηλού, μεσαίου και υψηλού εισοδήματος, 1990

Οικονομίες	Ενεργητικό κεντρικής τράπεζας % ΑΕΠ	Ενεργητικό εμπορικών τραπεζών %ΑΕΠ	Ενεργητικό μη τραπεζικών ιδρυμάτων[a]	Συνολική κεφαλ/ση χρημ/ρίου	Πιστώσεις στον ιδιωτικό τομέα % ΑΕΠ
Χαμηλού εισοδήματος	32	41	2	20	38
Μεσαίου εισοδήματος	30	62	20	70	70
Υψηλού εισοδήματος	15	160	80	100	155

Πηγή: *Demirguc–Kunt and Levine, 1996, σ. 226*

[a] Τα μη τραπεζικά ιδρύματα περιλαμβάνουν ασφαλιστικές εταιρείες, συνταξιοδοτικά κεφάλαια αμοιβαία κεφάλαια, επενδυτικές τράπεζες και χρηματιστηριακές εταιρείες.

Επίσης, όπως φαίνεται από τον παραπάνω πίνακα, κινούμενοι από τις φτωχότερες προς τις πλουσιότερες οικονομίες, η συμμετοχή των εμπορικών τραπεζών και των μη τραπεζικών ιδρυμάτων γίνεται σημαντικότερη, ενώ ο ρόλος της κεντρικής τράπεζας βαίνει μειούμενος.

Πλήθος μελετών που εστιάζουν την προσοχή τους στην απόδοση του τραπεζικού κλάδου διεθνώς επιβεβαιώνουν την παρατήρηση αυτή. Ο Heffernan (1996, σ. 30-71) παρουσιάζει συγκριτικά πολλές από τις πρόσφατες έρευνες για να δικαιολογήσει, συγχρόνως, την τάση της διεθνοποίησης του τραπεζικού συστήματος.

Ήταν αναμενόμενη, λοιπόν, η αναζήτηση νέων αγορών και περισσότερο σύνθετων προϊόντων, με ενσωματωμένο υψηλότερου βαθμού κίνδυνο, που απαιτούσαν μεγαλύτερη εξειδίκευση, εμπειρία και γνώση. Σε όλους αυτούς τους τομείς ο ανταγωνισμός αυξήθηκε σημαντικά, αφού όλο και περισσότερο η αναζήτηση αυτή των αγορών και των προϊόντων γίνεται επιτακτικότερη.

3. Επίσης, ένας σχετικά προφανής λόγος του παρατηρούμενου τραπεζικού ανταγωνισμού είναι το *δέλεαρ της κερδοφορίας,* αφού οι οργανισμοί που εμπλέκονται στις αγορές που αναφέραμε παραπάνω είναι ιδιαίτερα κερδοφόροι. Ο λόγος είναι ότι δημιουργούνται επιπρόσθετα εισοδήματα για τον οργανισμό με τη μορφή εξόδων διαχείρισης, που απαιτούν πολύ μικρά ή και καθόλου κεφάλαια (ή που απαιτούν μεγάλα κεφάλαια για πολύ μικρό χρονικό διάστημα). Γίνεται κατανοητό, λοιπόν, ότι πολλοί οργανισμοί ενδιαφέρονται να εισαχθούν σε αυτή τη νέα αγορά.

4. Τέλος, ένας ακόμα λόγος στον οποίο οφείλεται ο τραπεζικός ανταγωνισμός είναι η συνεπαγόμενη, από τα παραπάνω, επέκταση των τραπεζικών δραστηριοτήτων, που άρχισε να παίρνει μεγάλες διαστάσεις από τα μέσα της δεκαετίας του 1980 και, σήμερα, είναι γνωστή με το όνομα *τραπεζική διεθνοποίηση* και συνδέεται με την παγκοσμιοποίηση των αγορών χρήματος και κεφαλαίου, γενικότερα. Η τάση αυτή (universal banking) αναφέρεται στη διάθεση όλων σχεδόν των χρηματοπιστωτικών υπηρεσιών κάτω από το καθεστώς μιας κοινής τραπεζικής δομής.

Σύμφωνα με τον Aliber (1984), υπάρχουν τουλάχιστον τρεις διαφορετικοί ορισμοί για να περιγράψουν μια διεθνή τράπεζα: ανάλογα με το εάν διαθέτει παραρτήματα σε ξένες χώρες, εάν πραγματοποιεί συναλλαγές σε διεθνή νομίσματα και ανάλογα με την εθνικότητα της τράπεζας και την πελατεία της.

Για παράδειγμα, μια τράπεζα με παραρτήματα σε χώρες του εξωτερικού, που συναλλάσσεται σε όλα τα διεθνή νομίσματα προσφέροντας κάθε χρηματοοικονομική υπηρεσία και για λογαριασμό πελατών διάφορων εθνικοτήτων, είναι μια διεθνής τράπεζα. Πράγματι, σήμερα, οι αγορές των περισσότερων προϊόντων είναι ουσιαστικά ολοκληρωμένες με τα χρηματοοικονομικά προϊόντα να διαπραγματεύονται και να συναλλάσσονται όλο το 24ωρο. Το γεγονός αυτό σημαίνει ότι σε κάθε σημείο του χρόνου υπάρχει ενεργός συμμετοχή των ενδιαφερομένων και ο ανταγωνισμός είναι σκληρός.

Δραστηριότητα 2/Κεφάλαιο 2

Παρουσιάστε τέσσερις, τουλάχιστον, λόγους που οδήγησαν στον σύγχρονο αυξημένο τραπεζικό ανταγωνισμό (100 λέξεις). Στη συνέχεια, επιστρέψτε στην υποενότητα 2.1.1 και ελέγξτε την ορθότητα της απάντησης σας. Μπορείτε να ανατρέξετε, προαιρετικά, και σε άλλα εγχειρίδια, όπως στον Συριόπουλο (1999), στο κεφάλαιο 2.

Η παγκοσμιοποίηση των αγορών δεν είναι άσχετη με την εξέλιξη της τεχνολογίας των επικοινωνιών και της πληροφορικής. Η συνεχής ροή των πληροφοριών και η βελτιστοποίηση της τεχνολογίας των συναλλαγών, σε συνδυασμό με την παρατηρούμενη υψηλή αλληλεξάρτηση των χρηματοοικονομικών συστημάτων και των οικονομιών γενικά, οδήγησαν σε έναν αριθμό μεγαλύτερων αγορών, περισσότερο σημαντικών, με υψηλή ρευστότητα.

Για να μπορούν να παραμείνουν ανταγωνιστικοί οι τραπεζικοί οργανισμοί πρέπει να έχουν τη δυνατότητα και την ικανότητα να συμμετέχουν σε αυτές τις αγορές, με αποτέλεσμα τον αυξημένο ανταγωνισμό μεταξύ τους.

Το κεντρικό σημείο της προηγούμενης συζήτησης είναι ότι η αυξημένη μεταβλητότητα και ο αυξημένος βαθμός ανταγωνισμού οδήγησαν τις τράπεζες να αναλάβουν κινδύνους που δεν είχαν προηγουμένως. Αυτό οφείλεται αφενός στις τεράστιες μεταβολές στον τομέα των τραπεζικών υπηρεσιών που παρατηρήθηκαν από τη δεκαετία του 1970 και συνεχίζονται μέχρι σήμερα και αφετέρου στην απορρύθμιση του τραπεζικού συστήματος, στην απελευθέρωση των τραπεζικών εργασιών στις εθνικές οικονομίες και στην αυξανόμενη παγκοσμιοποίηση των χρηματοπιστωτικών αγορών.

Ο κίνδυνος μπορεί να πάρει διάφορες μορφές στην τραπεζική με διαφοροποιημένα χαρακτηριστικά και μέγεθος. Αυτό σημαίνει την έκθεση των τραπεζών σε *κίνδυνο μη φερεγγυότητας* (default risk) στα διάφορα χρηματοοικονομικά εργαλεία και αγορές.

Κίνδυνος μη φερεγγυότητας (ή αθέτησης) υπάρχει όταν ο αντισυμβαλλόμενος αδυνατεί να εξυπηρετήσει τις υποχρεώσεις του. Σημαίνει, επίσης, ότι υπάρχει η πιθανότητα για λανθασμένες αποφάσεις από πλευράς των τραπεζών, ως προς ένα νέο προϊόν, μια στρατηγική ενεργητικής διαχείρισης ή μια λανθασμένη συναλλαγή. Η μορφή και η δομή, η μέτρηση, καθώς και η διαχείριση των κινδύνων αυτών αποτελούν, σήμερα, σημαντικό μέρος της διοίκησης μιας τράπεζας.

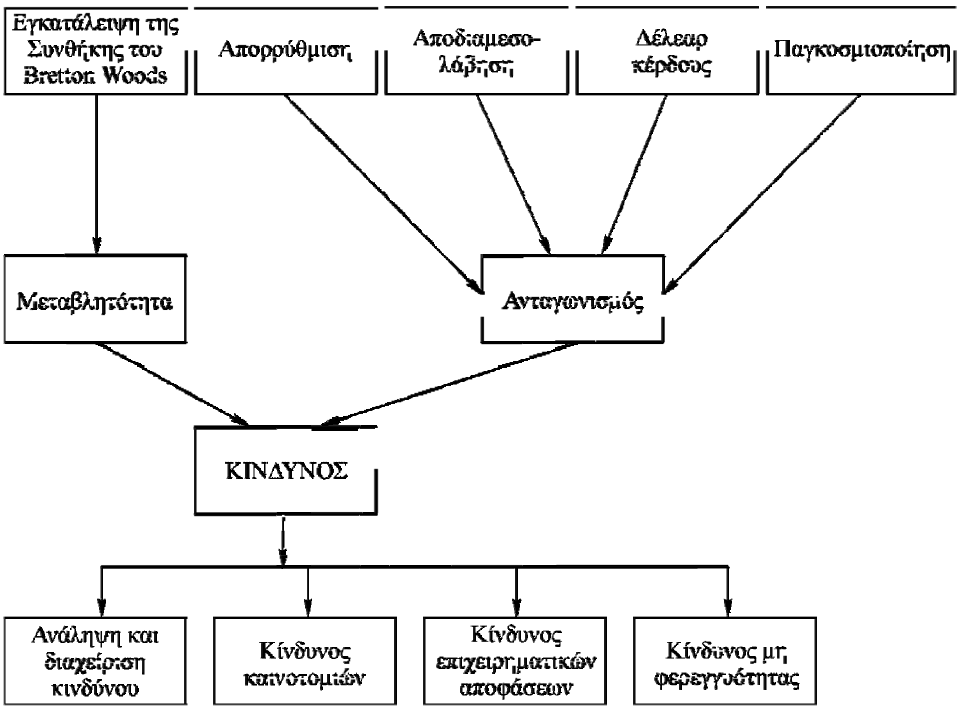
Δραστηριότητα 3/Κεφάλαιο 2

Με βάση όσα μελετήσατε μέχρι τώρα ορίστε τις έννοιες της απορρύθμισης και της αποδιαμεσολάβησης. Απαντήστε σε ένα κείμενο 100 περίπου λέξεων. Στη συνέχεια, επιστρέψτε στην υποενότητα 2.1.1 και, συγκεκριμένα, στις παραγράφους Β.1 και Β.2 για να ελέγξετε την ορθότητα της απάντησης σας.

Δραστηριότητα 4/Κεφάλαιο 2

Στη συνέντευξη του Διοικητή της Εθνικής Τράπεζας της Ελλάδος Θ. Καρατζά, που μνημονεύσαμε παραπάνω, σχολιάστε, με δύο λόγια, τη φράση: «Πιστεύω ότι η πρόοδος και η ανάπτυξη του ελληνικού τραπεζικού συστήματος δεν έχουν σχέση με το ιδιοκτησιακό καθεστώς, αλλά με την ικανότητα του να παραμείνει ανταγωνιστικό».

Διάγραμμα 1
Ο κίνδυνος στο μεταβαλλόμενο οικονομικό περιβάλλον



Το παραπάνω διάγραμμα συνοψίζει την υποενότητα 2.1.1 και εστιάζει στη σημαντικότητα του κινδύνου δεδομένων των μεταβολών στο σύγχρονο οικονομικό περιβάλλον.

Θα κλείσουμε την υποενότητα 2.1.1 με ορισμένες παρατηρήσεις και στοιχεία που αφορούν την πρόσφατη εξέλιξη του ελληνικού τραπεζικού κλάδου. Εάν παρατηρήσουμε την ανάπτυξη των τελευταίων ετών του Χρηματιστηρίου Αξιών Αθηνών και τη, μέσω αυτού, διασπορά των μετοχών του τραπεζικού κλάδου, εύκολα γίνεται κατανοητό ότι η «ιδιοκτησία» των ελληνικών τραπεζών έχει «περάσει» σε πολλούς. Αυτό υπονοεί την απαίτηση για αποτελεσματικότερη διοίκηση, διαφάνεια, εκσυγχρονισμό των συστημάτων εταιρικής διακυβέρνησης (Corporate Governance), αλλά και γρήγορη προσαρμογή στις διεθνείς εξελίξεις και τον ανταγωνισμό.

Οι εξελίξεις στον διεθνή τραπεζικό χώρο, που αναφέραμε παραπάνω, υποχρεώνουν και τις ελληνικές τράπεζες να προβούν σε αναδιάρθρωση της δομής τους και σε επανεξέταση των στόχων τους, με σκοπό τη διεύρυνση των παρεχόμενων υπηρεσιών, την επίτευξη οικονομιών κλίμακας, τη μείωση κόστους και την αποτελεσματικότερη διαχείριση κινδύνου.

Το θεσμικό περιβάλλον που διέπει το τραπεζικό σύστημα είναι ήδη απελευθερωμένο, αλλά ο βαθμός προσαρμογής του τραπεζικού συστήματος στο νέο περιβάλλον δεν είναι ομοιογενής (διαφέρει, δηλαδή, από τράπεζα σε τράπεζα) και η διαφοροποίηση αυτή είναι εμφανέστερη μεταξύ των ιδιωτικών και των κρατικών τραπεζών. Παρατηρείται, πράγματι, ότι οι κρατικές τράπεζες υστερούν περισσότερο στη διαδικασία της προσαρμογής έναντι των ιδιωτικών. Αυτό αντικατοπτρίζεται στα μερίδια της αγοράς– στις κρατικές τράπεζες βαίνουν μειούμενα, αντίθετα από ό,τι συμβαίνει με τις ιδιωτικές τράπεζες. Για παράδειγμα, το 1993 η Εθνική Τράπεζα κατείχε το 40% της αγοράς στις χορηγήσεις και το 51.4% στις καταθέσεις, ενώ το 1997 τα αντίστοιχα στοιχεία ήταν 30% και 43.4%. Αντίθετα, η Πίστεως από 13% (χορηγήσεις) και 10.2% (καταθέσεις) το 1993, κατείχε το 1997, αντίστοιχα, 16.9% (χορηγήσεις) και 13.4% (καταθέσεις).

Στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζονται ορισμένοι βασικοί χρηματοοικονομικοί δείκτες, για το 1997, τριών κρατικών τραπεζών (Εθνικής, Εμπορικής, Ιονικής) και τριών ιδιωτικών τραπεζών (Πίστεως, Εργασίας, Πειραιώς).

Πίνακας 2

Χρηματοοικονομικοί δείκτες τραπεζών, 1997

ΔΕΙΚΤΗΣ	3 ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΤΡΑΠΕΖΕΣ	3 ΙΔΙΩΤΙΚΕΣ ΤΡΑΠΕΖΕΣ
ΙΔΙΑ ΚΕΦΑΛΑΙΑ/ΕΝΕΡΓΗΤΙΚΟ	4.2%	7.5%
ΧΟΡΗΓΗΣΕΙΣ/ΕΝΕΡΓΗΤΙΚΟ	27.3%	38%
ΧΡΕΟΓΡΑΦΑ/ΕΝΕΡΓΗΤΙΚΟ	37%	33%
ΧΟΡΗΓΗΣΕΙΣ/ΚΑΤΑΘΕΣΕΙΣ	34%	51%
ΜΕΙΚΤΑ ΚΕΡΔΗ/ΙΔΙΑ ΚΕΦΑΛΑΙΑ	81%	70%
ΚΕΡΔΗ/ΙΔΙΑ ΚΕΦΑΛΑΙΑ	32%	48%
ΚΑΘΑΡΑ ΚΕΡΔΗ/ΙΔΙΑ ΚΕΦΑΛΑΙΑ	8.8%	34.5%
ΧΟΡΗΓΗΣΕΙΣ ΑΝΑ ΕΡΓΑΖΟΜΕΝΟ	157 εκατ.	261 εκατ.
ΚΑΤΑΘΕΣΕΙΣ ΑΝΑ ΕΡΓΑΖΟΜΕΝΟ	466 εκατ.	517 εκατ.
ΕΝΕΡΓΗΤΙΚΟ ΑΝΑ ΕΡΓΑΖΟΜΕΝΟ	575 εκατ.	692 εκατ.

Πηγή: *Καλαμπόκης, εφ. Επενδυτής της 4–5/6/1998, σ. 9*

Από τη μελέτη του πίνακα αυτού προκύπτουν μερικά ενδιαφέροντα συμπεράσματα:

- οι κρατικές τράπεζες του δείγματος χρειάζονται αύξηση κεφαλαίου (δείκτης «ίδια κεφάλαια/ενεργητικό)·
- μικρό ποσοστό των καταθέσεων των κρατικών τραπεζών μετατρέπεται σε χρηματοδότηση (34% έναντι 51% των ιδιωτικών τραπεζών)·
- ο δείκτης «καθαρά κέρδη/ίδια κεφάλαια» αντανακλά την έντονη διαφοροποίηση στην αποδοτικότητα τους·
- παρ' όλο το ενισχυμένο δίκτυο των κρατικών τραπεζών, οι δείκτες παραγωγικότητας υστερούν.

Επίσης, από αυτήν, αλλά και από άλλες ολοκληρωμένες μελέτες για το Ελληνικό Τραπεζικό σύστημα, προκύπτει ότι «οι τράπεζες μεσαίου μεγέθους που δεν ελέγχονται από το κράτος ήταν σε θέση να διατηρήσουν υψηλότερους ρυθμούς απόδοσης» (Hardy, Συμιγιάννης, 1998, σ. 28-29).

Δραστηριότητα 5/Κεφάλαιο 2 (προαιρετική)

Προεκτείνετε την παραπάνω διερεύνηση του Πίνακα 2 σε μια δημόσια ελληνική τράπεζα και μια ιδιωτική, για το τρέχον έτος. Δώστε απάντηση στα παρακάτω ερωτήματα, σε συνδυασμό με τα δικά σας ευρήματα, περιοριζόμενοι σε 100 λέξεις:

α) Τα πορίσματα της μελέτης για την τράπεζα που επιλέξατε μπορούν να γενικευτούν;

β) Εάν ναι, ισχύουν διαχρονικά;

γ) Να υπολογίσετε και να σχολιάσετε την εξέλιξη ενός επιπλέον δείκτη συγκεντρωσιμότητας, από τη σχέση

(Ενεργητικό τράπεζας *i*)/(Σύνολο ενεργητικού τραπεζικού τομέα).

Υπόδειξη: Υπολογίστε τους ίδιους δείκτες με αυτούς του Πίνακα 2 και παρατηρήστε τη διαχρονική τους εξέλιξη.

2.1.2 Παράγοντες αστάθειας του οικονομικού περιβάλλοντος

Ένας μεγάλος αριθμός παραγόντων συνέβαλε στη μεταφορά της θεωρητικής επιστήμης της διαχείρισης κινδύνου στην πρακτική της εφαρμογή. Στην προηγούμενη υποενότητα έγινε μια παρουσίαση του γενικού οικονομικού περιβάλλοντος, με έμφαση στον τραπεζικό κλάδο. Στην υποενότητα αυτή θα συνοψίσουμε όλους τους παράγοντες που επέδρασαν σημαντικά στην παρατηρούμενη σήμερα υψηλή αστάθεια των οικονομικών μεταβλητών, με την οποία έρχεται αντιμέτωπη καθημερινά μια τράπεζα.

- Ο πρώτος παράγοντας ήδη συζητήθηκε στην υποενότητα 2.1.1 και αφορά την αστάθεια των συναλλαγματικών ισοτιμιών.
- Όμως, σημειώνονται σημαντικές μεταβολές και στο επίπεδο των επιτοκίων. Για παράδειγμα, η τελευταία μεγάλη αύξηση των αμερικανικών επιτοκίων το 1994 οδήγησε, σύμφωνα με εκτιμήσεις, σε ζημίες ύψους 1.5 τρις δολ. ΗΠΑ από επενδύσεις σε ομόλογα και άλλα στοιχεία σταθερού εισοδήματος.
- Συγχρόνως, οι τιμές των αξιών στα χρηματιστήρια χαρακτηρίζονται, επίσης, από μεγάλη μεταβλητότητα.
- Σημαντική, επίσης, είναι η τεχνική και οικονομική αποτελεσματικότητα της τεχνολογίας της πληροφορικής. Πράγματι, σήμερα το κόστος μετάδο-

σης, αποθήκευσης και επεξεργασίας μεγάλων βάσεων δεδομένων έχει μειωθεί ικανοποιητικά. Επιπλέον, η σύγχρονη τεχνολογική εξέλιξη έχει αυξήσει πολύ την ταχύτητα επεξεργασίας και επιτρέπει την εφαρμογή πολύπλοκων υποδειγμάτων διαχείρισης κινδύνου.

- Ακόμα, σημαντική είναι και η επίδραση της δημιουργίας και εμφάνισης στη διεθνή αγορά νέων προϊόντων ή η περισσότερη ανάπτυξη υπαρχόντων προϊόντων.
- Ένας άλλος παράγοντας που οδήγησε στη διευρυμένη εφαρμογή της σύγχρονης διαχείρισης κινδύνου είναι η τεράστια αύξηση του όγκου των συναλλαγών. Τέλος, σημαντικότατο ρόλο έπαιξε η ανάπτυξη της αγοράς των παράγωγων προϊόντων, την οποία θα παρουσιάσουμε αναλυτικά σε άλλο κεφάλαιο.

Δραστηριότητα 6/Κεφάλαιο 2

Να αναφέρετε επιγραμματικά τους παράγοντες που οδήγησαν στην ανάγκη της σύγχρονης διαχείρισης κινδύνου (50 λέξεις). Επιστρέψτε στην υποενότητα 2.1.2 και ελέγξτε την ορθότητα της απάντησης σας.

Ενότητα 2.2

ΚΑΤΗΓΟΡΙΕΣ ΚΑΙ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗ ΤΡΑΠΕΖΙΚΩΝ ΚΙΝΔΥΝΩΝ

Είδαμε στην προηγούμενη ενότητα ότι ο ανταγωνισμός μεταξύ των τραπεζικών ιδρυμάτων έχει οξυνθεί. Επίσης, αναφερθήκαμε στην ανάγκη για επέκταση σε άλλες αγορές και προϊόντα, για να γίνει κατανοητή η σημαντικότητα της διαχείρισης των αναλαμβανόμενων κινδύνων.

Πρόσφατες έρευνες έχουν δείξει ότι ο βαθμός συγκέντρωσης των τραπεζικών συστημάτων είναι πολύ υψηλός– σε ορισμένες χώρες φτάνει τα επίπεδα του 45-50%. Αυτό σημαίνει ότι οι μικρές, κυρίως, τράπεζες έχουν πολύ μικρά περιθώρια διεύρυνσης των μεριδίων τους στην αγορά. Το γεγονός αυτό υπογραμμίζει, επίσης, την ανταγωνιστική όξυνση μεταξύ των τραπεζικών ιδρυμάτων.

Πιθανή λύση στον ανταγωνισμό αποτελεί, μεταξύ άλλων:

- *η διαφοροποίηση,*
- *η εξειδίκευση τραπεζικών εργασιών* και
- *η προσφορά μεγαλύτερης ποικιλίας χρηματοοικονομικών εργαλείων και προϊόντων.*

Τα προϊόντα αυτά, όμως, συνοδεύονται από αυξημένους κινδύνους πέραν του πιστωτικού κινδύνου. Ο W. Wriston της Citibank, μάλιστα, υποστηρίζει πως «είναι γεγονός ότι τα πιστωτικά ιδρύματα ανήκουν στη βιομηχανία διαχείρισης κινδύνου. Έτσι, απλώς, αυτή είναι η τραπεζική εργασία» *(The Economist,* 10/4/1993). Ακόμα περισσότερο, μπορούμε να πούμε ότι οι τράπεζες διαχειρίζονται και εμπορεύονται τον κίνδυνο.

Σκοπός της παρούσας ενότητας είναι να παρουσιάσει τους τραπεζικούς κινδύνους, καθώς και μια τυποποίηση της διαχείρισης τους στο πλαίσιο των τραπεζικών ιδρυμάτων. Στόχος είναι να δοθούν στον αναγνώστη βασικές έννοιες των τραπεζικών κινδύνων. Όμως, η πρώτη υποενότητα αναφέρεται στις έννοιες «κίνδυνος» και «αβεβαιότητα», οι οποίες είναι καλό να αποσαφηνιστούν από τώρα, αφού ο κίνδυνος αποτελεί τη σημαντικότερη έννοια στον τόμο αυτό.

2.2.1 Κίνδυνος και αβεβαιότητα

Ο *κίνδυνος* (risk) και η *αβεβαιότητα* (uncertainty) υπάρχουν όταν το μέλλον είναι άγνωστο. Σύμφωνα με τον ορισμό του έγκυρου λεξικού Webster New Collegiate Dictionary, αβεβαιότητα είναι η κατάσταση εκείνη στην οποία «η αμφιβολία μειώνει σημαντικά την ικανότητα πρόβλεψης της μελλοντικής κατάστασης μιας τρέχουσας δράσης». Συνεπώς, βεβαιότητα είναι μια κατάσταση απαλλαγμένη από κάθε αμφιβολία. Έτσι, ο όρος «αβεβαιότητα» περιγράφει μια κατάσταση του μυαλού και υπάρχει όταν δεν μπορούμε να προβλέψουμε με βεβαιότητα το αποτέλεσμα μιας επένδυσης που έχουμε αναλάβει.

Κίνδυνος είναι η μεταβλητότητα των πιθανών αποτελεσμάτων μιας πράξης. Με άλλα λόγια, το αποτέλεσμα δεν μπορεί να προβλεφθεί ακριβώς και, έτσι, υπάρχει αβεβαιότητα. *Έκθεση στον κίνδυνο* (exposure to risk) δημιουργείται όταν αναλαμβάνουμε το κόστος να συμβεί ένα ορισμένο γεγονός. Οι όροι «κίνδυνος» και «έκθεση στον κίνδυνο» (ή πιθανή ζημία) χρησιμοποιούνται εναλλακτικά στο υπόλοιπο κείμενο.

Ο κίνδυνος είναι μια αντικειμενική έννοια και μπορεί να μετρηθεί. Για να απλοποιήσουμε την έννοια του κινδύνου, ας θεωρήσουμε το παρακάτω παράδειγμα, όπως παρουσιάζεται στον Πίνακα 3.

Παράδειγμα 1

Ο Πίνακας 3 παρουσιάζει δύο στοιχήματα. Σύμφωνα με το πρώτο, ο παίκτης κερδίζει 10 €, εάν ρίξει ένα νόμισμα και έρθει «κεφαλή», και χάνει 10 €, εάν η ένδειξη είναι «γράμματα». Στο δεύτερο στοίχημα, τα αντίστοιχα ποσά κέρδους και ζημίας είναι 1,000 €. Έστω ακόμα ότι η συμμετοχή του παίκτη στο στοίχημα αυτό δεν συνοδεύεται από κάποιο κόστος.

Πίνακας 3
Αποτελέσματα και πιθανότητες των δύο στοιχημάτων

	Πρώτο στοίχημα		Δεύτερο στοίχημα	
	Αποτέλεσμα	Πιθανότητα	Αποτέλεσμα	Πιθανότητα
Κέρδος	10 €	0.5	1,000 €	0.5
Ζημία	10 €	0.5	1,000 €	0.5
Αναμενόμενη τιμή	0.0 €		0.0 €	
Υπολογισμός	(10 €) × 0.5 + (–10 €) × 0.5		(1,000 €) × 0.5 + (–1,000 €) × 0.5	

Η απόφαση της συμμετοχής κάποιου παίκτη σε ένα από τα δύο στοιχήματα δημιουργεί έκθεση σε κίνδυνο. Οι περισσότεροι παίκτες, πάντως, θα προτιμούσαν να συμμετάσχουν στο πρώτο στοίχημα και όχι στο δεύτερο· αυτό εξηγείται από το γεγονός της *αποστροφής προς τον κίνδυνο* (risk aversion) από την οποία χαρακτηρίζονται.

Στα στοιχήματα αυτά, είναι γνωστό ότι η πιθανότητα να έρθει «κεφαλή» είναι ίση με 50% ή 0.5 και η πιθανότητα να έρθει «γράμματα» είναι, επίσης, ίση με 50% ή 0.5. Η *αναμενόμενη τιμή* (expected value) ενός από τα δύο αυτά στοιχήματα είναι το άθροισμα των γινομένων καθενός από τα (δύο, στην περίπτωση αυτή) πιθανά αποτελέσματα επί την αντίστοιχη πιθανότητα εμφάνισης τους.

Στον προηγούμενο πίνακα, σύμφωνα με την αναμενόμενη τιμή, δεν υπάρχει λόγος να θέλει ένας παίκτης να επιλέξει το δεύτερο στοίχημα. Τόσο η πιθανότητα ζημίας όσο και η αναμενόμενη τιμή των δύο στοιχημάτων είναι ίδια. Γιατί, λοιπόν, να μην επιλέξει το πρώτο στοίχημα, στο οποίο κινδυνεύει να χάσει 10 € μόνο, έναντι των 1,000 € του δεύτερου στοιχήματος;

Παρ' όλα αυτά υπάρχει μία περίπτωση στην οποία ένας παίκτης που αποστρέφεται τον κίνδυνο θα μπορούσε, πιθανώς, να δεχτεί να συμμετάσχει στο δεύτερο στοίχημα, εάν, δηλαδή, είχε κάποια ανταμοιβή για τον κίνδυνο που θα αναλάμβανε. Για παράδειγμα, εάν η συμμετοχή του στο δεύτερο στοίχημα συνοδευόταν από μια πληρωμή 100 €.

Η ανταμοιβή αυτή ονομάζεται *ασφάλιστρο κινδύνου* (risk premium) και ισοδυναμεί με ένα ελάχιστο ποσό πάνω από την αναμενόμενη τιμή, ώστε να δεχτεί ο παίκτης να συμμετάσχει στο δεύτερο στοίχημα. Αυτό σημαίνει ότι η αναμενόμενη τιμή είναι 100 € και όχι 0.0 €, όπως στον Πίνακα 3.

Στο κεφάλαιο 3 θα επανέλθουμε στις έννοιες «αναμενόμενη τιμή» και «κίνδυνος» και θα αναπτύξουμε διεξοδικά τη σημασία τους στη διαχείριση κινδύνου.

Η επιθυμία ενός παίκτη να συμμετάσχει σε ένα στοίχημα για το οποίο το αποτέλεσμα και η πιθανότητα του είναι γνωστά εκ των προτέρων (όπως στο παραπάνω παράδειγμα), εξαρτάται από τον βαθμό αποστροφής προς τον κίνδυνο. Δύο παίκτες μπορούν να συμφωνούν στην πιθανότητα του αποτελέσματος ενός στοιχήματος, ωστόσο η συμμετοχή τους ή μη σε αυτό εξαρτάται από τον διαφορετικό βαθμό αποστροφής τους στον κίνδυνο. Για παράδειγμα, ένας συντηρητικός επενδυτής θα επιλέξει ένα στοίχημα με μικρή αναμενόμενη απόδοση και χαμηλό κίνδυνο.

Το παράδειγμα αυτό μας οδηγεί, επίσης, στο να κατανοήσουμε τη σχέση μεταξύ του κινδύνου και της αναμενόμενης απόδοσης. Η σχέση αυτή είναι σημαντική στη διαχείριση κινδύνου και θα την αναπτύξουμε αναλυτικά στο κεφάλαιο 5, στο πλαίσιο της σύγχρονης θεωρίας χαρτοφυλακίου. Ωστόσο, στο σημείο αυτό μπορούμε να κρατήσουμε τις βασικές υποθέσεις της σχέσης κινδύνου-απόδοσης, σύμφωνα με τη θεωρία χαρτοφυλακίου, που αποτελεί μια εναλλακτική προσέγγιση της διαχείρισης κινδύνου:

α) Οι επενδυτές (ή οι οργανισμοί) επιλέγουν χαρτοφυλάκια βασιζόμενοι στην αναμενόμενη απόδοση και στην τυπική απόκλιση ή στη διακύμανση.
β) Η τυπική απόκλιση μπορεί να θεωρηθεί ένα αποτελεσματικό μέγεθος μέτρησης του κινδύνου.
γ) Με σταθερές όλες τις άλλες συνθήκες, επιλέγεται το χαρτοφυλάκιο εκείνο με την υψηλότερη αναμενόμενη απόδοση και τη μικρότερη τυπική απόκλιση (κίνδυνο).

Οι παραπάνω αρχές συνεπάγονται ότι:

i) επιλέγεται το χαρτοφυλάκιο εκείνο που μεγιστοποιεί την αναμενόμενη απόδοση για δεδομένο επίπεδο κινδύνου ή, εναλλακτικά,

ii) επιλέγεται το χαρτοφυλάκιο εκείνο που ελαχιστοποιεί τον κίνδυνο για δεδομένο επίπεδο αναμενόμενης απόδοσης.

Το χαρτοφυλάκιο που ικανοποιεί τις συνθήκες (i) και (ii) ονομάζεται *αποτελεσματικό χαρτοφυλάκιο* και είναι εκείνο που επιλέγεται πάντα από έναν ορθολογικό επενδυτή.

Ανάλογα με τον χώρο εφαρμογής της *διαχείρισης του κινδύνου* (risk management), διακρίνουμε τον *καθαρό κίνδυνο* (pure risk), τον κίνδυνο για λόγους *κερδοσκοπίας* (speculative risk), τον *συστηματικό κίνδυνο* (systematic risk) και τον *ειδικό κίνδυνο* (specific risk).

Στο πλαίσιο της διαχείρισης κινδύνου των ασφαλιστικών εταιρειών, η διάκριση γίνεται μεταξύ καθαρού κινδύνου και κινδύνου για λόγους κερδοσκοπίας. Καθαρός κίνδυνος υπάρχει μόνο όταν η πιθανότητα εμφάνισης ζημίας είναι 100%, ενώ η πιθανότητα κέρδους είναι μηδενική. Στον κίνδυνο για λόγους κερδοσκοπίας υπάρχει η πιθανότητα κέρδους και ζημίας.

Κατά μια έννοια, η διάκριση μεταξύ των δύο αυτών κινδύνων είναι σχηματική. Πράγματι, ένας δεδομένος κίνδυνος περιλαμβάνει σε μεγάλο βαθμό και τις δύο συνιστώσες συγχρόνως. Για παράδειγμα, ο κίνδυνος που αντιμετωπίζει ένας επιχειρηματίας ξύλου στην αποθήκη του περιλαμβάνει τόσο την πιθανή μεταβολή στην τιμή του ξύλου (κίνδυνος για λόγους κερδοσκοπίας) όσο και μια πιθανή φωτιά στην αποθήκη που θα καταστρέψει ολοσχερώς το εμπόρευμα του (καθαρός κίνδυνος). Έτσι, τα εργαλεία και οι ικανότητες που απαιτούνται για την αποτελεσματική διαχείριση του καθαρού κινδύνου διαφοροποιούνται από τα εργαλεία και τις ικανότητες που μπορεί να χρησιμοποιήσει ο διαχειριστής του κινδύνου για λόγους κερδοσκοπίας.

Υπάρχουν κίνδυνοι που επηρεάζουν σχεδόν όλα τα οικονομούντα άτομα ταυτόχρονα. Για παράδειγμα, η παγκόσμια οικονομική ύφεση. Από την άλλη, υπάρχουν κίνδυνοι που επηρεάζουν μόνο ένα άτομο. Για παράδειγμα, η πυρκαγιά στην αποθήκη μιας βιομηχανίας ξύλου. Ωστόσο, δίνεται η δυνατότητα στα οικονομούντα άτομα να μειώσουν τον κίνδυνο που διατρέχουν μέσω της διάρθρωσης, κατασκευής και διαχείρισης χαρτοφυλακίων, εκτός και εάν η εκδήλωση του κινδύνου επηρεάζει όλα τα άτομα και όλους τους οργανισμούς την ίδια ακριβώς χρονική στιγμή, χωρίς να επιτρέπει τη διαχείριση του. Στην περίπτωση που υπάρχει η δυνατότητα μείωσης του κινδύνου, μιλάμε για *διαφοροποιημένο κίνδυνο* (diversifiable risk) ή μη συστηματικό ή ειδικό κίνδυνο, ενώ στην αντίθετη περίπτωση, για *μη διαφοροποιημένο κίνδυνο* (nondiversifiable risk) ή συστηματικό κίνδυνο.

Ο συντελεστής συσχέτισης αποτελεί ένα μέγεθος το οποίο χρησιμοποιείται ως εργαλείο διαφοροποίησης κινδύνου. Γενικά, ο συντελεστής συσχέτισης μετρά το βαθμό γραμμικής συσχέτισης μεταξύ δύο τυχαίων μεταβλητών και παίρνει τιμές στο διάστημα -1, $+1$: $\varrho \in [-1, +1]$. Εάν $\varrho = -1$, τότε οι δύο τυχαίες μεταβλητές, για τις οποίες έχει υπολογιστεί ο, ϱ, (π.χ. οι αποδόσεις δύο χρεογράφων) συσχετίζονται τέλεια αρνητικά, ενώ, αντίθετα, εάν $\varrho = +1$, συσχετίζονται τέλεια θετικά. Εάν $\varrho = 0$, τότε οι δύο μεταβλητές είναι γραμμικά ασυσχέτιστες. Εάν οι αποδόσεις δύο μετοχών, για παράδειγμα, συσχετίζονται τέλεια αρνητικά, τότε οι μετοχές αυτές αποτελούν μια καλή επιλογή σε ένα χαρτοφυλάκιο. Αντίθετα, εάν συσχετίζονται τέλεια θετικά, δεν θα πρέπει να περιλαμβάνονται στο ίδιο χαρτοφυλάκιο. Γενικά, όταν οι αποδόσεις δύο περιουσιακών στοιχείων έχουν $\varrho \in [-1, 0]$ και βρίσκονται στο ίδιο χαρτοφυλάκιο, τότε το χαρτοφυλάκιο αυτό έχει μικρότερο κίνδυνο.

Η διάκριση σε διαφοροποιήσιμο και μη διαφοροποιήσιμο κίνδυνο έχει αναπτυχθεί ιδιαίτερα στη χρηματοοικονομική βιβλιογραφία και, κυρίως, στη σύγχρονη θεωρία χαρτοφυλακίου (βλ. κεφάλαιο 5). Οι αποδόσεις των μετοχών τείνουν να συσχετίζονται (υψηλή τιμή του συντελεστή συσχέτισης μεταξύ των αποδόσεων τους), αλλά όχι τέλεια, μεταξύ τους. Είναι δυνατόν, λοιπόν, για έναν επενδυτή μετοχών να μειώσει τον κίνδυνο του χαρτοφυλακίου του, εάν επιλέξει τις κατάλληλες μετοχές.

Δραστηριότητα 7/Κεφάλαιο 2

Πώς συνδέεται ο συντελεστής συσχέτισης των αποδόσεων των περιουσιακών στοιχείων (π.χ. των μετοχών) με την έννοια της διαφοροποίησης; Απαντήστε σε μια παράγραφο 50 λέξεων. Ελέγξτε την ορθότητα της απάντησης σας ανατρέχοντας στην υποενότητα 2.2.1.

Δραστηριότητα 8/Κεφάλαιο 2

Εξηγήστε με λίγα λόγια την έννοια της διαφοροποίησης του κινδύνου (50 λέξεις). Ελέγξτε την ορθότητα της απάντησης σας, ανατρέχοντας στην υποενότητα 2.2.1.

Η αβεβαιότητα δεν μπορεί να διαφοροποιηθεί, μπορεί όμως να μειωθεί από την πληροφορία. Ο βαθμός της αβεβαιότητας εξαρτάται από την ποσότητα και τον τύπο της διαθέσιμης πληροφορίας, που είναι ικανή να ταυτοποιήσει και να εκτιμήσει το πιθανό αποτέλεσμα μιας πράξης (για παράδειγμα, μιας επενδυτικής απόφασης). Η πληροφορία συνδέεται με την επικοινωνία και έτσι η μείωση της αβεβαιότητας εξαρτάται σε μεγάλο βαθμό από την εμπιστοσύνη του μεταφερόμενου μηνύματος.

Η αβεβαιότητα και ο κίνδυνος έχουν κοινή επιρροή στον προσδιορισμό του *κόστους του κινδύνου* (cost of risk). Η έννοια του κόστους του κινδύνου έχει ανοίξει μια μεγάλη συζήτηση ανάμεσα στους ακαδημαϊκούς, αλλά και στους διαχειριστές. Αποτελείται από δύο βασικές συνιστώσες: η πρώτη αναφέρεται ως κόστος ζημίας και η δεύτερη ως κόστος της αβεβαιότητας. Όμως, ακόμα και εάν δεν υπάρξει ζημία, κόστος κινδύνου και αβεβαιότητας υπάρχει.

2.2.2 Κίνδυνος εισοδήματος και κίνδυνος κεφαλαίου

Κάθε επένδυση στηρίζεται στην προσδοκία της απόδοσης. Η πηγή της απόδοσης μιας επένδυσης μπορεί να είναι είτε η πρόσθετη εισροή εισοδήματος (π.χ., όταν πρόκειται για αποταμίευση ή για το μέρισμα στην περίπτωση μετοχών) είτε η κεφαλαιακή απόδοση (π.χ., όταν μια μετοχή αγοραστεί σε χαμηλή τιμή και ρευστοποιηθεί σε υψηλότερη). ΄Ετσι, άλλες επενδύσεις προσφέρουν πρόσθετο κεφάλαιο (αποταμίευση) και άλλες πιθανή ανατίμηση του επενδυόμενου κεφαλαίου, όπως επένδυση σε μετοχές, γη κλπ.

Βέβαια, στη δεύτερη, κυρίως, περίπτωση η μελλοντική απόδοση δεν είναι εκ των προτέρων γνωστή. Πρέπει, λοιπόν, να διαχωρίσουμε την *αναμενόμενη* (expected return) από την *πραγματοποιούμενη απόδοση* (realized return). Η αναμενόμενη απόδοση ισοδυναμεί με τον αποδεχόμενο κίνδυνο (risk) και πρέπει να συγκριθεί με την *απαιτούμενη απόδοση* (required return), η οποία αντιστοιχεί στην απαραίτητη απόδοση που ζητά ο επενδυτής προκειμένου να αναλάβει τον κίνδυνο.

Η απαιτούμενη απόδοση περιλαμβάνει:

α) το τι θα μπορούσε να κερδίσει ο επενδυτής μετοχών εναλλακτικά, π.χ. επενδύοντας σε ομόλογα ή έντοκα γραμμάτια,

β) την επιπρόσθετη απόδοση.

Είναι φανερό, λοιπόν, ότι η εξειδίκευση της απαιτούμενης απόδοσης προαπαιτεί τη μέτρηση του κινδύνου. Ο κίνδυνος εκφράζει την αβεβαιότητα ότι η πραγματοποιούμενη απόδοση δεν θα είναι ίση με την αναμενόμενη απόδοση. Εάν δεν υπήρχε αβεβαιότητα, δεν θα υπήρχε και κίνδυνος.

Δραστηριότητα 9/Κεφάλαιο 2

Περιγράψτε τη διαφορά μεταξύ αναμενόμενης και πραγματοποιούμενης απόδοσης (50 λέξεις). Ελέγξτε την ορθότητα της απάντησης σας, ανατρέχοντας στην υποενότητα 2.2.2.

Πέραν των παραπάνω κινδύνων που παρουσιάσαμε, διακρίνουμε τέσσερις άλλες κύριες πηγές κινδύνου: τον κίνδυνο της αγοραστικής δύναμης (purchasing power risk), τον κίνδυνο του πρόσθετου εισοδήματος (income risk), τον κίνδυνο κεφαλαίου (capital risk) και τον κίνδυνο αθέτησης (default risk).

Κίνδυνος αγοραστικής δύναμης. Η πράξη της επένδυσης δεν σημαίνει μόνο την τοποθέτηση χρημάτων για ένα χρονικό διάστημα σε ένα επενδυτικό πρόγραμμα, αλλά και την παραίτηση από την κατανάλωση πραγματικών αγαθών και υπηρεσιών στον παρόντα χρόνο. Ας υποθέσουμε ότι η διάρκεια μιας επένδυσης είναι 3 χρόνια και έστω ότι η επένδυση αυτή διπλασίασε το αρχικά επενδεδυμένο κεφάλαιο.

Η ικανοποίηση του επενδυτή, όμως, δεν θα είναι μεγάλη, αν στο μεταξύ διάστημα οι τιμές των προϊόντων και των υπηρεσιών έχουν τριπλασιαστεί. Εάν, πράγματι, συνέβη κάτι τέτοιο, τότε η αγοραστική δύναμη της τελικής περιουσίας του επενδυτή είναι μικρότερη σε σχέση με αυτήν προ της επένδυσης, δηλαδή τρία χρόνια πριν. Έτσι, πρέπει να διακρίνουμε την ονομαστική (nominal) από την πραγματική (real) απόδοση. Η πραγματική απόδοση ορίζεται αν αποπληθωρίσουμε την ονομαστική απόδοση.

Κίνδυνος αθέτησης. Ο κίνδυνος αυτός υπάρχει όταν ο επενδυτής έχει λόγους να πιστεύει ότι ο δανειζόμενος θα αθετήσει τη συμφωνία του.

Κίνδυνος εισοδήματος και κεφαλαίου. Οι δύο αυτοί τύποι κινδύνου συνδέονται άμεσα μεταξύ τους και είναι προτιμότερο να αναλυθούν μαζί. Και οι δύο κίνδυνοι απορρέουν από τη σχέση ωρίμανσης (maturity) και υποχρεώσεων. Αν τα περιουσιακά στοιχεία ενός επενδυτή λήγουν αργότερα από τις υποχρεώσεις του, τότε εκτίθεται στον κίνδυνο κεφαλαίου. Αντίθετα, αν λήγουν νωρίτερα, τότε ο επενδυτής εκτίθεται στον κίνδυνο εισοδήματος.

Παράδειγμα 2

Ας δούμε ένα απλό παράδειγμα. Έστω ότι ο κ. Α δανείστηκε από την τράπεζα Τ το ποσό των 1,000 €, με την υποχρέωση να επιστρέψει σε 20 χρόνια 5,604 €. Τι μπορεί να κάνει ο κ. Α τις 1,000 € για 20 χρόνια, ώστε να έχει μια απόδοση;

Πρώτον, θα μπορούσε να αγοράσει μακροχρόνια ομόλογα εικοσαετούς λήξης με υποθετικό επιτόκιο, έστω, 10%. Έτσι, ο κ. Α, με ανατοκιζόμενο επιτόκιο, θα λάβει στο τέλος των 20 χρόνων το ποσό των 6,727 €. [$1{,}000 \times (1 + 0.10)^{20}$], από το οποίο θα επιστρέψει στην Τ το ποσό των 5,604 € και θα έχει κέρδος ίσο με 1,123 € ή απόδοση 12.3%.

Αν, όμως, υποθέσουμε ότι δεν υπάρχουν εικοσαετή ομόλογα, τότε ο κ. Α μπορεί είτε να επενδύσει σε άλλα μακροχρόνια ομόλογα και να τα ρευστοποιήσει στην τρέχουσα τιμή σε 20 χρόνια είτε να επενδύει σε βραχυχρόνια ομόλογα για 20 χρόνια. Η πρώτη επιλογή εκθέτει τον κ. Α στον κίνδυνο κεφαλαίου, ενώ η δεύτερη στον κίνδυνο εισοδήματος. Μπορεί, βέβαια, να διαφοροποιήσει κατάλληλα το ποσό των 1,000 € σε μια βραχυχρόνια και μια μακροχρόνια επένδυση (immunisation).

Ας υποθέσουμε, τώρα, ότι ο κ. Α επενδύει το ποσό των 1,000 € σε πεντηκονταετή ομόλογα με απόδοση 10% ετησίως. Αναμένει, λοιπόν, ένα όφελος της τάξης των 117,391 € [$(1 + 0.10)^{50}$]. Όταν έλθει το 20ό έτος, θα τα ρευστοποιήσει και θα εισπράξει ένα ποσό ανάλογα με το ύψος των επιτοκίων, τότε. Στο τέλος των υπόλοιπων 30 ετών, ο κ. Α θα πάρει 117,391 €.

Ας υποθέσουμε, στη συνέχεια, ότι τα επιτόκια ανεβαίνουν κατά τη διάρκεια των πρώτων 20 ετών και όταν ο κ. Α πουλήσει τα ομόλογα το επιτόκιο είναι 13%. Όποιος αγοράσει τα ομόλογα του κ. Α στο τέλος του 20ού έτους, γνωρίζει ότι για τα υπόλοιπα 30 χρόνια θα λάβει το ποσό των 117,391 €. Το ποσό που θα δεχτεί ο νέος αγοραστής να πληρώσει στον κ. Α ισούται με $117{,}391/(1.13)^{30}$ = 3,001 €.

Έτσι, από την επένδυση αυτή ο κ. Α έχει μια ζημία ίση με 5,604 – 3,001 = 2,603 €, λόγω της μεταβολής των επιτοκίων κατά 3 μονάδες και, βέβαια, λόγω της αδυναμίας του κ. Α να εξισώσει τον χρόνο της υποχρέωσης του με τον χρόνο λήξης της επένδυσης.

Αντίθετα, αν υποθέσουμε ότι τα επιτόκια θα πέσουν στην πρώτη εικοσαετία, τότε ο κ. Α έχει δημιουργήσει κέρδος, ανάλογα με το ποσοστό πτώσης των επιτοκίων.

Μια άλλη εναλλακτική λύση για τον κ. Α είναι να επενδύει ανά δεκαετία το ποσό των 1,000 €. Έστω, λοιπόν, ότι στην πρώτη δεκαετία το επιτόκιο είναι 10%, που σημαίνει ότι ο κ. Α δημιουργεί ένα κεφάλαιο της τάξης των 2,594 €. Αν υποθέσουμε ότι στην επόμενη δεκαετία τα επιτόκια θα πέσουν, έστω σε 7%, τότε η συνολική επένδυση δίνει στον κ. Α ένα ποσό ίσο με 5,103 €. [$2{,}594 \times (1.07)^{10}$], το οποίο δεν αρκεί για την αποπληρωμή της υποχρέωσης του απέναντι στην τράπεζα Τ, που είναι 5,604 €. Αυτός είναι ο κίνδυνος εισοδήματος.

Αντίθετα, εάν τα επιτόκια στη δεύτερη δεκαετία ανέβαιναν σε 13%, τότε το τελικό όφελος για τον κ. Α θα ήταν ίσο με 3,201 €. Είναι φανερή η διαφορά από την περίπτωση όπου ο κ. Α είχε «κλειδώσει» το ποσό των 1,000 € σε πεντηκονταετή ομόλογα και τα επιτόκια είχαν ανοδική πορεία.

Συμπερασματικά, μπορούμε να πούμε ότι, όταν ο επενδυτής δεν μπορεί να εξισώσει τον χρόνο λήξης της υποχρέωσης έναντι τρίτου με τον χρόνο λήξης της επένδυσης, τότε, εάν προβλέπει αύξηση των επιτοκίων πριν από τη λήξη της υποχρέωσης, προτιμότερο είναι να επενδύσει σε βραχυχρόνιους τίτλους, ακόμα και αν εκτίθεται σε κίνδυνο εισοδήματος. Εάν, αντίθετα, προβλέπει πτώση των επιτοκίων, τότε προτιμότερο είναι να επενδύσει σε μακροχρόνιους τίτλους, ακόμα και αν εκτίθεται σε κίνδυνο κεφαλαίου.

Στο παράδειγμα μας, υποθέτοντας αύξηση των επιτοκίων, έχουμε:

α) Μακροχρόνια επένδυση: ζημία ίση με 2,603 €.

β) Βραχυχρόνια επένδυση: κέρδος ίσο με 3,201 €.

Τέλος, μια άλλη εναλλακτική επένδυση για τον κ. Α είναι να διαφοροποιήσει το ποσό των 1,000 €. σε μια μακροχρόνια και μια βραχυχρόνια επένδυση (immunisation). Τι μέρος, όμως, των 1,000 € πρέπει να επενδύσει μακροχρόνια και τι ποσό βραχυχρόνια, όταν τα επιτόκια έχουν άνοδο 3 μονάδων;

Ας αναφερθούμε στο παραπάνω παράδειγμα. Προκύπτει ένας λόγος κέρδους/ζημίας ίσος με 1.23, ο οποίος αντιστοιχεί στον λόγο 1,000/813 και είναι ο λόγος διάσπασης (split) του ποσού των 1,000 € σε μακροχρόνια και βραχυχρόνια επένδυση. Βέβαια, δεν ισχύει το ίδιο αν προβλέπουμε πτώση των επιτοκίων.

Στο παραπάνω παράδειγμα, η μοναδική παράμετρος προσδιορισμού του κέρδους ή της ζημίας του κ. Α είναι το ύψος των επιτοκίων. Αυτή είναι μια τυχαία μεταβλητή, σε κάθε τιμή της οποίας ο κ. Α δίνει μια πιθανότητα εμφάνισης. Για κάθε τιμή επιτοκίων με την αντίστοιχη πιθανότητα εμφάνισης, υπολογίζεται το αντίστοιχο κέρδος ή ζημία του κ. Α, από όπου είναι δυνατόν να προσδιοριστεί η κατανομή των κερδών του και, βέβαια, το αναμενόμενο κέρδος (ή μέσο κέρδος).

Μια κανονική κατανομή γύρω από αυτή τη μέση τιμή σημαίνει ότι ο κ. Α διατρέχει μικρό κίνδυνο, ενώ τιμές πολύ μικρότερες της μέσης, με μεγάλη πιθανότητα εμφάνισης, δείχνουν το μεγάλο μέγεθος του κινδύνου.

Είναι σημαντικό, λοιπόν, να μπορούμε να έχουμε μια άποψη της διασποράς της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας (η συνάρτηση με βάση την οποία αντιστοιχίζεται κάθε τιμή της τυχαίας μεταβλητής «ύψος επιτοκίου» με την πιθανότητα εμφάνισης) γύρω από τη μέση τιμή. Ως τέτοια χρησιμοποιούμε τη διακύμανση ή την τετραγωνική της ρίζα, δηλαδή την τυπική απόκλιση.

Μικρή διακύμανση δείχνει ότι η κατανομή συγκεντρώνεται γύρω από τη μέση τιμή και, συνεπώς, μπορούμε να προβλέψουμε το τελικό κέρδος με μεγάλο βαθμό ακρίβειας. Αντίθετα, όταν η διακύμανση είναι μεγάλη, η δυνατότητα ικανοποιητικής πρόβλεψης μειώνεται.

Δραστηριότητα 10/Κεφάλαιο 2

Ποιες κατηγορίες κινδύνων παρουσιάσαμε στην υποενότητα 2.2.2; Απαντήστε σε μια παράγραφο 50 λέξεων. Επιβεβαιώστε την ορθότητα της απάντησης σας, ανατρέχοντας στην ίδια υποενότητα.

2.2.3 Κατηγορίες τραπεζικών κινδύνων

Θα ήταν παρακινδυνευμένη μελλοντολογία να προσπαθήσει κάποιος να παρουσιάσει εξαντλητικά τους κινδύνους που είναι πιθανόν να αντιμετωπίσει ένας τραπεζικός οργανισμός σε δεδομένη χρονική στιγμή. Παρ' όλα αυτά, θα επιχειρήσουμε μια κοινά αποδεκτή γενικευμένη ταξινόμηση των κινδύνων σε τρεις κύριες κατηγορίες:

- Πιστωτικός κίνδυνος (credit risk)
- Κίνδυνος αγοράς (market risk)
- Λειτουργικοί κίνδυνοι (operational risk)

Α. Ο *πιστωτικός κίνδυνος* συνοδεύει μια παραδοσιακή τραπεζική εργασία, ωστόσο αποτελεί ένα σημαντικό μέρος στη διαχείριση κινδύνου, αφού σχετίζεται με την πιστοληπτική ικανότητα των δανειζομένων και, γενικά, των αντισυμβαλλομένων με τις τράπεζες. Δηλαδή σχετίζεται με την πιθανή ζημία που μπορεί να αντιμετωπίσει ένας τραπεζικός οργανισμός. Ο πιστωτικός κίνδυνος είναι σημαντικός, εάν αναλογιστούμε ότι η αφερεγγυότητα πολλών μικρών καταναλωτών μπορεί να δημιουργήσει τεράστιες ζημίες.

Στην κατηγορία των πιστωτικών κινδύνων ανήκουν επίσης:

α) *ο κίνδυνος αφερεγγυότητας* (default risk), όπου ο δανειζόμενος αδυνατεί να εξυπηρετήσει τις πληρωμές του δανείου του,

β) *ο κίνδυνος χώρας* (sovereign risk), που συνδέεται με την αδυναμία αποπληρωμής δημόσιου χρέους και

γ) *ο κίνδυνος αντισυμβαλλομένων* (counterparty risk), που ορίζεται ως η αθέτηση των υποχρεώσεων, γενικά, του αντισυμβαλλομένου.

Στην περίπτωση των παράγωγων προϊόντων (derivatives), η εκτίμηση του πιστωτικού κινδύνου είναι διαφορετική, αφού συνδέεται με τις χρηματικές ροές του υποκείμενου στοιχείου (underlying asset), που είναι διαφορετικές για κάθε παράγωγο μέσο. Πιστωτικός κίνδυνος μπορεί, ακόμα, να δημιουργηθεί από την αγορά, μέσω της ρευστότητας της και της αξίας των προϊόντων της.

Β. Οι *κίνδυνοι αγοράς* έχουν αποκτήσει, σήμερα, το μεγαλύτερο ενδιαφέρον, αφού επηρεάζουν τόσο την αξία του χαρτοφυλακίου των δανείων μιας τράπεζας όσο και την αξία του χαρτοφυλακίου των συναλλαγών της και σχετίζονται με το μέγεθος της μεταβολής των τιμών των διάφορων περιουσιακών στοιχείων.

Η αποτίμηση του κινδύνου της αγοράς βασίζεται στη μεταβλητότητα των παραμέτρων της αγοράς:

α) των επιτοκίων (interest rate risk),

β) των συναλλαγματικών ισοτιμιών (foreign exchange risk),

γ) των χρηματιστηριακών δεικτών και μετοχών,

δ) της ρευστότητας της αγοράς (liquidity risk), που στην ακραία περίπτωση της οδηγεί στη χρεοκοπία. Στην περίπτωση των παράγωγων προϊόντων, οι κίνδυνοι της αγοράς είναι πολυπλοκότεροι και πολλαπλάσιοι.

Γ. Οι *λειτουργικοί κίνδυνοι* σχετίζονται με την κακή λειτουργία των πληροφοριακών συστημάτων, των συστημάτων reporting και των εσωτερικών κανόνων παρακολούθησης της διαχείρισης κινδύνου. Οι λειτουργικοί κίνδυνοι μπορούν να ταξινομηθούν από αμελητέοι (για παράδειγμα, ο κίνδυνος βλάβης των φωτοτυπικών μηχανημάτων) μέχρι ουσιαστικοί και σημαντικοί (για παράδειγμα, κίνδυνος πτώχευσης εξαιτίας του αναποτελεσματικού διαχειριστικού ελέγχου, όπως στην περίπτωση της Τράπεζας Barings το 1995).

Έτσι, λοιπόν, οι λειτουργικοί κίνδυνοι μπορεί να εμφανιστούν:

α) είτε σε τεχνικό επίπεδο (technical risk)

β) είτε στο επίπεδο οργανωτικής δομής της παρακολούθησης των κινδύνων.

Στην πρώτη περίπτωση, υπάρχει ο κίνδυνος διακανονισμού (settlement risk), δηλαδή η πιθανότητα πραγματοποίησης ζημιών λόγω αδυναμίας συμψηφισμού κάποιων συναλλαγών, ο κίνδυνος ελέγχου λόγω βλάβης του μηχανογραφικού συστήματος κ.ά.

Για τον περιορισμό του οργανωτικού κινδύνου, απαιτείται ο σαφής διαχωρισμός μεταξύ του τμήματος που αναλαμβάνει τη διαχείριση του κινδύνου και του τμήματος του εσωτερικού ελέγχου.

Στην περίπτωση των παράγωγων προϊόντων, το μέγεθος του λειτουργικού κινδύνου είναι μεγαλύτερο και απαιτούνται αρκετά αποτελεσματικά συστήματα λογιστικής αποτίμησης, ελέγχου και διαχείρισης.

Είπαμε και παραπάνω ότι τα τραπεζικά ιδρύματα διαχειρίζονται και συναλλάσσονται τον κίνδυνο. Επίσης, αναφερθήκαμε στις κεντρικές πηγές του τραπεζικού κινδύνου. Ωστόσο, δεν γεννιούνται όλοι οι κίνδυνοι από τις τράπεζες. Μερικοί από αυτούς μπορούν να γίνουν αντικείμενο συναλλαγών, άλλοι να μεταφερθούν και άλλοι να εκμηδενιστούν. Με άλλα λόγια, η τραπεζική διαμεσολάβηση βοηθά την «αγορά», που θα ορίσουμε παρακάτω, στη μεταφορά ή, ακόμα, και στην αποφυγή του κίνδυνου μέσω της διαχείρισης του. Έτσι, είναι χρήσιμο να αναλύσουμε τους κινδύνους σε τρεις υποομάδες, με σκοπό να αναγνωρίσουμε ποιος κίνδυνος ανήκει σε ποια ομάδα και, ανάλογα, πώς οι τραπεζικοί οργανισμοί βοηθούν στη διαχείριση του κινδύνου:

1. Κίνδυνοι που μπορούν να αποφευχθούν ή να εκμηδενιστούν από κατάλληλες ακολουθούμενες τραπεζικές πρακτικές.
2. Κίνδυνοι που μπορούν να μεταφερθούν σε άλλους συμμετέχοντες.
3. Κίνδυνοι που πρέπει να παρακολουθούνται και να ελέγχονται ενεργητικά σε επίπεδο οργανισμού.

Στην πρώτη περίπτωση, ο οργανισμός πρέπει να λάβει τα κατάλληλα μέτρα, ώστε να ελαχιστοποιηθούν οι πιθανότητες παρουσίασης κινδύνων που ως πηγή τους έχουν τη διαφορετική ιδιοσυγκρασία της κάθε αγοράς. Τέτοια μέτρα αναφέρονται στη διαχείριση των χαρτοφυλακίων. Επίσης, αναφέρονται στην ελαχιστοποίηση των συναλλαγών που δεν έχουν τις απαραίτητες ούτε τις επιθυμητές χαρακτηριστικές ιδιότητες από την τράπεζα και που, σε τελική ανάλυση, δεν είναι αναγκαίες στην αποτελεσματική διάρθρωση του επενδυτικού χαρτοφυλακίου.

Ο κίνδυνος που απομένει αναφέρεται στον κίνδυνο του κάθε προϊόντος. Ο συστηματικός κίνδυνος δεν διαφοροποιείται και ο μόνος τρόπος για τη μείωση του είναι να αφαιρεθούν από το χαρτοφυλάκιο τα στοιχεία του εκείνα που δεν είναι επιθυμητά ή που δεν προσφέρουν μπορεί, όμως, καινά ελαχιστοποιηθεί μέσω στρατηγικών αντιστάθμισης κινδύνου (hedging). Βέβαια, όλες αυτές οι δράσεις συνοδεύονται από το αντίστοιχο κόστος που καλείται να καταβάλει ο αντισυμβαλλόμενος στην τράπεζα.

Η διαχείριση του κινδύνου «περνάει», επίσης, από τη μεταφορά του σε άλλους συναλλασσομένους. Είναι λογικό να θεωρήσουμε ότι όλοι οι συμμετέχοντες σε μια αγορά ή ένα προϊόν δεν σκέφτονται την ίδια χρονική στιγμή να ενεργήσουν με βάση την ίδια και μόνη επενδυτική επιλογή. Πάντα υπάρχουν διαφορετικοί χρονικοί ορίζοντες επένδυσης, επίπεδα ρευστότητας ή διαφορετική αναδιάρθρωση χαρτοφυλακίων. Έτσι, ο τραπεζικός οργανισμός, που δεν έχει το συγκριτικό πλεονέκτημα στη διαχείριση του ενός ή του άλλου κινδύνου και, συνεπώς, δε υπάρχει λόγος να αναλάβει τέτοιους κινδύνους, είναι προτιμότερο να τους μεταφέρει σε άλλους συμμετέχοντες στην αγορά. Με άλλα λόγια, δεν υπάρχει προστιθέμενη αξία από την ανάληψη κινδύνων που δεν έχει την εμπειρία ή την ικανότητα να διαχειριστεί.

Τέλος, η τρίτη υποομάδα αναφέρεται στην παρακολούθηση των κινδύνων των δραστηριοτήτων της τράπεζας. Εδώ, είναι φανερή η ανάγκη για την ποσοτικοποίηση της έκθεσης σε κίνδυνο σε τακτικά χρονικά διαστήματα και για την υλοποίηση ενός συστήματος διαχείρισης κινδύνου που θα παρακολουθείται. Η μεθοδολογία VaR, που θα αναλύσουμε σε επόμενα κεφάλαια, είναι σημαντική προς την κατεύθυνση της παρακολούθησης του συνολικού κινδύνου του οργανισμού.

Με άλλα λόγια, εάν δεν υπάρχει λόγος ανάληψης ενός κινδύνου (ή ομάδας κινδύνων) από την τράπεζα, τότε καλό είναι να μεταφέρεται ο κίνδυνος αυτός στην αγορά.

Αλλά, ποια είναι η αγορά;

Είναι λογικό να θεωρήσουμε ότι η αγορά αποτελείται από δύο ομάδες επενδυτών, τους συμμετέχοντες και τους μη συμμετέχοντες. Στην πρώτη ομάδα ανήκουν οι συμμετέχοντες, όπως ορίζονται σύμφωνα με την οικονομική θεωρία, με την έννοια ότι είναι ορθολογικοί επενδυτές, πληροφορημένοι σε κάθε χρονική στιγμή και συμμετέχουν ενεργά στη δυναμική διαχείριση των χαρτοφυλακίων τους.

Η δεύτερη ομάδα αποτελείται από τους μη πληροφορημένους επενδυτές, οι επενδυτικές αποφάσεις των οποίων βασίζονται σε ένα περιορισμένο σύνολο πληροφοριών, συνήθως το πλέον πρόσφατο σχετικά με τα προϊόντα και τις αγορές. Σε αυτή την κατηγορία προσφέρει, κυρίως, τις υπηρεσίες της η τράπεζα και μέσω αυτής η ομάδα των μη πληροφορημένων επενδυτών αποκτά πρόσβαση στις αγορές και τα προϊόντα.

Ακόμα, χάρη σε αυτή τη λειτουργία των τραπεζικών οργανισμών στη σημερινή τους μορφή, επιχειρείται η ολοκλήρωση μεταξύ της σύγχρονης διαμεσολάβησης (intermediation) και της θεωρίας της τιμολόγησης των περιουσιακών στοιχείων, με θετικές συνέπειες στην αποτελεσματικότητα των αγορών (market efficiency).

Δραστηριότητα 11/Κεφάλαιο 2

Σε ποιους παράγοντες στηρίζεται η αποτίμηση του κινδύνου αγοράς; Να αναφέρετε τουλάχιστον τέσσερις. Επιστρέψτε στην υποενότητα 2.2.3, στην παράγραφο Β, και ελέγξτε την ορθότητα της απάντησής σας.

Δραστηριότητα 12/Κεφάλαιο 2

Αναφέρετε και σχολιάστε σύντομα τις κατηγορίες των τραπεζικών κινδύνων που παρουσιάστηκαν στην υποενότητα 2.2.3 (50 λέξεις).

2.2.4 Εξέλιξη της θεωρίας και πρακτικής της διαχείρισης κινδύνου

Τόσο η θεωρία όσο και η πρακτική της διαχείρισης κινδύνου έχουν αναπτυχθεί σημαντικά τις τελευταίες δύο δεκαετίες. Σε θεωρητικό επίπεδο, η ανάπτυξη της διαχείρισης κινδύνου έχει φτάσει σε τέτοιο σημείο, ώστε να θεωρείται ένα διαφορετικό και εξειδικευμένο εδάφιο της χρηματοοικονομικής θεωρίας. Μάλιστα, διδάσκεται ήδη σε προχωρημένα μεταπτυχιακά τμήματα Χρηματοοικονομικής και Τραπεζικής Διοικητικής ως αυτοτελές μάθημα.

Σε πρακτικό επίπεδο, η εξέλιξη και εφαρμοσιμότητα της σύγχρονης διαχείρισης κινδύνου υπήρξε ραγδαία, τα τελευταία μόλις χρόνια. Σε αυτή την εξέλιξη κάποιοι παράγοντες συνέβαλλαν σημαντικά:

1. *Ο πρώτος αναφέρεται στην εξέλιξη της νέας θεωρίας και στην ταχύτητα με την οποία η θεωρία αυτή μεταφράστηκε σε πρακτικές εφαρμογές.*

Ένα γνωστό παράδειγμα αυτής της διαδικασίας μετατροπής αποτελεί η γρήγορη προσαρμογή ως εφαρμοσμένου πρακτικού εργαλείου της μαθηματικής σχέσης Black-Scholes στην τιμολόγηση των συμβολαίων δικαιωμάτων προαίρεσης (options).

Σήμερα, η σχέση αυτή έχει αναπτυχθεί σε όλα τα λογισμικά χρηματοοικονομικά προγράμματα και χρησιμοποιείται καθημερινά από τους επενδυτές, αλλά και τους επαγγελματίες διαχειριστές, στη διαδικασία επιλογής κατάλληλης στρατηγικής αντιστάθμισης κινδύνου (hedging).

2. *Ο δεύτερος παράγοντας της πρακτικής αναγνώρισης της σύγχρονης διαχείρισης κινδύνου αναφέρεται στην ανάπτυξη της αξίας σε κίνδυνο* (Value at Risk, VaR).

Η προσέγγιση των υποδειγμάτων VaR ξεκίνησε ως μια μεθοδολογία για την ποσοτική αποτίμηση των κινδύνων της αγοράς, αλλά γρήγορα επεκτάθηκε στη μέτρηση και διαχείριση και άλλων κινδύνων, όπως είναι, για παράδειγμα, οι κίνδυνοι ρευστότητας, οι πιστωτικοί κίνδυνοι και, σε μερικές περιπτώσεις, ο λειτουργικός ή θεσμικός κίνδυνος. Με άλλα λόγια, η τεχνική VaR άνοιξε νέους ορίζοντες στη διαχείριση κινδύνου και θα μπορούσαμε να πούμε ότι οι σημαντικές συνέπειες της δεν έχουν ακόμα διερευνηθεί πλήρως από τους ερευνητές, τους αναλυτές, τις εποπτικές αρχές αλλά και τους επαγγελματίες διαχειριστές.

3. *Ένας τρίτος παράγοντας αναφέρεται στην ανάγκη της διοίκησης των οργανισμών για την κατανόηση του κινδύνου που αναλαμβάνουν οι διαχειριστές.*

Αυτή η ανάγκη έγινε περισσότερο φανερή από τις αρχές της δεκαετίας του 1990 σχετικά με τη διαχείριση κινδύνου που αφορούσε κυρίως τα παράγωγα προϊόντα (derivatives). Αυτό είναι γεγονός για μια σειρά από λόγους, όπως:

i) Τα παράγωγα προϊόντα διαφέρουν από άλλα συμβόλαια στην έλλειψη διαφάνειας. Ενώ, για παράδειγμα, μελετώντας τους πρόσφατους ισολογισμούς μιας εταιρείας, αναλύοντας τα βασικά χαρακτηριστικά των ιστορικών της τιμών στο χρηματιστήριο και γνωρίζοντας σχετικά τον κλάδο στον οποίο ανήκει, μπορούμε να έχουμε μια ικανοποιητική εικόνα για την εν λόγω εταιρεία, με τα παράγωγα δεν είναι το ίδιο, γιατί είναι εκτός ισολογισμού.

ii) Οι θέσεις των οργανισμών στα παράγωγα μεταβάλλεται πολύ γρήγορα.

iii) Η αναφορά σε αυτά γίνεται σε όρους ονομαστικής αξίας και σκεπάζεται, έτσι, η πραγματική μόχλευση με αποτέλεσμα να μην αποκαλύπτεται η πραγματική έκθεση στον κίνδυνο.

iv) Υπάρχει μεγάλη ποικιλία παράγωγων προϊόντων σε ολόκληρο τον κόσμο, είτε σε οργανωμένες χρηματιστηριακές αγορές είτε εξωχρηματιστηριακά (over the counter). Συγχρόνως, υπάρχουν πολλά υβριδικά παράγωγα, όπως option σε options, options σε swaps κ.λπ.

Η ταχύτατα αναπτυσσόμενη χρήση αυτής της αγοράς οδήγησε στην ανάγκη για την καλή αναφορά στοιχείων διαχείρισης κινδύνου, με σκοπό την καλύτερη παρακολούθηση και αποτελεσματικότερη διαχείριση του. Η πρώτη έκθεση αναφορικά με τη διαχείριση κινδύνου των παραγώγων συντάχθηκε τον Ιούλιο του 1993 από το Group of Thirty (G30).

Στη συνέχεια, συντάχθηκαν εκθέσεις από την US General Accounting Office τον Μάιο του 1994, από την BIS (Bank of International Settlement) από κοινού με την IOSCO (International Organization of Securities Commissions) τον Ιούλιο του 1994, και ακολούθησαν οι εκθέσεις του Derivatives Policy Group (DPG), της International Swaps and Derivatives Association (ISDA) κ.ά.

Οι συστάσεις αυτών των εκθέσεων ήταν σχεδόν οι ίδιες: ανάγκη διαχωρισμού των συναλλαγών (front) από τη διοίκηση (back) με σκοπό την αναγνώριση απάτης, ανάγκη ανεξαρτησίας ενός τμήματος διαχείρισης κινδύνου, χρήση υποδειγμάτων αποτίμησης της αξίας σε κίνδυνο. Περαιτέρω, επισημαίνεται η σημαντικότητα των ελεγκτικών συστημάτων, των πληροφοριακών συστημάτων κ.λπ.

Δραστηριότητα 13/Κεφάλαιο 2

Ποιοι παράγοντες οδήγησαν στη ραγδαία ανάπτυξη των συστημάτων διαχείρισης κινδύνου; Απαντήστε σε μια παράγραφο 50 λέξεων. Επιστρέψτε στην υποενότητα 2.2.4 και ελέγξτε την ορθότητα της απάντησης σας.

Δραστηριότητα 14/Κεφάλαιο 2

Σχολιάστε τη συμμετοχή του κινδύνου παραγώγων στην εξέλιξη της διαχείρισης κινδύνου (20 λέξεις). Επιστρέψτε στην υποενότητα 2.2.4 και ελέγξτε την ορθότητα της απάντησης σας.

2.2.5 Η τυποποίηση και ο ρόλος της διαχείρισης τραπεζικού κινδύνου

Από όσα αναφέρθηκαν προηγουμένως προκύπτει ότι η αυξανόμενη μεταβλητότητα και ο ανταγωνισμός οδήγησαν στην αύξηση του κινδύνου. Στόχος της διαχείρισης κινδύνου είναι, πρωτίστως, η βελτιστοποίηση της σχέσης κινδύνου–απόδοσης των συναλλαγών, ο σχεδιασμός και η χρηματοδότηση νέων επενδυτικών σχεδίων, αναλόγως.

Η διαχείριση κινδύνου είναι, συγχρόνως, ένα σύνολο εργαλείων και τεχνικών, απαραίτητων για τον σχεδιασμό της στρατηγικής ενός τραπεζικού οργανισμού.

Η ανάλυση, η παρακολούθηση, ο έλεγχος και η ποσοτική αποτίμηση της έκθεσης των τραπεζικών οργανισμών στον κίνδυνο είναι σημαντικά τόσο στην τραπεζική διοικητική όσο και στις εποπτικές αρχές. Το αυξανόμενο ενδιαφέρον των τραπεζικών οργανισμών για τη διαχείριση του πιστωτικού κινδύνου, του κινδύνου αγοράς και άλλων κινδύνων τα τελευταία χρόνια έχει δύο, επιπλέον, συνέπειες:

α) την τάση για ολοκλήρωση των προσπαθειών για διαχείριση κινδύνου στα χρηματοπιστωτικά ιδρύματα και εφαρμογή κοινών ή παρόμοιων τεχνικών για την ποσοτική εκτίμηση των κινδύνων διαφορετικών τύπων

β) τη μεγαλύτερη εστίαση στο κόστος και την ανακατανομή του κεφαλαίου, αποτιμώμενα σε πραγματικούς οικονομικούς όρους, ανάμεσα στις διάφορες τραπεζικές δραστηριότητες.

Μέχρι πρόσφατα η χρήση των στατιστικών μεθόδων στη διαχείριση του τραπεζικού κινδύνου περιοριζόταν μόνο στην εκτίμηση του κινδύνου της αγοράς. Γρήγορα, όμως, οι τραπεζικοί οργανισμοί αναγνώρισαν ότι υπάρχει μικρή ουσιαστική διαφορά μεταξύ των διάφορων κινδύνων: *το κοινό χαρακτηριστικό όλων είναι η πιθανότητα ζημίας.*

Για την αποτελεσματικότερη συζήτηση, είναι σκόπιμο να υιοθετήσουμε μια γενική δομή της διαδικασίας της διαχείρισης κινδύνου. Γενικά, η διαδικασία της διαχείρισης κινδύνου μπορεί να διαιρεθεί σε τρία διαφορετικά στάδια:

- ταυτοποίηση
- υπολογισμός
- διαχείριση

Α. Το στάδιο της *ταυτοποίησης* (identification) είναι το σημαντικότερο. Πράγματι, έχει μεγάλη σημασία να αναγνωρίσουμε και να ταξινομήσουμε τους κινδύνους που μπορεί να παρουσιαστούν. Η λανθασμένη ταυτοποίηση των κινδύνων ή η μη αναγνώριση τους μπορεί να οδηγήσει ακόμα και σε αρνητικά αποτελέσματα. Μετά την ολοκλήρωση αυτού του σταδίου, ένας χρηματοπιστωτικός οργανισμός μπορεί να προχωρήσει στο επόμενο στάδιο.

Β. Το δεύτερο στάδιο αναφέρεται στη *μέτρηση* (measurement) των αναγνωρισμένων και ταυτοποιημένων κινδύνων. Η προσπάθεια μέτρησης του κινδύνου και ποσοτικής αποτίμησης του, ιδιαίτερα, καθίσταται πραγματικά δύσκολη στο συνεχώς μεταβαλλόμενο περιβάλλον. Με αυτές τις συνθήκες, ο τραπεζικός οργανισμός καλείται να αναπτύξει μεθόδους και τεχνικές κατάλληλες για τη μέτρηση του κινδύνου και στη συνέχεια να τις εφαρμόσει στο χαρτοφυλάκιο του.

Γ. Το επόμενο στάδιο αναφέρεται στη *διαχείριση* (management), δηλαδή στην απόφαση της συναλλαγής ή της μη συναλλαγής με έναν αντισυμβαλλόμενο. Στην περίπτωση της απόφασης συναλλαγής, ο οργανισμός θα πρέπει να αποφασίσει εάν θα μετακυλίσει τον κίνδυνο (εάν είναι απαγορευτικά υψηλός και η αναμενόμενη απόδοση μη ικανή να καλύψει τον κίνδυνο) ή όχι (εάν είναι σε αποδεκτά επίπεδα) ή, τέλος, εάν θα μειώσει τον κίνδυνο.

Εάν η δομή της διαχείρισης του τραπεζικού οργανισμού είναι αποτελεσματική, τότε η τράπεζα θα είναι σε θέση να αναγνωρίσει, να παρακολουθήσει και να διαχειριστεί τους κινδύνους που αναλαμβάνει, να σχεδιάσει τη δημιουργία νέων προϊόντων και να μπει σε νέες αγορές. Διαχειριζόμενη τον κίνδυνο για λόγους κερδοσκοπίας, μια τράπεζα μπορεί να τιμολογήσει τους κινδύνους που αντιμετωπίζει, να ελαχιστοποιήσει τις πιθανές ζημίες της, να μεγιστοποιήσει την αναμενόμενη κερδοφορία της και να αυξήσει την αξία της.

Η διαχείριση τραπεζικού κινδύνου έχει μια σειρά από οφέλη για τους τραπεζικούς οργανισμούς. Ωστόσο, ενέχει πολλά πρακτικά και θεωρητικά προβλήματα. Η ποσοτικοποίηση του κινδύνου δεν είναι μια εύκολη υπόθεση, αφού η αβεβαιότητα δεν οδηγεί σε εύκολα και κατανοητά –πολλές φορές– μεγέθη αποτίμησης και εκτίμησης του κινδύνου. Άλλωστε, αυτός ήταν και ο βασικότερος λόγος που μέχρι σήμερα η διαχείριση του κινδύνου αποτελούσε μια περιορισμένη διαδικασία.

Η διαδικασία διαχείρισης κινδύνου συνδυάζει τη διαφοροποίηση, με την έννοια ότι ο συνολικός κίνδυνος είναι μικρότερος από το απλό άθροισμα των συνιστωσών του, και σκοπός είναι η ποσοτική αποτίμηση των επιμέρους κινδύνων και η εκτίμηση των πιθανών συνεπειών τους.

Χωρίς την ποσοτική έκφραση και ανάλυση των επιμέρους κινδύνων δεν είναι εύκολο να τεθούν οι στόχοι των αναμενόμενων εισροών ούτε να προσδιοριστούν τα όρια του κινδύνου, στοιχεία απαραίτητα για επιχειρηματικές αποφάσεις στους σύγχρονους τραπεζικούς οργανισμούς. Σήμερα, οι τεχνικές και οι μέθοδοι μέτρησης του κινδύνου έχουν αναπτυχθεί σημαντικά και αναφέρονται ως *Αξία σε Κίνδυνο* (Value at Risk ή VaR) και *Κεφάλαιο σε Κίνδυνο* (Capital at Risk ή CaR).

VaR είναι η μέγιστη ζημία σε δεδομένο χρονικό διάστημα και για δεδομένο *επίπεδο εμπιστοσύνης* (tolerance level). Όσο πιο χαμηλό είναι το επίπεδο εμπιστοσύνης, τόσο υψηλότερη είναι η τιμή VaR. Για παράδειγμα, εάν VaR = 100 και το επίπεδο εμπιστοσύνης έχει προσδιοριστεί στο 95%, αυτό σημαίνει ότι η πιθανότητα να υπάρξει ζημία μεγαλύτερη του 100 είναι 5%.

CaR είναι το απαραίτητο κεφάλαιο που είναι ικανό να απορροφήσει τις πιθανές ζημίες ολόκληρου του χαρτοφυλακίου της τράπεζας για δεδομένο επίπεδο εμπιστοσύνης.

Συνεπώς, *CaR είναι το προσαρμοσμένο στον κίνδυνο κεφάλαιο, μετά τη διαφοροποίηση κινδύνων, ενώ η VaR μπορεί να υπολογίζεται σε κάθε ενδιάμεσο στάδιο της διαδικασίας διαχείρισης κινδύνου, συλλαμβάνοντας, έτσι, τα αποτελέσματα διαφοροποίησης και καθιστώντας τη διαδικασία διαχείρισης κινδύνου «γέφυρα» μεταξύ των επιμέρους κινδύνων και του επιπέδου του συνολικού κινδύνου.* Επίσης, το επίπεδο σημαντικότητας του CaR είναι αυστηρότερο από το επίπεδο εμπιστοσύνης της VaR και προσδιορίζεται ως η πιθανότητα αφερεγγυότητας της τράπεζας.

Για παράδειγμα, CaR = 100 σε επίπεδο εμπιστοσύνης 1% σημαίνει ότι οι ζημίες δεν θα ξεπεράσουν το 100, τουλάχιστον, στο 99% των περιπτώσεων. Όσο χαμηλότερο είναι το επίπεδο εμπιστοσύνης (δηλαδή η πιθανότητα αφερεγγυότητας της τράπεζας), τόσο υψηλότερο είναι το CaR.

Παράδειγμα 3

Έστω, για παράδειγμα, ότι έχουμε αποτιμήσει τους επιμέρους κινδύνους σε μια τράπεζα ως εξής: πιστωτικός κίνδυνος = 200, κίνδυνος αγοράς = 50, κίνδυνος επιτοκίων = 20 και λειτουργικός κίνδυνος = 100. Αυτές είναι οι τιμές VaR.

Το άθροισμα τους δίνει την τιμή 370, που αντιστοιχεί στον συνολικό κίνδυνο και αποτελεί την τιμή CaR. Έστω, ακόμα, ότι το επίπεδο σημαντικότητας έχει προσδιοριστεί στο 1%. Αυτό σημαίνει ότι η πιθανότητα οι μη αναμενόμενες ζημίες να υπερβούν το όριο των 370 είναι 1%.

Σχετικά με τα υποδείγματα VaR θα ακολουθήσει εκτενής αναφορά στα περισσότερα από τα υπόλοιπα κεφάλαια του τόμου. Προς το παρόν είναι αρκετό να κατανοήσουμε τον βασικό ορισμό και μόνο, καθώς και τη σημαντικότητα του στη διαχείριση του τραπεζικού κινδύνου. Επίσης, η επιλογή του επιπέδου εμπιστοσύνης και της χρονικής περιόδου στον υπολογισμό της αξίας σε κίνδυνο δεν ακολουθεί κάποιον συγκεκριμένο κανόνα και διαφοροποιείται από οργανισμό σε οργανισμό.

Συνήθως, ως επίπεδο εμπιστοσύνης επιλέγονται μεγέθη 95% ή 99% και ως χρονική περίοδος ο μήνας ή η ημέρα. Η επιλογή εξαρτάται από τη ρευστότητα του χαρτοφυλακίου ή τη φιλοσοφία της επενδυτικής επιτροπής ή τις υποχρεώσεις του οργανισμού.

Δραστηριότητα 15/Κεφάλαιο 2

Ποια είναι η ακολουθούμενη διαδικασία διαχείρισης τραπεζικών κινδύνων; Απαντήστε σε ένα κείμενο 100 λέξεων. Επιστρέψτε στην υποενότητα 2.2.5 και ελέγξτε την ορθότητα της απάντησης σας.

Δραστηριότητα 16/Κεφάλαιο 2

Είπαμε παραπάνω ότι «όσο μικρότερο είναι το επίπεδο εμπιστοσύνης, τόσο μεγαλύτερη είναι η τιμή του CaR».

Να δώσετε ένα απλό αριθμητικό παράδειγμα σε διάφορα επίπεδα εμπιστοσύνης (επιλέξτε τρία διαφορετικά επίπεδα), ώστε να επαληθευτεί η παραπάνω πρόταση.

Στη συνέχεια, συγκρίνετε την απάντηση σας με το Παράδειγμα 3 της παρούσας υποενότητας.

Ενότητα 2.3

ΤΟ ΘΕΣΜΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ ΤΩΝ ΠΙΣΤΩΤΙΚΩΝ ΙΔΡΥΜΑΤΩΝ

Στην ενότητα αυτή θα αναπτύξουμε μερικά θέματα που σχετίζονται με την προληπτική εποπτεία των τραπεζών.

Το θεσμικό και εποπτικό πλαίσιο έχει στόχο να εξυπηρετήσει τις ανάγκες των τραπεζών και έχει σημαντικές συνέπειες στη διαχείριση κινδύνου. Η ξεχωριστή εποπτεία του τραπεζικού συστήματος που έχει αναπτυχθεί σε κάθε οικονομία είναι σημαντική για μια σειρά από λόγους (βλ. Γκόρτσος, 1999).

Η χρηματοοικονομική ευπάθεια αυξάνει την πιθανότητα αθέτησης της υποχρέωσης των νοικοκυριών και των επιχειρήσεων προς τις τράπεζες (ή και το αντίστροφο) και μπορεί να οδηγήσει στην κρίση εμπιστοσύνης των επενδυτών (bank run), με αποτέλεσμα να εμποδίζονται οι τράπεζες να προσφέρουν το σημαντικότερο προϊόν τους, τη ρευστότητα (liquidity).

Επίσης, η διαφάνεια των συναλλαγών της τράπεζας αποτελεί ένα σημαντικό μέρος της εμπιστοσύνης των επενδυτών. Η γενικευμένη μορφή της έλλειψης της επενδυτικής εμπιστοσύνης προς τις τράπεζες μπορεί να οδηγήσει σε συστημική κρίση ολόκληρου του πιστωτικού συστήματος.

Η Ευρωπαϊκή Κοινότητα αποφάσισε να διαμορφώσει ένα κοινό πλαίσιο της τραπεζικής αγοράς και η Επιτροπή της Βασιλείας (1988) έθεσε ένα σύνολο οδηγιών σχετικά με την κεφαλαιακή επάρκεια των πιστωτικών ιδρυμάτων. Όμως, είναι νωρίς ακόμα να αποτιμηθούν οι προσπάθειες αυτές.

2.3.1 Το θεσμικό-ρυθμιστικό πλαίσιο και η πολυπλοκότητα των κινδύνων

Το θεσμικό πλαίσιο για τις επιχειρήσεις που δραστηριοποιούνται στον τομέα των χρηματοπιστωτικών υπηρεσιών υπάρχει για τρεις, κυρίως, λόγους:

α) *Για λόγους προστασίας των επενδυτών*.

β) *Για λόγους προστασίας εκείνων με τους οποίους συναλλάσσεται ο οργανισμός*.

γ) *Για λόγους προστασίας του χρηματοπιστωτικού συστήματος* γενικότερα.

Οι δύο πρώτοι λόγοι είναι βασικοί αλλά και άμεσα κατανοητοί. Ο τρίτος λόγος υπαγορεύεται από την ανάγκη να υπαχθούν οι επιχειρήσεις αυτές σε κοινό ρυθμιστικό πλαίσιο. Πράγματι, η χρεοκοπία μιας από αυτές είναι πιθανόν να οδηγήσει σε αποσταθεροποίηση ολόκληρου του χρηματοπιστωτικού συστήματος (συστημικός κίνδυνος), συμπεριλαμβανομένης και της εμπιστοσύνης των επενδυτών στην αγορά, καθώς και της εύρυθμης λειτουργίας των συστημάτων συμψηφισμού και διακανονισμού.

Το θεσμικό πλαίσιο θέτει τους περιορισμούς και δίνει τις κατευθύνσεις που εμπνέουν εμπιστοσύνη στη διαχείριση κινδύνου και αποτελεί κίνητρο για την ανάπτυξη και την αποτελεσματικότερη οργάνωση εσωτερικού ελέγχου μέσα στους τραπεζικούς οργανισμούς. Συγχρόνως, η θεσμοθέτηση κανόνων είναι συχνά αντίθετη με τις απαιτήσεις του ανταγωνισμού, αφού οι κανόνες αυτοί μπορεί να επενεργούν περιοριστικά στις δραστηριότητες και λειτουργίες της τράπεζας.

Από την άλλη, όμως, η διαδικασία της απορρύθμισης άφησε ένα κενό, το οποίο έπρεπε να συμπληρωθεί με νέους κανόνες και ρυθμίσεις, προσαρμοσμένους στους κινδύνους. Αυτοί οι νέοι κανόνες σχεδιάστηκαν στην BIS (Bank for International Settlements), στη Βασιλεία της Ελβετίας, και προσαρμόστηκαν στις ιδιαιτερότητες της κάθε χώρας. Η απελευθέρωση αυτή, επίσης, δημιούργησε και μια σειρά από νέα τραπεζικά προϊόντα και υπηρεσίες.

Οι εποπτικές αρχές που είναι υπεύθυνες για τη θεσμοθέτηση του τραπεζικού συστήματος βρίσκονται πάντα προ αντικρουόμενων υποχρεώσεων:

- Από τη μια μεριά, οφείλουν να ολοκληρώσουν την κύρια αποστολή τους, που αφορά τη διατήρηση της αξιοπιστίας του τραπεζικού συστήματος, και να προστατεύσουν την αποταμίευση.
- Από την άλλη, πρέπει να αυξήσουν τον βαθμό ανταγωνισμού μεταξύ των πιστωτικών ιδρυμάτων κατά τρόπο που να ικανοποιείται και το πρώτο κριτήριο της αποστολής τους. Έτσι, το πρώτο δίλημμα είναι αυτό που αναφέρεται στη σχέση μεταξύ κανονιστικού πλαισίου και αποτελεσματικότητας της αγοράς.

Επιπλέον, η Ευρωπαϊκή Κοινότητα είναι αντιμέτωπη με μια επιπρόσθετη επιλογή. Στη μια άκρη βρίσκονται τα κανονιστικά πλαίσια που έχουν σχεδιαστεί από τις εθνικές εποπτικές αρχές και στηρίζονται στις ιδιοσυγκρασίες της κάθε αγοράς, στις ανάγκες και την ιστορική τους εμπειρία, και στην άλλη βρίσκονται οι κανόνες της Ευρωπαϊκής Ένωσης που έχουν στόχο την εναρμόνιση των ρυθμιστικών και κανονιστικών πλαισίων των εθνικών αγορών.

Το βασικότερο κριτήριο για την παρέμβαση των εποπτικών αρχών είναι η ενθάρρυνση του ανταγωνισμού σε βαθμό που, συχνά, δημιουργείται η εντύπωση ότι παραβλέπονται οι άλλες δύο λειτουργίες της εποπτικής αρχής: η σταθερότητα του συστήματος και η προστασία των επενδυτών.

Τα κυριότερα εργαλεία για την αύξηση του ανταγωνισμού παίρνουν, κατά καιρούς, διάφορες μορφές, όπως, για παράδειγμα:

- απελευθέρωση επιτοκίων και προμηθειών,
- απαλοιφή των περιορισμών που εμποδίζουν τα πιστωτικά ιδρύματα να προσφέρουν ειδικές χρηματοοικονομικές υπηρεσίες (non–banking services) κ.ά.

Αντικείμενο της Συμφωνίας της Βασιλείας αποτελούν η καθιέρωση ενός ενιαίου συστήματος μέτρησης της κεφαλαιακής επάρκειας των διεθνών εμπορικών τραπεζών και η επιβολή ελάχιστων ορίων επάρκειας ιδίων κεφαλαίων, με σκοπό την ενίσχυση του περιεχομένου των κανόνων της προληπτικής εποπτείας σε διεθνές επίπεδο.

Ως επάρκεια ιδίων κεφαλαίων νοείται ένα σύστημα κανόνων, τους οποίους εφαρμόζουν οι ρυθμιστικές αρχές προκειμένου να εξασφαλίσουν ότι τα εποπτευόμενα από αυτές χρηματοπιστωτικά ιδρύματα διαθέτουν επαρκή κεφάλαια για την κάλυψη των κινδύνων στους οποίους εκτίθενται κατά την ανάληψη των επιχειρηματικών τους δραστηριοτήτων.

Η επιδίωξη, λοιπόν, ήταν να περιοριστεί η έκθεση των διεθνών χρηματοπιστωτικών ιδρυμάτων σε αφερεγγυότητα μέσω της ενίσχυσης της ικανότητας τους να απορροφούν απροσδόκητες ζημίες.

Ο περιορισμός της ευαισθησίας των τραπεζών απέναντι στους κινδύνους στους οποίους εκτίθενται αποτελεί καταρχήν αντικείμενο της πολιτικής διαχείρισης τραπεζικών κινδύνων, η οποία περιλαμβάνει:

α) μέτρα ενεργητικής πολιτικής, με πυρήνα τη διαφοροποίηση του τραπεζικού χαρτοφυλακίου, με στόχο τον έλεγχο του κινδύνου και
β) μέτρα παθητικής πολιτικής, η υιοθέτηση των οποίων αποβλέπει στην ενδυνάμωση της καθαρής θέσης της τράπεζας.

Μερικοί από τους θεσμικούς κανόνες είναι απλοί και έχουν στόχο να περιορίσουν τους πιθανούς κινδύνους. Για παράδειγμα, κάποιοι περιορισμοί, όπως ο δείκτης ρευστότητας = (κυκλοφορούν ενεργητικό)/(βραχυχρόνιες υποχρεώσεις), πρέπει να είναι μεγαλύτεροι της μονάδας. Όμως, πυρήνας του θεσμικού πλαισίου είναι η *κεφαλαιακή επάρκεια* (capital adequacy) των χρηματοπιστωτικών οργανισμών, δηλαδή το ελάχιστο όριο κεφαλαίου προσαρμοσμένου για κίνδυνο (risk–based capital) από τις διάφορες θέσεις στο χαρτοφυλάκιο τους.

Παραδοσιακά, το κεφάλαιο αποτελεί ένα μικρό μόνο μέρος του συνολικού ενεργητικού των τραπεζικών οργανισμών, ιδιαίτερα εάν συγκριθεί με αυτό των βιομηχανικών επιχειρήσεων. Ένα ποσοστό κεφαλαίου επί του συνολικού ενεργητικού ίσο με 8% αντιστοιχεί σε έναν υψηλό συντελεστή μόχλευσης (ξένα προς ίδια κεφάλαια). Συνήθως, οι τράπεζες διατηρούν στην κατοχή τους στοιχεία του ενεργητικού (δάνεια) ως τη λήξη της διάρκειας τους, τα οποία δεν είναι εύκολα ρευστοποιήσιμα σε περίπτωση που χρειαστούν κεφάλαια, και η Οδηγία Κεφαλαιακής Επάρκειας ακριβώς αυτό το πνεύμα έχει.

Οι περιορισμοί κεφαλαίου έχουν, τελευταία, προσαρμοστεί στον κίνδυνο της αγοράς. Οι βασικότεροι λόγοι είναι:

α) ο κίνδυνος της αγοράς είναι ο κίνδυνος ζημίας στη διάρκεια της ελάχιστης εκείνης περιόδου που χρειάζεται για τη ρευστοποίηση θέσης στην αγορά,
β) η χρονική αυτή περίοδος εξαρτάται από τον τύπο του συγκεκριμένου προϊόντος,
γ) η πιθανή ζημία εξαρτάται από τις κινήσεις της αγοράς στη διάρκεια αυτής της περιόδου, αλλά και από την ευαισθησία των διαφορετικών περιουσιακών στοιχείων του χαρτοφυλακίου στις μεταβολές αυτές.

Τα VaR υποδείγματα μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως εσωτερικά υποδείγματα στον οργανισμό κάτω από τις οδηγίες των εποπτικών αρχών.

Δραστηριότητα 17/Κεφάλαιο 2

Ποιος είναι ο ρόλος του θεσμικού πλαισίου; Απαντήστε σε μια παράγραφο 50 λέξεων. Στη συνέχεια, επιστρέψτε στην υποενότητα 2.3.1 και ελέγξτε την ορθότητα της απάντησής σας.

Δραστηριότητα 18/Κεφάλαιο 2

Ποια διλήμματα φαίνεται να παρουσιάζονται στις εποπτικές αρχές στην προσπάθεια τους να ικανοποιήσουν αποτελεσματικά την αποστολή τους; Απαντήστε σε ένα κείμενο 150 λέξεων. Επιστρέψτε στην υποενότητα 2.3.1 και ελέγξτε την ορθότητα της απάντησης σας.

2.3.2 Η Επιτροπή της Βασιλείας για την Τραπεζική Εποπτεία (Basel Committee on Banking Supervision)

Η Επιτροπή της Βασιλείας για την Τραπεζική Εποπτεία (Basel Committee on Banking Supervision), η οποία ονομάζεται και «Επιτροπή της Βασιλείας», ιδρύθηκε το 1974 με τη συμμετοχή 13 χωρών (Βέλγιο, Καναδάς, Γαλλία, Γερμανία, Ιταλία, Ιαπωνία, Λουξεμβούργο, Ολλανδία, Ισπανία, Σουηδία, Ελβετία, Ηνωμένο Βασίλειο και ΗΠΑ) και αποτελείται από εκπροσώπους κεντρικών τραπεζών και άλλων εποπτικών αρχών. Η Επιτροπή της Βασιλείας εδρεύει καθώς και συνεδριάζει κάθε τρεις μήνες στην Τράπεζα Διεθνών Διακανονισμών (Bank of International Settlements), η οποία της παρέχει και γραμματειακή υποστήριξη.[1] Αξίζει να σημειωθεί ότι η Επιτροπή της Βασιλείας δεν αποτελεί κάποιο είδος διακυβερνητικού οργανισμού, αλλά μία οργάνωση – forum χωρίς νομική προσωπικότητα και εξουσία. Το έργο της Επιτροπής αποβλέπει κυρίως στη διασφάλιση της σταθερότητας του διεθνούς χρηματοπιστωτικού συστήματος αλλά και στη διαμόρφωση ισοδύναμων όρων ανταγωνισμού. Η Επιτροπή (The Committee) διατυπώνει ευρέα εποπτικά πρότυπα και κατευθύνσεις και προτείνει βέλτιστες πρακτικές, με την προσδοκία ότι οι επιμέρους εποπτικές αρχές θα λάβουν μέτρα για την εφαρμογή τους μέσω θεσμικών ή άλλων προσαρμογών, οι οποίες ενδείκνυνται για τα εθνικά τους συστήματα.[2] Επιπλέον, δεν έχει τη μορφή υπερεθνικής εποπτικής αρχής και τα συμπεράσματά της δεν έχουν δεσμευτική νομική ισχύ. Παρέχει εκτεταμένες κατευθυντήριες γραμμές που οι εποπτικές αρχές κάθε χώρας μπορούν να χρησιμοποιήσουν ώστε να καθορίσουν τις ρυθμιστικές

1 *www.ine.otoe.gr, Νέο πλαίσιο κεφαλαιακής επάρκειας (Βασιλεία ΙΙ), Τεκμηρίωση*
2 *www.bankofgreece.gr, Επιτροπή της Βασιλείας*

πολιτικές που εφαρμόζουν.[3] Μολονότι οι κανόνες που θεσπίζει η Επιτροπή της Βασιλείας δεν έχουν νομικά εξαναγκαστικό χαρακτήρα, η επιρροή του έργου της είναι ιδιαίτερα σημαντική και εκτός του κύκλου των νομισματικών και εποπτικών αρχών που συμμετέχουν στη σύνθεσή της. Ειδικότερα:

- Μεγάλο τμήμα του έργου της έχει υιοθετηθεί από τις εποπτικές αρχές πολλών κρατών που δε συμμετέχουν στη σύνθεσή της.
- Το έργο της έχει καθοριστική επίδραση στη διαμόρφωση του κανονιστικού πλαισίου που αφορά την προληπτική εποπτεία των τραπεζών στην ενιαία ευρωπαϊκή αγορά και κατεξοχήν στη θεματική της κεφαλαιακής επάρκειας των τραπεζών.

Συγκεκριμένα, τόσο το αρχικό πλαίσιο όσο και το πλαίσιο που καθιερώθηκε με το νέο Σύμφωνο έχει, με ελάχιστες εξαιρέσεις, ενσωματωθεί πλήρως στην κοινοτική νομοθεσία.

Ειδικότερα, σε συνέχεια της έκδοσης της νέας Συμφωνίας, η Επιτροπή της Βασιλείας, επιδιώκοντας να προσαρμόσει το υφιστάμενο πλαίσιο κατανομής αρμοδιοτήτων και συνεργασίας μεταξύ των τραπεζικών εποπτικών αρχών στις ιδιαιτερότητες του νέου Συμφώνου, δημοσίευσε τα ακόλουθα κείμενα και εκθέσεις:

- «Βασικές αρχές αναφορικά με τη διασυνοριακή εφαρμογή του νέου Συμφώνου» (High-level principles for the cross–border implementation of the New Accord), Αύγουστος 2003,
- «Αρχές για τη συνεργασία των εποπτικών αρχών κατά την πιστοποίηση των εξελιγμένων μεθοδολογιών για τον υπολογισμό κεφαλαιακών απαιτήσεων έναντι του λειτουργικού κινδύνου» (Principles for the home-host recognition of AMA (Advanced Measurement Approach), Ιανουάριος 2004, και
- «Συνεργασία των εποπτικών αρχών των χωρών καταγωγής και υποδοχής για την αποτελεσματική εφαρμογή του νέου πλαισίου» (Home-host information sharing for effective Basel II implementation), Ιούνιος 2006.

Παράλληλα, η Επιτροπή της Βασιλείας έχει δημοσιεύσει μεγάλο αριθμό κειμένων αναφορικά με επιμέρους πτυχές της εφαρμογής του νέου πλαισίου, όπως ενδεικτικά:

- «Αρχές για τη διαχείριση και εποπτεία του κινδύνου εισοδήματος επιτοκίων» (Principles for the management and supervision of interest rate risk), Ιούλιος 2004,
- Έκθεση με τίτλο «Η εφαρμογή του νέου πλαισίου στο χαρτοφυλάκιο συναλλαγών και η μεταχείριση της διπλής αθέτησης υποχρεώσεων» (The Application of Basel II to Trading Activities and the Treatment of Double Default Effects), Ιούλιος 2005,

---

[3] *Bank for International Settlements (January 2001), Secretariat of the Basel Committee on Banking Supervision, The new Basel Capital Accord: an explanatory note.*

- Κατευθυντήριες γραμμές αναφορικά με την «Πιστοποίηση μεθοδολογιών εσωτερικών διαβαθμίσεων σε χαρτοφυλάκια που παρουσιάζουν χαμηλά ποσοστά αθετήσεων» (Validation of low–default portfolios in the Basel II Framework), Σεπτέμβριος 2005,
- «Κατευθυντήριες γραμμές για τις εποπτικές αρχές αναφορικά με τη χρήση της αρχής της αποτίμησης στην εύλογη αξία των χρηματοπιστωτικών μέσων από τα πιστωτικά ιδρύματα» (Supervisory guidance on the use of the fair value option for financial instruments by banks), Ιούνιος 2006,
- «Ορθές πρακτικές προσδιορισμού και αποτίμησης του πιστωτικού κινδύνου στα δάνεια και στον σχηματισμό προβλέψεων έναντι επισφαλών απαιτήσεων» (Sound credit risk assessment and valuation for loans), Ιούνιος 2006,
- «Αρχές εφαρμογής του κριτηρίου της πραγματικής χρησιμοποίησης της μεθόδου των εσωτερικών διαβαθμίσεων» (The IRB Use Test: Background and Implementation), Σεπτέμβριος 2006, και
- «Πρακτικές αναφορικά με τις εξελιγμένες μεθόδους υπολογισμού κεφαλαιακών απαιτήσεων για τον λειτουργικό κίνδυνο» (Observed range of practice in key elements of Advanced Measurement Approaches (AMA), Οκτώβριος 2006.

Αντίστοιχα, σε ευρωπαϊκό επίπεδο, από το Δεκέμβριο του 2004 μέχρι σήμερα, η Επιτροπή Ευρωπαϊκών Αρχών Τραπεζικής Εποπτείας έχει δημοσιεύσει, μεταξύ άλλων, τα εξής κείμενα:

- «Κατευθυντήριες γραμμές εποπτικών προσαρμογών στις συντασσόμενες σύμφωνα με τα ΔΛΠ οικονομικές καταστάσεις των πιστωτικών ιδρυμάτων κατά τον υπολογισμό της κεφαλαιακής επάρκειας», Δεκέμβριος 2004,
- «Κατευθυντήριες γραμμές αναφορικά με τις υποχρεώσεις γνωστοποίησης πληροφοριών από τις εποπτικές αρχές» (Guidelines on supervisory disclosure), Νοέμβριος 2005,
- «Κατευθυντήριες γραμμές αναφορικά με την καθιέρωση ομοιόμορφου πλαισίου υποβολής αναφορών προς τις εποπτικές αρχές για σκοπούς κεφαλαιακής επάρκειας» (Guidelines on common reporting), Ιανουάριος 2006,
- «Κατευθυντήριες γραμμές σχετικά με την εποπτική αναγνώριση των Οργανισμών Αξιολόγησης Πιστοληπτικής Ικανότητας» (Guidelines on the recognition of external credit assessment institutions), Ιανουάριος 2006,
- «Κατευθυντήριες γραμμές σχετικά με την εφαρμογή του δεύτερου πυλώνα του νέου πλαισίου για την κεφαλαιακή επάρκεια» (Guidelines on the Application of the Supervisory Review Process under Pillar 2), Ιανουάριος 2006,
- «Κατευθυντήριες γραμμές σχετικά με την εποπτική αναγνώριση της μεθόδου εσωτερικών διαβαθμίσεων για τον πιστωτικό κίνδυνο (IRB) και της εξελιγμένης μεθόδου για τον λειτουργικό κίνδυνο (AMA)» (Guidelines on validation), Απρίλιος 2006.

Σημαντικές ημερομηνίες για την Επιτροπή της Βασιλείας

Ιούλιος 1988	**«Η Αρχική Συμφωνία»**
Νοέμβριος 1991	Τροποποιήσεις για γενική προσφορά
Ιούλιος 1994	Τροποποίηση για επαναδιάρθρωση του χρέους της χώρας
Απρίλιος 1995	Καθαρές Τροποποιήσεις για παράγωγα
Ιανουάριος 1996	Τροποποιήσεις του κινδύνου της αγοράς
Ιούνιος 1999	Συμβουλευτικό Κείμενο 1 (CP 1)
Ιανουάριος 2002	Συμβουλευτικό Κείμενο 2 (CP 2)
Απρίλιος 2003	Συμβουλευτικό Κείμενο 3 (CP 3)
Ιούνιος 2004	Η τελική νέα Συμφωνία
Τέλος-2006	Εφαρμογή στις G10+3 χώρες
	Εφαρμογή στην EU
	Εφαρμογή στη Σιγκαπούρη

Πηγή: *Bank for International Settlements (January 2001), Secretariat of the Basel Committee on Banking Supervision, The new Basel Capital Accord: an explanatory note.*

I. Η Συμφωνία της Βασιλείας για την Κεφαλαιακή Επάρκεια» (Basel I)

Τον Ιούλιο του 1988, μετά από μια μακρά περίοδο διαβουλεύσεων, η Επιτροπή της Βασιλείας δημοσίευσε το Σύμφωνο της Βασιλείας για την Κεφαλαιακή Επάρκεια με τίτλο «Διεθνής Σύγκληση της Κεφαλαιακής Μέτρησης και των Κεφαλαιακών Προτύπων» (International Convergence of Capital Measurement and Capital Standards) ή Basel I. Το σύμφωνο αυτό (The Accord) αφορούσε στη διεθνή εναρμόνιση των κανόνων της κεφαλαιακής επάρκειας των Πιστωτικών Ιδρυμάτων καθώς και τον πιστωτικό κίνδυνο. Ο ακρογωνιαίος λίθος του Συμφώνου αυτού είναι ο λόγος Cook (Cook ratio), ο οποίος απαιτεί όπως ο λόγος των εποπτικών ιδίων κεφαλαίων RC προς το άθροισμα των σταθμισμένων ως προς τον κίνδυνο στοιχείων του ενεργητικού της τράπεζας, να είναι μεγαλύτερος ή ίσος του 8%:

$$\frac{RC}{\sum_{i=1}^{n} A_i * RW_i} \geq 8\%$$

όπου A_i είναι τα στοιχεία του ενεργητικού και RW_i η αντίστοιχη στάθμιση κινδύνου.

Καθιερώθηκε ως «Συμφωνία της Βασιλείας για την Κεφαλαιακή Επάρκεια» (Basel Capital Accord) ή «Αρχική Συμφωνία», οι διατάξεις της οποίας αναφέρονται:

- στον τρόπο υπολογισμού των κεφαλαιακών απαιτήσεων των Πιστωτικών Ιδρυμάτων για την κάλυψη έναντι της έκθεσής τους στον πιστωτικό κίνδυνο, από τα εντός και εκτός ισολογισμού στοιχεία του ενεργητικού τους[4]
- τον προσδιορισμό των στοιχείων που μπορούν να περιλαμβάνονται στην έννοια των εποπτικών ιδίων κεφαλαίων για τις ανάγκες υπολογισμού της κεφαλαιακής επάρκειας των Πιστωτικών Ιδρυμάτων.

Οι αρχικές αυτές διατάξεις της Συμφωνίας της Βασιλείας, οι οποίες αργότερα ενσωματώθηκαν, συνολικά ή εν μέρει, τόσο στο Κοινοτικό Δίκαιο, όσο και στην Ελληνική Νομοθεσία, καθώς και οι τροποποιήσεις τους, καθορίζουν το πλαίσιο υπολογισμού του Συντελεστή ή Δείκτη Φερεγγυότητας των Πιστωτικών Ιδρυμάτων.

Οι δύο βασικοί σκοποί της «Αρχικής Συμφωνίας» ήταν να εξασφαλίσει ένα επαρκές επίπεδο κεφαλαίου στο διεθνές πιστωτικό σύστημα και να δημιουργήσει ένα πιο ανταγωνιστικό κλάδο έτσι ώστε τα πιστωτικά ιδρύματα να μην μπορούν να αναπτυχθούν επιχειρηματικά χωρίς επαρκή κεφαλαιακή υποστήριξη. Οι δυο αυτοί στόχοι επιτεύχθηκαν. Η Βασιλεία Ι δίνει τη δυνατότητα στις τράπεζες, μέσω των τιτλοποιήσεων στοιχείων όπου δεν υπάρχει αντιστοίχιση του οικονομικού και του εποπτικού κινδύνου (π.χ. στεγαστικά δάνεια), να προβαίνουν σε μείωση των απασχολούμενων κεφαλαίων χωρίς αντίστοιχη μείωση του οικονομικού κινδύνου (regulatory arbitrage).

Τα πλεονεκτήματα της Συμφωνίας αναγνωρίστηκαν ευρύτατα και κατά τη διάρκεια του 1990 η Συμφωνία έγινε παγκόσμια αποδεκτή με περισσότερες από 100 χώρες να εφαρμόσουν το πλαίσιο της Βασιλείας Ι στο πιστωτικό τους σύστημα. Μέχρι τον Ιανουάριο του 1993, η νομοθεσία αυτή είχε εφαρμοστεί από όλες τις χώρες. Ωστόσο, η «Αρχική Συμφωνία» τροποποιήθηκε και συμπληρώθηκε πολλές φορές με σημαντικότερη τροποποίηση εκείνη του 1996 προκειμένου να συμπεριληφθούν και οι κίνδυνοι αγοράς. Το Σύμφωνο της Βασιλείας για την Κεφαλαιακή Επάρκεια ξεπεράστηκε με τον καιρό από τις εξελίξεις στο τραπεζικό τομέα και έπαυσε να ανταποκρίνεται αποτελεσματικά στους κινδύνους στους οποίους εκτίθενται οι τράπεζες.

ΙΙ. Η νέα Συμφωνία για την Κεφαλαιακή Επάρκεια (Basel II)

Τον Ιούνιο του 1999 η Επιτροπή της Βασιλείας εξέδωσε το πρώτο Συμβουλευτικό Κείμενο (Consultive Paper 1) ώστε να αντικαταστήσει την «Αρχική Συμφωνία» του 1988 με το νέο πλαίσιο Κεφαλαιακής Επάρκειας. Το κείμενο αυτό δέχτηκε περισσότερα από 200 σχόλια. Διαχειριζόμενη αυτά τα σχόλια και τα αποτελέσματα του συνεχιζόμενου διαλόγου με τα χρηματοπιστωτικά ιδρύματα, η Επιτροπή της Βασιλείας δημοσίευσε το δεύτερο Συμβουλευτικό Κείμενο

---

4 *Κυριακόπουλος Π., Γκόρτσος Χ., Χαραλαμπίδης Μ., Καπόπουλος Π., Δραγγιώτης Α., Ζαγορήσιος Ν., Μαρίνος Γ., Καρυδιάς Κ., Οικονομική Επιθεώρηση, «Τραπεζικό Αφιέρωμα: Το νέο πλαίσιο κεφαλαιακής επάρκειας των πιστωτικών ιδρυμάτων (Βασιλεία ΙΙ)».*

(Consultive Paper 2) τον Ιανουάριο του 2001. Έτσι, στα τέλη του 2001 η Επιτροπή εξέδωσε τη νέα Συμφωνία για την Κεφαλαιακή Επάρκεια. Ακολούθησαν διαβουλεύσεις και στις 29 Απριλίου 2003 δημοσιεύτηκε το τρίτο Συμβουλευτικό Κείμενο (Consultive Paper 3). Αποτέλεσμα αυτών υπήρξε η αναθεώρηση του πλαισίου για την κεφαλαιακή επάρκεια των τραπεζών με τη δημοσίευση, τον Ιούνιο του 2004, του τελικού κειμένου του νέου πλαισίου γνωστού και ως Βασιλεία II (Basel II: International Convergence of Capital Measurement and Capital Standards: a Revised Framework)[5].

Όπως αναφέρει και η Επιτροπή της Βασιλείας (Basel Committee on Banking Supervision) τον Ιούνιο του 2004:

«Ο πρωταρχικός στόχος της Επιτροπής της Βασιλείας ήταν η ανάπτυξη ενός πλαισίου για την περαιτέρω ενδυνάμωση της σταθερότητας και αξιοπιστίας του διεθνούς τραπεζικού συστήματος εξασφαλίζοντας παράλληλα ότι η αρχή κεφαλαιακής επάρκειας δεν θα αποτελέσει πηγή ανταγωνιστικής ανισότητας μεταξύ Τραπεζών με διεθνή παρουσία. Η Επιτροπή πιστεύει ότι το αναθεωρημένο πλαίσιο θα οδηγήσει στην υιοθέτηση αποτελεσματικότερων πρακτικών διαχείρισης κινδύνων από τον τραπεζικό τομέα, κάτι το οποίο αποτελεί και το πραγματικό όφελος».

Η ασφάλεια και η σταθερότητα του σημερινού δυναμικού και πολυσύνθετου χρηματοοικονομικού συστήματος μπορεί να πραγματοποιηθεί μόνο με τον συνδυασμό της αποτελεσματικής διαχείρισης των πιστωτικών ιδρυμάτων, την πειθαρχία της αγοράς και την εποπτεία. Η Συμφωνία του 1988 εστίαζε στο σύνολο των κεφαλαίων των πιστωτικών ιδρυμάτων, που είναι σημαντικό στη μείωση του ρίσκου χρεοκοπίας των πιστωτικών ιδρυμάτων και στο δυνητικό κόστος της αποτυχίας τους για τους καταθέτες. Πάνω σε αυτό, η νέα Συμφωνία σκόπευε να βελτιώσει την ασφάλεια και την αρτιότητα του οικονομικού συστήματος με το να δώσει περισσότερη έμφαση στον εσωτερικό έλεγχο και τη διαχείριση των χρηματοπιστωτικών ιδρυμάτων, τη διαδικασία εποπτικής αξιολόγησης και την πειθαρχία της αγοράς. Οι βασικοί στόχοι του νέου Συμφώνου συνίστανται στα ακόλουθα:

- απόδοση έμφασης στη διαδικασία εποπτικής εξέτασης και στη διαφάνεια της αγοράς,
- επαρκής κάλυψη του συνόλου των χρηματοοικονομικών και μη κινδύνων, και
- σταδιακή σύγκλιση του ύψους των εποπτικών ιδίων κεφαλαίων προς το οικονομικό κεφάλαιο των τραπεζών, μέσω της αναγνώρισης από τις εποπτικές αρχές της αποτίμησης του κινδύνου που πραγματοποιούν οι ίδιες οι τράπεζες.[6]

Η Βασιλεία II αποτελεί ένα πιο αναλυτικό πλαίσιο για τον πιστωτικό και τον λειτουργικό κίνδυνο των χρηματοπιστωτικών ιδρυμάτων καθώς και για τον κίνδυνο επιτοκίου και τον κίνδυνο αγοράς. Επιπλέον, παρέχει εναλλακτικές δυνα-

---

[5] *Bank for International Settlements (January 2001), Secretariat of the Basel Committee on Banking Supervision, The new Basel Capital Accord: an explanatory note.*

[6] *Κυριακόπουλος Π., Γκόρτσος Χ., Χαραλαμπίδης Μ., Καπόπουλος Π., Δραγγιώτης Α., Ζαγορήσιος Ν., Μαρίνος Γ., Καρυδιάς Κ., Οικονομική Επιθεώρηση, «Τραπεζικό Αφιέρωμα: Το νέο πλαίσιο κεφαλαιακής επάρκειας των πιστωτικών ιδρυμάτων (Βασιλεία II)».*

τότητες που ταιριάζουν στα χρηματοπιστωτικά ιδρύματα και τα συστήματα αυτών με διαφορετικά μεγέθη και διαφορετικά επίπεδα εξέλιξης. Αντιμετωπίζει το θέμα του regulatory arbitrage με εφαρμογή οικονομικά ακριβέστερων συντελεστών κινδύνου και εισάγει συγκεκριμένο πλαίσιο προκειμένου να κάνει αποδεκτό ότι η μεταβιβάζουσα τράπεζα έχει μεταφέρει τον κίνδυνο και δικαιούται μείωση των απαιτούμενων κεφαλαίων. Παρόλο που το νέο πλαίσιο εστιάζεται κατά κύριο λόγο στα διεθνή χρηματοπιστωτικά ιδρύματα, οι αρχές που διέπει σκοπεύουν να είναι κατάλληλες για εφαρμογή σε χρηματοπιστωτικά ιδρύματα ποικίλλων επιπέδων πολυπλοκότητας και εκζήτησης. Η Επιτροπή της Βασιλείας συσκέφθηκε με επόπτες παγκοσμίως ώστε να αναπτύξει τη νέα Συμφωνία και αναμένει η νέα Συμφωνία να τεθεί σε εφαρμογή από όλα τα αξιοσημείωτα χρηματοπιστωτικά ιδρύματα μέσα σε ένα συγκεκριμένο χρονικό διάστημα.[7]

Η Συμφωνία του 1988 παρείχε ουσιαστικά μόνο μια επιλογή για τη μέτρηση του κατάλληλου κεφαλαίου για τα διεθνώς ενεργά χρηματοπιστωτικά ιδρύματα. Όμως ο καλύτερος τρόπος για να μετρηθούν, να διαχειριστούν και να αμβλυνθούν οι κίνδυνοι, διαφέρει από το ένα χρηματοπιστωτικό ίδρυμα στο άλλο. Σε αντίθεση με το αρχικό, το νέο πλαίσιο παρέχει ένα φάσμα προσεγγίσεων από απλές μέχρι προχωρημένες μεθοδολογίες για τη μέτρηση τόσο του πιστωτικού όσο και του λειτουργικού κινδύνου για τον καθορισμό των επιπέδων κεφαλαίου. Παρέχει επιπλέον μια ευέλικτη δομή από την οποία τα χρηματοπιστωτικά ιδρύματα, τα οποία εποπτεύονται, θα υιοθετήσουν τις προσεγγίσεις που ταιριάζουν τέλεια στη στρατηγική τους και στο προφίλ του κινδύνου τους. Η νέα συμφωνία προβλέπει επίσης πιο δυνατή και επαρκής μέτρηση του κινδύνου. Η Βασιλεία ΙΙ παρέχει προσεγγίσεις πιο αναλυτικές και πιο ευαίσθητες στον κίνδυνο από τη Βασιλεία Ι, ενώ διατηρεί ολόκληρο το επίπεδο του ρυθμιζόμενου κεφαλαίου. Η κεφαλαιακή επάρκεια σύμφωνα με τη νέα συμφωνία επιτρέπει στα χρηματοπιστωτικά ιδρύματα να λειτουργούν με μεγαλύτερη αποδοτικότητα. Επίσης, η νέα Συμφωνία είναι λιγότερο ρυθμιστική από την Αρχική Συμφωνία. Ωστόσο, το πλαίσιο είναι κάπως πιο περίπλοκο από το παλιό, αλλά προσφέρει μια γκάμα προσεγγίσεων για τα χρηματοπιστωτικά ιδρύματα που τα θέτει ικανά να χρησιμοποιήσουν πιο αναλυτικές μεθοδολογίες και με μεγαλύτερη ευαισθησία στον κίνδυνο. Οι μεθοδολογίες αυτές απαιτούν αναπόφευκτα περισσότερη λεπτομέρεια στην εφαρμογή τους και συνεπώς ένα μεγαλύτερο βιβλίο κανόνων.[8]

---

7 *www.elearn.elke.gr, Σύμφωνο της Βασιλείας Ι*

8 *Bank for International Settlements (January 2001), Secretariat of the Basel Committee on Banking Supervision, The new Basel Capital Accord: an explanatory note.*

Οι δύο Συμφωνίες της Επιτροπής της Βασιλείας

Η Αρχική Συμφωνία	**Η νέα Συμφωνία**
Εστίαση σε μια μέτρηση κινδύνου	Περισσότερη έμφαση στις εσωτερικές μεθοδολογίες των χρηματοπιστωτικών ιδρυμάτων, στην εποπτική αξιολόγηση και την πειθαρχία της αγοράς
Οι εποπτικοί κανόνες είναι ίδιοι για όλους	Ευελιξία, ποικιλία προσεγγίσεων, κίνητρα για καλύτερη διαχείριση κινδύνου
Δομή "Broad Brush"	Μεγαλύτερη ευαισθησία σχετικά με τον κίνδυνο

Πηγή: *Bank for International Settlements (January 2001), Secretariat of the Basel Committee on Banking Supervision, The new Basel Capital Accord: an explanatory note.*

Η νέα Συμφωνία αποτελείται από τρεις πυλώνες, οι οποίοι μαζί συμβάλλουν στην ασφάλεια και στη σταθερότητα του χρηματοοικονομικού συστήματος. Το πλαίσιο αυτό προσφέρει μία προσέγγιση περισσότερο προσαρμοσμένη στη φύση των αναλαμβανόμενων κινδύνων, ενισχύοντας τη διαχείριση του κινδύνου από τα χρηματοπιστωτικά ιδρύματα, το οποίο θα έχει σαν αποτέλεσμα τη σταθερότητα του χρηματοπιστωτικού συστήματος, και την ενίσχυση της προστασίας του καταναλωτή, καθώς επίσης θα εμπνεύσει εμπιστοσύνη στα χρηματοπιστωτικά ιδρύματα. Η Επιτροπή της Βασιλείας τονίζει την ανάγκη για αυστηρή εφαρμογή και των τριών πυλώνων και σχεδιάζει να συνεργαστεί ενεργά με εποπτικούς φορείς ώστε να επιτύχει την αποτελεσματική εφαρμογή όλων των διαστάσεων της Βασιλείας ΙΙ.

Οι τρεις πυλώνες είναι οι εξής:

- Υπολογισμός ελάχιστων κεφαλαιακών υποχρεώσεων έναντι του πιστωτικού κινδύνου –με την προσθήκη απαιτήσεων για κάλυψη έναντι του λειτουργικού κινδύνου (Πυλώνας Ι),
- Διαδικασία εποπτικής αξιολόγησης (supervisory review process). (Πυλώνας ΙΙ), και
- Ενίσχυση της πειθαρχίας που επιβάλλει η αγορά στις τράπεζες μέσω της καθιέρωσης κανόνων γνωστοποίησης οικονομικών και άλλων στοιχείων (Πυλώνας ΙΙΙ).[9]

---

9 *Bank for International Settlements (January 2001), Secretariat of the Basel Committee on Banking Supervision, The new Basel Capital Accord: an explanatory note.*

i. Πρώτος Πυλώνας: Ελάχιστες κεφαλαιακές απαιτήσεις (minimum capital requirements)

Στη νέα Συμφωνία ο ορισμός των ιδίων κεφαλαίων, οι ελάχιστες απαιτήσεις του 8% των ιδίων κεφαλαίων σε σχέση με το σταθμισμένο ενεργητικό και οι διατάξεις αναφορικά με την εποπτική μεταχείριση των κινδύνων αγοράς παραμένουν αμετάβλητες. Η κύρια διαφοροποίησή της με την Αρχική Συμφωνία έγκειται στην μέτρηση του πιστωτικού κινδύνου περιλαμβανομένης και της εποπτικής αντιμετώπισης των μέσων και τεχνικών μείωσης του εν λόγω κινδύνου, καθώς και στην καθιέρωση επιπρόσθετων κεφαλαιακών απαιτήσεων για τον λειτουργικό κίνδυνο. Οι απαιτήσεις για τους διάφορους κινδύνους προστίθενται και ο περιορισμός που πρέπει να ικανοποιεί η τράπεζα γίνεται:

$$RC \geq MRCR(\text{credit}) + MRCR(\text{market}) + MRCR(\text{operational}) =$$

$$8\% * \sum_{i=1}^{n} RWA_i(\text{SF}) + MRCR(\text{market}) + MRCR(\text{operational})$$

όπου RWA τα σταθμισμένα ως προς τον κίνδυνο περιουσιακά στοιχεία της τράπεζας, RC τα εποπτικά κεφάλαια, $MRCR$ είναι η απαίτηση για ελάχιστα εποπτικά ίδια κεφάλαια. Ο πιστωτικός κίνδυνος RWA επαυξήθηκε με τον παράγοντα $SF = 1.06$. Εναλλακτικά, αφού 1 / (8%) = 12,5, τότε:

$$\frac{RC}{\sum_{i=1}^{n} RWA_i(\text{SF}) + 12.5 * MRCR(\text{market}) + 12.5 * MRCR(\text{operationl})} \geq 8\%$$

Για τη μέτρηση του **πιστωτικού κινδύνου** παρέχονται δύο κύριες εναλλακτικές μέθοδοι: α) η τυποποιημένη μέθοδος (standardised), όπου οι συντελεστές στάθμισης προσδιορίζονται με βάση τις διαβαθμίσεις οργανισμών αξιολόγησης πιστοληπτικής ικανότητας και β) η μέθοδος των εσωτερικών διαβαθμίσεων (Internal ratings–based), όπου τα χρηματοπιστωτικά ιδρύματα μπορούν με βάση εσωτερικές εκτιμήσεις της πιστοληπτικής ικανότητας των πιστούχων να εκτιμήσουν τον πιστωτικό κίνδυνο. Για κάποιες κατηγορίες ανοιγμάτων παρέχονται δύο εναλλακτικές, η βασική προσέγγιση (Foundation) και η εξελιγμένη προσέγγιση (Advanced) των εσωτερικών διαβαθμίσεων.[10]

Η τυποποιημένη μέθοδος (standardised approach)

Η τυποποιημένη μέθοδος είναι εννοιολογικά η ίδια με αυτή της Αρχικής Συμφωνίας, αλλά έχει μεγαλύτερη ευαισθησία ως προς τον κίνδυνο. Το χρηματοπιστωτικό ίδρυμα προσδιορίζει μια στάθμιση κινδύνου για κάθε περιουσιακό του στοιχείο και παράγει ένα σύνολο από τις αξίες αυτών των σταθμισμένων περιουσιακών στοι-

[10] *Bank for International Settlements (January 2001), Secretariat of the Basel Committee on Banking Supervision, The new Basel Capital Accord: an explanatory note.*

χείων. Μια στάθμιση κινδύνου 100% σημαίνει ότι μια έκθεση στον κίνδυνο περιλαμβάνεται στον υπολογισμό της αξίας των περιουσιακών στοιχείων που σταθμίζονται με βάση τον κίνδυνο, το οποίο σημαίνει έναν δείκτη κεφαλαιακής επάρκειας ίσο με το 8% αυτής της αξίας. Όμοια, μια στάθμιση κινδύνου της τάξης του 20% έχει σαν αποτέλεσμα έναν δείκτη κεφαλαιακής επάρκειας ίσο με 1.6% (το 1/5 του 8%). Με τη νέα Συμφωνία, οι σταθμίσεις κινδύνου τελειοποιούνται με την αναφορά μιας διαβάθμισης που παρέχεται από ένα εξωτερικό πιστωτικό ίδρυμα, το οποίο τηρεί αυστηρούς κανόνες. Για παράδειγμα, όσον αφορά τον επιχειρησιακό δανεισμό, η Αρχική Συμφωνία παρείχε μόνο μια κατηγορία στάθμισης κινδύνου της τάξης 100% ενώ η νέα Συμφωνία παρέχει τέσσερις κατηγορίες (20%, 50%, 100% και 150%).[11]

Η μέθοδος των εσωτερικών διαβαθμίσεων (Internal ratings–based)

Με τη μέθοδο των εσωτερικών διαβαθμίσεων (IRB) τα χρηματοπιστωτικά ιδρύματα έχουν τη δυνατότητα να χρησιμοποιήσουν τις εσωτερικές τους εκτιμήσεις για τη φερεγγυότητα του δανειολήπτη ώστε να αξιολογήσουν τον πιστωτικό κίνδυνο στα χαρτοφυλάκιά τους, σύμφωνα με τα αυστηρά μεθοδολογικά και γνωστοποιημένα πρότυπα. Επιπλέον, ένα χρηματοπιστωτικό ίδρυμα εκτιμά τη φερεγγυότητα κάθε δανειολήπτη και τα αποτελέσματα μεταφράζονται σε εκτιμήσεις μιας ενδεχόμενης μελλοντικής απώλειας ποσού, που διαμορφώνει τη βάση των ελάχιστων κεφαλαιακών απαιτήσεων.[12] Το πλαίσιο επιτρέπει τόσο μια βασική μέθοδο όσο και περισσότερο προχωρημένες μεθοδολογίες για επιχειρησιακές, κυρίαρχες και χρηματοπιστωτικές εκθέσεις. Με τη βασική και τις προχωρημένες μεθόδους εσωτερικών διαβαθμίσεων, το εύρος των σταθμίσεων κινδύνου είναι πολύ πιο ποικίλο από αυτά της τυποποιημένης μεθόδου, με αποτέλεσμα μεγαλύτερη ευαισθησία στον κίνδυνο. Η μέθοδος των εσωτερικών διαβαθμίσεων βασίζεται στην εσωτερική αξιολόγηση των ομολόγων και των εκθέσεων των χρηματοπιστωτικών ιδρυμάτων. Βασίζεται σε τρία βασικά στοιχεία:

- τις παραμέτρους του πιστωτικού κινδύνου,
- τη λειτουργία της στάθμισης κινδύνου,
- τις ελάχιστες απαιτήσεις[13].

Όσον αφορά τον **λειτουργικό κίνδυνο**, η Επιτροπή τον προσδιορίζει ως εξής: «Ο κίνδυνος άμεσης απώλειας που είναι αποτέλεσμα των ανεπαρκών ή αποτυχημένων εσωτερικών διαδικασιών, των ανθρώπων, των συστημάτων ή των εξωτερικών γεγονότων». Περιλαμβάνει τον νομικό κίνδυνο, αλλά αποκλείει, τουλάχιστον στο επίπεδο του Πυλώνα 1, τον κίνδυνο στρατηγικής (strategic risk) και φήμης (reputation risk) καθώς και τις έμμεσες απώλειες, διότι είναι πολύ δύσκολο να αξιολογηθούν και να ποσοτικοποιηθούν σε μια γενική διεθνώς εναρμονι-

[11] *www.elearn.elke.gr, Σύμφωνο της Βασιλείας Ι*

[12] *www.elearn.elke.gr, Σύμφωνο της Βασιλείας Ι*

[13] *Bank for International Settlements (January 2001), Secretariat of the Basel Committee on Banking Supervision, The new Basel Capital Accord: an explanatory note.*

σμένη βάση. Παρά το ότι ο λειτουργικός κίνδυνος δεν προκύπτει στο μεγαλύτερό του βαθμό από την διάθεση της τράπεζας να αναλάβει επιπλέον ρίσκο προκειμένου να αποκομίσει κέρδη, εντούτοις η Επιτροπή της Βασιλείας τον συμπεριέλαβε στον Πυλώνα Ι (μαζί με τον κίνδυνο αγοράς και τον πιστωτικό κίνδυνο) και όχι στον Πυλώνα ΙΙ της νέας συνθήκης, γεγονός που φανερώνει την σημασία που προσδίδεται στην αντιμετώπισή του.

Ο λειτουργικός κίνδυνος επηρεάζει κυρίως τις επιχειρηματικές δραστηριότητες που παρουσιάζουν μεγάλο όγκο συναλλαγών, πολυπλοκότητα και μεγάλες διαρθρωτικές αλλαγές. Η διαχείριση του λειτουργικού κινδύνου είναι αναγκαία για τα χρηματοπιστωτικά ιδρύματα καθώς ο λειτουργικός κίνδυνος είναι συνυφασμένος με όλο το φάσμα των καθηκόντων ενός χρηματοοικονομικού ομίλου.[14] Τις τελευταίες δεκαετίες, ορισμένα χρηματοπιστωτικά ιδρύματα ενσωματώνουν τη δημιουργία ενός καλά οργανωμένου συστήματος διαχείρισης λειτουργικού κινδύνου, προκειμένου να αυξήσουν τη λειτουργική τους αποτελεσματικότητα και να μειώσουν την διακύμανση της κερδοφορίας τους εξαιτίας των ζημιών που προέρχονται από λειτουργικό κίνδυνο.

Στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζονται οι τύποι λειτουργικού κινδύνου:

Fig 1: Types of Operational Risk

Πηγή: *Deloitte (2006)*

Για τη μέτρησή του χρησιμοποιούνται: α) η τυποποιημένη μέθοδος (standardised approach), β) η εξελιγμένη μέθοδος (Advanced measurement approach) και

[14] *Καλύβας Λ., Τσικριπής Ι., Workimg Paper, Θέμα: «Διαχείριση Λειτουργικού Κινδύνου στα πλαίσια της νέας συνθήκης της Βασιλείας», Τράπεζα της Ελλάδος (2007).*

γ) η μέθοδος βασικού δείκτη (Basic Indicator approach). Η *τυποποιημένη μέθοδος* καθορίζει διαφορετικούς μετρητές για διαφορετικές επιχειρησιακές γραμμές και σε αυτήν προτείνεται εξειδίκευση των συντελεστών κατά τραπεζική δραστηριότητα και χρήση διαφορετικών οικονομικών δεικτών κατά περίπτωση. Η *εξελιγμένη μέθοδος* απαιτεί τα χρηματοπιστωτικά ιδρύματα να χρησιμοποιούν την απώλεια των εσωτερικών τους δεδομένων στην εκτίμηση του απαιτούμενου κεφαλαίου. Σύμφωνα με την προσέγγιση αυτή, τα χρηματοπιστωτικά ιδρύματα υπολογίζουν τις κεφαλαιακές απαιτήσεις με βάση τη δική τους μεθοδολογία αποτίμησης λειτουργικών κινδύνων.[15] Για να υιοθετηθεί και να εφαρμοσθεί η μεθοδολογία ΑΜΑ θα πρέπει να εκπληρώνονται μια σειρά από ποιοτικά και ποσοτικά κριτήρια. όπως το ότι η βάση πρέπει να διαθέτει ιστορικά στοιχεία τουλάχιστον τριών ετών για την αρχική εφαρμογή της ΑΜΑ και πέντε ετών στη συνέχεια. Οι κεφαλαιακές απαιτήσεις των χρηματοπιστωτικών ιδρυμάτων που εφαρμόζουν τη μέθοδο εσωτερικής μέτρησης δεν μπορούν να είναι μικρότερες από το 75% των κεφαλαιακών απαιτήσεων που θα υπολογίζονταν σύμφωνα με την Standardised μέθοδο. Τέλος, η *μέθοδος βασικού δείκτη* χρησιμοποιεί έναν μετρητή λειτουργικού κινδύνου για τη συνολική εργασία ενός χρηματοπιστωτικού ιδρύματος.

Τα χρηματοπιστωτικά ιδρύματα πρέπει να αναγνωρίζουν και να αξιολογούν το ύψος του λειτουργικού κινδύνου που εμπεριέχεται σε όλο το εύρος των προϊόντων, δραστηριοτήτων, διαδικασιών και συστημάτων τους. Τα χρηματοπιστωτικά ιδρύματα πρέπει να διαθέτουν πολιτικές και διαδικασίες για τον έλεγχο και το μετριασμό των σημαντικότερων μορφών λειτουργικού κινδύνου ανάλογα με τη διάθεσή τους να αναλάβουν επιπλέον κίνδυνο. Ταυτόχρονα, θα πρέπει να έχουν σχέδια έκτακτης ανάγκης και συνέχισης της επιχειρηματικής δραστηριότητας προκειμένου να διασφαλίσουν τη συνέχιση των λειτουργιών τους και να ελαχιστοποιήσουν τις πιθανές ζημιές σε περιπτώσεις σοβαρής διατάραξης των συνθηκών ομαλής λειτουργίας τους.[16]

Η Συμφωνία του 1988 έθετε την κεφαλαιακή επάρκεια απλά σε όρους πιστωτικού κινδύνου (ο βασικός κίνδυνος για τα χρηματοπιστωτικά ιδρύματα), παρόλο που όλες οι κεφαλαιακές απαιτήσεις (όπως το 8% ελάχιστο ποσοστό) σκόπευαν να καλύψουν και άλλους κινδύνους. Το 1996 κάποιες εκθέσεις του κίνδυνου αγοράς αποσπάστηκαν και έδωσαν ξεχωριστούς δείκτες κεφαλαιακής επάρκειας. Η Επιτροπή της Βασιλείας στην προσπάθειά της να εξαγάγει μεγαλύτερη ευαισθησία πιστωτικού κινδύνου, εργάστηκε για να αναπτύξει έναν κατάλληλο δείκτη κεφαλαιακής επάρκειας για τον λειτουργικό κίνδυνο. Πολλά μεγάλα χρηματοπιστωτικά ιδρύματα προσδιορίζουν 20% και περισσότερο του εσωτερικού τους κεφαλαίου στον λειτουργικό κίνδυνο.

---

15 *Bank for International Settlements (January 2001), Secretariat of the Basel Committee on Banking Supervision, The new Basel Capital Accord: an explanatory note.*

16 *Καλύβας Λ., Τσικριπής Ι., Workimg Paper, Θέμα: «Διαχείριση Λειτουργικού Κινδύνου στα πλαίσια της νέας συνθήκης της Βασιλείας», Τράπεζα της Ελλάδος.*

Όσον αφορά τα χρηματοπιστωτικά ιδρύματα, αυτά επιλέγουν μέθοδο αξιολόγησης του λειτουργικού κινδύνου ανάλογα με τις εσωτερικές τους διαδικασίες και τα τεχνολογικά μέσα που διαθέτουν. Όμως, ενθαρρύνονται να κινηθούν προς την υιοθέτηση των πιο περισσότερο εξελιγμένων μεθόδων όσο περισσότερο αναβαθμίζουν τις εσωτερικές τους διαδικασίες και τα συστήματα αποτίμησης λειτουργικού κινδύνου. Η μέθοδος που θα επιλέγεται θα πρέπει να αντιστοιχεί στη συνθετότητα των δραστηριοτήτων τους και να σχετίζεται άμεσα με τα συστήματα εσωτερικού ελέγχου. Και, τέλος, επιτρέπεται η χρησιμοποίηση διαφορετικών μεθόδων για διαφορετικές μονάδες δραστηριότητας.[17]

Η Επιτροπή αναμένει ο λειτουργικός κίνδυνος να αποτελεί το 20% των κεφαλαιακών απαιτήσεων με τη νέα Συμφωνία. Επίσης, η Επιτροπή πιστεύει ότι λόγω της ανάπτυξης των εργασιών των χρηματοπιστωτικών ιδρυμάτων όπως η ασφάλεια και το outsourcing, η εξάρτηση από τη διαρκώς αναπτυσσόμενη τεχνολογία και τα πολύπλοκα οικονομικά προϊόντα κάνουν το λειτουργικό κίνδυνο να είναι ιδιαίτερα σημαντικός.

Ο δείκτης κεφαλαιακής επάρκειας ενός χρηματοπιστωτικού ιδρύματος, βάσει και της Βασιλείας ΙΙ, συμπεριλαμβάνει πλέον και ελάχιστες κεφαλαιακές απαιτήσεις έναντι του λειτουργικού κινδύνου (operational risk) που αναλαμβάνει ένα πιστωτικό ίδρυμα.

Εποπτικά ίδια κεφάλαια / credit risk + market risk + operational risk = δείκτης κεφαλαιακής επάρκειας (το ελάχιστο είναι 8%)

Οι κεφαλαιακές απαιτήσεις έναντι του λειτουργικού κινδύνου θα είναι περίπου το 12% των συνολικών κεφαλαιακών απαιτήσεων.

Οι εποπτικές αρχές οφείλουν να παρακολουθούν την επάρκεια των συστημάτων διαχείρισης κινδύνου, την ποιότητα της εταιρικής διακυβέρνησης, την έκθεση κινδύνων, την κεφαλαιακή επάρκεια, τη ρευστότητα, τις λογιστικές αρχές και την ποιότητα κερδοφορίας ενός χρηματοπιστωτικού κινδύνου. Με αυτό τον τρόπο, θα έχουν τη δυνατότητα να επιβάλλουν σε κάθε χρηματοπιστωτικό ίδρυμα τις ελάχιστες κεφαλαιακές απαιτήσεις, οι οποίες θα μπορούν να είναι και υψηλότερες από το ελάχιστο όριο των 8%, ανάλογα με την εκτιμώμενη έκθεση κινδύνου του χρηματοπιστωτικού ιδρύματος.[18]

[17] *Bank for International Settlements (January 2001), Secretariat of the Basel Committee on Banking Supervision, The new Basel Capital Accord: an explanatory note.*

[18] *Bank for International Settlements (January 2001), Secretariat of the Basel Committee on Banking Supervision, The new Basel Capital Accord: an explanatory note.*

ii. Δεύτερος Πυλώνας: Η διαδικασία εποπτικής αξιολόγησης (supervisory review process)

Το μέρος αυτό του πλαισίου εισάγει γενικές αρχές τέτοιες ώστε να διασφαλίζεται η κεφαλαιακή επάρκεια των χρηματοπιστωτικών ιδρυμάτων πέραν των μηχανισμών του πρώτου πυλώνα. Τα χρηματοπιστωτικά ιδρύματα θα πρέπει να διαθέτουν σύστημα εκτίμησης κεφαλαιακής επάρκειας και να καθορίζουν τα κεφάλαια που απαιτούνται για την κάλυψη των κινδύνων που αναλαμβάνουν. Οι εποπτικές αρχές αξιολογούν τους κινδύνους καθώς και τις διαδικασίες παρακολούθησης και μέτρησης αυτών και δύνανται να απαιτούν πρόσθετες κεφαλαιακές απαιτήσεις στις περιπτώσεις όπου δεν υπάρχει πλήρης συμμόρφωση με τις διατάξεις του πρώτου Πυλώνα ή κάποιοι κίνδυνοι που δεν αντιμετωπίζονται από τον πρώτο πυλώνα, δεν έχουν καλυφθεί επαρκώς με κεφάλαια από τα χρηματοπιστωτικά ιδρύματα. Το νέο πλαίσιο τονίζει τη σπουδαιότητα της διαχείρισης των χρηματοπιστωτικών ιδρυμάτων στο να αναπτύξουν μια εσωτερική διαδικασία αξιολόγησης κεφαλαίου και στο να θέσουν στόχους για το κεφάλαιο που να είναι ανάλογοι με το προφίλ κινδύνου κάθε χρηματοπιστωτικού ιδρύματος και τον έλεγχο περιβάλλοντος. Η εσωτερική διαδικασία θα είναι σύμφωνη με την εποπτική αξιολόγηση και παρέμβαση, όπου είναι απαραίτητο.[19]

Οι γενικές αρχές που διέπουν το μέρος αυτό της νέας Συμφωνίας είναι: α) τα χρηματοπιστωτικά ιδρύματα θα πρέπει να έχουν διαδικασία εκτίμησης της συνολικής κεφαλαιακής τους επάρκειας σε σχέση με τους κινδύνους που αναλαμβάνουν ανάλογα με την στρατηγική τους, β) οι εποπτικές αρχές πρέπει να αξιολογούν τις εσωτερικές εκτιμήσεις των χρηματοπιστωτικών ιδρυμάτων αναφορικά με την κεφαλαιακή επάρκεια και την στρατηγική τους καθώς επίσης και την ικανότητα τους να παρακολουθούν και να συμμορφώνονται με τις διατάξεις που αφορούν τον δείκτη κεφαλαιακής επάρκειας καθώς και να λαμβάνουν τα απαραίτητα μέτρα εφόσον δεν είναι ικανοποιημένες με το αποτέλεσμα της σχετικής διαδικασίας, γ) Το κεφάλαιο των χρηματοπιστωτικών ιδρυμάτων θα πρέπει να βρίσκεται πάνω από τα ρυθμιζόμενα ελάχιστα και δ) Να παρέχεται η δυνατότητα παρέμβασης των εποπτικών αρχών (δηλαδή άμεση διορθωτική ενέργεια) όπου απαιτείται. Οι δύο κύριες προκλήσεις που υπάρχουν είναι:

- Η επάρκεια των ανθρώπινων πόρων στις εποπτικές αρχές.
- Η συνέπεια στη διαδικασία εφαρμογής των νέων κανόνων.

Στη νέα Συμφωνία γίνεται η αναφορά των δύο πυλώνων γιατί η προσέγγιση της κεφαλαιακής επάρκειας μέσω των απλών σταθμίσεων κινδύνων δεν ήταν αρκετή για να ικανοποιήσει τους βασικούς στόχους της Επιτροπής, οι οποίοι είναι η προώθηση της ασφάλειας και της σταθερότητας του χρηματοοικονομικού συστήματος. Μία βασική αδυναμία του πρώτου Συμφώνου της Βασιλείας ήταν ότι οι σταθμίσεις πιστωτικού κινδύνου ήταν απλές, με συνέπεια να υπάρχει ευκαιρία για «arbitrage» επί των εποπτικών ιδίων κεφαλαίων από μέρους τραπεζών.

---

[19] *www.elearn.elke.gr, Σύμφωνο της Βασιλείας Ι*

Οι ελάχιστες κεφαλαιακές απαιτήσεις αποτελούν την βασική μεθοδολογία όπως καταγράφεται στην Αρχική Συμφωνία, με επιπλέον ένα σύνολο προσθηκών και νέων επιλογών. Τα χρηματοπιστωτικά ιδρύματα θα είναι σε θέση να εφαρμόσουν και να ακολουθήσουν τους νέους κανόνες δημιουργώντας ένα εσωτερικό σύστημα μετρήσεως του πιστωτικού κινδύνου, το οποίο θα αναγνωριστεί από τις εποπτικές αρχές. Ο ορισμός των εποπτικών ιδίων κεφαλαίων δεν υφίσταται καμία αλλαγή, όπως επίσης και οι σταθμίσεις του πιστωτικού κινδύνου ορίζονται ανά κατηγορία οφειλέτου. Όσον αφορά στις σταθμίσεις έναντι κεντρικών κυβερνήσεων και τραπεζών, πλέον βασίζονται στις διαβαθμίσεις εξωτερικών εταιρειών πιστοληπτικής αξιολογήσεως. Επίσης, οι διαβαθμίσεις των εξωτερικών εταιριών πιστοληπτικής αξιολόγησης μπορούν να εφαρμοστούν με ανάλογο τρόπο και στη στάθμιση πιστωτικών κινδύνων που προέρχονται από τον τραπεζικό και επιχειρηματικό χώρο. Επιπλέον, εισάγονται νέοι κανόνες που στην προηγούμενη Συμφωνία δεν υπήρχαν και αφορούν την κάλυψη σταθμίσεων επί των τιτλοποιήσεων στοιχείων ενεργητικού καθώς επίσης και βραχυπρόθεσμες υποχρεώσεις που υπόκεινται σε κεφαλαιακή απαίτηση. Ο ορισμός των βραχυπρόθεσμων διατραπεζικών τοποθετήσεων είναι πλέον 3 μήνες.[20]

Πέρα από τις αλλαγές στη βασική μεθοδολογία έγιναν και νέες ρυθμίσεις, που αφορούν κυρίως την πρόληψη και τη μέτρηση των πιστωτικών κινδύνων. Μέσα από την αναθεωρημένη Συμφωνία δίνεται η δυνατότητα στα χρηματοπιστωτικά ιδρύματα να αναπτύξουν εσωτερικά συστήματα αξιολόγησης του πιστωτικού κινδύνου σε διάφορα επίπεδα πολυπλοκότητας, ώστε να επιτευχθεί ακριβέστερη στάθμιση κινδύνου με την έγκριση των εποπτικών αρχών. Η εφαρμογή αυτών των εισηγήσεων απαιτεί έναν πολύ πιο λεπτομερή διάλογο ανάμεσα στις εποπτικές αρχές και τα χρηματοπιστωτικά ιδρύματα. Με τη σειρά του αυτό έχει επιπτώσεις στην εκπαίδευση και την εξειδίκευση των εποπτικών αρχών των χρηματοπιστωτικών ιδρυμάτων, όπου η Επιτροπή της Βασιλείας και το Ινστιτούτο Οικονομικής Σταθερότητας της Τράπεζας Διεθνών Διακανονισμών θα παρέχει βοήθεια.[21]

Ο δεύτερος πυλώνας της Συμφωνίας της Βασιλείας στοχεύει να ενθαρρύνει την τήρηση υψηλών προδιαγραφών στη διαφάνεια και παρουσίαση των αναλαμβανόμενων κινδύνων. Όσα χρηματοπιστωτικά ιδρύματα εκτιμάται στην αγορά ότι ανήκουν σε υψηλού κινδύνου ιδρύματα ή έχουν ανεπαρκές σύστημα διαχείρισης κινδύνων, θα τους επιβάλλονται κυρώσεις μέσω υψηλότερων περιθωρίων επιτοκίου στον δανεισμό και στο εκδιδόμενο χρέος. Η διαφάνεια των στοιχείων είναι υποχρεωτική, και επικεντρώνεται σε συγκεκριμένους τομείς. Αυτοί αφορούν κυρίως στοιχεία για την κεφαλαιακή επάρκεια και τη σύνθεση των εποπτι-

---

[20] *Daniele Nouy, Secretary General of the Basel Committee, Basel Committee on Banking Supervision (January 2003), The Changing role of non-Financial risk, UNEP Finance Initiatives.*

[21] *Bank for International Settlements (January 2001), Secretariat of the Basel Committee on Banking Supervision, The new Basel Capital Accord: an explanatory note.*

κών ιδίων κεφαλαίων, την αναλυτική παρουσίαση των εκθέσεων σε κίνδυνο ανά προϊόν και την διαφάνειες των διαδικασιών διαχείρισης κινδύνων.[22]

iii. Τρίτος Πυλώνας: Πειθαρχία της αγοράς (market discipline)

Ο τρίτος πυλώνας εισάγει διατάξεις αναφορικά με την παρεχόμενη από τα χρηματοπιστωτικά ιδρύματα προς το εξωτερικό πληροφόρηση για το ύψος των αναλαμβανομένων κινδύνων, τις κεφαλαιακές απαιτήσεις έναντι των κινδύνων αυτών και την ακολουθούμενη στρατηγική προκειμένου μέσω της διαφάνειας (disclosure) να ενισχυθεί η πειθαρχία της αγοράς. Η καλή ρύθμιση και εποπτεία δεν είναι αρκετές για να διασφαλίσουν ένα εύρωστο και αποδοτικό χρηματοοικονομικό /χρηματοπιστωτικό περιβάλλον. Οι προσπάθειες των ρυθμιστών και των εποπτών είναι απαραίτητο να συμπληρωθούν από την πειθαρχία της αγοράς.

Οι τεχνικές μεταβιβάσεως και οι πρακτικές μετρήσεως των πιστωτικών κινδύνων που προέρχονται από σύνθετα χρηματοοικονομικά εργαλεία, όπως είναι τα credit derivatives, swap options, καθώς επίσης και από τιτλοποιήσεις ενεργητικού, απεικονίζονται πληρέστερα με μεγαλύτερη προσοχή. Παράλληλα αυξάνεται το φάσμα των εξασφαλίσεων έναντι κινδύνων και οι εγγυήσεις έναντι απαιτήσεων.[23]

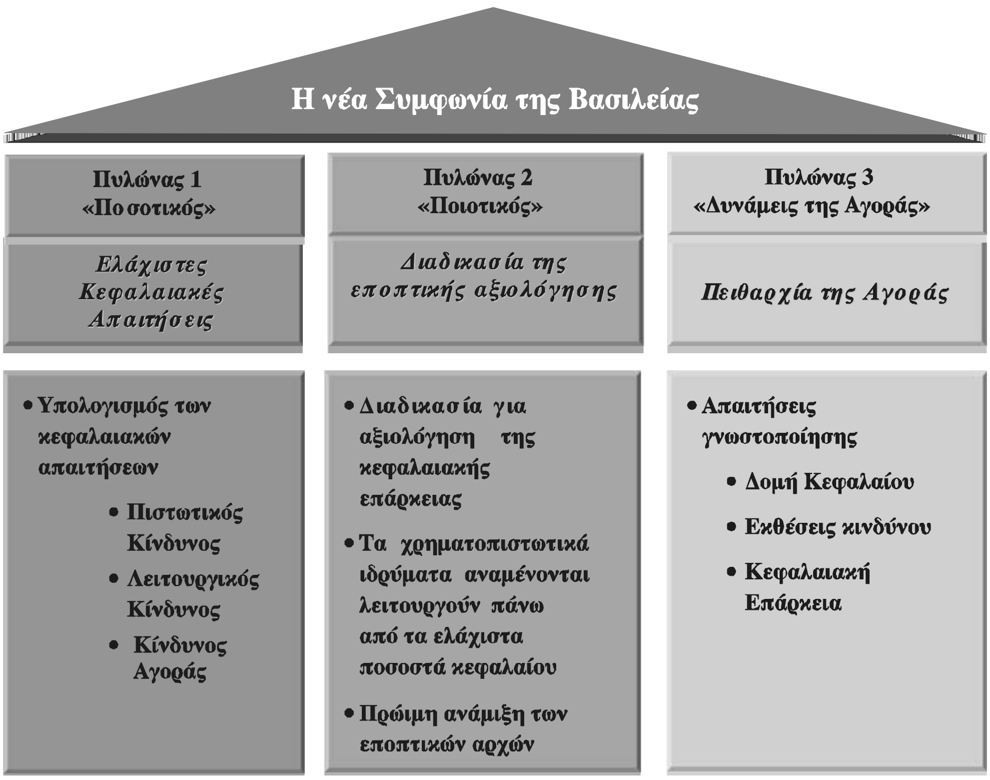
Οι εποπτικές αρχές μπορεί πλέον να μην επιβάλλουν ειδική κεφαλαιακή απαίτηση για τον επιτοκιακό κίνδυνο του επενδυτικού χαρτοφυλακίου για τα χρηματοπιστωτικά ιδρύματα που παρουσιάζουν σημαντικό κίνδυνο λόγω ανοιγμάτων ρευστότητας μεταξύ παθητικού/ενεργητικού, αλλά παρακολουθούν με προσοχή την οικονομική κατάσταση του κάθε χρηματοπιστωτικού ιδρύματος. Το σημαντικότερο γεγονός σχετικά με το νέο πλαίσιο υπολογισμού κεφαλαιακών απαιτήσεων που προτείνει η Επιτροπή της Βασιλείας έχει να κάνει με ειδική κεφαλαιακή απαίτηση έναντι του λειτουργικού κινδύνου, το οποίο θέτει τους νέους κανόνες σε συνεργασία με τους εθνικούς φορείς και τις κεντρικές τράπεζες. Μέσα από το νέο πλαίσιο προβλέπονται ξεχωριστές κεφαλαιακές απαιτήσεις βάσει αντίστοιχων μεθοδολογιών μέτρησης. Η δυσκολία που παρουσιάζεται σχετικά με τον λειτουργικό κίνδυνο είναι ότι δεν είναι εύκολα μετρήσιμος και αναφέρεται σε όλα τα είδη κινδύνων που δεν μπορούν να χαρακτηρισθούν είτε ως κίνδυνοι αγοράς, είτε ως πιστωτικοί κίνδυνοι.

Σύμφωνα με το προηγούμενο πλαίσιο του 1988, τα ποσοστά στάθμισης των κεφαλαιακών απαιτήσεων είχαν καθοριστεί και σχετίζονταν περισσότερο με τον πιστωτικό κίνδυνο και ήταν ακόμα υψηλότερα για να καλύπτουν άλλες μορφές κινδύνου εκτός από τον πιστωτικό. Καθώς όμως στη νέα εποπτική Συμφωνία προτείνονται συγκεκριμένες μεθοδολογίες αποκλειστικά για τον πιστωτικό κίνδυνο, μένουν ακάλυπτοι κίνδυνοι άλλων μορφών. Έτσι, η Επιτροπή της Βασιλείας αναφέρει επιπρόσθετους κανόνες για τον λειτουργικό κίνδυνο, που κυρίως αναφέρονται στην αυξημένη

[22] *www.elearn.elke.gr, Σύμφωνο της Βασιλείας Ι*
[23] *www.elearn.elke.gr, Σύμφωνο της Βασιλείας Ι*

πολυπλοκότητα και στο μεγάλο εύρος των χρηματοπιστωτικών εργασιών καθώς επίσης και στη χρήση των υπολογιστικών συστημάτων. Ο υπολογισμός και η μέτρηση του λειτουργικού κινδύνου όπως έχει αναφερθεί είναι μια δύσκολη εργασία, η οποία ακόμα βρίσκεται σε αρχικό στάδιο ανάπτυξης και για αυτό η Επιτροπή ενθαρρύνει τις αρχές και τις κεντρικές τράπεζες να προτείνουν λύσεις.[24]

Ο στόχος του Πυλώνα 3 είναι να ενδυναμώσει την πειθαρχία της αγοράς μέσω της βελτιωμένης γνωστοποίησης από τα χρηματοπιστωτικά ιδρύματα. Η αποτελεσματική γνωστοποίηση είναι απαραίτητη για να εξασφαλίσει ότι οι συμμέτοχοι της αγοράς μπορούν να καταλάβουν καλύτερα τα προφίλ κινδύνου των χρηματοπιστωτικών ιδρυμάτων και τις θέσεις κεφαλαιακής επάρκειας. Το νέο πλαίσιο θέτει τις απαιτήσεις γνωστοποίησης και τις συστάσεις σε μερικούς τομείς, περιλαμβάνοντας τον τρόπο με τον οποίο ένα χρηματοπιστωτικό ίδρυμα υπολογίζει την κεφαλαιακή του επάρκεια και τις μεθόδους αξιολόγησης κινδύνου του. Το βασικό σετ ρυθμίσεων εφαρμόζεται σε όλα τα χρηματοπιστωτικά ιδρύματα, με περισσότερο λεπτομερείς απαιτήσεις για την εποπτική αναγνώριση των εσωτερικών μεθοδολογιών για πιστωτικό κίνδυνο, τεχνικές άμβλυνσης του πιστωτικού κινδύνου και εξασφάλιση του ενεργητικού.[25]



Πηγή: *Chris Matten, PricewaterCoopers, Basel II Update*

---

[24] *Bank for International Settlements (January 2001), Secretariat of the Basel Committee on Banking Supervision, The new Basel Capital Accord: an explanatory note.*

[25] *www.elearn.elke.gr, Σύμφωνο της Βασιλείας Ι*

ΙΙΙ. Επιπτώσεις της Βασιλείας ΙΙ

Οι βασικές συνέπειες της νέας Συμφωνίας παρουσιάζονται ως εξής:

Οφέλη	Κόστη
Μείωση των αναγκών κεφαλαίου	Τίθενται κόστη συστημάτων και διαδικασιών
Καλύτερη διαχείριση κινδύνου	Συνεχιζόμενα κόστη σχετικά με τα εργαλεία συλλογής δεδομένων
Βελτιωμένη σχέση εποπτικών αρχών	Κόστη σχετικά με τη βελτίωση των πληροφοριακών συστημάτων και την εξειδίκευση του προσωπικού
Βελτιωμένη πιστωτική υπηρεσία	Πολυπλοκότητα των συστημάτων και των απαιτούμενων διαδικασιών
Καλύτερη γνωστοποίηση	΄Ελλειψη κατάρτισης

Πηγή: *Chris Matten, PricewaterCoopers, Basel II Update*

Γενικότερα, η Βασιλεία ΙΙ, αυτό το εκσυγχρονισμένο εποπτικό πλαίσιο θα οδηγήσει σε ένα παγκοσμιοποιημένο χρηματοοικονομικό περιβάλλον αλλά ταυτόχρονα θα δημιουργήσει χρηματοοικονομικά προβλήματα και κρίσεις. Για τα πιστωτικά ιδρύματα μικρού και μεσαίου μεγέθους, στο Σύμφωνο της Βασιλείας ΙΙ ελλοχεύει ο κίνδυνος το κόστος προσαρμογής να υπερβεί τα προσδοκώμενα οφέλη. Μακροπρόθεσμα η ανάπτυξη ενός ολοκληρωμένου πλαισίου διαχείρισης της απόδοσης προσαρμοσμένης με βάση τον κίνδυνο (Risk Adjusted Performance Management) θα προσδώσει πραγματικό ανταγωνιστικό πλεονέκτημα. Μεσοπρόθεσμα αναμένονται οφέλη από την τιμολόγηση των προσφερόμενων υπηρεσιών και προϊόντων με βάση των κίνδυνο (risk–based pricing), την αναθεώρηση και εξυγίανση του υφιστάμενου χαρτοφυλακίου και την καλύτερη στόχευση της αγοράς (είτε για ενέργειες market share είτε για ενέργειες wallet share).

Οι επιπτώσεις του νέου Συμφώνου διακρίνονται, για αναλυτικούς λόγους, σε δυο βασικές κατηγορίες:

- Επιπτώσεις σε συστημικό επίπεδο. Σε συστημικό επίπεδο οι επιπτώσεις από την εφαρμογή του νέου Συμφώνου επικεντρώνονται στην επίδραση επί της πολιτικής για τη διασφάλιση της σταθερότητας του τραπεζικού συστήματος. Η διασφάλιση της σταθερότητας του χρηματοπιστωτικού συστήματος θεωρείται από πολλούς ότι τίθεται σε αμφιβολία με το νέο Σύμφωνο. Η χρήση, διαφορετικής ως προς τον κίνδυνο ευαισθησίας, μεθοδολογιών από πιστωτικά ιδρύματα που δραστηριοποιούνται στην ίδια χρηματοπιστωτική αγορά, δημιουργεί ισχυρά κίνητρα για τον «sophisticated», χαμηλής πιστοληπτικής ικανότητας, πιστούχο να προσφύγει για χρηματοδότηση στις τράπεζες που εφαρμόζουν την τυποποιημένη μέθοδο. Σαν αποτέλεσμα, τα χρηματοπιστωτικά ιδρύματα με τις λιγότερο ανεπτυγμένες διαδικασίες διαχείρισης κινδύνων θα συγκεντρώνουν τις πλέον επικίνδυνες χορηγήσεις.

- Επιπτώσεις σε επίπεδο λειτουργίας των τραπεζών Οι επιπτώσεις σε ατομικό επίπεδο θα μπορούσαν να ταξινομηθούν σε τρεις ενότητες:
  - Επιπτώσεις στη διάρθρωση της αγοράς Όσον αφορά τις επιπτώσεις στη διάρθρωση της αγοράς πολλοί είναι αυτοί που ισχυρίζονται ότι τα πιστωτικά ιδρύματα που θα υιοθετήσουν την εξελιγμένη προσέγγιση τόσο για τον πιστωτικό όσο και για τον λειτουργικό κίνδυνο θα αποκτήσουν συγκριτικό πλεονέκτημα έναντι των λοιπών πιστωτικών ιδρυμάτων λόγω μειούμενων κεφαλαιακών απαιτήσεων (relative capital advantage).
  - Επιπτώσεις στη λειτουργία των πιστωτικών ιδρυμάτων Τα πιστωτικά ιδρύματα που θα υιοθετήσουν τις τυποποιημένες μεθόδους για τον υπολογισμό των κεφαλαιακών απαιτήσεων θα προχωρήσουν, ανάλογα και με την ποιότητα του χαρτοφυλακίου τους, σε αύξηση των εποπτικών ιδίων κεφαλαίων τους. Αντίθετα, πιστωτικά ιδρύματα που θα εφαρμόσουν τις εξελιγμένες μεθόδους των εσωτερικών διαβαθμίσεων θα τύχουν κεφαλαιακής ελάφρυνσης.
    Σε γενικές γραμμές τα πιστωτικά ιδρύματα που ειδικεύονται στις επενδυτικές υπηρεσίες (διαχείριση περιουσιακών στοιχείων, υπηρεσίες θεματοφυλακής) θα βρεθούν ζημιωμένα στο μέτρο που η επιβολή κεφαλαιακών απαιτήσεων για το λειτουργικό κίνδυνο έχει αποτέλεσμα οι εν λόγω υπηρεσίες να πάψουν να θεωρούνται δραστηριότητες χωρίς κεφαλαιακό κόστος.
  - Επιπτώσεις στους πελάτες των πιστωτικών ιδρυμάτων. Η αυξημένη ευαισθησία των νέων μεθόδων θα έχει ως αποτέλεσμα: τη διαφοροποίηση του κόστους του τραπεζικού δανεισμού ανάλογα με τη φερεγγυότητα του αντισυμβαλλομένου και τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά της συναλλαγής, καθώς επίσης και τον βέλτιστο σχηματισμό προβλέψεων έναντι επισφαλών απαιτήσεων. Σε γενικές γραμμές μεταξύ των ωφελημένων, από το νέο Σύμφωνο, πελατών των πιστωτικών ιδρυμάτων περιλαμβάνονται:
    - οι καταναλωτές,
    - οι μικρομεσαίες επιχειρήσεις,
    - οι επιχειρήσεις με υψηλή πιστοληπτική ικανότητα, και
    - οι αντισυμβαλλόμενοι που θα παρέχουν επαρκείς εξασφαλίσεις/εγγυήσεις στα πιστωτικά ιδρύματα.

IV. Ρυθμίσεις των χρηματοπιστωτικών ιδρυμάτων με τη νέα Συμφωνία

Τα χρηματοπιστωτικά ιδρύματα θα πρέπει να προβούν σε ρυθμίσεις στα εξής πεδία:

- **Δεδομένα και IT συστήματα**: Το πιο αξιοσημείωτο θέμα που αντιμετωπίζουν τα χρηματοπιστωτικά ιδρύματα σε σχέση με τη Βασιλεία ΙΙ είναι να ευθυγραμμίσουν και να αναβαθμίσουν τα δεδομένα και τα υπάρχοντα πληροφοριακά συστήματα ώστε να επιτευχθεί αποτελεσματικότητα και ενοποίηση μέσα στον οργανισμό. Τα συστήματα πρέπει να είναι ευσυμβίβαστα με την υπάρχουσα IT αρχιτεκτονική, πρέπει να παρέχουν κατάλληλες εκθεσιακές διευκολύνσεις και πρέπει να υποστηρίζουν την εσωτερική ανάλυση της αξιολόγησης του πιστωτικού κινδύνου. Τα χρηματοπιστωτικά ιδρύματα, ιδιαίτερα αν θέλουν να πραγματοποιήσουν την IRB (Internal ratings–based) και μεθόδους μέτρησης του πιστωτικού και του λειτουργικού κινδύνου, πρέπει να ξεκινήσουν να εφαρμόζουν αυτά τα συστήματα.

- **Σχέδιο διοίκησης**: Οι υπέρμαχοι της Βασιλείας ΙΙ πρέπει να πάρουν την πρωτοβουλία και να μετακινήσουν όλα τα εμπόδια για την επιτυχή συμμόρφωση στη νέα Συμφωνία. Ο ρόλος και οι ευθύνες του κάθε ατόμου και τμήματος πρέπει να προσδιοριστεί πλήρως ώστε να αποφευχθεί η σύγχυση, ειδικότερα αναφορικά με τον λειτουργικό κίνδυνο, αφού πολλά χρηματοπιστωτικά ιδρύματα δεν έχουν πεισθεί για την ανάγκη εγκατάστασης των συστημάτων λειτουργικού κινδύνου.
- **Πέρα από τα χρηματοπιστωτικά ιδρύματα**: Η νέα Συμφωνία τίθεται να επηρεάσει όλα τα πεδία, από τις επιχειρηματικές διαδικασίες και λειτουργίες μέχρι την οργανωσιακή δομή και στρατηγική. Έτσι, τα χρηματοπιστωτικά ιδρύματα πρέπει να καθιδρύσουν μια μεθοδολογία διαχείρισης κινδύνου, έναν κύριο διαχειριστικό έλεγχο και μια διαδικασία επισκόπησης, συλλογή δεδομένων και IT συστήματα καθώς και διαδικασίες γνωστοποίησης, τα οποία όλα αυτά ενισχύονται από την ένωση του κινδύνου σε βασικές επιχειρησιακές διαδικασίες. Για να αντιμετωπιστεί αποτελεσματικά η διαχείριση λειτουργικού κινδύνου, μια κατάλληλη ένωση των αρχών διαχείρισης κινδύνου είναι απολύτως απαραίτητη.[26]
- **Μεταβλητότητα στην δημιουργία εκθέσεων (reporting)**: Για να επιτευχθεί μεγαλύτερη συνέπεια και ποιότητα θα πρέπει τα χρηματοπιστωτικά ιδρύματα να δημιουργήσουν μεγαλύτερη ποικιλία εκθέσεων (reports).
- **Διαθεσιμότητα δεδομένων και σχετικότητα**: Η διαθεσιμότητα δεδομένων και η σχετικότητα αποτελούν βασικό θέμα με τη νέα Συμφωνία. Αυτό σημαίνει ότι τα χρηματοπιστωτικά ιδρύματα θα πρέπει να προβούν στην αναβάθμιση των συστημάτων τους ώστε να αντιμετωπιστεί η ένωση δεδομένων και η πολυπλοκότητα των διαδικασιών.[27]

Η νέα Συμφωνία θα θέσει εκτός έδρας όχι μόνο τα θέματα μέτρησης του κινδύνου αλλά και την ενεργή διαχείριση κινδύνου. Αυτό θα απαιτήσει μια μεγάλη ποσότητα ιστορικών δεδομένων και εξελιγμένων τεχνικών. Το κόστος εφαρμογής κυμαίνεται από $10 μέχρι $150 εκατομμύρια. Αυτό θα είναι ένα μεγάλο κόστος για τα μικρό–μεσαία χρηματοπιστωτικά ιδρύματα. [28]

---

[26] *Pinnacle Systems, Inc. (June 2003), Basel II: New Wine in Old Bottle.*
[27] *Chris Matten, PricewaterCoopers, Basel II Update*
[28] *Chris Matten, PricewaterCoopers, Basel II Update*

Στη συνέχεια, ένα χρηματοπιστωτικό ίδρυμα θα πρέπει να προβεί στις εξής ενέργειες:

- Ανάπτυξη μοντέλων και υποδομής που θα τηρούν όλες τις απαιτήσεις
- Ενσωμάτωση διαδικασιών κινδύνου σε καθημερινές λειτουργίες
- Εξισορρόπηση μεταξύ μακροπρόθεσμων και βραχυπρόθεσμων στόχων
- Εξισορρόπηση των προσωρινών προτεραιοτήτων
- Ανάπτυξη των μη επαρκώς καταρτισμένων πηγών
- Διεκπεραίωση και διατήρηση μιας κυρίαρχης θέσης στις πρακτικές Διαχείρισης Κινδύνου ώστε να διατηρεί την κυριαρχία στην αγορά στο μέλλον
- Ευθυγράμμιση των τρεχόντων διαδικασιών διαχείρισης κινδύνου με τις ρυθμιστικές απαιτήσεις
- Πραγματοποίηση βελτιστοποιημένων χαρτοφυλακίων μέσω της καλύτερης διαχείρισης κινδύνου
- Καθορισμός και τήρηση των απαιτήσεων δεδομένων περιλαμβάνοντας:
  - Σύλληψη δεδομένων, διαθεσιμότητα δεδομένων και πληρότητα
  - Στατιστική σχετικότητα, εγκυρότητα, εφαρμοσιμότητα και επαρκή μελέτη
- Αλλαγή της κουλτούρας του χρηματοπιστωτικού ιδρύματος.[29]

Συμπεράσματα

Το νέο πλαίσιο, επειδή καταργεί την ομοιομορφία των απαιτήσεων, οδηγεί τα χρηματοπιστωτικά ιδρύματα στην ενίσχυση των εσωτερικών συστημάτων ελέγχου. Με τον τρόπο αυτό κινητοποιεί στην κατεύθυνση μεγαλύτερης αποτελεσματικότητας και, τελικώς, μεγαλύτερης ανταγωνιστικότητας. Τα χρηματοπιστωτικά ιδρύματα οφείλουν, με τους νέους κανόνες, να ισορροπούν και τις τοποθετήσεις που πραγματοποιούν επομένως και τον ανάλογο κίνδυνο με τις αποδόσεις που απαιτεί η αγορά από το χρηματοπιστωτικό ίδρυμα. Με την έννοια αυτή ο πιστωτικός κίνδυνος θα παραμείνει θέμα πρωτεύουσας σημασίας για τα χρηματοπιστωτικά ιδρύματα. Το γενικότερο συμπέρασμα είναι ότι οι στρατηγικές και επιχειρηματικές αποφάσεις τις οποίες θα λάβουν τα χρηματοπιστωτικά ιδρύματα στα προσεχή χρόνια είναι εκείνες που θα βαρύνουν για την κεφαλαιακή ασφάλεια και, τελικώς, για την αποδοτικότητά τους. Το νέο σύστημα δίνει κίνητρα και οδηγεί επομένως σε μεγαλύτερη αποτελεσματικότητα. Η εξέλιξη αυτή θα αναγκάσει τα χρηματοπιστωτικά ιδρύματα να επανατοποθετηθούν και να επαναπροσδιορισθούν, αξιολογώντας εκ νέου τις επιμέρους γραμμές δραστηριοτήτων τους και να δώσουν πιθανώς έμφαση σε διαφορετικούς τομείς, ανάλογα με τον τύπο κινδύνου που αναλαμβάνουν.

Η νέα Συμφωνία, λοιπόν αποτελεί ένα αναλυτικό και προκλητικό πλαίσιο. Για να επιτύχει τον τελικό της στόχο της βελτιωμένης χρηματοοικονομικής σταθερότητας, απαιτείται υποστήριξη και επαρκή ανάμιξη πολλών διαφορετικών εμπλεκόμενων όπως:

[29] *The Institute of Chartered Accountants of Pakistan (2006), Deloitte*

– Χρηματοπιστωτικά Ιδρύματα τα οποία πρέπει να σχεδιάσουν, να βαθμονομήσουν και να χρησιμοποιήσουν κατάλληλα τα εσωτερικά συστήματα. Τα ιδρύματα αυτά θα πρέπει να είναι καλά πληροφορημένα και εκπαιδευμένα ώστε να ενισχυθεί η πειθαρχία της αγοράς.
– Οικονομικοί ελεγκτές οι οποίοι να επικυρώσουν τις εισροές συστημάτων και να αξιολογήσουν αυτά τα συστήματα.
– Επόπτες οι οποίοι να επικυρώσουν τα συστήματα αυτά και να εποπτεύουν τη χρήση τους σε συνεχή βάση.

Αυτό παγκόσμια σημαίνει υψηλής ποιότητας Επιχειρησιακή Διοίκηση. Είναι αλήθεια ότι η αδύναμη επιχειρησιακή διοίκηση στα χρηματοπιστωτικά ιδρύματα υπήρξε ένας από τους βασικούς παράγοντες της παλιάς κρίσης στο χρηματοοικονομικό σύστημα.

Όσον αφορά τα χρηματοπιστωτικά ιδρύματα το εύρος του ελέγχου/ της επιτήρησης υποδηλώνει:

- Εσωτερικό έλεγχο, από εξειδικευμένο προσωπικό,
- Έλεγχο του Διοικητικού Συμβουλίου,
- Εξωτερικός έλεγχος από οικονομικούς ελεγκτές και επόπτες και
- Πειθαρχία της αγοράς.

Οι εμπειρίες του παρελθόντος έχουν δείξει ότι όταν ένα από τα προηγούμενα στοιχεία λείπει, η άμεση διορθωτική ενέργεια από τους επόπτες είναι πιο δύσκολη. Απαιτείται πολύς περισσότερος χρόνος για να αξιολογηθεί το πρόβλημα και περισσότερος χρόνος για να βρεθεί μια επαρκής λύση και να εφαρμοστεί. Δεν υπάρχει μια μοναδική καλή απόκριση σε αυτό το θέμα: υπάρχουν ποικίλες δομές επιχειρησιακής διοίκησης σε διαφορετικές χώρες, αλλά όλες πρέπει να τηρούν αρχές υψηλού επιπέδου. Για τα χρηματοπιστωτικά ιδρύματα οι αρχές αυτές έχουν καθοριστεί με την Βασιλεία ΙΙ της Επιτροπής της Βασιλείας.

Σύνοψη

Στο κεφάλαιο 2 παρουσιάστηκε η ιστορική εξέλιξη του κλάδου των τραπεζών διεθνώς, οι οικονομικοί παράγοντες και οι λόγοι στους οποίους οφείλεται αυτή η εξέλιξη και ο σύγχρονος αυξημένος ανταγωνισμός.

Μια σειρά από σημαντικούς παράγοντες οδήγησαν στην αυξημένη ζήτηση διαχείρισης κινδύνου των χαρτοφυλακίων των τραπεζικών ιδρυμάτων, που έχει ήδη αναπτυχθεί σημαντικά τόσο από θεωρητικής όσο και από πρακτικής πλευράς, κυρίως με την ανάπτυξη των υποδειγμάτων VaR (αξία σε κίνδυνο), την οποία προτείνει στα τραπεζικά ιδρύματα και η Τράπεζα Διεθνών Διακανονισμών (BIS).

Άλλωστε, την ανάγκη για αναγνώριση των κινδύνων και των πηγών τους και για υπολογισμό των κινδύνων αυτών, με στόχο τη διαχείριση τους, έχουν επανειλημ–μένα επισημάνει στις εκθέσεις τους όλοι οι διεθνείς οργανισμοί.

Ας σημειωθεί, βέβαια, ότι η ποσοτική αποτίμηση του συνολικού κινδύνου των τραπεζικών ιδρυμάτων και οργανισμών δεν αποτελεί «πανάκεια» ούτε μπορεί να είναι η αποτελεσματικότερη λύση στο πρόβλημα. Ποιοτικοί παράγοντες παίζουν, επίσης, σημαντικό ρόλο, όπως και η δομή και διάρθρωση της διοίκησης και ελέγχου του οργανισμού, οι σχέσεις της διοίκησης με τους μετόχους (εταιρική διακυβέρνηση), οι διαδικασίες εσωτερικού ελέγχου που ακολουθούνται από την τράπεζα, τα συστήματα διαχείρισης κινδύνου κλπ.

Ωστόσο, για την ποσοτική αποτίμηση της κεφαλαιακής επάρκειας των τραπεζικών ιδρυμάτων, σύμφωνα και με την Επιτροπή της Βασιλείας, θεωρείται σήμερα απαραίτητος ο διαχωρισμός ενός τμήματος διαχείρισης κινδύνου από τη διοίκηση, με δεδομένη, φυσικά, την επικοινωνία τους.

Συνοψίζοντας τα βασικότερα σημεία στα οποία υπάρχει σύγκλιση απόψεων μεταξύ των εποπτικών αρχών και των συμμετεχόντων στην αγορά, θα σημειώναμε τα εξής:

1. ***Η διαχείριση κινδύνων πρέπει να γίνεται κάτω από μια ολοκληρωμένη θεώρηση που να καλύπτει τόσο τον πιστωτικό κίνδυνο όσο και τον κίνδυνο της αγοράς*. Είναι εμφανές ότι η Συμφωνία της Βασιλείας του 1988, που εισήγαγε την έννοια της ελάχιστης κεφαλαιακής απαίτησης των τραπεζικών ιδρυμάτων έναντι μόνο του πιστωτικού κινδύνου, είναι πλέον ανεπαρκής και θα πρέπει να επεκταθεί γενικότερα και στις επιχειρήσεις παροχής επενδυτικών υπηρεσιών.**
2. ***Ο ρόλος του εσωτερικού ελέγχου στον προσδιορισμό, τη μέτρηση και αποτίμηση των κινδύνων είναι αποφασιστικής σημασίας*. Βέβαια, είναι αναγκαίο οι εποπτικές αρχές να παρέχουν καθοδήγηση και να καθιερώνουν τις σχετικές κανονιστικές ρυθμίσεις. Ακόμα, πρέπει να σημειωθεί ότι τα συστήματα εσωτερικού ελέγχου των οργανισμών δεν αποτελούν υποκατάστατο της θέσπισης επίσημων κανόνων κεφαλαιακής επάρκειας από τις εποπτικές αρχές, οι κανόνες των οποίων δεν πρέπει να είναι πολύ αυστηροί, διότι έτσι υπάρχει ο κίνδυνος**

μετακύλισης του κινδύνου των τραπεζικών οργανισμών προς τους συμμετέχοντες στην αγορά, οι οποίοι δεν υπόκεινται σε άμεση εποπτεία (για παράδειγμα, ασφαλιστικές εταιρείες) ή σε χώρες και αγορές που δεν ελέγχονται.

3. ***Η προσπάθεια αποτελεσματικού ελέγχου και διαχείρισης των χρηματοπιστωτικών κινδύνων απαιτεί την ανάπτυξη της αναγκαίας λειτουργικής υποδομής, ώστε ο συμψηφισμός (clearing) και ο διακανονισμός (settlement) των πληρωμών και των χρεογράφων που προκύπτουν από όλες τις μορφές συναλλαγών να γίνεται με επάρκεια, ταχύτητα και ασφάλεια.*** **Μεγάλο μέρος της καθημερινής αξίας των κεφαλαίων που διακινούνται μέσω των συστημάτων πληρωμών είναι αποτέλεσμα των συναλλαγών των τραπεζικών ιδρυμάτων με άλλους διαμεσολαβητές, με συνέπεια την αύξηση της έκθεσης τους στον πιστωτικό κίνδυνο. Η αθέτηση και η αδυναμία των αντισυμβαλλομένων να εκπληρώσουν τις υποχρεώσεις τους μπορεί να δημιουργήσει προβλήματα (σε πρώτη φάση) στα συστήματα συμψηφισμού και διακανονισμού. Η ασφάλεια των συστημάτων αυτών είναι πρωταρχικής σημασίας, αφού η πιθανότητα αναταραχής των συστημάτων αυτών αποτελεί τον μεγαλύτερο κίνδυνο στη ρευστότητα των αγορών.**

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

ΕΛΛΗΝΟΓΛΩΣΣΗ

Ασημακόπουλος Ι., «Διαχείριση χρηματοοικονομικών κινδύνων και η σημασία των παράγωγων προϊόντων», στο Siriopoulos C. (ed), *Topics in Financial Economics and Risk Analysis,* Paratiritis, Thessaloniki 1999, **σ**. 173–195.

Γκόρτσος Χ., «Η Εποπτική αναγνώριση των συστημάτων διαχείρισης κινδύνων τραπεζών», στο Siriopoulos C. (ed) *Topics in Financial Economics and Risk Analysis,* Paratiritis, Thessaloniki 1999, σ. 85–109.

Καλαμπόκης Χ., «Τι μέλλει γενέσθαι σε ιδιωτικές και κρατικές τράπεζες;», εφ. *Επενδυτής* της 4–5/6/1998, σ. 9.

Καρατζάς Θ., Συνέντευξη στο *ΒΗΜΑ,* 31/5/1998, σ. Α5.

Οικονομικό Δελτίο Alpha Τράπεζας Πίστεως, «Το μέλλον της αγοράς εργασίας και της απασχόλησης στον τραπεζικό κλάδο», τεύχος 66, 1998, σ. 3–15.

Συριόπουλος Κ., *Διεθνείς Κεφαλαιαγορές: Τόμος 1,* Ανικούλα, Θεσσαλονίκη 1999.

Hardy D.C., Συμιγιάννης Γ.Θ., «Ανταγωνισμός και αποτελεσματικότητα στο ελληνικό τραπεζικό σύστημα», *Οικονομικό Δελτίο της Τραπέζης της Ελλάδος,* No 11, 6/1998, σ. 7–30.

ΞΕΝΟΓΛΩΣΣΗ

Bank for International Settlements (January 2001), Secretariat of the Basel Committee on Banking Supervision, *The new Basel Capital Accord: an explanatory note*.

Canals J., Competitive Strategies in European Banking, Clarendon Press, Oxford 1994.

Demirguc-Kunt, Levine, Stock Markets, Corporate Finance and Economic Growth: An overview, The World Bank Economic Review 10(2), σ. 223–241, 1996.

Heffernan S., Modern Banking in Theory and Practice, Wiley, N.Y 1996.

Knight, Risk, Uncertainty and Profit, Houghton Mifflin Co, Boston 1921.

Matten C., PricewaterCoopers, *Basel II Update*.

Nouy D., Secretary General of the Basel Committee, Basel Committee on Banking Supervision (January 2003), *The Changing role of non-Financial risk*, UNEP Finance Initiatives.

Rybcynski T.M., «Financial Systems, Risk and Public Policy», Royal Bank of Scotland Review, December 1985.

Siriopoulos C. (ed.), *Topics in Financial Economics and Risk Analysis,* Paratiritis, Thessaloniki 1999.

Wriston W., Συνέντευξη στον *Economist,* 10/4/1993.

ΟΔΗΓΟΣ ΓΙΑ ΠΕΡΑΙΤΕΡΩ ΜΕΛΕΤΗ

1. **Canals J., *Competitive Strategies in European Banking,* Clarendon Press, Oxford 1994.**

Το βιβλίο αυτό διατυπώνει ερωτήματα και ελέγχει υποθέσεις ανάπτυξης και στρατηγικού ανταγωνισμού των τραπεζικών ιδρυμάτων στις χώρες της Ευρώπης. Ο συγγραφέας ελέγχει την υπόθεση της σημαντικότητας του μεγέθους (σύνολο ενεργητικού) των τραπεζών στον ανταγωνισμό, για να καταλήξει στο συμπέρασμα ότι η σχέση μεταξύ του μεγέθους των τραπεζών και της απόδοσης των ιδίων κεφαλαίων είναι αρνητική, συνεπώς οι περισσότερο κερδοφόρες τράπεζες είναι οι μικρότερες. Με άλλα λόγια, δεν είναι προφανές αν οι οικονομίες κλίμακας είναι αποτέλεσμα του μεγέθους των χρηματοπιστωτικών ιδρυμάτων.

2. **Siriopoulos C. (ed.), *Topics in Financial Economics and Risk Analysis,* Paratiritis, Thessaloniki 1999.**

Το βιβλίο αυτό αναφέρεται σε θέματα χρηματοοικονομικής ανάλυσης, οικονομικής ανάπτυξης και διαχείρισης κινδύνου. Περιλαμβάνει άρθρα ακαδημαϊκών και τραπεζικών από διάφορες χώρες. Σας προτείνουμε να μελετήσετε τις ενότητες 2 και 4.

3. **Heffernan S., Modern Banking in Theory and Practice, Wiley, N.Y. 1996.**

Το βιβλίο αυτό αποτελεί ένα από τα βασικά εγχειρίδια της σύγχρονης τραπεζικής. Εξετάζονται όλα τα θέματα, από το ρυθμιστικό πλαίσιο μέχρι τις αρχές διαχείρισης κινδύνου. Ωστόσο, όσον αφορά το τελευταίο, ο συγγραφέας είναι ιδιαίτερα σύντομος.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΜΕΓΕΘΗ ΜΕΤΡΗΣΗΣ ΚΙΝΔΥΝΟΥ

Σκοπός

Σκοπός του κεφαλαίου αυτού είναι να εισαγάγει τον αναγνώστη στον υπολογισμό της VaR, που απεικονίζει τη δυνατή ζημία. Τέλος, γίνεται μια εκτενής εισαγωγή στον σπουδαιότερο τραπεζικό κίνδυνο, που είναι ο πιστωτικός κίνδυνος.

Προσδοκώμενα Αποτελέσματα

Όταν θα έχετε ολοκληρώσει τη μελέτη αυτού του κεφαλαίου, θα είστε σε θέση να:
- περιγράφετε τα μεγέθη κινδύνου και να δίνετε ορισμένα παραδείγματα·
- περιγράφετε τη μεθοδολογία VaR·
- αναφέρετε και να περιγράφετε τις συνιστώσες του πιστωτικού κινδύνου τραπεζικών οργανισμών.

Έννοιες Κλειδιά

- VaR, CaR
- Έκθεση σε κίνδυνο
- RAROC, SVA
- Πιστωτικός κίνδυνος
- Απόλυτη και σχετική VaR, επαλήθευση και έλεγχος

Εισαγωγικές Παρατηρήσεις

Κεντρικό σημείο στη διαχείριση κινδύνου είναι η ποσοτική του αποτίμηση. Χωρίς αυτή είναι δύσκολος ο έλεγχος και η παρακολούθηση της διαδικασίας της διαχείρισης κινδύνου. Μάλιστα, η ανάπτυξη της διαχείρισης κινδύνου οφείλει πολλά στα ποσοτικά μεγέθη της εκτίμησης κινδύνου.

Σήμερα, υπάρχει ένα μεγάλο σύνολο μεγεθών μέτρησης κινδύνου. Όλα αυτά τα μεγέθη έχουν στόχο να εκτιμήσουν τη μεταβολή μιας μεταβλητής, π.χ τα κέρδη, που οφείλεται στις μεταβολές άλλων παραμέτρων, όπως, για παράδειγμα, στη μεταβολή των επιτοκίων ή της συναλλαγματικής ισοτιμίας.

Τα μεγέθη αποτίμησης κινδύνου μπορούν να ταξινομηθούν σε τρεις κατηγορίες:

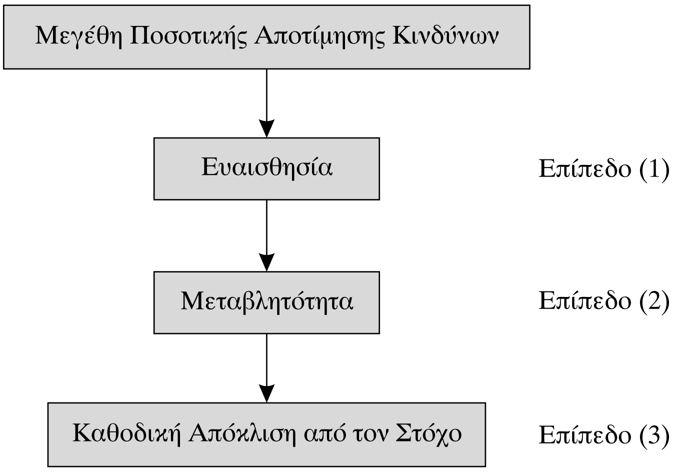
α) Τον δείκτη ευαισθησίας (sensitivity ratio), ο οποίος μετρά την απόκλιση μιας μεταβλητής από τον προκαθορισμένο στόχο της, λόγω της μοναδιαίας μεταβολής μίας και μόνο μεταβλητής της αγοράς (π.χ., μεταβολή του επιτοκίου κατά 1%).

β) Τη μεταβλητότητα (volatility), που μετρά τις μεταβολές μιας μεταβλητής γύρω από τη μέση τιμή της. Το πλέον γνωστό μέγεθος μέτρησης της απόκλισης είναι η διακύμανση (variance).

γ) Την καθοδική απόκλιση κερδοφορίας ή κίνδυνο προς τα κάτω (downside risk ή worst case), που μετρά την αρνητική απόκλιση της μεταβλητής από τον στόχο της με κάποια πιθανότητα. Στην κατηγορία αυτή ανήκει η μεθοδολογία VaR.

Οι διαφορετικοί τύποι των μεγεθών μέτρησης κινδύνου, θεωρούμενοι από κοινού, καλύπτουν τις πολλαπλές διαστάσεις του κινδύνου. Ξεκινώντας από τον απλό δείκτη ευαισθησίας και οδηγούμενοι προς τον πλέον σύνθετο, όπως στην περίπτωση (γ), το Διάγραμμα 1 παρουσιάζει την ταξινόμηση των παραπάνω μεγεθών.

Διάγραμμα 1
Ταξινόμηση μεγεθών μέτρησης κινδύνων



Βέβαια, δεν είναι πάντα μετρήσιμοι όλοι οι παράγοντες που επηρεάζουν το περιβάλλον των χρηματοοικονομικών αγορών. Συμβαίνουν ακραία περιστατικά ή μη αναμενόμενα γεγονότα, που μεταβάλλουν απότομα και βίαια τους δείκτες και τις τιμές. Τα υποδείγματα VaR, για παράδειγμα, δε μπορούν να εκτιμήσουν το εύρος των πιθανών ζημιών σε περιόδους κρίσεων.

Εναλλακτικά, λοιπόν, μπορούν να εφαρμοστούν σενάρια χειρότερης δυνατής περίπτωσης (stress tests ή worst case senarios) και να εκτιμηθούν, αντίστοιχα, οι μεταβολές στην αξία των περιουσιακών στοιχείων. Η πρακτική αυτή είναι αρκετά διαδεδομένη και ακολουθείται προκειμένου να εκτιμηθεί η έκταση των επιπτώσεων σε περιόδους ασυνήθιστων γεγονότων ή κρίσεων και αναταραχών.

Τέτοια σενάρια και ποσοτικές μέθοδοι αποτίμησης του κινδύνου χρησιμοποιούνται με αρκετή ακρίβεια. Όμως, δεν είναι οι μόνοι τρόποι για τη σύλληψη των αβέβαιων γεγονότων που επηρεάζουν την αξία των χρηματοοικονομικών προϊόντων. Καταρχήν, είναι περιορισμένοι από κάποιες υποθέσεις που υποεκτιμούν τον κίνδυνο. Επίσης, απαιτούν κάποιον βαθμό υποκειμενισμού. Έτσι, στη διαδικασία διαχείρισης κινδύνου απαιτείται ο συνυπολογισμός ποσοτικών και ποιοτικών κριτηρίων και μεθοδολογιών. Όμως, επειδή οι ποσοτικές μέθοδοι μετρούν τον κίνδυνο, η σύγχρονη διαχείριση τραπεζικού κινδύνου «επενδύει» περισσότερο σε αυτές. Αυτό δικαιολογείται από το γεγονός ότι, τελικά, κάθε μέτρηση κινδύνου πρέπει να ερμηνευτεί στο ύψος του απαιτούμενου κεφαλαίου, ώστε η τράπεζα να μπορεί να προφυλαχτεί από τις μη ευνοϊκές συνθήκες.

Δραστηριότητα 1/Κεφάλαιο 3

Να αναφέρετε σύντομα τις τρεις κατηγορίες των μεγεθών ποσοτικής αποτίμησης κινδύνου. Γιατί προτιμώνται έναντι των ποιοτικών μεθόδων; Απαντήστε σε μια παράγραφο 80 λέξεων. Επιστρέψτε στις Εισαγωγικές Παρατηρήσεις και ελέγξτε την ορθότητα της απάντησης σας.

ΜΕΤΡΗΣΗ ΚΙΝΔΥΝΟΥ

3.1.1 Συντελεστής κινδύνου για τον υπολογισμό της VaR

Γνωρίζοντας τη μεταβλητότητα και δοθέντος του διαστήματος εμπιστοσύνης, μπορεί να υπολογιστεί ο *συντελεστής κινδύνου* (risk factor), ο οποίος αποτελείται από τρεις συνιστώσες: μεταβλητότητα, ληκτότητα (δηλαδή χρόνος) και επίπεδο εμπιστοσύνης.

Στην ενότητα αυτή θα χρησιμοποιήσουμε συμβολισμούς που να διευκολύνουν τον αναγνώστη. Οι συμβολισμοί αυτοί προέρχονται από τα αρχικά των αντίστοιχων λέξεων στην αγγλική γλώσσα.

Ο συντελεστής κινδύνου (RF) υπολογίζεται από τη σχέση

$$\mathrm{RF} = \mathrm{CI} \times \mathrm{HV} \times \sqrt{t} \tag{1}$$

όπου CI είναι ο συντελεστής διαστήματος εμπιστοσύνης, HV είναι η ιστορική μεταβλητότητα (ή σ, σύμφωνα με τον προηγούμενο συμβολισμό) και t είναι ο χρόνος. *Όσο μεγαλώνει η χρονική περίοδος, τόσο μειώνεται η σημαντικότητα της συνιστώσας του χρόνου στον παραπάνω υπολογισμό.*

Εάν, για παράδειγμα, επιθυμούμε ένα διάστημα εμπιστοσύνης 98%, τότε ο συντελεστής διαστήματος εμπιστοσύνης, CI, είναι ίσος με 2, για διάστημα εμπιστοσύνης 90% ο συντελεστής είναι 1.28 κ.λπ. Εάν ο κίνδυνος (τυπική απόκλιση) αποδίδεται σε έτη ή ημέρες ή μήνες, τότε αντίστοιχα πρέπει να υπολογίζεται και ο συντελεστής του χρόνου, t.

Παράδειγμα 1

Για ένα περιουσιακό στοιχείο υπολογίσαμε την ημερήσια τυπική απόκλιση (που βρέθηκε ίση με 0.97%, περίπου), την οποία αναγάγαμε σε ετήσια βάση που ισοδυναμούσε με 15.39%.

Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να υπολογίσουμε τον συντελεστή κινδύνου με διακανονισμό έξι μηνών σε επίπεδο εμπιστοσύνης 90% της κανονικής κατανομής. Με τα παραπάνω δεδομένα έχουμε

CI = 1.28

HV = 15.39

t = 0.5 (που είναι το μισό του ενός έτους)

Έτσι

$$\text{RF} = 1.28 \times 15.39 \times \sqrt{0.5} = 13.92$$

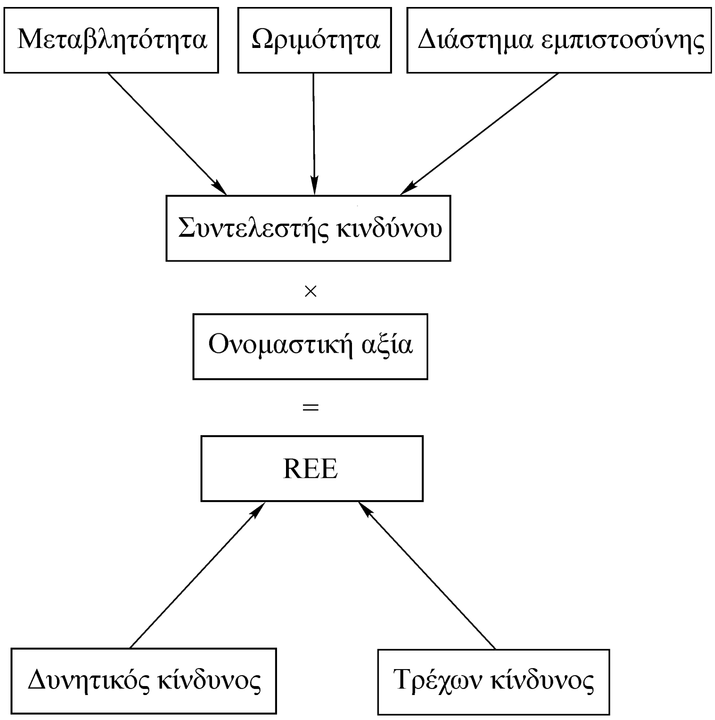
Ο συντελεστής κινδύνου RF = 13.92 δείχνει πως είμαστε τουλάχιστον 90% βέβαιοι ότι η τιμή του εν λόγω περιουσιακού στοιχείου δεν θα είναι περισσότερο από 13.92% υψηλότερα ή χαμηλότερα από το αρχικό επίπεδο.

Εάν η ονομαστική αξία της συναλλαγής είναι N, τότε η έκθεση σε κίνδυνο, REE (Risk Equivalent Exposure), που είναι ισοδύναμη της VaR, είναι

$$\text{REE} = \text{CI} \times \text{HV} \times \sqrt{t} \times N = \text{RF} \times N \qquad (2)$$

Η σχέση (2) εκφράζει τη διαδικασία με την οποία η ονομαστική αξία μιας συναλλαγής επανεκτιμάται υπό το πρίσμα των χαρακτηριστικών της (δηλαδή της ληκτότητας –ή της συχνότητας πληρωμών, του επιτοκίου κ.λπ.– της μεταβλητότητας και του επιπέδου εμπιστοσύνης που έχει επιλεγεί). Το Διάγραμμα 2 παρουσιάζει, συνοπτικά, την παραπάνω διαδικασία.

Διάγραμμα 2
Η διαδικασία υπολογισμού αξίας σε κίνδυνο



Στην πράξη, κατασκευάζονται πίνακες με τους αντίστοιχους συντελεστές κινδύνου σε κάθε διαφορετικό χρόνο ληκτότητας (ή ωριμότητα, maturity).

Παράδειγμα 2

Ας δούμε, για παράδειγμα, την περίπτωση κατά την οποία ο αναλυτής επιθυμεί να κατασκευάσει έναν τέτοιο πίνακα με επίπεδο εμπιστοσύνης 90%, για συναλλαγές ενός μήνα, τριών μηνών, έξι μηνών και ενός έτους.

Υπολογίσαμε την ιστορική τυπική απόκλιση από ένα δείγμα τιμών τριών ετών και βρήκαμε

ομόλογο ενός έτους: HV = 8%

ομόλογο πέντε ετών: HV = 11%

Θα πρέπει, στη συνέχεια, να υπολογίσουμε τον συντελεστή κινδύνου με CI = 1.28. Έτσι, λοιπόν, θα έχουμε τα εξής:

Για το ομόλογο ενός έτους:

RF ενός μήνα = $1.28 \times 0.08 \times \sqrt{0.08} = 2.89\%$

RF τριών μηνών = $1.28 \times 0.08 \times \sqrt{0.25} = 5.12\%$

RF έξι μηνών = $1.28 \times 0.08 \times \sqrt{0.5} = 7.24\%$

RF ενός έτους = $1.28 \times 0.08 \times \sqrt{1} = 10.24\%$

Για ομόλογο πέντε ετών:

RF ενός μήνα = $1.28 \times 0.11 \times \sqrt{0.08} = 3.98\%$

RF τριών μηνών = $1.28 \times 0.11 \times \sqrt{0.25} = 7.04\%$

RF έξι μηνών = $1.28 \times 0.11 \times \sqrt{0.5} = 9.96\%$

RF ενός έτους = $1.28 \times 0.11 \times \sqrt{1} = 14.08\%$

Πίνακας 1
Συντελεστές κινδύνου (%) με διακανονισμό 1 μήνα, 3 μηνών, 6 μηνών και 12 μηνών

	1 μήνας	*3 μήνες*	*6 μήνες*	*12 μήνες*
Ομόλογο ενός έτους	2.9	5.1	7.2	10.2
Ομόλογο πέντε ετών	4.0	7.0	9.9	14.1

Με αυτόν τον πίνακα, ο αναλυτής είναι έτοιμος να απαντήσει άμεσα στην έκθεση κινδύνου που δημιουργεί μία από τις παραπάνω συναλλαγές. Για παράδειγμα, εάν λάβει ένα επείγον τηλεφώνημα για πώληση ενός πενταετούς ομολόγου με διακανονισμό έξι μηνών, αξίας 50 εκατ. €, τότε θα γνωρίζει από τον παραπάνω πίνακα ότι ο κίνδυνος της συναλλαγής είναι περίπου 5 εκατ. €.

Δραστηριότητα 2/Κεφάλαιο 3

Η ημερήσια ιστορική μεταβλητότητα του γενικού δείκτη τιμών του Χρηματιστηρίου Αξιών Αθηνών έχει υπολογιστεί ότι ισούται με 56.9%.

α) Να υπολογιστούν οι συντελεστές κινδύνου (%) για συναλλαγές ενός, τριών, έξι και δώδεκα μηνών. Επίπεδο εμπιστοσύνης 90% και 98%.

β) Να σχολιάσετε σύντομα και να ερμηνεύσετε τα αποτελέσματα.

Υπόδειξη: Θα κάνετε εφαρμογή της σχέσης (1). Συμβουλευτείτε και τα αντίστοιχα αριθμητικά παραδείγματα της ενότητας 3.1.4.

Η παραπάνω αντιστοίχιση του κινδύνου είναι απλή και δίνει γρήγορα μια εικόνα του μέγιστου πιθανού κινδύνου. Η βασική ιδέα βρίσκεται στο γινόμενο HV × $\sqrt{t}$, δηλαδή στη δομή της μεταβλητότητας. Μπορούμε, λοιπόν, να έχουμε και άλλες εκφράσεις της ποσότητας REE για τον υπολογισμό της έκθεσης στον κίνδυνο παράγωγων προϊόντων.

Για παράδειγμα, ένα απλό call option με τιμή του υποκείμενου προϊόντος S (για παράδειγμα, μετοχής) και τιμή εξάσκησης (strike price) K, έχει μέγεθος αποπληρωμής στην εξάσκηση ή εσωτερική αξία του δικαιώματος (payoff ή intrinsic value): max[0, $S - K$].

Στην περίπτωση αφερεγγυότητας του αντισυμβαλλομένου, ο αγοραστής του δικαιώματος διατρέχει κίνδυνο, που απορρέει από διάφορες πηγές, εκτός της απόκλισης από την εσωτερική αξία, όπως:

- να έχει ζημία ίση με το premium που πλήρωσε στον πωλητή του δικαιώματος·
- να έχει ζημία που εξαρτάται από τη μεγάλη απόκλιση από την τιμή του υποκείμενου προϊόντος στην τρέχουσα αγοράς.

Η έκθεση στον κίνδυνο, REE, είναι

$$\begin{aligned} \text{REE} &= \text{premium} + \max[0, \text{PMR}] \\ &= \text{premium} + \max[0, \text{NC} \times \{(\text{RF} \times S) + (S - K)\}] \end{aligned} \tag{3}$$

όπου PMR είναι ο πιθανός κίνδυνος της αγοράς (potential market risk), NC είναι ο αριθμός των συμβολαίων (number of contracts) και RF είναι ο συντελεστής κινδύνου που έχουμε ορίσει παραπάνω.

Ο όρος RF × S δηλώνει την πιθανή μεταβολή στην τιμή του υποκείμενου χρηματοοικονομικού προϊόντος, είτε αυξητικά είτε αρνητικά. Δηλαδή, παριστάνει τη μέγιστη ανοδική ή καθοδική απόκλιση στη διάρκεια ολόκληρης της ζωής της συναλλαγής από τα τρέχοντα επίπεδα τιμών. Ο όρος $S - K$ παριστάνει την εσωτερική αξία του δικαιώματος. Για ένα Vanilla put option η εσωτερική αξία είναι

$$\max[0, (K - S)]$$

Παράδειγμα 3

Η Τράπεζα Α αγοράζει 100 συμβόλαια put στο γερμανικό μάρκο με K = 0.5800 \$/DEM, S = 0.5893 \$/DEM και λήξη σε 8 μήνες. Πληρώνει δε στον πωλητή του δικαιώματος, που είναι η Τράπεζα Β, premium \$2.36. Η ετήσια μεταβλητότητα \$/DEM είναι 12.5%. Να υπολογιστεί η έκθεση σε κίνδυνο σε επίπεδο εμπιστοσύνης 90%.

Ο συντελεστής κινδύνου, RF, είναι

$$\mathrm{RF} = 0.125 \times \sqrt{\frac{8}{12}} \times 1.28 = 0.13064$$

Η έκθεση στον κίνδυνο, συνεπώς, είναι

$$\begin{aligned}\mathrm{REE} &= \mathrm{premium} + \max[0, \mathrm{NC} \times \{(\mathrm{RF} \times S) + (K - S)\}]\\ &= 2.36 + \max[0, 100 \times \{(0.13064 \times 0.5893) + (0.5800 - 0.5893)\}]\\ &= 2.36 + \max[0, 100 \times 0.06768]\\ &= \$9.128\end{aligned}$$

Αυτό σημαίνει ότι, στη διάρκεια των 8 μηνών και στην περίπτωση που η Τράπεζα Β αθετήσει την υποχρέωση της, ο αγοραστής του δικαιώματος (δηλαδή η Τράπεζα Α) διατρέχει τον κίνδυνο ζημίας των \$9.12, που συνίσταται: α) στην απώλεια του premium \$2.36 και β) στη ζημία από πιθανή μεταβολή του put option.

3.1.2 Αξία σε κίνδυνο (VaR) και κεφάλαιο σε κίνδυνο (CaR)

Αξία σε κίνδυνο ή VaR είναι η μέγιστη δυνατή ζημία σε δεδομένο επίπεδο εμπιστοσύνης. Το επίπεδο εμπιστοσύνης είναι η πιθανότητα η ζημία να ξεπεράσει αυτή τη μέγιστη τιμή. Η μεθοδολογία VaR μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον ορισμό του προσαρμοσμένου στον κίνδυνο κεφαλαίου, οπότε η VaR γίνεται κεφάλαιο σε κίνδυνο ή CaR. CaR, λοιπόν, είναι το κεφάλαιο που απαιτείται για να απορροφήσει την πιθανή ζημία σε δεδομένο επίπεδο εμπιστοσύνης. Αυτό το επίπεδο εμπιστοσύνης εκφράζει την πιθανότητα αθέτησης της τράπεζας.

Τόσο η μεθοδολογία VaR όσο και η μεθοδολογία CaR αποτελούν σημαντικά εργαλεία στη διαχείριση τραπεζικού κινδύνου και μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να καλύψουν μεγάλο μέρος των αναγκών της σύγχρονης διαχείρισης κινδύνου.

Μερικές απο τις εφαρμογές της μεθοδολογίας VaR είναι

α) η μέτρηση του κινδύνου ανά επίπεδο δραστηριότητας, πελατείας και προϊόντος,
β) ο προσδιορισμός του ανώτατου ορίου της τιμής VaR,
γ) η μέτρηση της αποτελεσματικότητας προσαρμοσμένης στον κίνδυνο, όπου η VaR χρησιμοποιείται ως ένα μέγεθος κινδύνου.

Η CaR είναι, επίσης, μια σημαντική μεθοδολογία. Βασικά ερωτήματα στα οποία καλείται να δώσει απαντήσεις είναι τα εξής:

α) Είναι επαρκές το κεφάλαιο δεδομένων των κινδύνων;
β) Είναι αποδεκτοί οι αναλαμβανόμενοι κίνδυνοι, δοθέντος του διαθέσιμου κεφαλαίου;

Με δεδομένους τους κινδύνους, το επίπεδο του κεφαλαίου προσδιορίζει την πιθανότητα αθέτησης της τράπεζας. Συνεπώς, το κεφάλαιο πρέπει να προσαρμοστεί στο σημείο εκείνο για το οποίο ο κίνδυνος είναι αποδεκτός. Συγχρόνως, δοθέντος του κεφαλαίου, το επίπεδο του κινδύνου προσδιορίζει το επίπεδο αντοχής και, έτσι, ο κίνδυνος πρέπει να προσαρμοστεί σε ανεκτό επίπεδο.

Η μεθοδολογία CaR εγείρει μερικές εξειδικεύσεις

i) πρέπει να υπολογίζεται σε ολόκληρο το χαρτοφυλάκιο της τράπεζας,
ii) πρέπει να αθροίζεται σε όλους τους τύπους κινδύνου,
iii) το επίπεδο εμπιστοσύνης είναι συνάρτηση του επιθυμητού κινδύνου αθέτησης της τράπεζας.

Έτσι, και η μεθοδολογία VaR και η μεθοδολογία CaR μετρούν πιθανές ζημίες. Όμως, το επίπεδο εμπιστοσύνης δεν παραμένει το ίδιο. Όταν μια συναλλαγή υπερβαίνει την επιτρεπόμενη VaR, πρέπει να ακολουθήσουν διορθωτικές κινήσεις. Η VaR συνδέεται με τις καθημερινές λειτουργίες του τραπεζικού οργανισμού, ενώ η CaR αποδεικνύεται περισσότερο χρήσιμη και αποτελεσματική, όταν συνδέεται με το προσαρμοσμένο στον κίνδυνο κεφάλαιο.

Συνεπώς, οι δύο μεθοδολογίες VaR και CaR διαφέρουν σε δύο, τουλάχιστον, σημεία:

1. CaR είναι το προσαρμοσμένο στον κίνδυνο κεφάλαιο σε συνολικό επίπεδο, μετά τη διαφοροποίηση του κινδύνου, ενώ η VaR μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε κάθε ενδιάμεσο επίπεδο της διαχείρισης κινδύνου.
2. Η CaR βασίζεται σε υψηλότερο επίπεδο αντοχής από ό,τι η VaR, αφού συμφωνεί με την πιθανότητα αθέτησης της τράπεζας.

Η VaR έχει πολλά πλεονεκτήματα όταν συγκρίνεται με τα κλασικά μεγέθη μέτρησης κινδύνου. Επίσης, η μεθοδολογία VaR χρησιμοποιείται για τον ορισμό της CaR, που εφαρμόζεται άμεσα στην επάρκεια κεφαλαίων. Πράγματι, τα κλασικά μεγέθη αποτίμησης κινδύνου αγοράς, επιτοκίων, πιστωτικού κινδύνου κ.λπ., δεν μπορούν να εκτιμήσουν πιθανή ζημία. Η μεθοδολογία VaR μπορεί να συνδυάσει όλα αυτά τα μεγέθη και να δώσει τη διάσταση της πιθανής ζημίας. Στο Διάγραμμα 3 παρουσιάζεται η ποιοτική διαφορά μεταξύ των παραδοσιακών μεγεθών μέτρησης του κινδύνου και της μεθοδολογίας VaR.

Διάγραμμα 3
Μερικά από τα κλασικά μεγέθη μέτρησης κινδύνου στη μεθοδολογία VaR

ΚΙΝΔΥΝΟΣ ΑΓΟΡΑΣ	ΠΙΣΤΩΤΙΚΟΣ ΚΙΝΔΥΝΟΣ	ΚΙΝΔΥΝΟΣ ΕΠΙΤΟΚΙΩΝ
* Μεγέθη αποτίμησης κινδύνου * Τιμές αγοράς	* Κατάταξη * Ληκτότητα * Παρακολούθηση χαρτοφυλακίου	* Gaps * Durations

↓

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ VaR:
ΜΕΓΕΘΟΣ ΜΕΤΡΗΣΗΣ ΚΑΙ ΟΡΙΟΘΕΤΗΣΗΣ ΚΙΝΔΥΝΟΥ

Δραστηριότητα 3/Κεφάλαιο 3

Με βάση όσα αναφέρονται παραπάνω αλλά και στο κεφάλαιο 2, παρουσιάστε σύντομα (50 λέξεις) τις διαφορές των VaR και CaR. Στη συνέχεια, ανατρέξτε στην υποενότητα 3.1.2 και ελέγξτε την ορθότητα της απάντησής σας.

3.1.3 Τύποι πιθανής ζημίας

Υπάρχουν διάφορες μορφές πιθανής ζημίας: αναμενόμενη ζημία, μη αναμενόμενη

ζημία και ασυνήθης ζημία.

α) Η *αναμενόμενη ζημία* (expected loss ή EL) είναι η στατιστική εκτίμηση της μέσης ζημίας. Η μέση ζημία, συχνά, υπολογίζεται για τον πιστωτικό κίνδυνο, γιατί παρουσιάζει τη στατιστική μέση τιμή σε ολόκληρο το χαρτοφυλάκιο μεγάλου αριθμού συναλλαγών και δανείων και για όλα τα πιθανά αποτελέσματα.

β) Η *μη αναμενόμενη ζημία* (unexpected loss ή UL) είναι η μέγιστη ζημία που θα παραβιαστεί σε δεδομένο περιορισμένο αριθμό περιπτώσεων και μόνο. Η μη αναμενόμενη ζημία εκφράζει τη ζημία εκείνη που αποκλίνει από την αναμενόμενη τιμή.

Η μη αναμενόμενη ζημία είναι η VaR, δοθέντος του επιπέδου αντοχής. Ο δεδομένος περιορισμός είναι το επίπεδο αντοχής. Υπάρχουν τόσες μη αναμενόμενες ζημίες όσα και επίπεδα αντοχής. Συχνά, η μη αναμενόμενη ζημία ορίζεται και ως η τυπική απόκλιση της ζημίας. Για τον λόγο αυτό, άλλωστε, η δυνατή ζημία εκτιμάται ως πολλαπλάσιο της μεταβλητότητας της ζημίας.

γ) Η *ασυνήθης ζημία* (exceptional loss ή EL) είναι αυτή που εμφανίζεται πέρα από τη μέγιστη μη αναμενόμενη ζημία. Βέβαια, η πιθανότητα της εμφάνισης της είναι ιδιαίτερα μικρή, με αποτέλεσμα, στην πράξη, να είναι πολύ δύσκολο να της δοθεί συγκεκριμένη τιμή. Οριακά, για παράδειγμα, όλα τα περιουσιακά στοιχεία μιας τράπεζας μπορεί να χαθούν, αν και μια τέτοια περίπτωση έχει μηδαμινή πιθανότητα εμφάνισης.
Εάν θέλουμε να αποτιμήσουμε αυτή την πιθανότητα, τότε θα πρέπει τα επίπεδα εμπιστοσύνης να είναι πολύ αυστηρά και η VaR πολύ υψηλή, με αποτέλεσμα να έχουμε μειωμένο όγκο συναλλαγών.

3.1.4 Μεγέθη αποτίμησης της μη αναμενόμενης ζημίας

Για την αποτίμηση και τη μέτρηση της μη αναμενόμενης ζημίας, πρέπει να γίνονται κάποιες υποθέσεις σχετικά με την κατανομή ζημίας. Οι υποθέσεις αυτές εξαρτώνται από το είδος του κινδύνου. Για την περίπτωση του *κινδύνου της αγοράς*, η κατανομή ζημίας τείνει να ακολουθεί την κανονική κατανομή. Στην περίπτωση αυτή υπάρχει μία κεντρική τιμή, επειδή υπάρχουν πολλές δυνατότητες να παρατηρηθεί κέρδος ή ζημία. Η ζημία είναι, απλώς, το αρνητικό κέρδος.

Στην περίπτωση του *πιστωτικού κινδύνου* πρέπει να διαχωρίσουμε τα κέρδη από τις ζημίες. Τα κέρδη είναι αποτέλεσμα των εισοδημάτων και οι ζημίες είναι αποτέλεσμα των αθετήσεων. Συνεπώς, στην περίπτωση αυτή, η κατανομή ζημίας εστιάζεται στις ζημίες που είναι αποτέλεσμα μιας αθέτησης υποχρέωσης και όχι στα κέρδη. Η μηδενική τιμή, λοιπόν, είναι η ελάχιστη τιμή της κατανομής ζημίας, η οποία είναι κυρτή προς τα αριστερά, αφού η συχνότερη ζημία είναι πολύ μικρή.

Η VaR σε δεδομένο επίπεδο εμπιστοσύνης είναι τέτοια, ώστε η πιθανότητα να ξεπεραστεί η αναμενόμενη ζημία να είναι ίση με το επίπεδο αντοχής. Η μέγιστη συνολική ζημία στο ίδιο επίπεδο αντοχής είναι το άθροισμα της αναμενόμενης και της μη αναμενόμενης ζημίας (ή VaR). Η VaR παριστάνει το απαραίτητο κεφάλαιο για την απορρόφηση των αποκλίσεων από την αναμενόμενη ζημία (πιστωτικός κίνδυνος).

Η VaR, κάτω από τις υποθέσεις της κατανομής, στην πράξη, εκτιμάται ως πολλαπλάσιο της τυπικής απόκλισης της ζημίας [βλ. και σχέση (2), παραπάνω]:

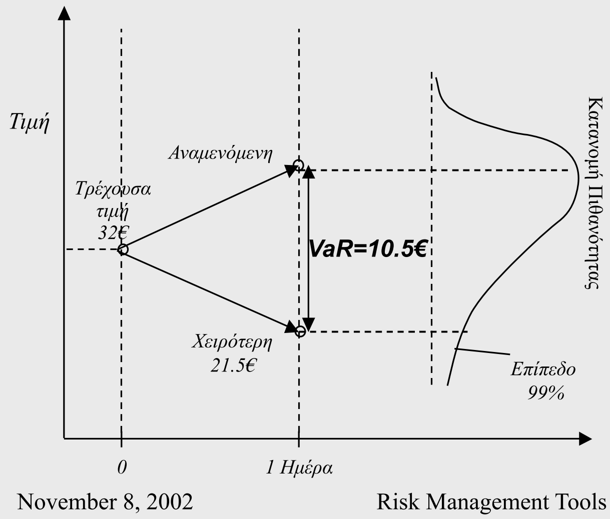
$$\text{VaR} = \begin{pmatrix} \text{Τυπική απόκλιση} \\ \text{της ζημιάς} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \text{Πολλαπλάσιο} \\ \text{της τυπικής ζημιάς} \end{pmatrix} \quad (4)$$

Το πολλαπλάσιο της μεταβλητότητας εξαρτάται από τις υποθέσεις που έχουν γίνει δεκτές σχετικά με την κατανομή ζημίας και το επιλεγμένο επίπεδο εμπιστοσύνης. Για παράδειγμα, όπως είπαμε και σε προηγούμενη ενότητα, όταν η κατανομή που ακολουθείται είναι η κανονική κατανομή και το επίπεδο σημαντικότητας είναι ίσο με 5%, τότε το πολλαπλάσιο της τυπικής απόκλισης (τυπική απόκλιση) είναι 1.65. Όμως, η ποιότητα της μέτρησης της VaR εξαρτάται από την ποιότητα των εισροών, των δεδομένων και των στοιχείων που χρειάζονται για τον υπολογισμό της. Έτσι, η εκτίμηση της VaR εξαρτάται από την ποιότητα:

- *της τυπικής απόκλισης της ζημίας*
- *του επιπέδου εμπιστοσύνης*
- *των υποθέσεων γύρω από την κατανομή ζημίας.*

Παράδειγμα 4

Ας υποθέσουμε ότι η τρέχουσα τιμή μιας μετοχής σήμερα είναι 32€ και η εκτιμώμενη ημερήσια τυπική απόκλιση είναι σ = 4.5€, κάτω από την υπόθεση της κανονικής κατανομής των αποδόσεων της μετοχής. Η ερώτηση την οποία απαντά η VaR είναι: «εάν αύριο είναι μια «κακή» συνεδρίαση, ποιά είναι η μέγιστη ζημία σε αξία σε επίπεδο σημαντικότητας 99%;». Η απάντηση είναι ότι με πιθανότητα 99% ο κάτοχος της μετοχής αυτής θα χάσει λιγότερα από 32€ − 2.33 × 4.5€ = 21.5€ περίπου. Η ποσότητα 2.33 × 4.5 = 10.5€ είναι η αξία σε κίνδυνο σε επίπεδο εμπιστοσύνης 99% (βλ. το παρακάτω διάγραμμα).



3.1.5 Προσδιορισμός του CaR

Ο απλούστερος τρόπος για να προσδιορίσουμε το CaR είναι να χρησιμοποιήσουμε το απαιτούμενο κεφάλαιο, όπως ορίζεται από την εποπτική αρχή (regulatory capital), το οποίο θέτει *ad hoc* κινδύνους. Ο προσδιορισμός αυτός, ωστόσο, δεν είναι ικανός να ορίσει το απαιτούμενο κεφάλαιο για την απορρόφηση των πραγματικών κινδύνων που αντιμετωπίζει ο οργανισμός.

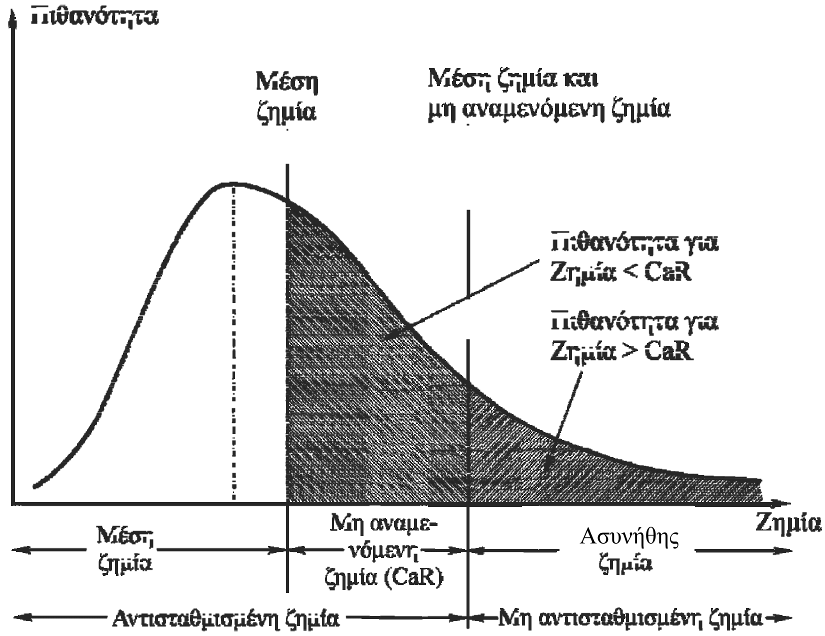
Ένας τρόπος να προσεγγίσουμε τον πραγματικό κίνδυνο είναι μέσω της χρήσης των ιστορικών στοιχείων της κερδοφορίας. Πράγματι, ακόμα και εάν διαθέτουμε λίγες παρατηρήσεις, μπορούμε να υπολογίσουμε τη μεταβλητότητα της κερδοφορίας (τον κίνδυνο δηλαδή) με τη βοήθεια της τυπικής απόκλισης των κερδών. Όμως, η μεταβλητότητα των κερδών είναι ένα οικονομικό μέγεθος που δεν μπορεί να συλλάβει τον κίνδυνο στην πηγή του παρά μόνο στο αποτέλεσμα.

Η μέτρηση του απαιτούμενου κεφαλαίου μπορεί να προσεγγιστεί αποτελεσματικά με τη μεθοδολογία της VaR. Στην περίπτωση αυτή:

1. Το κεφάλαιο που εκτιμάται προορίζεται για την προστασία έναντι των αποκλίσεων της ζημίας κάτω του μέσου όρου.
2. Οι αποκλίσεις αυτές είναι η μη αναμενόμενη ζημία και ορίζονται σε δεδομένο επίπεδο εμπιστοσύνης. Το κεφάλαιο προσφέρει την απαραίτητη προστασία και το CaR αντιστοιχεί σε αυτό το επίπεδο εμπιστοσύνης.

Στο επόμενο Διάγραμμα 4 δίνεται ένας γραφικός ορισμός του CaR. Η πιθανή ζημία περιλαμβάνει τη μη αναμενόμενη ζημία, η οποία εκτιμάται για δεδομένο επίπεδο εμπιστοσύνης, ή CaR, συν την ασυνήθη ζημία. Η απόκλιση της ζημίας από τη μέση τιμή σε δεδομένο επίπεδο εμπιστοσύνης είναι το CaR ή οικονομικό κεφάλαιο (economic capital).

Διάγραμμα 4
Ορισμός του CaR



Πηγή: *Bessis 1998*

Ακόμα και αν η κατανομή είναι άγνωστη, συνήθως εκφράζουμε το CaR ως πολλαπλάσιο της μεταβλητότητας της ζημίας, που είναι γνωστή στην περίπτωση της κανονικής κατανομής. Βέβαια, οι θεωρητικές κατανομές δεν προσεγγίζουν πάντα τις πραγματικές κατανομές. Αυτό είναι σωστό, ιδιαίτερα στην περίπτωση του πιστωτικού κινδύνου εξαιτίας της ασυμμετρίας της κατανομής του. Στην περίπτωση αυτή, η σχέση μεταξύ του πολλαπλάσιου της τυπικής απόκλισης της ζημίας και του επιπέδου εμπιστοσύνης είναι άγνωστη. Ωστόσο, ακόμα και στην περίπτωση αυτή, είναι αποδεκτό να εκφράζουμε το CaR ως πολλαπλάσιο της τυπικής απόκλισης και τούτο για τρεις, τουλάχιστον, λόγους:

- Είναι ένας απλός κανόνας από τη στιγμή που θα γίνει η κατάλληλη επιλογή του επιπέδου εμπιστοσύνης.
- Ακόμα και αν το επίπεδο εμπιστοσύνης είναι άγνωστο, το ύψος του κεφαλαίου παραμένει στο επίπεδο ενός αντικειμενικού μεγέθους κινδύνου, που είναι η μεταβλητότητα ζημίας.
- Τέλος, αυτή η διαδικασία διαχωρίζει την υποκειμενική εκτίμηση του ύψους του κινδύνου από την αντικειμενική αποτίμηση (ποσοτική εκτίμηση) του κινδύνου.

Η επιλογή του πολλαπλάσιου της τυπικής απόκλισης βασίζεται στην υπόθεση της κατανομής της ζημίας ή στην υποκειμενική επιλογή του, ανάλογα με τη «διάθεση» για κίνδυνο του διαχειριστή κινδύνου του οργανισμού. Σε κάθε περίπτωση, είναι

$$\text{CaR} = k \times \text{τυπική απόκλιση της ζημίας}$$

Παράδειγμα 5

Ο υπολογισμός της αναμενόμενης και της μη αναμενόμενης ζημίας (CaR) δίνεται σε ένα απλό παράδειγμα στον Πίνακα 2.

Πίνακας 2
Υπολογισμός της αναμενόμενης ζημίας και της μη αναμενόμενης ζημίας (CaR)

		Έτος 1
Έκθεση σε κίνδυνο (risk exposure)	a	500
Μέσο ετήσιο ποσοστό αθέτησης (default rate) (%)	b	1%
Μέγιστη απόκλιση από το ποσοστό αθέτησης (%)	$c = D_{max} - D_{av}$	3%
Αναμενόμενη ζημία (expected loss)	$a \times b$	5
Μη αναμενόμενη ζημία (unexpected loss)	$a \times c$	15

Οι αντίστοιχοι υπολογισμοί βασίζονται στις σχέσεις

$$D_{max} - D_{average} = k \times \text{τυπική απόκλιση (D) και}$$

$$\text{CaR} = (D_{max} - D_{average}) \times \text{έκθεση στον κίνδυνο}$$

όπου D είναι το ποσοστό αθέτησης. Εάν υποθέσουμε την τυπική απόκλιση του D ίση με 1.5% και k = 2, θα είναι

$$D_{\max} - D_{\text{average}} = 3\%$$

και

$$\text{CaR} = 3\% \times 500 = 15$$

Αυτός ο τρόπος υπολογισμού είναι ο απλούστερος που υπολογίζει το CaR μόνο για τον κίνδυνο αθέτησης. Η πιθανότητα αθέτησης της υποχρέωσης του αντισυμβαλλομένου είναι μεγαλύτερη όσο ο χρονικός ορίζοντας είναι μακρύτερος. Η αύξηση του κινδύνου αθέτησης με τον χρόνο μπορεί να μετρηθεί από τη μεταβολή των αθροιστικών ποσοστών αθέτησης, όταν ο χρονικός ορίζοντας μεγαλώνει.

Γενικά, η τυπική απόκλιση των αθροιστικών ποσοστών αθέτησης μεγαλώνει όσο μεγαλώνει και ο χρονικός ορίζοντας. Το τελικό αποτέλεσμα είναι ότι το CaR για την αντιμετώπιση του πιστωτικού κινδύνου αυξάνεται και είναι ιδιαίτερα ευαίσθητο στη μεταβολή του χρονικού ορίζοντα. Η έννοια του χρονικού ορίζοντα εξαρτάται από τον τρόπο διαχείρισης του πιστωτικού κινδύνου, αλλά και από την ικανότητα του ιδρύματος να ελέγχει τον κίνδυνο.

Παράδειγμα 6

Ο Πίνακας 3 δίνει ένα απλό παράδειγμα υπολογισμού του CaR σε δύο περιόδους. Το CaR μπορεί να θεωρηθεί ίδιο για όλες τις περιόδους ή να απελευθερωθεί όσο περνάει ο χρόνος, αφού ο πιστωτικός κίνδυνος μειώνεται με την πάροδο του χρόνου. Στο παράδειγμα του παρακάτω πίνακα, το απαιτούμενο CaR είναι ίσο με 24 στην αρχή, αλλά μειώνεται στο 9 μετά το πρώτο έτος και στο 0 στο τέλος του δεύτερου έτους.

Επίσης, μπορεί να χρησιμοποιηθεί η μέση τιμή του CaR αντί για την αρχική τιμή. Στο παράδειγμα του πίνακα, αυτή είναι ίση με 24/2 έτη = 12 έναντι της αρχικής τιμής 24. Τέλος, αφού το CaR μπορεί να χρησιμοποιηθεί για διάφορες περιόδους (π.χ., για διάφορα έτη, 9 για το δεύτερο έτος του παραδείγματος μας), η μελλοντική «κατανάλωση» του κεφαλαίου θα πρέπει να προεξοφληθεί με κάποιο επιτόκιο προεξόφλησης.

Πίνακας 3
Υπολογισμός του CaR σε ορίζοντα δύο χρονικών περιόδων

		Έτος 1	Έτος 2
Έκθεση σε κίνδυνο (exposure)	a	500	300
Μέσο ετήσιο ποσοστό αθέτησης (default rate) (%)	b	1%	1%
Μέγιστη απόκλιση από το ποσοστό αθέτησης (%)	c	3%	3%
Αναμενόμενη ζημία (expected loss)	$a \times b$	5	3
Μη αναμενόμενη ζημία (unexpected loss)	$a \times c$	15	9
Αθροιστικές Τιμές:			
Αναμενόμενη ζημία		8	
Μη αναμενόμενη ζημία		24	

Στο οικονομικό κεφάλαιο ή CaR στηρίζονται τα μεγέθη αποτίμησης προσαρμοσμένα στον κίνδυνο. Στα μεγέθη αυτά, γνωστά ως RAROC (Risk–Adjusted Return on Capital) ή RORAC (Return On Risk–Adjusted Capital) και SVA (Shareholders' Value Added), θα αναφερθούμε στην επόμενη υποενότητα.

3.1.6 Μεγέθη μέτρησης κερδοφορίας προσαρμοσμένης στον κίνδυνο

Ο λόγος RAROC προσαρμόζει τα κέρδη στην αναμενόμενη ζημία (EL) και χρησιμοποιεί το CaR για τη μέτρηση της μη αναμενόμενης ζημίας (UL):

$$\text{RAROC} = \frac{\text{Κέρδη} - \text{EL}}{\text{UL}} \tag{5}$$

Τα κέρδη (earnings) μπορούν να οριστούν σε διάφορα επίπεδα. Μπορούν, για παράδειγμα, να περιοριστούν στο καθαρό περιθώριο επιτοκίων και αποτελούν σημαντική παράμετρο στον παραπάνω λόγο για την εκτίμηση της ελάχιστης τιμής του RAROC.

Ένας τρόπος υπολογισμού των κερδών (hurdle rate) είναι

$$\text{κέρδη} \geq 25\% \times \text{CaR}$$

όπου το hurdle rate είναι ίσο με 25% και τα κέρδη είναι προσαρμοσμένα στα λειτουργικά έξοδα.

Έτσι, η προστιθέμενη αξία των μετόχων, SVA, είναι

$$\text{SVA} = \text{κέρδη} - 25\% \times \text{CaR}$$

Κάθε συναλλαγή –μεμονωμένη ή συναλλαγή στο χαρτοφυλάκιο– θα είναι αποδεκτή όσο η SVA παραμένει θετική, δηλαδή

$$\text{κέρδη} > 25\% \times \text{CaR}$$

Εάν υπολογίσουμε τα χρηματοοικονομικά κέρδη (financial earnings), που περιλαμβάνουν το περιθώριο επιτοκίου και άλλα έξοδα, τότε η ελάχιστη απαιτούμενη απόδοση εξαρτάται από την κατανομή του κόστους και είναι

$$\text{χρηματοοικονομικά κέρδη} \geq \text{κατανομή κόστους} + 25\% \times \text{CaR}$$

Για παράδειγμα, εάν το κόστος που αντιστοιχεί σε μια συναλλαγή είναι 100, τότε

$$\text{χρηματοοικονομικά κέρδη} \geq 100 + 25\% \times \text{CaR}$$

Στις περιπτώσεις αναφοράς του λόγου κερδοφορίας, οι υπολογισμοί γίνονται με τη βοήθεια ιστορικών στοιχείων και εξαρτώνται από τον χρονικό ορίζοντα υπολογισμού του κινδύνου και των κερδών, καθώς και από την αναμενόμενη και μη αναμενόμενη ζημία.

Παράδειγμα 7

Στον Πίνακα 4 δίνεται ένα παράδειγμα υπολογισμού των RAROC και SVA. Στο παράδειγμα αυτό υποθέτουμε ότι η ζημία ταυτίζεται με την έκθεση σε κίνδυνο. Το περιθώριο είναι 3% της έκθεσης, η αναμενόμενη ζημία είναι 1% και η μη αναμενόμενη ζημία είναι 2%. Αφού το RAROC είναι μεγαλύτερο του 25%, η SVA είναι θετική.

Πίνακας 4
Υπολογισμοί των RAROC και SVA για ένα έτος (αφαιρουμένου του λειτουργικού κόστους)

Έκθεση σε κίνδυνο	1,000
Αναμενόμενο ποσοστό αθέτησης	1.0%
Μέγιστη ανοδική απόκλιση του ποσοστού	3.0%
Περιθώριο	3.0%
Κόστος κεφαλαίου (προ φόρων)	25.0%
Αναμενόμενη ζημία	10
CaR	30
Περιθώριο	30
ΜΕΙΟΝ αναμενόμενη ζημία	−10
ΙΣΟΝ καθαρό περιθώριο	20
Κόστος κεφαλαίου (25% × 20)	7.5
RAROC	66.7%
SVA	12.5

Ενότητα 3.2

ΠΙΣΤΩΤΙΚΟΣ ΚΙΝΔΥΝΟΣ

Ο πιστωτικός κίνδυνος ορίζεται από τη ζημία που μπορεί να προέλθει στο χρηματοπιστωτικό ίδρυμα από την αθέτηση της συμφωνίας εκ μέρους του δανειζομένου (αφερεγγυότητα). Αν και ο πιστωτικός κίνδυνος μπορεί να πάρει διάφορες μορφές, ανάλογα με το είδος της συναλλαγής, ωστόσο αυτός ο απλός ορισμός υπογραμμίζει τόσο την *ποιότητα* όσο και την *ποσότητα* του κινδύνου.

Ο πιστωτικός κίνδυνος περιλαμβάνει τρεις διαφορετικές συνιστώσες κινδύνου: τον κίνδυνο αθέτησης (default risk), τον κίνδυνο έκθεσης ως αποτέλεσμα της πιθανής μελλοντικής αφερεγγυότητας (exposure risk ή credit exposure) και τον κίνδυνο ανάκτησης (recovery risk).

Στον πιστωτικό κίνδυνο θα επανέλθουμε στο κεφάλαιο 5, ωστόσο χρήσιμα στοιχεία για ορισμένες τραπεζικές συναλλαγές, όπως για τα τραπεζικά δάνεια και τον αντίστοιχο πιστωτικό κίνδυνο, μπορείτε να βρείτε στο βιβλίο του Κ. Γαλιάτσου (1999).

3.2.1 Ανάλυση πιστωτικού κινδύνου και διαχείριση

α) *Αφερεγγυότητα.* Η αφερεγγυότητα μπορεί να οριστεί με διάφορους τρόπους. Συνήθως, είναι η αθέτηση εξόφλησης μιας υποχρέωσης (payment default). Η αθέτηση αυτή δηλώνεται, όταν μια προγραμματισμένη πληρωμή δεν εξοφλείται για κάποιο χρονικό διάστημα μετά τη λήξη της. Συνήθως, το χρονικό αυτό διάστημα είναι μικρό, για παράδειγμα 3 μήνες.

Υπάρχει και η οικονομική αφερεγγυότητα (economic default), η οποία εμφανίζεται όταν η αξία των στοιχείων του ενεργητικού γίνεται μικρότερη από την αξία των υποχρεώσεων. Η οικονομική αξία των στοιχείων του ενεργητικού είναι η αξία των προεξοφλημένων αναμενόμενων μελλοντικών εισροών (cash flows), η οποία μεταβάλλεται ανάλογα με τις συνθήκες της αγοράς.

Ο κίνδυνος αφερεγγυότητας μετράται από την πιθανότητα εμφάνισης του γεγονότος αυτού και εξαρτάται από την πιστοληπτική ικανότητα του δανειζομένου, η οποία, με τη σειρά της, εξαρτάται από πολλούς παράγοντες, όπως το μέγεθος της εταιρείας, οι παράγοντες ανταγωνισμού, οι συνθήκες της αγοράς, η ποιότητα της διοίκησης της επιχείρησης και οι μέτοχοι.

Η ποσοτική αποτίμηση του κινδύνου αφερεγγυότητας είναι πολύ δύσκολη. Μάλιστα, θα μπορούσε να παρομοιαστεί με την πρόβλεψη των σεισμών: συμβαίνουν σπάνια, αλλά, όταν εμφανίζονται, απειλούν με τεράστιες και, πολλές φορές, με ανεπανόρθωτες ζημίες.

Έτσι, η μέτρηση της πιθανότητας αφερεγγυότητας δεν είναι άμεση. Συνήθως, χρησιμοποιούνται ιστορικά στατιστικά στοιχεία μέσω ειδικών εταιρειών κατάταξης ή θεσμικών οργανισμών και στατιστικών υπηρεσιών (credit rating agencies). Από αυτές τις στατιστικές πληροφορίες μπορεί να προσδιοριστεί ένας συντελεστής που χρησιμοποιείται για την προσέγγιση της πιθανότητας αφερεγγυότητας. Ο συντελεστής αυτός (ratio of defaults), για δεδομένη χρονική περίοδο, είναι ο λόγος της αφερεγγυότητας προς το σύνολο του δείγματος των δανειζομένων.

Ευρήματα εμπειρικών μελετών έχουν δείξει ότι ο συντελεστής συσχέτισης μεταξύ των κατατάξεων, με βάση τα ιστορικά στοιχεία και τα ποσοστά αθέτησης της υποχρέωσης αντισυμβαλλομένου, είναι ισχυρά αρνητικός. Το αποτέλεσμα αυτό είναι σημαντικό στην πρόβλεψη ποσοστών αφερεγγυότητας ομολόγων (bond default rates).

β) *Έκθεση στον κίνδυνο.* Η έκθεση στον κίνδυνο μελλοντικά, λόγω αφερεγγυότητας, δεν είναι πάντοτε σημαντική. Για μερικές, μάλιστα, δραστηριότητες είναι μηδενική. Για δραστηριότητες για τις οποίες υπάρχει προσδιορισμένος τρόπος εξόφλησης, η έκθεση στον κίνδυνο είναι πολύ μικρή ή και αμελητέα. Σημαντικός, όμως, κίνδυνος υπάρχει στην περίπτωση των παράγωγων προϊόντων. Στην περίπτωση αυτή, η πηγή του κινδύνου είναι οι μεταβολές της αγοράς.

Η τιμή ρευστοποίησης των παράγωγων χρηματοοικονομικών προϊόντων εξαρτάται από αυτές τις μεταβολές που είναι συνεχείς. Ακόμα και όταν η τιμή ρευστοποίησης είναι θετική, υπάρχει πάντα ο κίνδυνος για τον τραπεζικό οργανισμό, αφού μπορεί να χάσει χρήματα λόγω της αφερεγγυότητας του αντισυμβαλλομένου.

γ) Κίνδυνος ανάκτησης. Η ανάκτηση μέρους της ζημίας στην περίπτωση αφερεγγυότητας δεν είναι προβλέψιμη και εξαρτάται από τον τύπο της αφερεγγυότητας και άλλους παράγοντες, όπως οι εγγυήσεις από τον δανειζόμενο και ο τύπος αυτών των εγγυήσεων.

Η διαχείριση του πιστωτικού κινδύνου σχετίζεται άμεσα με τη διαδικασία λήψης απόφασης, τόσο πριν την απόφαση πίστωσης όσο και μετά, δηλαδή με τη διαδικασία της παρακολούθησης και της ενημέρωσης. Η διαδικασία αυτή δεν στηρίζεται μόνο σε ποσοτικά χρηματοοικονομικά στοιχεία, αλλά και σε υποκειμενικές εκτιμήσεις.

Όσο μεγαλύτερο ποσό αναμένεται να ανακτηθεί, τόσο μικρότερος είναι ο πιστωτικός κίνδυνος, με δεδομένο ότι και οι υπόλοιπες οικονομικές συνθήκες παραμένουν σταθερές. Αποτελέσματα εμπειρικών αναλύσεων έχουν δείξει ότι το ποσοστό ανά–κτησης δεν είναι σταθερό μέγεθος, αλλά, αντίθετα, μεταβάλλεται σημαντικά, μεταξύ 10%, στην περίπτωση μικρών δανείων, και 90%, στην περίπτωση των παράγωγων προϊόντων.

Στην περίπτωση των παράγωγων προϊόντων, ο πιστωτικός κίνδυνος έχει δύο ιδιαίτερα χαρακτηριστικά:

- Το πρώτο αναφέρεται στην ανάγκη της ποσοτικής έκφρασης της έκθεσης στον κίνδυνο ή κίνδυνο αγοράς. Στα παράγωγα, αντίθετα από ό,τι συμβαίνει με τα ομόλογα ή τα απλά τραπεζικά δάνεια, η έκθεση στον κίνδυνο εξαρτάται από το εάν το συμβόλαιο έχει θετική ή αρνητική τρέχουσα τιμή, καθώς και από τις μελλοντικές μεταβολές.
- Το δεύτερο χαρακτηριστικό αναφέρεται στη δυνατότητα διαφοροποίησης μεταξύ των αντισυμβαλλομένων και των χαρτοφυλακίων.

Πριν κλείσουμε το θέμα αυτό, πρέπει να σημειώσουμε ότι, για την ανάλυση του πιστωτικού κινδύνου, ακολουθούνται μέθοδοι τύπου VaR, που χρησιμοποιούνται και στην ανάλυση του κινδύνου αγοράς. Πράγματι, ο πιστωτικός κίνδυνος εμπεριέχει και στοιχεία του κινδύνου αγοράς. Ο κίνδυνος αφερεγγυότητας αποτιμά την πιθανότητα αθέτησης της υποχρέωσης του αντισυμβαλλομένου και ο κίνδυνος αγοράς μετρά τη ζημία που θα προκύψει στην περίπτωση της αθέτησης της υποχρέωσης του αντισυμβαλλομένου. Ωστόσο, πρέπει να παρατηρήσουμε ότι υπάρχουν σημαντικές και ουσιώδεις διαφορές μεταξύ του πιστωτικού κινδύνου και των κινδύνων αγοράς. Μερικές από τις βασικότερες διαφορές αυτές είναι:

α) Οι παράγοντες που πρέπει να λαμβάνονται υπόψη στην ανάλυση του πιστωτικού κινδύνου, δηλαδή η πιθανότητα αφερεγγυότητας, το ποσοστό ανάκτησης και η πιστοληπτική ιακανότητα του αντισυμβαλλομένου, δεν υφίστανται ή δεν έχουν την ίδια σημαντικότητα στην περίπτωση του κινδύνου της αγοράς.

β) Στην περίπτωση του κινδύνου της αγοράς, ενδιαφερόμαστε για τον κίνδυνο στην εξέλιξη μιας βραχυπρόθεσμης χρονικής περιόδου. Αντίθετα, στην περίπτωση του πιστωτικού κινδύνου, το ενδιαφέρον είναι μακροχρόνιο.

γ) Η υπόθεση της κανονικότητας στην περίπτωση του πιστωτικού κινδύνου είναι προβληματική, ενώ δεν ισχύει το ίδιο στην περίπτωση του κινδύνου της αγοράς. Τούτο ισχύει για διάφορους λόγους, όπως:

  i) η υπόθεση της κανονικότητας τεκμηριώνεται δυσκολότερα σε μακροχρόνιες περιόδους,

  ii) στην περίπτωση του πιστωτικού κινδύνου, η κατανομή της υποκείμενης μεταβλητής κινδύνου –δηλαδή η εμφάνιση ή όχι αφερεγγυότητας– δεν κατανέμεται κανονικά.

3.2.2 Ποσοτική ανάλυση πιστωτικού κινδύνου τραπεζικών συναλλαγών

Από την πλευρά της ποσοτικής ανάλυσης, ο πιστωτικός κίνδυνος προσδιορίζεται από τη ζημία στο ενδεχόμενο της αφερεγγυότητας του αντισυμβαλλομένου. Είδαμε και στην προηγούμενη υποενότητα ότι ο πιστωτικός κίνδυνος προέρχεται από τον συνδυασμό του κινδύνου αφερεγγυότητας, του κινδύνου έκθεσης και του κινδύνου ανάκτησης.

Το τελικό αποτέλεσμα, η ζημία L, είναι άγνωστο και μπορεί να προσεγγιστεί από το γινόμενο της τυχαίας μεταβλητής D, που χαρακτηρίζει τον κίνδυνο αφερεγγυότητας (εκφρασμένο ως ποσοστό), της αβέβαιης έκθεσης στον κίνδυνο E, που παίρνει μία τιμή, και της αβεβαιότητας της ανάκτησης R (που εκφράζεται επίσης ως ποσοστό):

$$L = D \times E \times (1 - R) \tag{6}$$

Η συμβολική εξίσωση (20) εκφράζει την προβληματική για την ποσοτική αποτίμηση του πιστωτικού κινδύνου. Θα επανέλθουμε στην εξίσωση (6) στην υποενότητα 3.2.3.

Η κατάλληλη ποσοτική προσέγγιση του κινδύνου αφερεγγυότητας είναι, οπωσδήποτε, η πιθανότητα αφερεγγυότητας, η οποία, ωστόσο, είναι πολύ δύσκολο να προσδιοριστεί. Μια εναλλακτική μέθοδος για την ποσοτικοποίηση του κινδύνου αφερεγγυότητας προέρχεται από την εκτίμηση της πιθανότητας φερεγγυότητας, που βασίζεται σε μερικά χαρακτηριστικά του δανειζομένου, τα οποία προέρχονται από ιστορικά στοιχεία αντίστοιχων βάσεων δεδομένων.

Υπάρχει μια σημαντική συσχέτιση μεταξύ των ταξινομήσεων (ratings) και της συχνότητας εμφάνισης αφερεγγυότητας. Τέτοιες στατιστικές πληροφορίες δημοσιεύονται ετησίως από εξειδικευμένους οργανισμούς για διαφορετικές περιόδους και τάξεις. Όμως, η φερεγγυότητα των περισσότερων πελατών των τραπεζών δεν έχει περιληφθεί σε διεθνείς κατατάξεις και, έτσι, οι κατατάξεις αυτές γίνονται εσωτερικά από κάθε τράπεζα. Τέτοιες πληροφορίες είναι διαθέσιμες και έχουν μεγάλη σημασία για την τράπεζα. Μεταξύ των άλλων, σε κάθε τάξη κατάταξης περιλαμβάνονται στατιστικά δεδομένα, όπως:

- η συχνότητα αθέτησης υποχρέωσης (αφερεγγυότητα) ανά έτος ή για μεγαλύτερες χρονικές περιόδους·
- η τυπική απόκλιση των ετήσιων συχνοτήτων·
- πίνακες μεταφοράς (transition matrices) μεταξύ των ταξινομημένων τάξεων. Οι πίνακες αυτοί δίνουν σε ποσοστά τη μεταβολή στην κατάταξη στη διάρκεια μιας περιόδου.

Η καλύτερη των περιπτώσεων είναι όταν ο κίνδυνος αφερεγγυότητας είναι μηδενικός. Συνήθως, όμως, το ποσοστά αφερεγγυότητας μεταβάλλονται από 0% μέχρι 8% ετησίως.

Διάφορες επενδυτικές υπηρεσίες μεγάλων οργανισμών (Credit Rating Agencies, CRA), όπως η Moody's Investors Services, έχουν μελετήσει σε βάθος τη συμπεριφορά αθέτησης υποχρέωσης αντισυμβαλλόμενων εταιρειών (πιστωτική φερεγγυότητα). Τα αποτελέσματα των μελετών αυτών καταλήγουν στη διερεύνηση της ιστορικής σχέσης μεταξύ πιστοληπτικής ικανότητας και των αντίστοιχων πιθανοτήτων (ή ποσοστών αφερεγγυότητας) για διάφορους χρονικούς ορίζοντες.

Η σχέση αυτή μπορεί να μελετηθεί από ένα απλό υπόδειγμα παλινδρόμησης γραμμικής μορφής, στο οποίο εξαρτημένη μεταβλητή είναι το ποσοστό αφερεγγυότητας

(δηλαδή η πιθανότητα μη εξόφλησης του δανείου) και ανεξάρτητες μεταβλητές είναι διάφοροι χρηματοοικονομικοί δείκτες, όπως οι λόγοι κεφάλαιο κίνησης προς σύνολο ενεργητικού, παρακρατηθέντα κέρδη προς σύνολο ενεργητικού, κέρδη προ φόρων προς σύνολο ενεργητικού, πωλήσεις, κ.ά.

Ο Altman (1988), χρησιμοποιώντας μια αντίστοιχη προσεγγιστική εξίσωση παλινδρόμησης, επέλεξε δείγμα από 33 βιομηχανικές επιχειρήσεις με χρηματοοικονομικά προβλήματα και 33 επιχειρήσεις του ίδιου τομέα χωρίς χρηματοοικονομικά προβλήματα. Δοκίμασε την προβλεπτική ικανότητα 22 χρηματοοικονομικών δεικτών και μόνο οι 5 βρέθηκαν ικανοί να ερμηνεύσουν τη χρεοκοπία που επακολούθησε (μερικοί είναι αυτοί που αναφέρθηκαν στην αμέσως προηγούμενη παράγραφο).

Αν και το υπόδειγμα του Altman (1988) δέχτηκε επικρίσεις, χρησιμοποιείται ευρύτατα στη διαχείριση του πιστωτικού κινδύνου, μέχρι και σήμερα. Για περισσότερες λεπτομέρειες όσον αφορά τη βαθμολόγηση της πιστωτικής φερεγγυότητας, σας παραπέμπουμε, μεταξύ άλλων, στο βιβλίο του Κ. Γαλιάτσου (1999).

Στον Πίνακα 5, για παράδειγμα, παρουσιάζεται μια κατάταξη της γνωστής εταιρείας Moody's για κάποιο έτος.

Πίνακας 5
Ετήσια ποσοστά αφερεγγυότητας: Κατάταξη της Moody's

Κατάταξη	Ετήσια ποσοστά αφερεγγυότητας
Ααα	0.02%
Αα	0.04%
Α	0.08%
Βαα	0.20%
Βα	1.80%
Β	8.30%

Πηγή: *Bessis, 1998*

Τα τρία πρώτα στοιχεία (Ααα, Αα και Α) χαρακτηρίζουν τους «επενδυτές»-δανειζομένους, με ποσοστά αφερεγγυότητας που είναι χαμηλότερα του 0.1%, και τα υπόλοιπα τρία (Βαα, Βα και Β) τους «κερδοσκόπους»-δανειζομένους, με ποσοστά αφερεγγυότητας μεταξύ 0.20% και 8.30%.

Γίνεται κατανοητό ότι δεν υπάρχει αναλογική σχέση ανάμεσα στις τάξεις και τα ποσοστά αφερεγγυότητας. Τα ποσοστά αφερεγγυότητας αυξάνουν εκθετικά με την πτώση των ομάδων κατάταξης. Για παράδειγμα, από την τάξη Ααα στην Αα η μεταβολή είναι μικρή και ίση με 0.02%, ενώ από την τάξη Βα στην τάξη Β η μεταβολή είναι 6%.

Ας σημειωθεί, ωστόσο, ότι η κατάταξη αυτή διαφέρει από έτος σε έτος. Η τυπική απόκλιση των ιστορικών ετήσιων ποσοστών αυξάνει όσο αυξάνει το επίπεδο του ποσοστού αφερεγγυότητας, με αποτέλεσμα να αυξάνει και ο κίνδυνος της μη αναμενόμενης ζημίας.

Βεβαίως, όσο μεγαλύτερη είναι η χρονική περίοδος ταξινόμησης, τόσο υψηλότερες είναι οι πιθανότητες να παρατηρηθεί το ενδεχόμενο «αφερεγγυότητα». Όσο περνάει ο χρόνος, ο κίνδυνος, επίσης, μεταβάλλεται. Βελτιώνεται ή, αντίθετα, χειροτερεύει.

Επίσης, η όποια ιστορική κατάταξη και σχέση δεν είναι ασφαλής και μπορεί να μεταβληθεί. Μάλιστα, έχει παρατηρηθεί ότι όσο το χρονικό διάστημα μεγαλώνει, τόσο αυξημένη είναι και η πιθανότητα αφερεγγυότητας. Έτσι, όταν θέλουμε να κάνουμε προβολή της πιθανότητας αφερεγγυότητας στο μέλλον, θα πρέπει να θεωρούμε τον ιστορικό μέσο αυξημένο κατά τι.

Η έκθεση στον κίνδυνο αναφέρεται στο ύψος του κινδύνου στο ενδεχόμενο της αθέτησης της υποχρέωσης, χωρίς να ληφθεί υπόψη η ανάκτηση μέρους της υποχρέωσης. Επειδή, όμως, η αφερεγγυότητα είναι ένα μελλοντικό ενδεχόμενο, και ο κίνδυνος έκθεσης είναι μελλοντικός και πρέπει να εκτιμηθεί. Όταν η έκθεση στον κίνδυνο είναι γνωστή, μπορεί να προσδιοριστεί από τη συμφωνία αποπληρωμής. Όταν, όμως, δεν είναι γνωστή, πρέπει να εκτιμηθεί και εξαρτάται από τη συμφωνία της τράπεζας με τον δανειζόμενο.

3.2.3 Πιστωτικός κίνδυνος και πιθανή ζημία

Ας θυμηθούμε την εξίσωση (6), η οποία εκφράζει το γεγονός ότι η ζημία είναι συνάρτηση της αφερεγγυότητας, της έκθεσης στον κίνδυνο και της ανάκτησης. Η αναμενόμενη ζημία είναι το γινόμενο της ζημίας, δεδομένης της αφερεγγυότητας, επί την πιθανότητα της αφερεγγυότητας. Η ζημία δεδομένης της αφερεγγυότητας, LGD, είναι

$$\begin{aligned} \text{LGD} &= \text{έκθεση} - \text{ανάκτηση} \\ &= \text{έκθεση} \times [1 - \text{ποσοστό}(\%)\ \text{ανάκτησης}] = E \times (1 - R) \end{aligned} \tag{7}$$

Η αναμενόμενη ζημία, $E(L)$, είναι

$$E(L) = \text{LGD} \times \text{prob(D)} = E \times (1 - R) \times \text{prob}(D) \tag{8}$$

όπου $\text{prob}(D)$ είναι η πιθανότητα αφερεγγυότητας.

Η αναμενόμενη έκθεση στον πιστωτικό κίνδυνο είναι η μέση σταθμισμένη πιθανότητα όλων των πιθανών εκθέσεων σε πιστωτικό κίνδυνο και στην περίπτωση της κανονικής κατανομής είναι

$$E = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}$$

δηλαδή, είναι πολλαπλάσια (με συντελεστή $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$) του κινδύνου (δηλαδή της τυπικής απόκλισης) της τρέχουσας τιμής.

Η αναμενόμενη ζημία, λοιπόν, από τη σχέση (8), γίνεται

$$E(L) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\sigma(1 - R) \times \text{prob}(D) \tag{8α}$$

Παράδειγμα 8

Ας δούμε ένα παράδειγμα μιας ανταλλαγής επιτοκίων (interest rate swap) ύψους 100 εκατ. δολ. ΗΠΑ για ένα έτος. Η τυπική απόκλιση εκτιμάται ίση με 4.5 εκατ. δολ. ΗΠΑ και ο αντισυμβαλλόμενος έχει χαρακτηριστεί από τη Moody's Ba με ποσοστό αφερεγγυότητας (πιθανότητα) 1.7%. Το ποσοστό ανάκτησης ορίζεται σε 45%.

Στην περίπτωση αυτή, έχουμε

$$E = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} = 4.5/2.50599 = 1.8 \text{ εκατ. δολ. ΗΠΑ.}$$

Σε επίπεδο 95% η χειρότερη έκθεση στον κίνδυνο είναι

$$1.65 \times \sigma = 1.65 \times 4.5 = 7.4 \text{ εκατ. δολ. ΗΠΑ.}$$

Από τη σχέση (22α) η αναμενόμενη ζημία θα είναι

$$E(L) = 1.8 \times 1.7\% \times 0.5 \times (1 - 45\%) = 8{,}400 \text{ δολ. ΗΠΑ}$$

όπου 1.7% ή 0.017 είναι η πιθανότητα αφερεγγυότητας, 0.5 είναι η πιθανότητα να είναι η ανταλλαγή in–the–money και (1 – 45%) = 0.55 είναι το ποσοστό ανάκτησης.

Επιπρόσθετα, η «χειρότερη περίπτωση» της ζημίας, WC(L), θα είναι

$$\text{WC}(L) = \text{WC}(E) \times [1 - \text{WC}(R)] \times \text{WC}(D) \tag{9}$$

όπου WC εννοεί τη «χειρότερη περίπτωση» (worst case).

3.2.4 Πίστωση σε κίνδυνο και αξία σε κίνδυνο προσαρμοσμένη στην πιθανότητα αφερεγγυότητας

Στο τελευταίο παράδειγμα της προηγούμενης υποενότητας, εκτιμήσαμε τη μέγιστη έκθεση στον πιστωτικό κίνδυνο (maximum credit exposure) σε επίπεδο εμπιστοσύνης 95%: MCE = 1.65 × σ. Το στοιχείο αυτό μας δίνει τη μέγιστη έκθεση στον πιστωτικό κίνδυνο που έχουμε για ένα μελλοντικό χρονικό διάστημα και ερμηνεύει την *πίστωση σε κίνδυνο* (credit at risk).

Μπορούμε, επίσης, να εκτιμήσουμε και τη μέγιστη ζημία εξαιτίας της αφερεγγυότητας (maximum default loss), σε δεδομένο επίπεδο εμπιστοσύνης. Το μέγεθος αυτό αποτιμά την αξία σε κίνδυνο που αντιμετωπίζει η τράπεζα και που οφείλεται στον πιστωτικό κίνδυνο.

Μπορεί, λοιπόν, να συγκριθεί με την αξία σε κίνδυνο που οφείλεται στον κίνδυνο των μεταβολών των τιμών της αγοράς. Με άλλα λόγια, αποτελεί ένα μέγεθος μέτρησης της αξίας σε κίνδυνο προσαρμοσμένης στην πιθανότητα αφερεγγυότητας (default VaR, d_VaR), που σε επίπεδο σ εμπιστοσύνης 95%, είναι

$$\text{d\_VaR} = 1.65 \times \sigma \times \text{prob}(D)$$

Με άλλα λόγια, μπορούμε να υπολογίσουμε:

α) την πίστωση σε κίνδυνο = m_VaR,

β) την d_VaR = prob(D) × m_VaR, που είναι η αξία σε κίνδυνο προσαρμοσμένη ως προς την πιθανότητα αφερεγγυότητας.

Ωστόσο, παρ' όλο που η πίστωση σε κίνδυνο και η d_VaR είναι παρόμοια μεγέθη με την παραδοσιακή VaR ανάλυση (market VaR, ή m_VaR), υπάρχουν σημαντικές διαφορές μεταξύ τους. Η σημαντικότερη αναφέρεται στον υπολογισμό τους: τα δύο αυτά μεγέθη είναι δυσκολότερο να εκτιμηθούν σε σχέση με την κλασική VaR, επειδή απαιτούν επιπρόσθετη πληροφορία αναφορικά με το ποσοστό ανάκτησης και την πιθανότητα αφερεγγυότητας.

Επίσης, η d_VaR αγνοεί τον κίνδυνο ζημίας από τις μεταβολές των τιμών της αγοράς, ενώ η m_VaR αγνοεί τον κίνδυνο αφερεγγυότητας.

Ας σημειωθεί, ακόμα, ότι η d_VaR είναι, συχνά, πολύ μικρότερη της m_VaR. Πράγματι, από την παραπάνω σχέση (β) προκύπτει ότι η d_VaR είναι πολλαπλάσιο της m_VaR κατά την πιθανότητα αφερεγγυότητας.

Άσκηση Αυτοαξιολόγησης 1/Κεφάλαιο 3

Ποια είναι η βασική διαφορά της d_VaR από την κλασική mVaR ανάλυση; Απαντήστε σε μια παράγραφο 50 λέξεων. Επιστρέψτε στην υποενότητα 3.2.4 και ελέγξτε την ορθότητα της απάντησης σας.

3.2.5 Ολοκλήρωση d_VaR και m_VaR

Είδαμε στην προηγούμενη υποενότητα ότι είναι δυνατόν να εκτιμήσουμε τη μέγιστη πιθανή ζημία αφερεγγυότητας (δηλαδή την d_VaR), καθώς και τις διαφορές της από την παραδοσιακή m_VaR, παρ' όλο που η φιλοσοφία των υποδειγμάτων και του υπολογισμού τους έχει πολλές ομοιότητες. Πρακτικά, όμως, αντιμετωπίζουμε πιθανή ζημία και από τα δύο μέτωπα, δηλαδή και τις δύο πηγές κινδύνου: τον πιστωτικό κίνδυνο και τον κίνδυνο αγοράς. Αυτό, λοιπόν, που ενδιαφέρει τον τραπεζικό οργανισμό είναι η εκτίμηση ενός συνολικού μεγέθους κινδύνου.

Ένας τρόπος να επιτευχθεί η ολοκλήρωση των δύο αυτών μεγεθών είναι πρώτα να υπολογιστούν χωριστά και ύστερα να αθροιστούν για να δώσουν ένα συνολικό, κοινό μέγεθος κινδύνου.

Το νέο αυτό μέγεθος μας δίνει μια άμεση απάντηση για τον συνολικό κίνδυνο αγοράς και τον πιστωτικό κίνδυνο

$$\mathrm{VaR}_{\mathrm{overall}} = [1 + \mathrm{prob}(D)]\mathrm{m\_VaR} \tag{10}$$

Η προσέγγιση αυτή μας επιτρέπει να εκτιμήσουμε τη συνολική VaR, $\mathrm{VaR}_{\mathrm{overall}}$, χωρίς να έχουμε την ανάγκη στοιχείων και πληροφοριών της πίστωσης. Ωστόσο, είναι μια πολύ απλοποιημένη μέθοδος και, ακριβώς επειδή δεν χρησιμοποιεί στοιχεία της πίστωσης, έχει δεχτεί δικαιολογημένες επικρίσεις.

Μια περισσότερο ρεαλιστική, αλλά και πολυπλοκότερη, μέθοδος εκτίμησης βασίζεται στη σχέση

$$\mathrm{VaR}_{\mathrm{overall}} = \sqrt{(\mathrm{m\_VaR})^2 + (\mathrm{d\_VaR})^2 + 2 \times \rho \times m\_\mathrm{VaR} \times \mathrm{d\_VaR}} \tag{11}$$

όπου ϱ είναι ο συντελεστής συσχέτισης μεταξύ των δύο μεγεθών VaR, που σημαίνει ότι θα πρέπει να είναι διαθέσιμα στον οργανισμό ιστορικά στοιχεία των αντίστοιχων μεγεθών.

Δραστηριότητα 4/Κεφάλαιο 3

α) Εάν οι κίνδυνοι δύο παραγόντων αλληλοεξουδετερώνονται, τότε η συνολική VaR αναμένεται να είναι μεγάλη ή μικρή;

β) Από ποιο στατιστικό μέγεθος εξαρτάται;

Υπόδειξη: Αναφερθείτε στη σχέση (11).

Θα βρείτε τη δική μας απάντηση στο Παράρτημα, στο τέλος του κεφαλαίου.

3.2.6 Πιθανότητα αφερεγγυότητας σε διάφορους χρονικούς ορίζοντες

Οι ετήσιες πιθανότητες μπορούν να μεταφραστούν σε πιθανότητες μεγαλύτερης χρονικής περιόδου, που μπορούν να χρησιμοποιηθούν, για παράδειγμα, στην εκτίμηση του πιστωτικού κινδύνου ενός δανείου μέχρι τη λήξη του. Αυτή η δυνατότητα επιτρέπει στην τράπεζα να αλλάζει την αξία του πιστωτικού κινδύνου στον χρόνο έκθεσης στον κίνδυνο, αφού ο κίνδυνος ο ίδιος μεταβάλλεται με το πέρασμα του χρόνου.

Παράδειγμα 9

Καταρχήν, ορίζουμε σταθερή την ετήσια πιθανότητα αφερεγγυότητας, για παράδειγμα 1%, για να μπορέσουμε να μετρήσουμε την επίδραση του χρόνου. Σε κάθε περίοδο υπάρχουν δύο πιθανότητες: αφερεγγυότητα (D) και φερεγγυότητα (ND). Όσο προχωράμε στον χρόνο, ο αριθμός των πιθανών ενδεχομένων αυξάνεται, αφού το ενδεχόμενο «αφερεγγυότητα» μπορεί να εμφανιστεί σε κάθε περίοδο. Ο Πίνακας 6 παρουσιάζει ένα παράδειγμα, όπου θεωρούμε τρεις περιόδους.

Εάν υποθέσουμε ότι η εταιρεία αποδείχτηκε αφερέγγυα, αυτό θα πρέπει να συνέβη σε κάποια από τις τρεις πρώτες περιόδους. Η πιθανότητα φερεγγυότητας (ND) είναι ίση με το γινόμενο της πιθανότητας της φερεγγυότητας σε κάθε περίοδο, που είναι 99%. Η πιθανότητα αφερεγγυότητας (D) στην τρίτη περίοδο ισούται με την πιθανότητα (ND) επί την πιθανότητα (D) στην τρίτη περίοδο.

Πίνακας 6
Πιθανότητες αφερεγγυότητας σε διάφορες διαδοχικές χρονικές περιόδους

Περίοδοι				
0	**1**	**2**	**3**	**Πιθανότητα**
	(D) 0.01			0.01
	0.99 (ND)	(D) 0.01		0.99 × 0.01
		0.99 (ND)	(D) 0.01	0.99 × 0.99 × 0.01
			0.99 (ND)	0.99 × 0.99 × 0.99

Η πιθανότητα αφερεγγυότητας στη δεύτερη περίοδο ισούται με την πιθανότητα *(D)*, με δεδομένο ότι στην πρώτη περίοδο εμφανίστηκε το ενδεχόμενο *ND.* Τέλος, η πιθανότητα (D) στην πρώτη περίοδο είναι ίση με 1%.

Έτσι, η πιθανότητα αφερεγγυότητας μεταξύ των χρονικών στιγμών 0 και 3 είναι ίση με την πιθανότητα ότι το ενδεχόμενο *D* εμφανίζεται είτε στην πρώτη είτε στη δεύτερη είτε στην τρίτη περίοδο:

$$0.01 + 0.01 \times 0.99 + 0.01 \times 0.99^2 = 0.0297 \text{ ή } 2.97\%$$

Η πιθανότητα που απομένει μετά την τρίτη χρονική περίοδο είναι 1 μείον την πιθανότητα (D) πριν την τρίτη περίοδο, ή 1 – 0.0297 = 0.9703 ή, ακόμα, ίση με την πιθανότητα (ND) = 0.99 × 0.99 × 0.99 ≈ 0.9703. Η πιθανότητα αφερεγγυότητας σε *n* περιόδους είναι ελαφρώς μικρότερη από το άθροισμα των πιθανοτήτων των *n* περιόδων, δηλαδή 2.97% < 3 × 1%.

Γενικά, η πιθανότητα αφερεγγυότητας, D, μεταξύ των περιόδων 0 και *n*, ${}_n\mathrm{prob(D)}$, είναι περίπου ίση με το γινόμενο των πιθανοτήτων αφερεγγυότητας στη μοναδιαία περίοδο, ${}_1\mathrm{prob(D)}$, επί τον αριθμό των περιόδων:

$$ {}_n\mathrm{prob(D)} \approx n \times {}_1\mathrm{prob(D)} \qquad (12) $$

3.2.7 Πιστωτικός κίνδυνος και παράγωγα χρηματοοικονομικά προϊόντα

Για τις συναλλαγές της αγοράς, πιστωτικός κίνδυνος είναι η πιθανή αθέτηση της συμφωνίας από πλευράς του αντισυμβαλλομένου. Υπάρχει, όμως, διαφορά όταν πρόκειται για χρηματοοικονομικά προϊόντα που διαπραγματεύονται σε οργανωμένα χρηματιστήρια, π.χ. μετοχές, και προϊόντα που διαπραγματεύονται εξωχρηματιστηριακά (over–the–counter, OTC), όπως τα παράγωγα χρηματοοικονομικά προϊόντα (derivatives). Για τις αγορές αυτές εκτενής συζήτηση και παρουσίαση των πλεονεκτημάτων, των μειονεκτημάτων και των κινδύνων τους γίνεται σε άλλο κεφάλαιο.

Στην πρώτη περίπτωση, η κάθε αλλαγή της χρηματοοικονομικής κατάστασης του εκδότη μεταφέρεται μέσω της μεταβολής στην αξία του χρεογράφου. Ο πιστωτικός κίνδυνος είναι ο κίνδυνος του εκδότη. Όμως, η αξία αυτή δεν μηδενίζεται παρά μόνο στην περίπτωση της αφερεγγυότητας του εκδότη. Ακόμα και στην περίπτωση αυτή, η αξία δεν μηδενίζεται αμέσως ή, τουλάχιστον, δεν μηδενίζεται όσο εξακολουθούν να υπάρχουν θετικές προσδοκίες για πιθανή ανάκαμψη στην αγορά. Έτσι, η ζημία είναι η μεταβολή της αξίας πριν και μετά το γεγονός της αφερεγγυότητας του εκδότη του χρεογράφου.

Εξάλλου η περίοδος διακράτησης των προϊόντων αυτών είναι βραχυχρόνια και η ρευστοποίηση τους σχετικά άμεση. Η μεταβλητότητα των τιμών αποτελεί μια καλή ποσοτική προσέγγιση αυτού του είδους του πιστωτικού κινδύνου. Η μεταβλητότητα αυτή χωρίζεται στον ειδικό κίνδυνο –δηλαδή τη μεταβλητότητα– που οφείλεται στον εκδότη και στο γενικό κίνδυνο που αναφέρεται στις μεταβολές της αγοράς. Πρακτικά, είναι εύκολο να διαχωρίσουμε τους δύο αυτούς επιμέρους κινδύνους, όπως θα δούμε σε άλλο κεφάλαιο.

Ο πιστωτικός κίνδυνος και ο κίνδυνος της αγοράς είναι αποτέλεσμα της μεταβολής της αξίας, η οποία μπορεί να προέλθει από διαφορετικές αιτίες. Κίνδυνος αγοράς είναι η πιθανή ζημία από δυσμενείς μεταβολές της αγοράς κατά την περίοδο ρευστοποίησης. Ο πιστωτικός κίνδυνος για τα διαπραγματεύσιμα προϊόντα είναι η πιθανή μείωση της αξίας κατά την περίοδο διακράτησης (holding period). Έτσι, ο πιστωτικός κίνδυνος οφείλεται στις αλληλεπιδράσεις μεταξύ του κινδύνου της αγοράς –με επιπτώσεις στην έκθεση στον κίνδυνο– και του κινδύνου ρευστοποίησης, που επηρεάζει την περίοδο διακράτησης.

Στην περίπτωση των παράγωγων προϊόντων, όμως, τα πράγματα διαφέρουν. Αν και ο πιστωτικός κίνδυνος στην περίπτωση των παραγώγων ορίζεται όπως ακριβώς και στην περίπτωση των κλασικών χρηματοοικονομικών προϊόντων, ο τρόπος εκτίμησης του είναι διαφορετικός.

Σε μακροχρόνιο ορίζοντα η τιμή ρευστοποίησης των παράγωγων προϊόντων μπορεί να διαφοροποιηθεί σημαντικά και ο πιστωτικός κίνδυνος είναι αβέβαιος.

Παράδειγμα 10

Ας πάρουμε το παράδειγμα μιας χρηματοοικονομικής ανταλλαγής σε ξένο νόμισμα (currency swap) ονομαστικής αξίας 1 εκατ. δολ. ΗΠΑ (USD) ως προς το γαλλικό φράγκο (FRF).

Ας υποθέσουμε, επίσης, ότι η ισοτιμία είναι 6 FRF/USD, δηλαδή 6 εκατ. FRF, εάν η συναλλαγή γινόταν σήμερα. Εάν η συναλλαγματική ισοτιμία μεταβληθεί στα 10 FRF, ο αγοραστής των γαλλικών φράγκων θα έχει ένα κέρδος ίσο με 4 εκατ. FRF. Αυτή είναι η ζημία ή έκθεση στον κίνδυνο που θα έχει εάν ο αντισυμβαλλόμενος δεν μπορέσει να εκπληρώσει την υποχρέωση του. Εάν η ισοτιμία μεταβληθεί προς την αντίθετη κατεύθυνση, ο αγοραστής γαλλικών φράγκων δεν διατρέχει κίνδυνο, αφού είναι κάτοχος μιας «αρνητικής» αξίας. Ο πιστωτικός κίνδυνος μεταφέρεται στον αντισυμβαλλόμενο που κατέχει τη θετική αξία ρευστοποίησης.

Το ίδιο συμβαίνει και με τα χρηματοοικονομικά δικαιώματα (options). Ο αγοραστής ενός δικαιώματος περιμένει από τον πωλητή του δικαιώματος να του πληρώσει τη διαφορά που τυχόν θα προκύψει μεταξύ της τιμής εξάσκησης του δικαιώματος και της τρέχουσας τιμής του υποκείμενου περιουσιακού στοιχείου (underlying asset).

Παράδειγμα 11

Ο αγοραστής ενός cap («οροφή» επιτοκίου) στο 5% με ονομαστική αξία 1 εκατ. USD περιμένει να λάβει τη διαφορά μεταξύ του επιτοκίου αγοράς και του τρέχοντος επιτοκίου –το οποίο ας υποθέσουμε ότι είναι 6%– επί του ποσού της ονομαστικής αξίας. Δηλαδή 1% × 1,000,000 = 10,000 USD, για κάθε περίοδο.

Εάν ο αντισυμβαλλόμενος αθετήσει την υποχρέωση του, τότε ο αγοραστής θα έχει ζημία (έκθεση στον κίνδυνο) ίση με 10,000 USD. Και στην περίπτωση αυτή, ο κίνδυνος υπάρχει μόνο όταν η αξία του δικαιώματος κινηθεί θετικά για τον αγοραστή, δηλαδή όταν το δικαίωμα είναι in–the–money.

Επίσης, μόνο ο αγοραστής του δικαιώματος διατρέχει αυτό τον κίνδυνο, επειδή αυτός είναι που περιμένει να λάβει κάποιο ποσό.

Δραστηριότητα 5/Κεφάλαιο 3

Διαφέρει η εκτίμηση του πιστωτικού κινδύνου και του κινδύνου αγοράς στα παράγωγα προϊόντα; Απαντήστε σε μια παράγραφο 50 λέξεων. Επιστρέψτε στην υποενότητα 3.2.7 και ελέγξτε την ορθότητα της απάντησης σας.

Έτσι, το μέγεθος του πιστωτικού κινδύνου στην περίπτωση των παράγωγων προϊόντων μετράται από:

i) το *τρέχον άνοιγμα* (current exposure), που είναι ίσο με την τρέχουσα (αγοραία) τιμή του παραγώγου τη στιγμή της ρευστοποίησης,

ii) το *δυνητικό άνοιγμα* (potential exposure), το οποίο είναι ίσο με την πιθανή αύξηση στην αγοραία τιμή του παραγώγου λόγω μεταβολής παραμέτρων της αγοράς.

Η τρέχουσα τιμή ρευστοποίησης είναι ο τρέχων κίνδυνος (current risk). Ο δυνητικός κίνδυνος (potential risk) είναι η πιθανή αύξηση στην αξία mark-to-market που οφείλεται στις μεταβολές της αγοράς. Ο συνολικός κίνδυνος είναι το άθροισμα των δύο επιμέρους κινδύνων:

$$\text{συνολικός κίνδυνος} = \text{τρέχων κίνδυνος} + \text{δυνητικός κίνδυνος} \tag{13}$$

Ο δυνητικός κίνδυνος της ανοδικής απόκλισης από την αξία mark-to-market ονομάζεται «add–on», αφού προστίθεται στον τρέχοντα κίνδυνο ώστε να προκύψει το συνολικό άνοιγμα στον κίνδυνο.

Τα χρηματοπιστωτικά ιδρύματα ακολουθούν αυστηρούς κανόνες στα όρια κινδύνου. Ωστόσο, ο προσδιορισμός των ορίων απαιτεί και ακριβείς μεθόδους μέτρησης των κινδύνων. Εάν, για παράδειγμα, το μέγεθος μέτρησης του δυνητικού ανοίγματος στον κίνδυνο υπερεκτιμά το συνολικό κίνδυνο, τα όρια κινδύνου θα ικανοποιούνται πολύ γρήγορα, γεγονός που μειώνει τον όγκο εργασιών.

Αντίθετα, εάν τον υποεκτιμά, τα όρια κινδύνου του συστήματος θα είναι αναποτελεσματικά, αφού δεν θα περιορίζουν ουσιαστικά τον πιστωτικό κίνδυνο των συναλλαγών.

Παράδειγμα 12

Ας πάρουμε, πάλι, το παράδειγμα μιας χρηματοοικονομικής ανταλλαγής σε ξένο νόμισμα (currency swap) ονομαστικής αξίας 1 εκατ. δολ. ΗΠΑ (USD) ως προς το γαλλικό φράγκο (FRF). Ας υποθέσουμε ότι η ισοτιμία είναι 6 FRF/ USD, δηλαδή 6 εκατ. FRF, εάν η συναλλαγή γινόταν σήμερα.

Ας υποθέσουμε, ακόμα, ότι η μεταβλητότητα της συναλλαγματικής ισοτιμίας του USD έναντι του FRF είναι 10%, δηλαδή η μεταβλητότητα είναι 0.6 FRF/USD. Υπό την προϋπόθεση ότι η κατανομή της συναλλαγματικής ισοτιμίας είναι η κανονική κατανομή και σε επίπεδο σημαντικότητας 2.5%, η συναλλαγματική ισοτιμία δεν μπορεί να ξεπεράσει τα 7.12 FRF/USD, που είναι

$$6 \text{ FRF/USD} + 2 \times 0.6 \text{ FRF/USD} = 7.12 \text{ FRF/USD}$$

δηλαδή, η τρέχουσα συναλλαγματική ισοτιμία συν δύο φορές η μεταβλητότητα (ή τυπική απόκλιση).

Με αυτό το άνω όριο της συναλλαγματικής ισοτιμίας, ένα έτος αργότερα, το άνω όριο της ανταλλαγής σε νόμισμα είναι

$$(7.12 - 6) \text{ FRF/USD} \times 1{,}000{,}000 \text{ USD} = 1.2 \text{ εκατ. FRF}$$

Αυτή η αξία ρευστοποίησης (liquidation value) είναι το άνω όριο της mark-to-market αξίας της ανταλλαγής σε ένα έτος από σήμερα, σε επίπεδο σημαντικότητας 2.5%, και αντιπροσωπεύει τον δυνητικό κίνδυνο. Επίσης, είναι το add-on για ένα έτος μετά, δηλαδή 20% της ονομαστικής αξίας της ανταλλαγής (= 0.2/1 εκατ. FRF).

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΚΑΙ ΕΠΑΛΗΘΕΥΣΗ VaR

Μέχρι τώρα έχουμε αναφερθεί επανειλημμένα στην αξία σε κίνδυνο (VaR), χωρίς όμως να έχουμε ασχοληθεί αναλυτικά με τον τρόπο υπολογισμού της. Στην ενότητα αυτή θα παρουσιάσουμε τον τρόπο υπολογισμού της αξίας σε κίνδυνο (VaR). Η αξία σε κίνδυνο έχει το μεγάλο πλεονέκτημα να συνοψίζει σε έναν μόνο αριθμό, κατανοητό και εύκολο να ερμηνευτεί, την έκθεση στον κίνδυνο της αγοράς ενός τραπεζικού (και όχι μόνο) οργανισμού. Επίσης, ένα άλλο πλεονέκτημα είναι ο εύκολος υπολογισμός της, αφού χρησιμοποιεί τις κλασικές στατιστικές τεχνικές.

Η VaR εκφράζει τη χειρότερη (μεγαλύτερη) αναμενόμενη ζημία σε δεδομένο χρονικό ορίζοντα κάτω από κανονικές συνθήκες της αγοράς και για δεδομένο επίπεδο εμπιστοσύνης.

Μερικά προβλήματα για τον υπολογισμό της αξίας σε κίνδυνο αναφέρονται αμέσως παρακάτω:

1. Αφού η αναφερόμενη αξία σε κίνδυνο αποτελεί μια εκτίμηση της «πραγματικής» VaR, που συνήθως είναι άγνωστη, θα πρέπει να μπορούμε να εκτιμήσουμε το σφάλμα εκτίμησης της VaR.

2. Στην επιλογή των παραμέτρων για τον υπολογισμό της VaR σημαντικό ρόλο παίζουν η χρονική περίοδος και το διάστημα εμπιστοσύνης.

3. Πώς συνδέεται η VaR ενός χαρτοφυλακίου με τα χαρακτηριστικά και τη μεταβλητότητα των επιμέρους περιουσιακών στοιχείων που συνθέτουν το χαρτοφυλάκιο;

3.3.1 Το ξεκίνημα και η ανάπτυξη των VaR

Στην ενότητα 2.1 σχολιάσαμε τους παράγοντες που συνέβαλαν στην εξέλιξη της θεωρίας και, κυρίως, της πρακτικής της διαχείρισης του τραπεζικού κινδύνου· αναφέραμε, μεταξύ άλλων, την ανάπτυξη της αξίας σε κίνδυνο.

Ήδη από τα τέλη της δεκαετίας του 1970 και τη δεκαετία του 1980 μερικά από τα μεγαλύτερα διεθνή τραπεζικά ιδρύματα άρχισαν να αναπτύσσουν εσωτερικά υποδείγματα για την ποσοτική μέτρηση του συνολικού τους χαρτοφυλακίου. Σκοπός τους δεν ήταν μόνο η διαχείριση του κινδύνου, αλλά και η υποστήριξη των επενδυτικών υπηρεσιών, της διαδικασίας λήψης επενδυτικών αποφάσεων και της πελατείας τους (βλ. Galiatsos, Menounos, 1999).

Το γνωστότερο από τα συστήματα αυτά είναι το RiskMetrics της JP Morgan, το οποίο επινόησε ο πρόεδρος της εταιρείας Dennis Weatherstone, όταν ζήτησε από το τμήμα ανάλυσης να τον ενημερώνουν καθημερινά στις 4.15΄ (με το κλείσιμο των συναλλαγών) με μία σελίδα στην οποία θα ανέφεραν τον συνολικό κίνδυνο και την πιθανή ζημία που διατρέχει η εταιρεία για το επόμενο 24ωρο (το γνωστό «4.15΄ report»).

Το τμήμα ανάλυσης της JP Morgan ανέπτυξε τη μέθοδο που ζήτησε ο πρόεδρος της με βάση τη σύγχρονη θεωρία χαρτοφυλακίου. Όμως δεν στηρίζονται όλα τα συστήματα VaR στη θεωρία χαρτοφυλακίου. Άλλες σύγχρονες τεχνικές και μέθοδοι, όπως προσομοιώσεις, τεχνητή νοημοσύνη, Monte Carlo τεχνικές κ.ά., χρησιμοποιούνται, επίσης, από τα τραπεζικά ιδρύματα.

Σε έρευνα του Group of Thirty το 1994, το 43% των ιδρυμάτων χρησιμοποιούν ήδη αναφορές της αξίας σε κίνδυνο, ενώ το 37% απάντησε ότι σχεδιάζει στο άμεσο μέλλον να κάνει χρήση των υποδειγμάτων αυτών. Μια άλλη έρευνα του Institutional Investor αναφέρει ότι το 32% των ιδρυμάτων χρησιμοποιεί τη VaR ως μέγεθος αποτίμησης του κινδύνου, όπως και το 60% των ερωτηθέντων ιδρυμάτων αμοιβαίων κεφαλαίων σε έρευνα του New York University, Stern School of Business (Jorion, 1997, Bessis, 1998).

Τέλος, σε έρευνα του Wharton/CIBC Wood Gundy, το 1995, αναφέρεται ότι το 29% των ερωτηθέντων μη χρηματοπιστωτικών ιδρυμάτων των ΗΠΑ που επενδύουν σε παράγωγα χρησιμοποιούν τη VaR για την αποτίμηση του κινδύνου των συναλλαγών τους επί παραγώγων.

Η προσέγγιση αυτή, λοιπόν, έπαιξε σημαντικό ρόλο στη διαχείριση κινδύνου, τα τελευταία χρόνια, και εξελίσσεται συνεχώς με τη βοήθεια της ανάπτυξης της πληροφορικής τεχνολογίας. Αλλά, γιατί η VaR αποτελεί, σήμερα, ένα τόσο σημαντικό μέγεθος, ώστε να μιλάμε για *προσέγγιση–VaR* στη διαχείριση κινδύνου;

- Πρώτα απ' όλα, γιατί η αξία σε κίνδυνο, η VaR, είναι ένα απλό στατιστικό μέγεθος της μέτρησης των πιθανών ζημιών ενός χαρτοφυλακίου.
  Συγκεκριμένα, είναι ένα μέγεθος αποτίμησης των ζημιών που οφείλονται σε «κανονικές» μεταβολές των μεγεθών της αγοράς. Ζημίες μεγαλύτερες από τη VaR είναι επίσης δυνατές, αλλά με πολύ μικρή πιθανότητα.
  Με άλλα λόγια, η VaR αναφέρεται στη μέγιστη ποσότητα χρήματος που μπορεί να χάσει η τράπεζα σε συγκεκριμένη χρονική περίοδο και δεδομένο επίπεδο εμπιστοσύνης.
- Ύστερα, κάτω από τις απλοποιημένες υποθέσεις στις οποίες στηρίζονται οι υπολογισμοί της, η VaR γενικεύει όλους τους κινδύνους ενός χαρτοφυλακίου σε έναν μόνο αριθμό.
- Είναι ένα μέγεθος συγκρίσιμο μεταξύ διάφορων θέσεων και διάφορων παραγόντων κινδύνου. Για παράδειγμα, επιτρέπει τη μέτρηση του κινδύνου για μία θέση σε τίτλους σταθερού εισοδήματος με τρόπο συγκρίσιμο με την αποτίμηση του κινδύνου για μια θέση σε χαρτοφυλάκιο μετοχών.
- Λαμβάνει υπόψη της τους συντελεστές συσχέτισης μεταξύ των διάφορων παραγόντων κινδύνου. Για παράδειγμα, εάν δύο κίνδυνοι αλληλοεξουδετερώνονται, η VaR του συνολικού κινδύνου θα είναι σχετικά μικρή.

- Μπορεί να χρησιμοποιηθεί για διάφορους λόγους:
  - για τον προσδιορισμό των ορίων και των στόχων του αποδεκτού κινδύνου από τη διοίκηση του οργανισμού·
  - για τον προσδιορισμό της κεφαλαιακής επάρκειας του οργανισμού·
  - για τη μέτρηση του κινδύνου διάφορων επενδυτικών ευκαιριών·
  - για λόγους reporting και πληροφόρησης των κινδύνων.

Η τελευταία παρατήρηση αποτελεί και τη σύγχρονη τάση πολλών οργανισμών και ιδρυμάτων. Μια κοινή έρευνα της Επιτροπής της Βασιλείας με την IOSCO τον Νοέμβριο του 1996, σε 67 τραπεζικά ιδρύματα και 12 μεγάλες χρηματιστηριακές εταιρείες, διαπίστωσε ότι τα 35 από αυτά δημοσίευσαν την εκτίμηση της VaR στις ετήσιες εκθέσεις τους το 1995, περισσότερα από 18 στην ετήσια έκθεση τους το 1994 και μόνο 3 το 1993.

Για παράδειγμα, εάν μια τράπεζα έχει αξία σε κίνδυνο ημερησίως 40 δις δρχ. σε επίπεδο εμπιστοσύνης 99%, αυτό σημαίνει ότι διατρέχει ημερησίως κίνδυνο 1% (= 100% – 99%), κάτω από κανονικές συνθήκες της αγοράς, να εμφανίσει ζημία μεγαλύτερη από 40 δις δρχ. Αυτός ο αριθμός, δηλαδή, εκφράζει την έκθεση του τραπεζικού οργανισμού στους κινδύνους της αγοράς. Συνεπώς, τόσο οι διαχειριστές της τράπεζας όσο και οι μέτοχοι μπορούν να αποφασίσουν εάν το ύψος του κινδύνου αυτού είναι αποδεκτό.

Συγχρόνως, αυτός είναι και ο λόγος για τον οποίο οι εποπτικές αρχές υποστηρίζουν τα συστήματα VaR. Μάλιστα, το 1995 η International Swap and Derivatives Association (ISDA) πίστευε ότι «η ποσοτική αποτίμηση του κινδύνου αγοράς είναι μεγάλης σημασίας για τους μετόχους και τους αναγνώστες των χρηματοοικονομικών καταστάσεων. Η μέθοδος μέτρησης που είναι η κατάλληλη και αποδεκτή από τους περισσότερους διακεκριμένους διαχειριστές είναι μια μέθοδος τύπου VaR» (Jorion, 1997).

Ακόμα, η συνετή εποπτεία των πιστωτικών ιδρυμάτων και των εταιρειών τους που δραστηριοποιούνται στον χρηματοοικονομικό τομέα, γενικότερα, απαιτεί ένα ελάχιστο ύψος κεφαλαιακής επάρκειας για την αντιμετώπιση των χρηματοοικονομικών κινδύνων. Η Επιτροπή της Βασιλείας για την εποπτεία των τραπεζών, η Κεντρική Τράπεζα των ΗΠΑ και οι εποπτικές αρχές των ευρωπαϊκών χωρών συγκλίνουν στην αποδοχή της VaR ως της καταλληλότερης μεθόδου αποτίμησης του κινδύνου.

Στην αναθεωρημένη έκθεση του Απριλίου 1995 της Επιτροπής της Βασιλείας, παρέχεται η δυνατότητα στους τραπεζικούς οργανισμούς να επιλέξουν το δικό τους υπόδειγμα μέτρησης του κινδύνου προκειμένου να υπολογίσουν την κεφαλαιακή τους επάρκεια (Jorion, 1997).

Έτσι, οι οργανισμοί έχουν την ελευθερία να αναπτύξουν δικά τους συστήματα διαχείρισης κινδύνου. Βέβαια, τέτοιες in-house εφαρμογές ή «εσωτερικά υποδείγματα» («internal models») οφείλουν να υπακούουν και να ικανοποιούν ορισμένα ποιοτικά χαρακτηριστικά που υπαγορεύονται από τις εποπτικές αρχές.

Γενικά, η συνολική επιβάρυνση για τον κίνδυνο της αγοράς για κάθε ημέρα t (MRC_t) θα υπολογίζεται από τον τύπο (στον οποίο αναφερθήκαμε στο κεφάλαιο 1 και επαναλαμβάνουμε για λόγους διευκόλυνσης)

$$\mathrm{MRC}_t = \max\left(k\frac{1}{60}\sum_{i=1}^{60}\mathrm{VaR}_{t-i}, \mathrm{VaR}_{t-1}\right)$$

όπου k είναι ένας συντελεστής που τίθεται από την εποπτική αρχή και έχει ελάχιστη τιμή ίση με 3.

3.3.2 Περιορισμοί της ανάλυσης VaR

Βέβαια, κάθε μέγεθος αποτίμησης του κινδύνου δέχεται κριτική και έχει περιορισμούς. Αυτού του γενικού κανόνα δεν ξεφεύγει και η ανάλυση VaR. Το σημαντικότερο πρόβλημα είναι ότι η VaR αποτελεί ένα μέγεθος που εκτιμά την πιθανή μελλοντική ζημία στηριζόμενη σε παρελθόντα στοιχεία και ακολουθώντας ένα σύνολο υποθέσεων που μπορεί να μην ισχύουν στην πράξη γενικά. Κάποιος, μάλιστα, είχε πει ότι «η χρήση των συστημάτων VaR μοιάζει με τον οδηγό αυτοκινήτου που προσπαθεί να οδηγήσει κοιτάζοντας μόνο πίσω με τον καθρέφτη».

Η απάντηση στην εύστοχη αυτή παρατήρηση δεν είναι να εγκαταλείψει κανείς την προσέγγιση VaR, ωστόσο θα πρέπει να είναι γνώστης του προβλήματος αυτού. Γενικά, η VaR είναι τόσο χρήσιμη, όσο γνώστης των περιορισμών της είναι ο χρήστης.

Ένα δεύτερο πρόβλημα σχετίζεται με την ισχύ των υποθέσεων πάνω στις οποίες στηρίζεται ο υπολογισμός της VaR. Εάν οι υποθέσεις αυτές ελεγχθούν και δεν ισχύουν, τότε το μέγεθος της VaR δεν είναι σημαντικό και δεν θα πρέπει να ληφθεί υπόψη.

Συνεπώς, θα πρέπει να γνωρίζουμε καλά τα δεδομένα που χρησιμοποιούνται και τα χαρακτηριστικά τους και να εφαρμόζουμε προσαρμοσμένα υποδείγματα. Για παράδειγμα, εάν έχουμε να κάνουμε με δεδομένα των οποίων η κατανομή δεν είναι η κανονική ή δεδομένα χρονολογικών σειρών που παρουσιάζουν μη γραμμικές εξαρτήσεις κ.λπ., τότε θα πρέπει να χρησιμοποιούνται και τα ανάλογα υποδείγματα.

Ένα τρίτο πρόβλημα είναι ότι ορισμένοι οργανισμοί, όπως έχει παρατηρηθεί, δίνουν μεγάλη προσοχή στα αποτελέσματα των αναλύσεων VaR, χωρίς η διοίκηση να γνωρίζει ακριβώς τι επιτυγχάνουν τα συστήματα αυτά. Επίσης, πολλοί αναλυτές δεν χρησιμοποιούν τα μεγέθη αυτά με την προσοχή που αρμόζει.

Θα πρέπει, συνολικά, να απαντήσουμε στις επικρίσεις αυτές ότι κανένα σύστημα ποσοτικής αποτίμησης του κινδύνου δεν είναι άριστο. Συνεπώς, θα πρέπει ο χρήστης τους να γνωρίζει πολύ καλά τι μπορούν και τι δεν μπορούν να προσφέρουν τα συστήματα αυτά.

3.3.3 Υποθέσεις για τον υπολογισμό της αξίας σε κίνδυνο

Το πρώτο βήμα στο υπολογισμό της αξίας σε κίνδυνο είναι η επιλογή δύο ποσοτικών παραγόντων:

α) του μήκους του χρόνου και
β) του επιπέδου εμπιστοσύνης.

Για παράδειγμα, το «εσωτερικό υπόδειγμα» της Επιτροπής της Βασιλείας ορίζει επίπεδο εμπιστοσύνης 99% σε χρονικό διάστημα 10 ημερών. Συγχρόνως, απαιτείται οι υπολογισμοί να γίνονται σε ιστορική βάση δεδομένων τουλάχιστον ενός έτους.

Το αποτέλεσμα VaR πολλαπλασιάζεται, στη συνέχεια, με τον παράγοντα $k = 3$ και προκύπτει το ελάχιστο προαπαιτούμενο κεφάλαιο. Βέβαια, ο χρονικός ορίζοντας διαφέρει ανάλογα με το τραπεζικό χαρτοφυλάκιο.

Για παράδειγμα, οι εμπορικές τράπεζες αναφέρουν την αξία VaR στις ημερήσιες εκθέσεις τους. Η JP Morgan, επίσης, ξεχωρίζει και τον κίνδυνο της αγοράς του trader.

Ο χρονικός ορίζοντας στην περίπτωση αυτή είναι μικρός, συνήθως από μία ημέρα έως πολύ λίγες ημέρες. Στις περιπτώσεις αυτές μιλάμε για «ημερήσια κέρδη σε κίνδυνο» ή DEaR (Daily Earnings at Risk). Αντίθετα, τα επενδυτικά χαρτοφυλάκια προσαρμόζουν τον κίνδυνο με αργότερους ρυθμούς– ο χρονικός ορίζοντας είναι συνήθως ένας μήνας.

Στην επιλογή του χρονικού ορίζοντα υπολογισμού της VaR, γενικά, τέσσερις παράγοντες είναι αποφασιστικής σημασίας:

α) Ο πρώτος παράγοντας συνδέεται με τη *ρευστότητα* της αγοράς στην οποία συναλλάσσεται η τράπεζα. Ως γενικός κανόνας, το ιδεατό χρονικό διάστημα υπολογισμού είναι ο χρόνος εκείνος στον οποίο ασφαλίζεται η ρευστοποίηση της θέσης στην αγορά.

Για παράδειγμα, εάν η θέση μας αναφέρεται σε μια μικρή αγορά, είναι προτιμότερο να χρησιμοποιείται μεγάλο χρονικό διάστημα. Ωστόσο, το διάστημα αυτό διαφέρει από αγορά σε αγορά και, δεδομένου ότι μια τράπεζα χρησιμοποιεί περισσότερες από μία αγορές, είναι προτιμότερο να θεωρεί στους υπολογισμούς της αξίας σε κίνδυνο το χρονικό διάστημα που υπαγορεύεται από την αγορά που χρησιμοποιεί περισσότερο.

Για παράδειγμα, μια χρηματιστηριακή εταιρεία που διαπραγματεύεται τίτλους στα μεγάλα διεθνή χρηματιστήρια αξιών καλό είναι να θεωρεί μήκος χρόνου ίσο με μία ημέρα. Αντίθετα, ένα τραπεζικό ίδρυμα που συναλλάσσεται σε μικρές εξωχρηματιστηριακές αγορές (over–the–counter markets, OTC) απαιτεί την επιλογή ενός μεγαλύτερου χρονικού διαστήματος.

Οι άλλοι τρεις παράγοντες προτείνουν βραχυπρόθεσμα χρονικά διαστήματα για να δικαιολογήσουν την προσέγγιση της κανονικής κατανομής. Το πρόβλημα έρχεται από το γεγονός ότι σε ένα χαρτοφυλάκιο υπάρχουν και δικαιώματα (options), που σημαίνει ότι η κατανομή των αποδόσεων του χαρτοφυλακίου δεν είναι η κανονική κατανομή, αλλά έστω ότι θέλουμε την κανονική κατανομή. Όμως, η προσέγγιση της κανονικής κατανομής στην περίπτωση αυτή δεν μπορεί να υποστηριχτεί παρά μόνο στην περίπτωση της βραχυχρόνιας περιόδου.

β) Ο δεύτερος παράγοντας συνδέεται με τις *μεταβολές στο χαρτοφυλάκιο.* Όσο μεγαλύτερη είναι η χρονική περίοδος διακράτησης, τόσο πιθανότερο είναι ο διαχειριστής να αποφασίσει μεταβολή στη σύνθεση του χαρτοφυλακίου. Ιδιαίτερα, μάλιστα, εάν έχουν σημειωθεί ζημίες.

Στην ανάλυση VaR, έμμεσα, θεωρούμε μια κοινή χρονική περίοδο διακράτησης. Η υπόθεση, έτσι, της μη μεταβαλλόμενης σύνθεσης του χαρτοφυλακίου υποστηρίζεται ευκολότερα, εάν θεωρήσουμε βραχυπρόθεσμη χρονική περίοδο και όχι μακροπρόθεσμη.

γ) Για λόγους *επαλήθευσης* οδηγούμαστε και πάλι στην επιλογή βραχυχρόνιων περιόδων, αφού η φάση επαλήθευσης απαιτεί μεγάλο αριθμό δεδομένων, που με τη σειρά τους απαιτούν σύντομη χρονική περίοδο.

Εάν, για παράδειγμα, ένας τέτοιος έλεγχος απαιτεί 1,000 παρατηρήσεις, τότε χρειαζόμαστε 4 έτη (εάν υποθέσουμε 250 ημέρες ανά έτος), εάν χρησιμοποιήσουμε ημερήσια χρονική περίοδο. Εάν χρησιμοποιούσαμε την εβδομάδα ως περίοδο υπολογισμού, τότε θα θέλαμε 20 έτη, και εάν χρησιμοποιούσαμε το μήνα ως χρονική περίοδο, θα απαιτούσαμε 80 έτη.

δ) Παράγοντες που σχετίζονται με *πρακτικούς λόγους*. Πράγματι, οι μακροπρόθεσμες χρονικές περίοδοι δεν είναι πρακτικές. Αυτό σημαίνει ότι, ακόμα και εάν είναι διαθέσιμα τα απαραίτητα στοιχεία, οι πρόσφατες παρατηρήσεις θα είναι «παλιές», αφού ο κόσμος μεταβάλλεται τόσο πολύ.

Τελικά, η πρακτική έχει αναδείξει τη χρήση των ημερήσιων παρατηρήσεων.

Όσον αφορά την επιλογή του επιπέδου εμπιστοσύνης, δεν υπάρχουν συγκεκριμένες οδηγίες. Άλλοι οργανισμοί ακολουθούν το 99% (όπως η Bankers Trust), άλλοι το 97.5% (όπως η Chemical Bank και η Chase) ή 95.4% (όπως η Citibank), άλλοι το 95% (όπως η Bank America και η JP Morgan) κλπ. (Jorion, 1997).

Η επιλογή του επιπέδου εμπιστοσύνης αντικατοπτρίζει την αποστροφή προς τον κίνδυνο.Ετσι, όσο μεγαλύτερη είναι η αποστροφή προς τον κίνδυνο, τόσο μεγαλύτερο είναι το κόστος της ζημίας, που σημαίνει ότι απαιτείται μεγαλύτερο κεφάλαιο για την κάλυψη της πιθανής ζημίας, που με τη σειρά του οδηγεί σε υψηλότερο επίπεδο εμπιστοσύνης.

Ακόμα, ο ακριβής υπολογισμός του μεγέθους της VaR εξαρτάται και από ορισμένες υποθέσεις, όπως οι εξής:

α) Η κατανομή των μεταβολών των τιμών. Για παράδειγμα, οι μεταβολές των τιμών ακολουθούν την κανονική κατανομή;

β) Ο βαθμός συσχέτισης των μεταβολών των τιμών. Για παράδειγμα, αυτοσυσχετίζονται οι μεταβολές των τιμών;

γ) Η έκταση στην οποία ο μέσος και η τυπική απόκλιση (μεταβλητότητα) των μεταβολών των τιμών είναι χρονικά σταθερά. Για παράδειγμα, είναι η διακύμανση των μεταβολών των τιμών χρονικά εξαρτώμενη;

δ) Η υπόθεση ότι το παρελθόν αποτελεί μια καλή προσέγγιση για το μέλλον. Αυτή η υπόθεση, ωστόσο, δεν είναι πάντα αληθής. Πράγματι, οι μεταβλητότητες και οι συσχετίσεις μπορούν να μεταβάλλονται πολύ απότομα.

Ήδη, παραπάνω, ορίσαμε τις περισσότερες από αυτές τις έννοιες και παρουσιάσαμε τη σχέση από την οποία υπολογίζεται η VaR. Έτσι, στην επόμενη υποενότητα δίνονται ορισμένα παραδείγματα υπολογισμού της VaR.

Δραστηριότητα 6/Κεφάλαιο 3

Σε ποιες υποθέσεις στηρίζεται ο τρόπος υπολογισμού της VaR και ποια είναι η σημαντικότητα της επιλογής του επιπέδου εμπιστοσύνης; Απαντήστε σε μια παράγραφο 50 λέξεων. Στη συνέχεια, επιστρέψτε στην υποενότητα 3.3.3 και ελέγξτε την ορθότητα της απάντησης σας.

3.3.4 Υπολογισμός VaR

Στην υποενότητα αυτή θα δώσουμε τον τρόπο υπολογισμού της VaR με περισσότερο αυστηρούς ορισμούς από ό,τι στην υποενότητα 3.1.4 [σχέση (4)]. Ωστόσο, είναι χρήσιμο να ανατρέξετε στην υποενότητα εκείνη για την πληρέστερη συγκριτική κατανόηση της έννοιας και του τρόπου υπολογισμού και ελέγχου της.

Η διαδικασία που περιγράφει τη συμπεριφορά των αποδόσεων των επενδύσεων σε περιουσιακά στοιχεία (μετοχές, χαρτοφυλάκια κ.λπ.) είναι μια τυχαία διαδικασία.

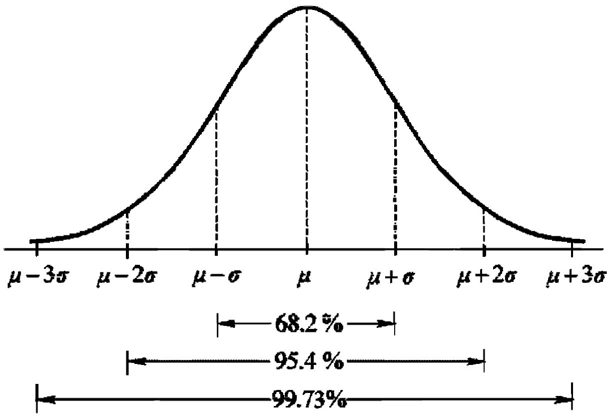
Αν υποθέσουμε ότι οι αποδόσεις έχουν μια συνάρτηση πυκνότητας (density function) f(r), τότε σε επίπεδο εμπιστοσύνης $1 - c$ η πιθανότητα η απόδοση να είναι μικρότερη από δεδομένο επίπεδο r* θα είναι

$$\text{prob}(r < r^*) = \int_{-\infty}^{r^*} f(r)dr = c$$

Η σημαντικότερη υπόθεση αναφέρεται στη συνάρτησηf(r). Στην πράξη, υποθέτουμε ότι αυτή παριστάνει την κανονική κατανομή (normal distribution), παρ' όλους τους περιορισμούς της, επειδή οδηγεί σε απλές εκτιμήσεις της VaR. Στην περίπτωση της κανονικής κατανομής, αποδεικνύεται ότι η αναμενόμενη τιμή και η διακύμανση είναι, αντίστοιχα, μ και σ^2.

Επίσης, για την κατανομή αυτή, ο συντελεστής ασυμμετρίας είναι μηδέν (συμμετρική κατανομή) και ο συντελεστής κύρτωσης ίσος με 3. Η κανονική κατανομή με μέσο και διακύμανση μ και σ^2, αντίστοιχα, παρουσιάζεται στο Διάγραμμα 5.

Διάγραμμα 5
Κανονική κατανομή



Πηγή: *Κιόχος (1989), σ. 143*

Για παράδειγμα, υπάρχει πιθανότητα 99.74% ότι η αναμενόμενη απόδοση θα είναι μεταξύ 3σ από τη μέση τιμή (ή μεταξύ –48.7% και 73.1%).

Αν και η εμβάθυνση στο θέμα αυτό ξεφεύγει του παρόντος, θεωρείται ότι για τις ανάγκες της κατανόησης της μεθοδολογίας VaR και του τρόπου υπολογισμού της θα πρέπει να αναφερθούμε σε μερικά σημαντικά σημεία. Ωστόσο, εάν ενδιαφέρεστε να εμβαθύνετε περισσότερο, μπορείτε να συμβουλευτείτε βιβλία στατιστικής, όπως, μεταξύ άλλων, του Κιόχου, 1989 (κεφάλαια 4 και 5) ή των Watsham και Parramore, 1997 (κεφάλαια 4 και 5).

Σε απόσταση $\mu + \sigma$ και $\mu - \sigma$ γύρω από τον μέσο περιλαμβάνεται το 68.2% του συνολικού εμβαδού της κανονικής καμπύλης. Σε απόσταση $\mu + 2\sigma$ και $\mu - 2\sigma$ από τον μέσο αριθμητικό περιλαμβάνεται το 95.4% του συνολικού εμβαδού της κανονικής καμπύλης, ενώ σε απόσταση $\mu + 3\sigma$ και $\mu - 3\sigma$ περιλαμβάνεται το 99.73% του συνολικού εμβαδού.

Εάν οι αποδόσεις κατανέμονται κανονικά, μπορούμε να περιγράψουμε το επίπεδο σημαντικότητας σε όρους μίας μόνο παραμέτρου, σ, όπου $0 < \sigma < 1$. Αυτό μας λέει πόσο απομακρυσμένα είναι τα επίπεδα σημαντικότητας, α, από τα άκρα της κατανομής, σε όρους τυπικών αποκλίσεων, σ.

Για να βρούμε την τιμή της σ θεωρούμε ότι η πιθανότητα μια απόδοση να πάρει τιμή μικρότερη από r δίνεται από την περιοχή στο αριστερό άκρο της συνάρτησης της πυκνότητας–πιθανότητας, έστω 5%:

$$\text{prob}(r < r^*) = 0.05$$

Στη συνέχεια, μετασχηματίζουμε την τυχαία μεταβλητή των αποδόσεων, r, στην τυποποιημένη κανονική μεταβλητή, $Z = \dfrac{r - \mu}{\sigma}$, οποία έχει μέση τιμή 0 και τυπική απόκλιση ίση με 1:

$$\text{prob}(r < r^{*}) = \text{prob}[Z < (r^{*} - \mu)/\sigma] = 0.05$$

Στην περίπτωση της τυποποιημένης κανονικής μεταβλητής, στο διάστημα από $-\sigma$ έως $+\sigma$ βρίσκεται το 68.2% των περιπτώσεων, από -2σ έως $+2\sigma$ το 95.4% των περιπτώσεων και στο διάστημα από -3σ έως $+3\sigma$ βρίσκεται το 99.73% των περιπτώσεων. Στην περίπτωση αυτή, από τους πίνακες της τυποποιημένης κανονικής κατανομής προκύπτει η τιμή 1.65 για μονόπλευρο διάστημα εμπιστοσύνης.

΄Ετσι, θα είναι

$$r^{*} = \mu - 1.65\sigma$$

ή γενικότερα

$$r^{*} = \mu + \alpha\sigma$$

όπου α αντιπροσωπεύει το επιλεγόμενο επίπεδο εμπιστοσύνης (π.χ., -1.65 σε πιθανότητα 95%).

΄Ετσι, μπορούμε να υπολογίσουμε την *απόλυτη VaR* και τη *σχετική VaR* (absolute and relative VaR):

$$
\begin{aligned}
&\text{απόλυτη VaR} = -\mu \text{W} - \alpha\sigma W \\
\text{ή}\quad &\text{απόλυτη VaR} = W(\alpha\sigma\sqrt{\Delta t} - \mu\Delta \text{t}) \qquad (14)\\
&\text{σχετική VaR} = -\alpha\sigma W \\
\text{ή}\quad &\text{σχετική VaR} = \alpha\sigma W\sqrt{\Delta t}
\end{aligned}
$$

όπου W είναι η αρχική αξία της επένδυσης (ή του χαρτοφυλακίου) και At η μεταβολή του χρόνου. Στην πράξη, ακολουθείται ο τρόπος υπολογισμού της σχετικής VaR. Άλλωστε, εάν έχουμε μικρά χρονικά διαστήματα, η διαφορά μεταξύ των δύο αυτών μεγεθών είναι πολύ μικρή. Σε επόμενη υποενότητα θα δούμε αρκετά παραδείγματα υπολογισμού της VaR.

Δραστηριότητα 7/Κεφάλαιο 3

Με βάση όσα μελετήσατε στην προηγούμενη υποενότητα, προσπαθήστε να απαντήσετε στα ακόλουθα ζητήματα:

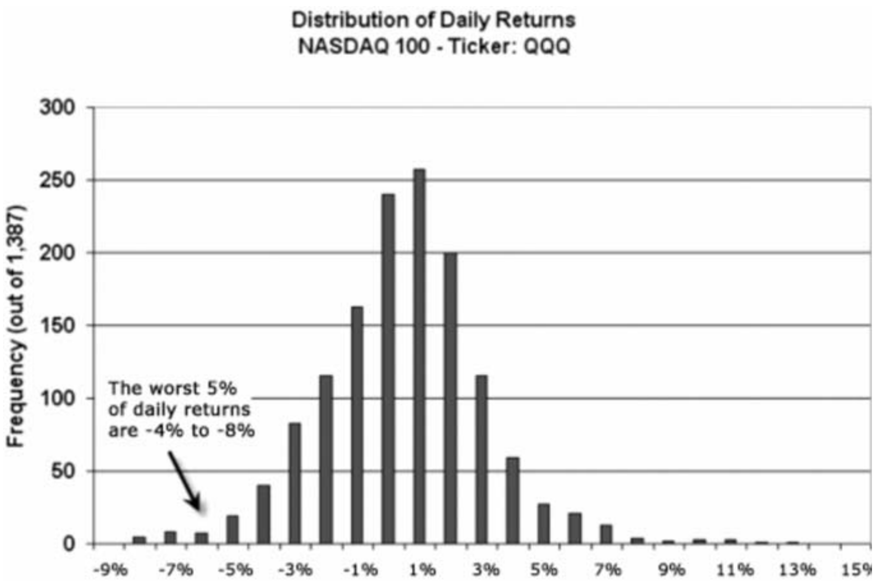
- Δώστε τρεις βασικές υποθέσεις στις οποίες στηρίζεται η ανάλυση VaR.
- Ποια η σημασία των υποθέσεων αυτών στην ανάλυση των χρονολογικών σειρών των ιστορικών αποδόσεων των τιμών, πάνω στην οποία στηρίζεται η ανάλυση VaR;
- Πιστεύετε ότι οι υποθέσεις αυτές ικανοποιούνται στην πράξη;
- Μπορείτε να ονομάσετε εναλλακτικά υποδείγματα στην περίπτωση που δεν ισχύουν οι παραπάνω υποθέσεις;

3.3.5 Προσεγγίσεις της VaR

Η μέθοδος της Ιστορικής προσομοίωσης

Η προσέγγιση της ιστορικής προσομοίωσης υποθέτει ότι η ιστορία επαναλαμβάνεται, από την πλευρά του κινδύνου. Σύμφωνα με τη μέθοδο αυτή, απλά, υπολογίζουμε τις ιστορικές αποδόσεις και τις κατατάσσουμε από την χειρότερη προς την καλύτερη.

Το παρακάτω ιστόγραμμα παρουσιάζει την κατανομή των ημερήσιων αποδόσεων της μετοχής QQQ του Nasdaq την περίοδο 3/1999–9/2004[1]. Η μέση ημερήσια απόδοση στο διάστημα αυτό για τη μετοχή ήταν πολύ κοντά στο 0%. Παρατηρούμε, για παράδειγμα ότι, αποδόσεις μεταξύ 0% και 1% παρουσιάστηκαν σε περισσότερες από 250 ημέρες, ενώ αποδόσεις μεταξύ 4% και 5% για πλέον των 50 ημερών. Στην άκρη δεξιά, η ράβδος, που μόλις φαίνεται, 13%, εμφανίστηκε μια μόνον ημέρα στα 5 και πλέον έτη.



Οι ράβδοι αριστερά («αριστερή αύρα» της κατανομής) αντιστοιχούν στις χειρότερες 5% όλων των ημερήσιων αποδόσεων και, παριστάνουν ημερήσιες απώλειες της τάξης του 4% – 8%. Μπορούμε να πούμε, λοιπόν, ότι σε επίπεδο εμπιστοσύνης 95% η χειρότερη ημερήσια απόδοση δεν θα ξεπεράσει το 4%. Δηλαδή, εάν επενδύσουμε 1000€ στη μετοχή αυτή ή ζημιά μας δεν αναμένεται να ξεπεράσει τα 40€ με πιθανότητα 95%.100 × –4%). Εάν θέλουμε μεγαλύτερη εμπιστοσύνη στην εκτίμησή μας, τότε μπορούμε να κινηθούμε αριστερότερα στο ιστόγραμμα, στις δύο πρώτες από αριστερά ράβδους. Αυτές παριστάνουν αποδόσεις –8% και –7%, που αντιστοιχούν στο 1% των ημερήσιων αποδόσεων. Δηλαδή, σε επίπεδο εμπιστοσύ-

[1] *Πηγή: D.Harper "Introduction to value at risk-Part1" στο www.investopedia.com, 2004.*

νης 99%, αναμένουμε ότι η χειρότερη ημερήσια ζημία δεν θα ξεπεράσει το 7% και, εάν επενδύσουμε 1,000€ η χειρότερη ζημία δεν αναμένουμε να είναι μεγαλύτερη των 70€. Αυτή είναι η ιδέα της αξίας σε κίνδυνο (VaR).

Δραστηριότητα 8/Κεφάλαιο 3

Οι αποδόσεις είναι εβδομαδιαίες. $n = 150$ παρατηρήσεις. Υποθέτουμε ότι η αξία του χ/φ είναι 350 εκατ. €.

Απόδοση (%)	–6	–5	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5	6
Συχνότητα	2	2	4	9	8	15	17	20	23	18	14	10	8
%	1.33	1.33	2.67	6.00	5.33	10.00	11.33	13.33	15.33	12.00	9.33	6.67	5.33
Αθροιστική πιθανότητα	1.33	2.66	5.33	11.33	16.66	26.66	37.99	51.32	66.65	78.65	87.98	94.65	100

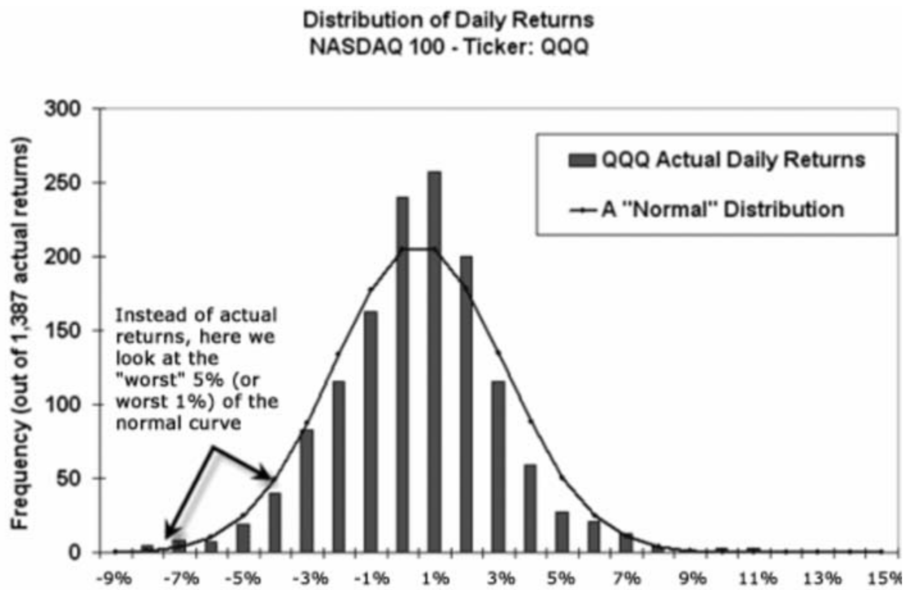
(α) Να ερμηνεύσετε το στοιχείο 5.33% του πίνακα ($5^η$ στήλη, $3^η$ γραμμή).

(β) Να ερμηνεύσετε το στοιχείο 5.33 (αθροιστική πιθανότητα) του πίνακα ($3^η$ στήλη, $4^η$ γραμμή).

Δείτε τη δική μας απάντηση στο Παράρτημα, στο τέλος του κεφαλαίου.

Η μέθοδος διακύμανσης-συνδιακύμανσης

Σύμφωνα με τη μέθοδο αυτή υποθέτουμε ότι η κατανομή των αποδόσεων είναι η κανονική. Συνεπώς, χρειάζεται να εκτιμήσουμε δυο παραμέτρους, τη μέση τιμή (μέση απόδοση) και την τυπική απόκλιση των αποδόσεων, που θα μας επιτρέψουν να σχεδιάσουμε την καμπύλη της κανονικής κατανομής, που παρουσιάζεται στο παρακάτω διάγραμμα.



Η ιδέα της προσέγγισης διακύμανσης συνδιακύμανσης είναι παρόμοια με εκείνη της ιστορικής προσομοίωσης, εκτός από το ότι εδώ χρησιμοποιούμε την κανονική κατανομή για να περιγράψουμε τις αποδόσεις και όχι τα πραγματικά ιστορικά στοιχεία, όπως στη μέθοδο της ιστορικής προσομοίωσης. Το πλεονέκτημα, βέβαια, με τη χρήση της καννικής κατανομής είναι ότι, γνωρίζουμε πού βρίσκονται στην καμπύλη το 1% ή το 5% των χειρότερων περιπτώσεων, αφού είναι συνάρτηση του επιπέδου εμπιστοσύνης που επιθυμούμε και της τυπικής απόκλισης:

Επίπεδο εμπιστοσύνης	**Πολλαπλάσιο τυπικής απόκλισης**
95%	$-1.645 * \sigma$
99%	$-2.326 * \sigma$

Στο παράδειγμα της QQQ η ημερήσια τυπική απόκλιση είναι 2.64% και η μέση τιμή πολύ κοντά στο μηδέν. Στο παράδειγμα, θα είναι:

$$95\% : -1.645 * \sigma = -1.645 * 2.64\% = -4.34\%$$
$$99\% : -2.326 * \sigma = -2.326 * 2.64\% = -6.14\%$$

Συνολικά, με τις δύο προσεγγίσεις, καταλήγουμε ότι η ημερήσια VaR είναι:

- Η ημερήσια VaR με τη μέθοδο της ιστορικής προσομοίωσης είναι –4% σε επίπεδο εμπιστοσύνης 99%.
- Η ημερήσια VaR με τη μέθοδο της δικύμανσης–συνδιακύμανσης είναι –6.14% σε επίπεδο εμπιστοσύνης 99%.

Μπορούμε, τώρα, να υπολογίσουμε τη VaR σε μηνιαία βάση:

$$95\% : -1.645 * \sigma * \sqrt{T} = -1.645 * 2.64\% * \sqrt{20} = -19.42\%$$
$$99\% : -2.326 * \sigma * \sqrt{T} = -2.326 * 2.64\% * \sqrt{20} = -27.46\%$$

Η χειρότερη ανεμνόμενη ζημία είναι –19.42% σε επίπεδο εμπιστοσύνης 95% ή –27.46% σε επίπεδο εμπιστοσύνης 99%, κάτω της μέσης απόδοσης. Στο παράδειγμα, η μέση απόδοση είναι 0%, συνεπώς, η χειρότερη ζημία ταυτίζεται με την καθαρή ζημία.

Είναι φανερό ότι η τιμή της VaR εξαρτάται τόσο από τον χρονικό ορίζοντα (που είναι $\sigma * \Delta t$) όσο και από το επίπεδο σημαντικότητας α. Η Επιτροπή Βασιλείας (BC) χρησιμοποιεί την αξία σε κίνδυνο 10–ημερών και επίπεδο εμπιστοσύνης 99%, ενώ η RiskMetrics (RM) υπολογίζει την αξία σε κίνδυνο 1–ημέρας και επίπεδο εμπιστοσύνης 95%.

$$VaR_{BC} = 2.326 * \sigma_{10} \quad \text{και} \quad VaR_{RM} = 1.645 * \sigma_1$$

Μπορούμε να έχουμε το συνδυασμό των δύο:

$$VaR_{BC} = 2.326 * \sigma_{10} = 2.326 * \sigma_1 * \sqrt{10} = \frac{2.326}{1.645} * \sqrt{10} * VaR_{RM} = 4.47 * VaR_{RM}$$

Για λόγους ασφάλειας, οι εποπτικές αρχές έχουν υιοθετήσει το 3-πλάσιο της τιμής της VaR_{BC} ή 13 φορές την τιμή της VaR_{RM} : $3 \times VaR_{BC}$ ή $13 \times VaR_{RM}$

3.3.6 Επαλήθευση VaR και σφάλματα εκτίμησης

Η προκύπτουσα τιμή της VaR δεν είναι παρά μια απλή εκτίμηση της μέγιστης πιθανής ζημίας και, ως τέτοια, υπόκειται σε σφάλματα. Στην υποενότητα αυτή θα παρουσιάσουμε ορισμένους ελέγχους γύρω από την εγκυρότητα της εκτίμησης αυτής. Πρέπει να σημειωθεί, πάντως, ότι η επαλήθευση της VaR δεν είναι χρήσιμη μόνο στον τραπεζικό οργανισμό και τη διοίκηση του, αλλά και στην εποπτική αρχή. Σχετική συζήτηση για το πόσο σημαντική είναι για την εποπτική αρχή η επαλήθευση της τιμής VaR των ιδρυμάτων έγινε στην ενότητα 2.3.

Έστω, για παράδειγμα, ότι για ένα πιστωτικό ίδρυμα είναι VaR = 15 εκατ. δρχ. Η πρώτη ερώτηση της διοίκησης είναι: *Πόση εμπιστοσύνη πρέπει να έχουμε στην εκτίμηση αυτή;* Για παράδειγμα, μπορούμε να ισχυριστούμε ότι η διοίκηση της τράπεζας εμπιστεύεται 100% το αποτέλεσμα αυτό; Με άλλα λόγια, είναι σίγουρη ότι με πιθανότητα, έστω, 95% η πραγματική τιμή θα βρίσκεται μεταξύ 14 και 16 εκατ δρχ.; Ή μπορεί να είναι και στο διάστημα 9–26 εκατ. δρχ.;

Το παραπάνω παράδειγμα μας δίνει μια ιδέα για το πόσο ακριβής μπορεί να είναι η εκτίμηση της VaR, δηλαδή πόσο σημαντικό είναι να μπορούμε να προσδιορίσουμε ένα διάστημα μέσα στο οποίο είναι πιθανόν να βρίσκεται η πραγματική τιμή της εκτιμηθείσας VaR. Το ερώτημα αυτό είναι σημαντικό τόσο για την εποπτική αρχή όσο και για τους χρήστες των υποδειγμάτων VaR.

Αν και θα αποφύγουμε μια σε βάθος στατιστική ανάλυση, θα δώσουμε τις βασικές σχέσεις εκτίμησης σφαλμάτων:

1. Το τυπικό σφάλμα της μέσης τιμής είναι $\frac{s}{\sqrt{n}}$, όπου s είναι η εκτιμημένη τυπική απόκλιση και n είναι το πλήθος των παρατηρήσεων.
2. Εάν από έναν κανονικό πληθυσμό τραβήξουμε ένα τυχαίο δείγμα μεγέθους n, τότε η μεταβλητή $\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2}$ κατανέμεται σύμφωνα με την κατανομή χ^2_{n-1} με $n-1$ βαθμούς ελευθερίας. Τα μεγέθη s^2, σ^2 είναι η γνωστή διακύμανση του δείγματος (η εκτιμηθείσα) και η άγνωστη διακύμανση του πληθυσμού, αντίστοιχα. Το διάστημα εμπιστοσύνης σε επίπεδο σημαντικότητας α δίνεται από τη σχέση

$$\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{n-1,\,1-\frac{\alpha}{2}}} < \sigma^2 < \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{n-1,\,\frac{\alpha}{2}}}$$

Έτσι, μπορούμε να υπολογίσουμε το διάστημα εμπιστοσύνης της VaR, από την παρακάτω διπλή σχέση ανισότητας:

$$-\alpha sW\sqrt{\frac{n-1}{\chi^2_{n-1,\,1-\frac{\alpha}{2}}}} < \mathrm{VaR} = -\alpha sW < -\alpha sW\sqrt{\frac{n-1}{\chi^2_{n-1,\,\frac{\alpha}{2}}}} \qquad (15)$$

Παράδειγμα 13

Ας δούμε ένα απλό παράδειγμα. Το τυπικό σφάλμα των ημερήσιων αποδόσεων της JP Morgan για το 1995 ήταν: sW = 11.52 εκατ. δολ. (VaR = 19 εκατ. δολ.). Με 254 ημερήσιες παρατηρήσεις και επίπεδο σημαντικότητας « = 0.05, το κάτω όριο είναι ίσο με

$$1.65 \times 11.52 \times [253/299.6]^{1/2} = 17.5 \text{ εκατ. δολ.}$$

και το άνω όριο

$$1.65 \times 11.52 \times [253/211.3]^{1/2} = 20.8 \text{ εκατ. δολ.}$$

Έτσι, σε επίπεδο εμπιστοσύνης με πιθανότητα 95% η πραγματική τιμή της VaR βρίσκεται στο διάστημα

[17.5 εκατ. δολ., 20.8 εκατ. δολ.]

Με άλλα λόγια, μπορούμε να είμαστε σίγουροι με πιθανότητα 95% ότι η πραγματική τιμή της VaR βρίσκεται σε ένα διάστημα 3.3 εκατ. δολ. γύρω από την εκτιμηθείσα μέση τιμή της, 19 εκατ. δολ., ή δεν διαφέρει από την εκτιμηθείσα τιμή των 19 εκατ. δολ. περισσότερο από 1.65 εκατ. δολ.

Μια άλλη εξίσου απλή τεχνική επαλήθευσης της εκτίμησης της VaR είναι να απαριθμήσουμε τα ποσοστά αποτυχίας, δηλαδή πόσες φορές ξεπεράστηκε η αξία της VaR.

Ας υποθέσουμε ότι μια τράπεζα αναφέρει την αξία VaR σε επίπεδο 5% ($p = 1 - c$) για μια περίοδο Γ ημερών. Η εποπτική αρχή, για να υπενθυμίσουμε πόσο σημαντική είναι η επαλήθευση της VaR από τις εποπτικές αρχές, απαριθμεί πόσες φορές η πραγματική ζημία ξεπέρασε την εκτιμηθείσα από την ανάλυση VaR. Έστω ότι παρατηρήθηκε για N ημέρες η απόκλιση αυτή, που σημαίνει ότι η συχνότητα που οι πραγματοποιηθείσες ζημίες ήταν μεγαλύτερες από τις εκτιμηθείσες VaR είναι N/T. Ζητάμε να μάθουμε, εάν αυτή η συχνότητα διαφέρει (στατιστικά) σημαντικά από την προβλεπόμενη, p.

Η πιθανότητα των N αποκλίσεων σε δείγμα μεγέθους T οδηγείται από τη διωνυμική κατανομή

$$\left(1-p\right)^{T-N} p^{N}$$

Ενδιαφερόμαστε να ελέγξουμε εάν ο αριθμός N είναι πολύ μεγάλος ή πολύ μικρός κάτω από τη μηδενική υπόθεση H_0: $p = 0.05$. Ο Kupiec (1995) προτείνει τον έλεγχο του λόγου πιθανοφάνειας (Likelihood Ratio, LR)

$$\text{LR} = -2\ln\left[\left(1-p\right)^{T-N} p^{N}\right] + \left[\left(1-\frac{N}{T}\right)^{T-N}\left(\frac{N}{T}\right)^{N}\right] \qquad (16)$$

που κατανέμεται σύμφωνα με την κατανομή/ με ένα βαθμό ελευθερίας. p είναι ένα επίπεδο εμπιστοσύνης που χρησιμοποιείται ως κανόνας απόφασης για την απόρριψη του υποδείγματος, και το οποίο, συνήθως, τίθεται ίσο με 5%. Ο έλεγχος αυτός, σχέση (16), είναι ισχυρότερος όσο αυξάνει το Τ. Δηλαδή, όσο αυξάνει το Τ τόσο μειώνεται η διαφορά μεταξύ $\frac{N}{T}$ *και p*, που εκφράζει τη διαφορά μεταξύ των προβλέψεων και των πραγματοποιήσεων των αποκλίσεων. Ο ίδιος συγγραφέας παρουσιάζει τον Πίνακα 7.

Πίνακας 7

Επαλήθευση υποδείγματος VaR: Περιοχές μη απόρριψης για τον αριθμό *N* των αποκλίσεων σε επίπεδο 0.05

Επίπεδο πιθανότητας	Περιοχή μη απόρριψης		
p	T = 255 ημέρες	T= 510 ημέρες	T= 1,000 ημέρες
0.01	N< 7	1 <N< 11	4 <N< 17
0.025	2 <N< 12	6 <N< 21	15 <N< 36
0.05	6 <N< 21	16 <N< 36	37 <N< 65
0.075	11 <N< 28	27 <N< 51	59 <N< 92
0.10	16 <N< 36	38 <N< 65	81 <N< 120

N είναι ο αριθμός των αποκλίσεων των πραγματοποιούμενων ζημιών από τις προβλεφθείσες της VaR που παρατηρήθηκε σε ένα δείγμα μεγέθους *T*, χωρίς την απόρριψη της μηδενικής υπόθεσης ότι p είναι η σωστή πιθανότητα σε επίπεδο εμπιστοσύνης 5%.

Πηγή: *Jorion,1997, σ. 95*

Παράδειγμα 14

Για παράδειγμα, με δεδομένα ενός έτους (T = 255) περιμένουμε να παρατηρήσουμε $N = pT = 0.05 \times 255 = 13$ παρατηρήσεις που αποκλίνουν. Αλλά η εποπτική αρχή δεν μπορεί να απορρίψει τη μηδενική υπόθεση όσο ο αριθμός N βρίσκεται στο διάστημα εμπιστοσύνης [6 < N< 21]. Για τιμές του N μεγαλύτερες ή ίσες του 21, η εκτίμηση VaR υποεκτιμά την πιθανότητα μεγάλων ζημιών. Για τιμές του N μικρότερες ή ίσες του 6, η εκτίμηση VaR είναι ιδιαίτερα συντηρητική.

Ο Kupiec (1995), ωστόσο, σημείωσε και τις αδυναμίες του ελέγχου αυτού, βρίσκοντας ότι η δύναμη της στατιστικής αυτής έναντι εναλλακτικών είναι μικρή.

Άλλες, επίσης, τεχνικές ελέγχου έχουν προταθεί και από άλλους, όπως από τους Crnkovic και Drachman (1995) και Christoffersen (1996). Αναλυτική παρουσίαση αυτών των στατιστικών ελέγχων ξεφεύγει του παρόντος– όποιος ενδιαφέρεται για μια πρώτη προσέγγιση, μπορεί να ανατρέξει στον Dowd (1998), σ. 56-59.

Κοινό μειονέκτημα όλων των παραπάνω ελέγχων είναι ότι δεν έχουν δύναμη, δηλαδή τείνουν να κατατάσσουν ένα κακό υπόδειγμα σαν καλό υπόδειγμα. Το πρόβλημα αυτό γίνεται εμφανέστερο όσο το μέγεθος του δείγματος είναι μικρό. Συγκεκριμένα, κατά τον Kupiec, ποτέ δεν θα έχουμε αρκετά δεδομένα ώστε να ελέγξουμε το υπόδειγμα, με αποτέλεσμα η επαλήθευση της VaR να είναι αδύνατη, πρακτικά.

Ο Lopez (1996) προτείνει μια άλλη μέθοδο, που υπερνικά το πρόβλημα της δύναμης του ελέγχου με τη βοήθεια μιας συνάρτησης ζημίας. Ο έλεγχος δίνεται από τη σχέση

$$\text{QPS} = 2\sum_{t=1}^{T}\left(p_t^f - I_t\right)^2 / T$$

όπου p_t^f είναι η προβλεπόμενη πιθανότητα ότι το ενδεχόμενο «η πραγματοποιημένη ζημία να είναι μεγαλύτερη από την προβλεπόμενη με τη VaR» την περίοδο t, και I_t είναι μια μεταβλητή που παίρνει την τιμή 1, εάν το ενδεχόμενο συμβεί, και την τιμή 0, εάν δεν συμβεί.

Σε συγκριτικούς ελέγχους που διεξήγαγε ο Lopez με τις προηγούμενες στατιστικές, βρήκε ότι η προσέγγιση της συνάρτησης ζημίας υπερέχει.

3.3.7 Παραδείγματα υπολογισμού της αξίας σε κίνδυνο

Ας δούμε, λοιπόν, μερικά απλά παραδείγματα υπολογισμού της αξίας σε κίνδυνο.

Παράδειγμα 15

Έστω ότι η τράπεζα ΑΒ έχει μία ανοιχτή θέση αγοράς αξίας 100 εκατ. στερλινών και ότι 1 στερλίνα = 1.5 USD. Έτσι, η αξία της θέσης της τράπεζας είναι 150 εκατ. USD. Ας υποθέσουμε, επίσης, ότι η ετήσια μεταβλητότητα είναι ίση με 10% και ότι οι εργάσιμες ημέρες του έτους είναι 250. Τότε, η ημερήσια μεταβλητότητα θα είναι $\frac{10}{\sqrt{250}} = \frac{10}{15.81} = 0.6325\%$ ή 0.006325.

Η πιθανή ημερήσια μεταβολή της ισοτιμίας στερλίνας/USD σε επίπεδο εμπιστοσύνης 68% (δηλαδή ± μία φορά την τυπική απόκλιση) θα είναι

$$1.5 + 0.006325 = \$\ 1.506325$$

ή

$$1.5 - 0.006325 = \$\ 1.493675$$

Σε επίπεδο εμπιστοσύνης 95% (δύο φορές την τυπική απόκλιση) θα είναι

$$1.5 + 2 \times 0.006325 = 1.5 + 0.012650 = \$\ 1.51265$$

ή

$$1.5 - 2 \times 0.006325 = 1.5 - 0.012650 = \$\ 1.48735$$

Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει μια πιθανότητα της τάξης του 5% η ισοτιμία στερλίνας/δολαρίου ΗΠΑ να μην βρίσκεται εντός του διαστήματος των τιμών ($1.48735, $1.51265). Στην περίπτωση του παραδείγματος της τράπεζας που έχει ανοιχτή θέση αγοράς, ενδιαφερόμαστε μόνο για την πιθανότητα πτώσης της αξίας της στερλίνας.

Έτσι, υπάρχει μια πιθανότητα, ίση με 2.5% μόνο, η τιμή της στερλίνας να είναι μικρότερη από $1.48735. Με άλλα λόγια, μπορούμε να πούμε ότι σε επίπεδο εμπιστοσύνης 97.5% (= 95% + 2.5%) η στερλίνα δεν θα πέσει χαμηλότερα από την τιμή $1.48735.

Έτσι, η αξία σε κίνδυνο σε επίπεδο εμπιστοσύνης 84% και 97,5% είναι

$$\text{VaR } (84\%) = 150 \times 0.6325\% = \$\ 0.94875 \text{ εκατ. και}$$

$$\text{VaR } (97.5\%) = 150 \times 1.2650\% = \$\ 1.8975 \text{ εκατ.}$$

Η δεύτερη περίπτωση υπολογισμού, για παράδειγμα, σημαίνει ότι σε επίπεδο εμπιστοσύνης 97.5% η πιθανή ζημία της τράπεζας δεν θα είναι μεγαλύτερη από $1.8975 εκατ.

Ο Πίνακας 8 συνοψίζει την παραπάνω ανάλυση.

Πίνακας 8
Αξία σε κίνδυνο με βάση το Παράδειγμα 15

			Δυνητική ζημία/κέρδος
Θέση	Ισοδυναμία σε δολ. ΗΠΑ	Επίπεδο εμπιστοσ. 84%	Επίπεδο εμπιστοσ. 97.5%
100 εκατ. στερλίνες	150 εκατ.	$0.94875 εκατ.	$1.8975 εκατ.

Παράδειγμα 16

Ένα αμοιβαίο κεφάλαιο έχει μια θέση ενός εκατομμυρίου μετοχών της εταιρείας Ε και η τιμή ανά μετοχή έχει αξία 100 δρχ. Η ετήσια μεταβλητότητα των αποδόσεων της τιμής της μετοχής είναι 15.81%. Στην περίπτωση αυτή, η ημερήσια μεταβλητότητα θα ισούται με $\frac{15.81}{\sqrt{250}} = \frac{15.81}{15.81} = 1\%$ ή 0.01.

Σε επίπεδο εμπιστοσύνης 68%, το διάστημα εμπιστοσύνης θα είναι

$$100 \times (1 + 0.01) = 101 \text{ και } 100 \times (1 - 0.01) = 99$$

Σε επίπεδο εμπιστοσύνης 95%, το αντίστοιχο διάστημα εμπιστοσύνης θα είναι

$$100 \times (1 + 2 \times 0.01) = 102 \text{ και } 100 \times (1 - 2 \times 0.01) = 98$$

Έτσι, η πιθανή ζημία σε επίπεδο εμπιστοσύνης 84% ανά μετοχή είναι 1% (δηλαδή, 1 δρχ. = 100 × 0.01 = VaR) κάθε ημέρα. Σε επίπεδο εμπιστοσύνης 97.5%, η αντίστοιχη ζημία είναι 2% (δηλαδή, 2 δρχ. = 100 × 0.02 = VaR).

Παράδειγμα 17

Η τράπεζα Χ, με έδρα τις ΗΠΑ, έχει μία ανοιχτή θέση αγοράς (long position) αξίας 1 δις Yen σε τρέχουσα αξία. Σήμερα, η τρέχουσα ισοτιμία Yen/ USD είναι 100 Yen = 1 USD. Η ετήσια μεταβλητότητα του Yen έχει εκτιμηθεί ίση με 8.2%.

Η ημερήσια μεταβλητότητα είναι 8.2/15.81 = 0.519% και τα διαστήματα εμπιστοσύνης ±1, 1.65 και 2 φορές την τυπική απόκλιση είναι, αντίστοιχα

$$100 \pm 0.519 = (100.519,\ 99.481)$$

$$100 \pm (1.65 \times 0.519) = 100 \pm 0.85635 = (100.856,\ 99.144)$$

$$100 \pm (2 \times 0.519) = 100 \pm 1.038 = (101.038,\ 98.962)$$

Για τις περιπτώσεις αυτές, η αξία σε κίνδυνο είναι, αντίστοιχα

$$\$\ 10{,}000{,}000 \times 0.519\% = \$\ 51{,}900$$

$$\$\ 10{,}000{,}000 \times 0.856\% = \$85{,}635$$

$$\$\ 10{,}000{,}000 \times 1.038\% = \$103{,}800$$

Εάν θέλουμε να επαναλάβουμε τους υπολογισμούς για περίοδο μίας εβδομάδας, θα πρέπει πρώτα να υπολογίσουμε την εβδομαδιαία μεταβλητότητα, που είναι $\frac{8.2\%}{\sqrt{52}} = \frac{8.2\%}{7.211} = 1.137\%$. Επαναλαμβάνοντας τους ίδιους υπολογισμούς, μπορούμε να καταρτίσουμε τον παρακάτω πίνακα, ο οποίος συνοψίζει τα αποτελέσματα.

Πίνακας 9
Αξία σε κίνδυνο για διαφορετικούς χρονικούς ορίζοντες και διαφορετικά επίπεδα εμπιστοσύνης

Χρονική περίοδος	Διάστημα εμπιστοσύνης			Αξία σε κίνδυνο VaR		
	1 sd	1.65 sd	2 sd	1 sd	1.65 sd	2 sd
Μία ημέρα	100.519	100.856	101.038	$51,900	$85,635	$103,800
	99.481	99.144	98.962			
Μία εβδομάδα	101.137	101.876	102.274	$113,700	$187,600	$227,400
	98.863	98.124	97.726			

Από τα στοιχεία του Πίνακα 9 μπορούμε να κάνουμε ενδιαφέρουσες παρατηρήσεις, όπως ότι σε ημερήσια βάση η ζημία δεν θα είναι μεγαλύτερη από

α) $51,900 με πιθανότητα 84% ή

β) $85,635 με πιθανότητα 95% ή, τέλος,

γ) $103,800 με πιθανότητα 97,5%.

Παράδειγμα 18

Έστω ότι μια άλλη τράπεζα, Υ, έχει έδρα την Ιαπωνία και έχει μία ανοιχτή θέση πώλησης (short position) στην τρέχουσα αγορά, αξίας 1 δις Yen. Θα κατασκευάσουμε τον ίδιο πίνακα, όπως στο Παράδειγμα 17, ενώ ισχύουν όλα τα άλλα δεδομένα του προηγούμενου παραδείγματος. Οι υπολογισμοί γίνονται σε Yen.

Πίνακας 10
Αξία σε κίνδυνο για διαφορετικούς χρονικούς ορίζοντες και διαφορετικά επίπεδα εμπιστοσύνης (οι υπολογισμοί είναι σε Yen Ιαπωνίας)

Χρονική περίοδος	**Διάστημα εμπιστοσύνης**			**Αξία σε κίνδυνο VaR**		
	1 sd	1.65 sd	2 sd	1 sd	1.65 sd	2 sd
Μία ημέρα	100.519	100.856	101.038	5,190,000	8,563,500	10,380,000
	99.481	99.144	98.962			
Μία εβδομάδα	101.137	101.876	102.274	11,370,000	187,600,000	22,740,000
	98.863	98.124	97.726			

Στον παραπάνω πίνακα υπολογίστηκε η αξία σε κίνδυνο για διαφορετικούς χρονικούς ορίζοντες και διαφορετικά επίπεδα εμπιστοσύνης (οι υπολογισμοί της VaR είναι σε Yen). Τα σχόλια είναι παρόμοια με αυτά του προηγούμενου παραδείγματος.

Δραστηριότητα 9/Κεφάλαιο 3

Η ετήσια μεταβλητότητα του ATHIBOR είναι 12%. Σήμερα το ATHIBOR είναι 6.1%. Να εκτιμηθεί το εύρος των επιτοκίων για διάφορες χρονικές περιόδους και για διάφορες τυπικές αποκλίσεις (τ.α.), όπως στον παρακάτω πίνακα. Προσπαθήστε να επαληθεύσετε τρία τουλάχιστον στοιχεία του Πίνακα 11, κάνοντας ακριβώς τις ίδιες πράξεις με αυτές του Παραδείγματος 17 ή του Παραδείγματος 18. Μερικές κατευθύνσεις για την απάντηση σας θα βρείτε στο Παράρτημα, στο τέλος του κεφαλαίου.

Πίνακας 11

Χρόνος	**1 τ.α.**	**1.65 τ.α.**	**2 τ.α.**	**3 τ.α.**
1 ημέρα	6.107589 6.092411	6.112523 6.087477	6.115179 6.084821	6.122768 6.077232
1 μήνας	6.134641 6.065359	6.157158 6.042842	6.169282 6.030718	6.203923 5.996077
3 μήνες	6.160000 6.040000	6.199000 6.001000	6.220000 5.980000	6.280000 5.920000
1 έτος	6.220000 5.980000	6.298000 5.902000	6.340000 5.860000	6.460000 5.740000

Δραστηριότητα 10/Κεφάλαιο 3

Ας υποθέσουμε ότι η συναλλαγματική ισοτιμία μεταξύ μάρκου Γερμανίας (DM) και δολαρίου ΗΠΑ (USD) είναι 1.65 DM/USD. Βασιζόμενοι σε ημερήσιες παρατηρήσεις της τελευταίας πενταετίας, εκτιμήσαμε την ημερήσια μεταβλητότητα ίση με 0.716%.

α) Να υπολογίσετε το ημερήσιο εύρος της ισοτιμίας DM/USD σε επίπεδα εμπιστοσύνης 68%, 90%, 95% και 99%.

β) Να εκτιμήσετε την ετήσια μεταβλητότητα [να χρησιμοποιήσετε τη σχέση $\sigma_t = \sigma_1 \times \sqrt{t}$] και, στη συνέχεια, να υπολογίσετε το εύρος της διακύμανσης της ισοτιμίας σε επίπεδα εμπιστοσύνης 68%, 90%, 95% και 99%.

(*Πηγή:* Longerstaey et al., 1996)

Να συγκρίνετε την απάντηση σας με τη δική μας που βρίσκεται στο Παράρτημα, στο τέλος του κεφαλαίου.

Σύνοψη

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάσαμε τα κλασικά στατιστικά μεγέθη μέτρησης της μεταβλητότητας (κίνδυνος), καθώς και τα σύγχρονα μεγέθη μέτρησης του τραπεζικού κινδύνου. Βέβαια, ανάμεσα στις παραδοσιακές τεχνικές διαχείρισης των τραπεζικών κινδύνων υπάρχουν και άλλες, όπως ανάλυση ανοιγμάτων, duration analysis, ανάλυση σεναρίων και θεωρία χαρτοφυλακίου, με τις οποίες, όμως, θα ασχοληθούμε εκτενέστερα σε άλλα κεφάλαια και ενότητες.

Στην ενότητα 3.3 παρουσιάστηκε αναλυτικά ο υπολογισμός της αξίας σε κίνδυνο (VaR). Η σπουδαιότητα και η σημαντικότητα αυτού του μεγέθους στη σύγχρονη τραπεζική διαχείριση κινδύνου είχε παρουσιαστεί και στο κεφάλαιο 2.

Συγχρόνως, δώσαμε και τα όρια της ανάλυσης αυτής, γιατί είναι πολύ σημαντική, τόσο για τον χρήστη όσο και για τη διοίκηση του τραπεζικού ιδρύματος, αλλά και για την εποπτική αρχή, η γνώση και κατανόηση των υποθέσεων, των περιορισμών και των μειονεκτημάτων της μεθόδου για την αποτελεσματικότερη χρήση της.

Η εμπέδωση και εκμάθηση της ανάλυσης της αξίας σε κίνδυνο, VaR, θεωρείται ιδιαίτερα σημαντική και απαραίτητη στην κατανόηση της σύγχρονης διαχείρισης τραπεζικού κινδύνου.

Επίσης, στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάσαμε και αναλύσαμε τον σπουδαιότερο –και γνωστότερο– τραπεζικό κίνδυνο, που είναι ο πιστωτικός κίνδυνος. Ακόμα, είδαμε τη σχέση μεταξύ της αξίας του πιστωτικού κινδύνου (d_VaR) και της αξίας του κινδύνου της αγοράς (m_VaR).

Στον πιστωτικό κίνδυνο θα επανέλθουμε στο κεφάλαιο 5, όπου θα εξετάσουμε αυτόν τον τραπεζικό κίνδυνο στο πλαίσιο της σύγχρονης θεωρίας χαρτοφυλακίου.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ
Απαντήσεις σε Δραστηριότητες

Δραστηριότητα 4

Από τη σχέση (11) έχουμε

Συνολική VaR = $\sqrt{(\text{m\_VaR})^2 + (\text{d\_VaR})^2 + 2 \times \rho \times \text{m\_VaR} \times \text{d\_VaR}}$

ή συνολική VaR = $\sqrt{A^2 + B^2 + 2\rho AB}$

α) Εάν $\rho = 1$, τότε συνολική VaR = $\sqrt{A^2 + B^2 + 2\rho AB}$

β) Εάν $\rho = 0$, τότε συνολική VaR = $\sqrt{A^2 + B^2}$

γ) Εάν $\rho = -1$, τότε συνολική VaR = $\sqrt{A^2 + B^2 - 2\rho AB}$

Παρατηρούμε ότι η μικρότερη συνολική VaR είναι στην περίπτωση που ισχύει $\rho = -1$. Τότε θα είναι συνολική VaR = $|A - B|$.

Εάν, όμως, $\rho = +1$, τότε θα έχουμε τη μεγαλύτερη αξία της συνολικής VaR, δηλαδή συνολική VaR = $A + B$. Κατά συνέπεια, εξαρτάται από τον συντελεστή συσχέτισης ρ.

Δραστηριότητα 8

(α) 5.33 είναι η πιθανότητα ότι σε μια εβδομάδα το χ/φ θα χάσει το 2% της αξίας του, δηλαδή 7 εκατ. €.

(β) 5.33 είναι η αθροιστική πιθανότητα ότι, σε μια εβδομάδα το χ/φ θα χάσει το 4% και πλέον της αξίας του και, η αξία του θα διαμορφωθεί στα 350 – 14 = 336 εκτ. €.

Δραστηριότητα 9

1η Ημέρα

Η ημερήσια μεταβλητότητα είναι ίση με 12/15.811 = 0.759%. Συνεπώς:

1 τ.α.: 6.1 + 0.00759 = 6.10759 και

6.1 – 0.00759 = 6.092411

1.65 τ.α.: 6.1 + (1.65 × 0.00759) = 6.112523 και

6.1 – (1.65 × 0.00759) = 6.087477

Με τον ίδιο τρόπο συνεχίστε για τον υπολογισμό των υπόλοιπων στοιχείων.

1ος Μήνας

Η μηνιαία μεταβλητότητα είναι ίση με 12/3.464 = 3.464%. Συνεπώς:

1 τ.α.: $6.1 + 0.03464 = 6.134641$ και

$6.1 - 0.03464 = 6.065359$

1.65 τ.α.: $6.1 + (1.65 \times 0.03464) = 6.157158$ και

$6.1 - (1.65 \times 0.03464) = 6.042842$

Με τον ίδιο τρόπο συνεχίστε για τον υπολογισμό των υπόλοιπων στοιχείων του πίνακα, αφού πρώτα υπολογίσετε ότι η μεταβλητότητα 3 μηνών ισούται με 12/2 = 6% και η ετήσια μεταβλητότητα δίνεται ίση με 12%.

Δραστηριότητα 10

α) *68% επίπεδο εμπιστοσύνης*

$1.65 + 0.00716 = 1.65716$

$1.65 - 0.00716 = 1.64284$

90% επίπεδο εμπιστοσύνης

$1.65 + (1.65 \times 0.00716) = 1.661814$

$1.65 - (1.65 \times 0.00716) = 1.638186$

95% επίπεδο εμπιστοσύνης

$1.65 + (2 \times 0.00716) = 1.664034$

$1.65 - (2 \times 0.00716) = 1.635966$

99% επίπεδο εμπιστοσύνης

$1.65 + (3 \times 0.00716) = 1.668473$

$1.65 - (3 \times 0.00716) = 1.631527$

β) $\Gamma_{\text{έτους}} = \Gamma_{\text{ημέρας}} \times \sqrt{250} = 0.716\% \times 15.81 = 11.32\%$

68% επίπεδο εμπιστοσύνης

$1.65 + 0.1132 = 1.763206$

$1.65 - 0.1132 = 1.536791$

Όμοια, για επίπεδα εμπιστοσύνης 90%, 95% και 99% βρίσκουμε αντίστοιχα:

[1.463204, 1.836796], [1.428109, 1.871891] και [1.357919, 1.942081].

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

ΕΛΛΗΝΟΓΛΩΣΣΗ

Γαλιάτσος Κ., Η διαχείριση των χρηματοοικονομικών κινδύνων, Σάκκουλας, Αθήνα 1999.

Κιόχος Π., *Επαγωγική στατιστική*, Σύγχρονη Εκδοτική, Αθήνα 1989.

ΞΕΝΟΓΛΩΣΣΗ

Bessis J., *Risk management in banking*, Wiley, N.Y. 1998.

Dowd K., *Beyond Value at Risk: The New Science of Risk Management*, Wiley, N.Y. 1998.

Galiatsos K., Menounos A., «Value–at–Risk modeling for risk management and regulation», στο Siriopoulos C. (ed.) *Topics in Financial Economics and Risk Analysis*, σ. 85-109, Paratiritis, Thessaloniki 1999. **Jorion P.,** *Value at Risk*, Irwin, 1997.

Kupiec P., «Techniques for verifying the accuracy of risk management», *Journal of Derivatives*, τεύχος 3, σ. 73-84, 1995.

Longerstaey J., Finger C.C., Howard S., Zangari P., «Risk Metrics™ - Technical Document», 4· έκδοση, New York: Morgan Guarranty Trust Company, 1996. **Lopez J.A.,** *Regulatory evaluation of value-at-risk models*, Research and Market Analysis Group, Federal Reserve Bank of New York, 1996.

Mertzanis V.H., «Capital Requirements, Value-At-Risk and Stress Testing Methodologies», στο Συριόπουλος Κ. *Topics in Financial Economics and Risk Analysis*, σ. 109-118, Paratiritis, Thessaloniki 1999.

Morgan JP, *Five questions about RiskMetrics*, Morgan Guaranty Trust Company, N.Y. 1995.

Watsham T.J., Parramore K., *Quantitative methods in finance*, Thomson International Business Press, N.Y. 1997.

ΟΔΗΓΟΣ ΓΙΑ ΠΕΡΑΙΤΕΡΩ ΜΕΛΕΤΗ

1. **Dowd K., *Beyond Value At Risk: The New Science of Risk Management*, Wiley, N.Y. 1998.**

   Το βιβλίο αυτό αποτελεί μία πολύ καλή εισαγωγή στο μέγεθος της Αξίας σε Κίνδυνο (VaR), τις υποθέσεις, τον τρόπο υπολογισμού και τα πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα του. Εκτός από τα άλλα, μπορείτε να μελετήσετε τα κεφάλαια 5 και 6, τα οποία αναφέρονται στις μεθόδους προσομοίωσης Monte Carlo και Stress Testing, αντίστοιχα, που δεν πραγματευτήκαμε στο κεφάλαιο 2.

2. **Παντελιάς Σ., «Risk (VaR) Models: εφαρμογές για προσδιορισμό κεφαλαιακής επάρκειας και αποδοτικότητας τραπεζών», στο Συριόπουλος Κ., *Topics in Financial Economics and Risk Analysis*, σ. 109-118, Paratiritis, Thessaloniki 1999.**

   Το κεφάλαιο αυτό στο εν λόγω βιβλίο αποτελεί μια πολύ καλή, σύντομη αλλά περιεκτική, εισαγωγή στο μέγεθος της VaR και τους κινδύνους που αντιμετωπίζει ένα χρηματοπιστωτικό ίδρυμα. Επίσης, δίνεται μια περιληπτική παρουσίαση των προσομοιώσεων Monte Carlo και της σημαντικότητας της εφαρμογής των stress tests.

3. **Mertzanis V.H., «Capital Requirements, Value-At-Risk and Stress Testing Methodologies», στο Συριόπουλος Κ. *Topics in Financial Economics and Risk Analysis*, σ. 109-118, Paratiritis, Thessaloniki 1999.**

   Το κεφάλαιο αυτό αναφέρεται στην εκτίμηση και τον υπολογισμό της ελάχιστης κεφαλαιακής επάρκειας των τραπεζικών ιδρυμάτων. Η πλέον γενική μέθοδος για τον προσδιορισμό της κεφαλαιακής επάρκειας απαιτεί την εκτίμηση κάποιου μεγέθους κινδύνου του χαρτοφυλακίου τους. Ο συγγραφέας του κεφαλαίου αυτού σχολιάζει τις διάφορες μεθόδους, μεταξύ των οποίων και η VaR, για την οποία παρουσιάζει αναλυτικότερα τις υποθέσεις της, τον τρόπο υπολογισμού της, τα πλεονεκτήματα και τα μειονεκτήματα της με απλά παραδείγματα. Ακόμα, παρουσιάζει τις μεθόδους προσομοίωσης και stress testing.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΚΙΝΔΥΝΟΙ ΡΕΥΣΤΟΤΗΤΑΣ ΚΑΙ ΕΠΙΤΟΚΙΩΝ

Σκοπός

Το κεφάλαιο αυτό στοχεύει στην παρουσίαση των κινδύνων ρευστότητας και επιτοκίου, που αποτελούν βασικές συνιστώσες στην πολιτική διαχείρισης κινδύνων των τραπεζικών οργανισμών. Θα εξηγηθούν η φύση των κινδύνων, τα μεγέθη αποτίμησης τους και οι πολιτικές διαχείρισης από την πλευρά των τραπεζών. Επίσης, θα παρουσιαστούν οι περιορισμοί των μεθόδων μέτρησης και οι επιπτώσεις τους στη διαχείριση κινδύνου.

Προσδοκώμενα Αποτελέσματα

Όταν θα έχετε ολοκληρώσει τη μελέτη αυτού του κεφαλαίου, θα είστε σε θέση να:

- κατανοείτε τις έννοιες «κίνδυνος ρευστότητας» και «κίνδυνος επιτοκίων τραπεζικών χαρτοφυλακίων"·
- εξηγείτε τις έννοιες «άνοιγμα ρευστότητας», «άνοιγμα επιτοκίων», «δομή επιτοκίου»·
- υπολογίζετε τα ανοίγματα ρευστότητας και επιτοκίων·
- υπολογίζετε τον επενδυτικό κίνδυνο με τη μέθοδο που βασίζεται στη διάρκεια των χρεογράφων.

Έννοιες Κλειδιά

- Άνοιγμα ρευστότητας, οριακό και δυναμικό άνοιγμα
- Άνοιγμα επιτοκίου, περιθώριο επιτοκίου, δομή επιτοκίου
- Σχέση βραχυχρόνιων και μακροχρόνιων επιτοκίων
- Λογιστικό περιθώριο επιτοκίου
- Κόστος χρηματοδότησης
- Duration analysis

Εισαγωγικές Παρατηρήσεις

Η ρευστότητα αποτελεί μία από τις βασικότερες προσφερόμενες υπηρεσίες ενός τραπεζικού οργανισμού. Οι αποταμιευτές και οι επενδυτές τοποθετούν τα χρήματα τους σε μια τράπεζα έχοντας της εμπιστοσύνη ότι μπορούν να τα εκταμιεύσουν οποτεδήποτε θελήσουν. Είναι φανερό, λοιπόν, ότι ο κίνδυνος ρευστότητας είναι ο πρώτος κίνδυνος τον οποίο αντιμετώπισαν τα χρηματοπιστωτικά ιδρύματα.

Παραδοσιακά, η διαχείριση τραπεζικών χαρτοφυλακίων αναφέρεται στον προσδιορισμό της κατάλληλης δομής του ισολογισμού της τράπεζας, καθώς και σε προγράμματα αντιστάθμισης κινδύνου (hedging programmes) για την αποτελεσματική αντιμετώπιση του κινδύνου ρευστότητας και του κινδύνου επιτοκίων. Έτσι, το πρώτο βήμα είναι η μέτρηση του κινδύνου ρευστότητας και επιτοκίων. Η ποσοτική αποτίμηση του κινδύνου ρευστότητας είναι δύσκολη και διαφοροποιείται από αγορά σε αγορά και από προϊόν σε προϊόν.

Σκοπός, λοιπόν, της ακολουθούμενης πολιτικής διαχείρισης είναι να διατηρήσει τους κινδύνους αυτούς σε αποδεκτά επίπεδα, με δεδομένα τα προβλεπόμενα μελλοντικά επίπεδα των επιτοκίων. Εξετάσαμε στην ενότητα 2.2 τον κίνδυνο εισοδήματος και τον κίνδυνο κεφαλαίου.

Ο πρώτος μπορεί να οφείλεται στην αύξηση των δαπανών ή στη μείωση των εσόδων, ενώ ο δεύτερος στη μείωση της αξίας των περιουσιακών στοιχείων ή στην αύξηση της αξίας των υποχρεώσεων. Και οι δύο κίνδυνοι, όπως είχαμε επισημάνει, οφείλονται στις μεταβολές των επιτοκίων.

Η διαχείριση του κινδύνου των επιτοκίων μπορεί να γίνει με την αντιστάθμιση (hedging) ή με κάποια τεχνική διαχείρισης κινδύνου. Στην πρώτη περίπτωση, η διαχείριση μπορεί να γίνει είτε άμεσα, με τη δημιουργία αντίθετων θέσεων ώστε να κλείσει το άνοιγμα, είτε έμμεσα, με τη χρησιμοποίηση των αγορών παράγωγων χρηματοοικονομικών προϊόντων (derivative markets).

Στην περίπτωση των άλλων τεχνικών διαχείρισης, διακρίνουμε την ανάλυση ανοιγμάτων (gap analysis) και την ανάλυση της σταθμικής διάρκειας (duration analysis). Οι δύο αυτές τεχνικές θα αποσαφηνιστούν στη συνέχεια.

Ο κίνδυνος των επιτοκίων και ο κίνδυνος ρευστότητας αλληλοεξαρτώνται, αφού η προβολή του ανοίγματος ρευστότητας θα χρηματοδοτηθεί με ένα άγνωστο επίπεδο επιτοκίου.

Στο κεφάλαιο αυτό θα σχολιάσουμε αυτούς τους δύο κινδύνους, με τους οποίους είναι αντιμέτωπο κάθε τραπεζικό ίδρυμα, καθώς και μερικές από τις μεθόδους διαχείρισης τους.

Άσκηση Αυτοαξιολόγησης 1/Κεφάλαιο 4

Με ποιους τρόπους μπορεί να γίνει η διαχείριση του κινδύνου των επιτοκίων; Απαντήστε σε μια παράγραφο 50 περίπου λέξεων. Στη συνέχεια, επιστρέψτε στις Εισαγωγικές Παρατηρήσεις και ελέγξτε την ορθότητα της απάντησης σας.

Ενότητα 4.1

ΑΝΟΙΓΜΑ ΡΕΥΣΤΟΤΗΤΑΣ

Ο *κίνδυνος ρευστότητας* (liquidity risk) δημιουργείται από τη διαφορά που υπάρχει μεταξύ του μεγέθους των στοιχείων του ενεργητικού και του παθητικού ενός τραπεζικού χαρτοφυλακίου, καθώς και από την ασυμφωνία μεταξύ των χρόνων λήξης τους.

Ο κίνδυνος ρευστότητας, γενικά, συνίσταται σε:

- αδυναμία κάλυψης ληξιπρόθεσμων υποχρεώσεων του τραπεζικού οργανισμού
- αδυναμία άντλησης κεφαλαίων από τον τραπεζικό οργανισμό, που μπορεί να οφείλεται στην έλλειψη ρευστότητας στην αγορά ή στην αδυναμία του χρηματοπιστωτικού ιδρύματος να έχει πρόσβαση στις αγορές κεφαλαίων
- αδυναμία ρευστοποίησης των περιουσιακών στοιχείων της τράπεζας εντός συγκεκριμένου χρονικού διαστήματος.

Έτσι, η βασική μορφή του κινδύνου ρευστότητας είναι η ικανότητα του τραπεζικού οργανισμού να διαθέτει επαρκή ρευστά διαθέσιμα για την κάλυψη των υποχρεώσεων του. Αυτό σημαίνει ότι σε έναν τραπεζικό οργανισμό (και, γενικά, μια επιχείρηση), ο κίνδυνος ρευστότητας προσδιορίζεται από τη διαφορά μεταξύ των περιουσιακών στοιχείων (assets), για παράδειγμα πάγια στοιχεία, ταμείο, δάνεια, χρεωστικοί τίτλοι, μετοχές, και των υποχρεώσεων (liabilities), για παράδειγμα καταθέσεις, ομολογιακά δάνεια, μετοχικό κεφάλαιο, στην τρέχουσα αλλά και σε μελλοντική χρονική περίοδο, και ονομάζεται *άνοιγμα ρευστότητας* (liquidity gap).

Για παράδειγμα, εάν μια τράπεζα έχει μια μακροχρόνια θέση και εάν οι πόροι της είναι μικροί και έχουν βραχυπρόθεσμη ληκτότητα, τότε υπάρχει πρόβλημα άμεσου και μελλοντικού ελλείμματος. Ο κίνδυνος ρευστότητας είναι ότι δεν υπάρχουν οι απαραίτητοι πόροι ώστε να επιτευχθεί ισορροπία.

Όταν το μέγεθος του παθητικού (υποχρεώσεις) είναι μεγαλύτερο από αυτό του ενεργητικού (αγαθά), τότε υπάρχει πλεόνασμα κεφαλαίου (excess of funds). Το πλεόνασμα αυτό δεν δημιουργεί κίνδυνο ρευστότητας, αλλά *κίνδυνο επιτοκίου* (interest rate risk), αφού οι αναμενόμενες εισροές από την επένδυση του πλεονάζοντος κεφαλαίου είναι αβέβαιες.

Στην αντίθετη περίπτωση, μιλάμε για *έλλειμμα* (deficit), που σημαίνει ότι ο τραπεζικός οργανισμός έχει επενδύσει σε μακροχρόνια αγαθά, τα οποία δεν καλύπτονται πλήρως από τους υπάρχοντες πόρους. Έτσι, έχουμε κίνδυνο ρευστότητας, δηλαδή έχουμε θετικό άνοιγμα (positive gap).

Συνεπώς, ο υπολογισμός του ανοίγματος ρευστότητας καθίσταται σημαντικός. Η μέθοδος αυτή χρησιμοποιείται –ελαφρά παραλλαγμένη– και στην ανάλυση του κινδύνου επιτοκίων, όπως θα δούμε σε επόμενη ενότητα του κεφαλαίου αυτού. Συγκεκριμένα, επειδή το επιτόκιο μεταβάλλεται, τα διάφορα στοιχεία του ενεργητικού και του παθητικού του τραπεζικού οργανισμού τοποθετούνται σε διάφορες χρονικές περιόδους, ανάλογα με τον χρόνο ανατιμολόγησής τους. Αντίθετα, στην περίπτωση του κινδύνου ρευστότητας, η κατανομή αυτή γίνεται ανάλογα με τη ληκτότητα των στοιχείων.

4.1.1 Υπολογισμός του ανοίγματος ρευστότητας

Το *οριακό άνοιγμα* (marginal gap) υπολογίζεται από την αλγεβρική διαφορά μεταξύ των μεταβολών των στοιχείων του ενεργητικού και του παθητικού για δεδομένη χρονική περίοδο. Γενικά, δηλαδή, το άνοιγμα υπολογίζεται από την παρακάτω σχέση:

$$\text{Άνοιγμα} = (\text{Στοιχεία του ενεργητικού}) - (\text{Στοιχεία του παθητικού})$$

και το οριακό άνοιγμα

$$\text{Οριακό άνοιγμα} = \begin{pmatrix} \text{Μεταβολή των στοιχείων} \\ \text{του ενεργητικού} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \text{Μεταβολή των στοιχείων} \\ \text{του παθητικού} \end{pmatrix} \quad (1)$$

Με άλλα λόγια, το οριακό άνοιγμα παριστάνει τα απαιτούμενα κεφάλαια για χρηματοδότηση πιθανού ελλείμματος ή τα πλεονασματικά κεφάλαια που θα πρέπει να επενδυθούν. Ένα θετικό οριακό άνοιγμα σημαίνει ότι η μεταβολή των στοιχείων του ενεργητικού είναι μεγαλύτερη από την αντίστοιχη μεταβολή των στοιχείων του παθητικού σε δεδομένη χρονική περίοδο. Όταν τα στοιχεία ενεργητικού και παθητικού αποσβένονται με τον χρόνο, αυτές οι μεταβολές είναι αρνητικές και το θετικό άνοιγμα ισοδυναμεί με εκροή.

Επίσης, μπορούμε να υπολογίσουμε και το αθροιστικό οριακό άνοιγμα (cumulative marginal gap), δηλαδή

$$\begin{pmatrix} \text{Αθροιστικό} \\ \text{οριακό} \\ \text{άνοιγμα} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{Άνοιγμα} \\ \text{οριακό} \\ \text{περιόδου } N \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \text{Αθροιστικό οριακό άνοιγμα} \\ \text{περιόδου } N-1 \end{pmatrix} \quad (2)$$

Παράδειγμα 1

Ας δούμε ένα απλό παράδειγμα με τη βοήθεια του παρακάτω πίνακα.

Πίνακας 1
Χρονική κατανομή ενεργητικού-παθητικού
και ανοίγματα ρευστότητας

Ημερομηνία 1	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Ενεργητικό	1,000	900	700	650	500	300
Παθητικό	1,000	800	500	400	350	100
ΑΝΟΙΓΜΑ[1]	*0*	*100*	*200*	*250*	*150*	*200*
Αποσβέσεις Ενεργητικού		*–100*	*–200*	*–50*	*–150*	*–200*
Αποσβέσεις Παθητικού		*–200*	*–300*	*–100*	*–50*	*–250*
ΟΡΙΑΚΟ ΑΝΟΙΓΜΑ[2]		*100*	*100*	*50*	*–100*	*50*
ΑΘΡΟΙΣΤΙΚΟ ΟΡΙΑΚΟ ΑΝΟΙΓΜΑ[3]		*100*	*200*	*250*	*150*	*200*

Υπολογισμός των ανοιγμάτων με βάση τον πίνακα του παραδείγματος

[1] Το άνοιγμα υπολογίζεται από τη διαφορά μεταξύ των στοιχείων του ενεργητικού και του παθητικού. Για παράδειγμα, την πρώτη περίοδο είναι 1,000 – 1,000 = 0, τη δεύτερη περίοδο είναι 900 – 800 = 100, κο.κ.

[2] Το οριακό άνοιγμα υπολογίζεται από την αλγεβρική μεταβολή των στοιχείων του ενεργητικού και εκείνων του παθητικού μεταξύ των χρονικών περιόδων *N και N*– 1. Έτσι, ένα θετικό άνοιγμα παριστάνει μία εκροή και ένα αρνητικό άνοιγμα σημαίνει μία εισροή.

Εάν στοιχεία του ενεργητικού και του παθητικού αποσβένονται με τον χρόνο, τότε οι μεταβολές αυτές είναι αρνητικές και ένα θετικό άνοιγμα παριστάνει μία εκροή. Με βάση αυτούς του ορισμούς, θα είναι στο παράδειγμα μας:

(–100) – (–200) = 100, (–200) – (–300) = 100 κ.ο.κ.

[3] Το αθροιστικό οριακό άνοιγμα υπολογίζεται σύμφωνα με τη σχέση (2), παραπάνω. Η αρχική τιμή ισούται με το οριακό άνοιγμα, δηλαδή είναι ίση με 100. Η επόμενη τιμή, σύμφωνα με τη σχέση (2), ισούται με 100 (που είναι το οριακό άνοιγμα της 2ης περιόδου) + 100 (που είναι το αθροιστικό οριακό άνοιγμα της προηγούμενης περιόδου) = 200.

Το αθροιστικό άνοιγμα της 4ης περιόδου θα είναι, σύμφωνα με τη σχέση (2): 50 (που είναι το άνοιγμα της 4ης περιόδου) + 200 (που είναι το αθροιστικό άνοιγμα της προηγούμενης περιόδου) = 250. Με τον ίδιο τρόπο υπολογίζεται το αθροιστικό άνοιγμα και για τις υπόλοιπες χρονικές περιόδους.

Το άνοιγμα ρευστότητας υπολογίζεται για κάθε μελλοντική χρονική στιγμή, που σημαίνει ότι γίνεται προβολή στο μέλλον του ενεργητικού και του παθητικού. Στην περίπτωση αυτή, όταν δηλαδή υπολογίζεται το άνοιγμα με βάση τα υπάρχοντα στοιχεία του ενεργητικού και του παθητικού, το άνοιγμα ονομάζεται *στατικό άνοιγμα* (static gap). Συνήθως, αυτή η πρακτική ακολουθείται στην πράξη.

Όταν στο ενεργητικό και στο παθητικό προστίθενται νέα στοιχεία, από την προβολή στον χρόνο μελλοντικών εμπορικών συναλλαγών, η εικόνα του ανοίγματος μεταβάλλεται. Αυτό το νέο άνοιγμα ονομάζεται *δυναμικό άνοιγμα* (dynamic gap).

Η υπολογιστική αυτή δεν είναι εύκολο να ακολουθηθεί πρακτικά. Ένας προφανής λόγος είναι ότι δεν είναι εύκολο να επενδυθούν νέοι οικονομικοί πόροι που δεν έχουν αποκτηθεί ακόμα. Πράγματι, ένα πιθανό έλλειμμα που θα προέλθει από μια νέα συναλλαγή θα χρηματοδοτηθεί μόνο μόλις παρατηρηθεί, και η επένδυση πλεονάζοντος κεφαλαίου θα πραγματοποιηθεί και αυτή μόνο μόλις εμφανιστεί στον ισολογισμό. Ένας άλλος λόγος, επίσης, είναι ότι ο υπολογισμός του δυναμικού ανοίγματος εξαρτάται από αβέβαιες μελλοντικές εμπορικές συναλλαγές.

4.1.2 Άνοιγμα ρευστότητας και κίνδυνος επιτοκίων

Η ανάλυση ανοιγμάτων αποτελεί μία από τις εφαρμοζόμενες τεχνικές για τη μέτρηση και διαχείριση του κινδύνου των επιτοκίων. Μια δεύτερη μέθοδος είναι η διαχείριση με τη χρησιμοποίηση της αξίας των χρηματοοικονομικών προϊόντων σταθμισμένης με τον χρόνο (duration analysis).

Ένα άνοιγμα ρευστότητας μπορεί να είναι θετικό ή αρνητικό. Ανάλογα με το πρόσημο του, ένα άνοιγμα ρευστότητας οδηγεί είτε στη χρηματοδότηση ελλειμμάτων είτε στην επένδυση του πλεονάζοντος κεφαλαίου. Σε κάθε περίπτωση, πάντως, οι συναλλαγές αυτές θα πραγματοποιηθούν σε μελλοντική χρονική στιγμή και με επιτόκια το ύψος των οποίων είναι άγνωστο σήμερα.

Κατά συνέπεια, ένα άνοιγμα ρευστότητας συνεπάγεται κίνδυνο επιτοκίων λόγω, ακριβώς, της αβεβαιότητας των μελλοντικών εισροών, στην περίπτωση επένδυσης, ή του κόστους από τις μεταβολές στο επίπεδο των επιτοκίων, στην περίπτωση της χρηματοδότησης ελλειμμάτων.

Πρέπει να σημειωθεί, βέβαια, ότι η κατάσταση της ρευστότητας μιας τράπεζας δεν χαρακτηρίζεται μόνο από ένα άνοιγμα σε μια δεδομένη χρονική στιγμή. Μόνο το συνολικό άνοιγμα μπορεί να χαρακτηρίσει τη θέση της τράπεζας ως προς τη ρευστότητα της. Εάν υποθέσουμε ένα περιβάλλον σταθερών μεταβολών, τότε το άνοιγμα ρευστότητας δημιουργεί κίνδυνο επιτοκίων, ενώ σε περιβάλλον μη σταθερών μεταβολών οδηγεί σε κίνδυνο ρευστότητας.

Επιπλέον, ο κίνδυνος επιτοκίων συνδέεται άμεσα με το *άνοιγμα επιτοκίων* (interest rate gap), θέμα για το οποίο θα μιλήσουμε στην αμέσως επόμενη ενότητα. Το άνοιγμα επιτοκίων αποτελεί ένα τυποποιημένο μέγεθος μέτρησης του κινδύνου έκθεσης στον κίνδυνο από τις μεταβολές στα επίπεδα των επιτοκίων.

Γενικά, η έννοια του “ανοίγματος” είναι κεντρική στη διαχείριση Ενεργητικού-Παθητικού (ALM) για δύο βασικούς λόγους:

(α) Είναι η απλούστερη μέτρηση της έκθεσης στον κίνδυνο επιτοκίου

(β) Είναι το απλούστερο υπόδειγμα, που συνδέει τις μεταβολές του επιτοκίου με το εισόδημα.

Ενότητα 4.2

ΑΝΟΙΓΜΑ ΕΠΙΤΟΚΙΩΝ

Το άνοιγμα επιτοκίων συνδέει τη μεταβολή του περιθωρίου επιτοκίου με τη μεταβολή των επιτοκίων.

4.2.1 Άνοιγμα επιτοκίου και περιθώριο επιτοκίου

Το άνοιγμα επιτοκίων σε δεδομένη χρονική περίοδο ορίζεται από τη διαφορά μεταξύ των σταθερών στοιχείων του ενεργητικού (FRA, fixed rate assets) και του παθητικού (FRL, fixed rate liabilities). Μπορεί, επίσης, να υπολογιστεί και από τη διαφορά μεταξύ των στοιχείων του ενεργητικού VRA και του παθητικού VRL, που επηρεάζονται από τις μεταβολές των επιτοκίων (interest rate–sensitive assets, liabilities). Η παρακάτω σχέση παριστάνει την εξίσωση στην περίπτωση που οι δύο διαφορές είναι ίσες σε απόλυτο μέγεθος. Αυτό συμβαίνει όταν

Σύνολο των περιουσιακών στοιχείων = Σύνολο των υποχρεώσεων

Ωστόσο, οι διαφορές δεν είναι ίσες όταν υπάρχει άνοιγμα ρευστότητας και, η διαφορά ισούται με το άνοιγμα ρευστότητας. Εάν δεν υπάρχει άνοιγμα ρευστότητας το VRG είναι αντίθετο του FRG, γιατί το άθροισμά τους ισούται με μηδέν.

Ο προσδιορισμός του χρονικού ορίζοντα είναι απαραίτητος στον υπολογισμό του ανοίγματος επιτοκίων. Ειδάλλως, δεν είναι δυνατόν να προσδιορίσουμε ποιο επιτόκιο είναι μεταβλητό και ποιο παραμένει σταθερό. Όσο μακρύτερη είναι η χρονική περίοδος, τόσο περισσότερα στοιχεία του ενεργητικού και του παθητικού είναι ευαίσθητα στις μεταβολές του επιτοκίου.

Για παράδειγμα, εάν FRA = 600 και FRL = 400 τότε FRG = 200. Εάν VRA = 700 και VRL = 900, τότε VRG = –200. Συνεπώς, στην περίπτωση που το σύνολο του ενεργητικού ισούται με το σύνολο του παθητικού, θα είναι FRG = –VRG.

Έτσι, η ερμηνεία των FRA και FRL διαφέρει της ερμηνείας των VRA και VRL.

$$\text{Άνοιγμα επιτοκίων} = FRA - FRL = FRG = |VRA - VRL| = VRG \quad (3)$$

Το άνοιγμα επιτοκίων αποτελεί ένα μέτρο της ευαισθησίας του *περιθωρίου* (interest margin), δηλαδή της διαφοράς μεταξύ του εισοδήματος και του κόστους σε δεδομένη χρονική περίοδο. Όταν το άνοιγμα επιτοκίων ισούται με το μηδέν, τότε το περιθώριο δεν επηρεάζεται από τις μεταβολές των επιτοκίων. Ο υπολογισμός της μεταβολής του περιθωρίου επιτοκίων (ΔΙΜ), που οφείλεται στις μεταβολές των επιτοκίων (*M*) για την περίοδο από 0 έως *t*, δίνεται από τη σχέση

$$\begin{aligned} \Delta \mathrm{IM} &= (\mathrm{VRA} - \mathrm{VRL}) \times \Delta i = (\text{άνοιγμα επιτοκίου}) \times \Delta i \\ &= (\text{άνοιγμα επιτοκίου}) \times (\mathrm{i_t} - \mathrm{i_0}) \end{aligned} \quad (4)$$

που μπορεί να γραφεί και ως

$$\Delta \mathrm{IM} = \mathrm{VRA} \times \Delta i - \mathrm{VRL} \times \Delta i = \text{μεταβολή εισοδήματος} - \text{μεταβολή κόστους} \quad (5)$$

Παράδειγμα 2

Το παράδειγμα που απεικονίζεται στον παρακάτω πίνακα δείχνει την επίδραση των μεταβαλλόμενων στον χρόνο ανοιγμάτων. Στο παράδειγμα αυτό υποτίθεται ότι η συνολική περίοδος είναι τρεις μήνες. Επίσης, υποθέτουμε ότι το άνοιγμα ρευστότητας είναι ίσο με το μηδέν και δεν μεταβάλλεται. Τέλος, υποθέτουμε μεταβολή των επιτοκίων κατά 1%.

Πίνακας 2
Μεταβολή του αθροιστικού περιθωρίου επιτοκίου

Τέλος περιόδου	1ος μήνας	2ος μήνας	3ος μήνας
VRA	0	250	300
VRL	200	200	200
Οριακό άνοιγμα	–200	+250	+50
Αθροιστικό άνοιγμα	–200	+50	+100
Μηνιαία μεταβολή περιθωρίου	–200 × 0.01 = –2.0	50 × 0.01 = 0.5	100 × 0.01 = 1.0

Η μεταβολή του αθροιστικού περιθωρίου στην περίοδο των τριών μηνών ισούται με το άθροισμα των μηνιαίων μεταβολών περιθωρίου, δηλαδή έχουμε

$$-2.0 + 0.5 + 1.0 = -0.5 \text{ ή } [(-200) + (250 - 200) + (50 + 250 - 200)] \times 0.01 = -0.5.$$

Στο ίδιο αποτέλεσμα μπορούμε να καταλήξουμε και με τη χρήση του οριακού ανοίγματος. Στην περίπτωση αυτή, αποδεικνύεται ότι το άθροισμα του οριακού ανοίγματος κάθε μήνα σταθμισμένου με το υπόλοιπο του χρόνου μέχρι τη λήξη (residual maturities) ισούται με το σύνολο των αθροιστικών ανοιγμάτων κάθε περιόδου.

Έστω, για παράδειγμα, ότι g_1, g_2 και g_3 είναι τα ανοίγματα τριών διαδοχικών περιόδων. Τα αθροιστικά ανοίγματα θα είναι

$$G_1 = g_1,\ G_2 = g_1 + g_2 \text{ και } G_3 = g_1 + g_2 + g_3$$

Το σύνολο των αθροιστικών ανοιγμάτων θα ισούται με

$$G_1 + G_2 + G_3 = g_1 + (g_1 + g_2) + (g_1 + g_2 + g_3) = 3g_1 + 2g_2 + g_3$$

Γενικότερα, για *N* περιόδους θα είναι

$$G_1 + G_2 + ... + G_N = Ng_1 + (N-1)g_2 + ... + g_N \quad (6)$$

Στο παραπάνω παράδειγμα του Πίνακα 2, σύμφωνα με τη σχέση (6) θα έχουμε

$$[(-200 \times 3) + (250 \times 2) + (50 \times 1)] \times 0.01 = -0.5$$

Οι παραπάνω υπολογισμοί γίνονται με σκοπό να προσδιοριστεί η μεταβολή των περιθωρίων λόγω μεταβολής στο επίπεδο των επιτοκίων. Ωστόσο, δεν μας δίνουν την αξία των περιθωρίων. Ας δούμε τους υπολογισμούς αυτούς με το Παράδειγμα 3.

Παράδειγμα 3

Στον Πίνακα 3 δίνεται ένας υποθετικός ισολογισμός. Υποθέτουμε ότι το επιτόκιο της αγοράς είναι 10% και ότι μεταβάλλεται κατά 1%. Το περιθώριο είναι 2% για δάνεια και –4% για κατάθεση.

Πίνακας 3
Υπολογισμός του περιθωρίου επιτοκίου πριν και μετά την αύξηση του επιτοκίου αγοράς

	Ισολογισμός	Περιθώριο	Επιτόκιο 10%	Επιτόκιο 11%	Μεταβολή
FRA	700	+2%	700 × 0.12 = 84	700 × 0.12 = 84	0
VRA	300	+2%	300 × 0.12 = 36	300 × 0.13 = 39	+3
ΣΥΝΟΛΟ	1,000		*120*	*123*	+3
FRL	800	–4%	800 × 0.06 = 48	800 × 0.06 = 48	0
VRL	200	–4%	200 × 0.06 = 12	200 × 0.07 = 14	+2
ΣΥΝΟΛΟ	1,000		*60*	*62*	+2
VRG	+100				
ΠΕΡΙΘΩΡΙΟ			*60*	*61*	+1

Το στοιχείο VRG στον Πίνακα 3 έχει υπολογιστεί σύμφωνα με τη σχέση (3). Η μεταβολή των επιτοκίων επηρεάζει μόνο τα στοιχεία VRA και VRL και όχι τα σταθερά στοιχεία. Έτσι, η αρχική τιμή του περιθωρίου επιτοκίου είναι

$$1,000 \times (0.10 + 0.02) - 1,000 \times (0.10 - 0.04) = 120 - 60 = 60$$

Με τη μεταβολή των επιτοκίων η τιμή είναι ίση με 61, σύμφωνα με τη σχέση (5). Συνεπώς, η μεταβολή του περιθωρίου επιτοκίου ισούται με +1, που συμφωνεί με τη μεταβολή στο άνοιγμα του επιτοκίου, σε συνδυασμό με τη μεταβολή του επιτοκίου κατά 1%:

$$100 \times 0.01 = +1.$$

4.2.2 Σχέση μεταξύ ανοίγματος επιτοκίου και ρευστότητας

Είπαμε ότι το άνοιγμα σταθερού επιτοκίου είναι το αντίθετο από το άνοιγμα του μεταβλητού επιτοκίου, όταν το ενεργητικό ισούται με το παθητικό. Συνεπώς, ένα άνοιγμα ρευστότητας συνεπάγεται ένα άνοιγμα επιτοκίου. Ένα προβλεπόμενο έλλειμμα κεφαλαίου ισοδυναμεί με παθητικό–ευαίσθητο στις μεταβολές του επιτοκίου, ενώ ένα αναμενόμενο πλεόνασμα κεφαλαίου ισοδυναμεί με ενεργητικό–ευαίσθητο στις μεταβολές επιτοκίου. Ωστόσο, σε κάθε περίπτωση το άνοιγμα σταθερού επιτοκίου είναι το ίδιο. Το άνοιγμα επιτοκίου που προκύπτει από τη διαφορά στοιχείων ενεργητικού και παθητικού ευαίσθητων στη μεταβολή του επιτοκίου, ισούται με το άνοιγμα *πριν* τη χρηματοδότηση του ελλείμματος μείον το άνοιγμα ρευστότητας:

VRG = VRG πριν τη χρηματοδότηση ελλείμματος – άνοιγμα ρευστότητας

Για παράδειγμα (Bessis 2002), έστω τα παρακάτω στοιχεία υποθετικού ισολογισμού:

Πάγια στοιχεία	10	Ίδια Κεφάλαια	20
FRA	75	FRL	30
VRA	35	VRL	40
		Άνοιγμα ρευστότητας	=120–90=30
ΣΥΝΟΛΟ	120	ΣΥΝΟΛΟ	120

Άνοιγμα ρευστότητας = σύνολο ενεργητικού – σύνολο παθητικού
= (10 + 75 + 35) – (20 + 30 + 40)
= 120 – 90 = + 30

Συνεπώς, υπάρχει έλλειμμα ρευστότητας.

FRG = 75 – 30 = 45

VRG = 35 – 40 = –5, δίχως άνοιγμα ρευστότητας
= –5 – 30 = –35, με άνοιγμα ρευστότητας

Συνεπώς, θα είναι:

VRG = –5 – 30 = – 35.

4.2.3 Σταθερά και μεταβλητά επιτόκια

Για τον προσδιορισμό των στοιχείων εκείνων που μεταβάλλονται εξαιτίας των επιτοκίων θα πρέπει να γίνει σαφής ο διαχωρισμός μεταξύ σταθερών (fixed) και μεταβλητών (variable) επιτοκίων. Ένα μεταβλητό επιτόκιο αναφέρεται, συνήθως, στο επιτόκιο της αγοράς που μεταβάλλεται περιοδικά, όπως το LIBOR ενός μήνα ή το LIBOR ενός έτους ή, εάν μας ενδιαφέρει η μακροχρόνια αποτίμηση/σύγκριση, η απόδοση των ομολόγων.

Τα επιτόκια αυτά μπορεί να αναθεωρούνται πολύ συχνά, ακόμα και ανά μία ημέρα. Όσο μεγαλύτερη είναι η χρονική απόσταση μεταξύ δύο αναθεωρήσεων, τόσο περισσότερος είναι ο χρόνος που ένα μεταβλητό επιτόκιο παραμένει «σταθερό».

Βέβαια, η συχνότητα αναθεώρησης του επιπέδου των επιτοκίων, πολλές φορές, δεν είναι σταθερή και εξαρτάται από την πολιτική του τραπεζικού οργανισμού (για παράδειγμα, το prime rate) ή από το θεσμικό πλαίσιο της κάθε χώρας (όπως, για παράδειγμα, τα επιτόκια αποταμίευσης).

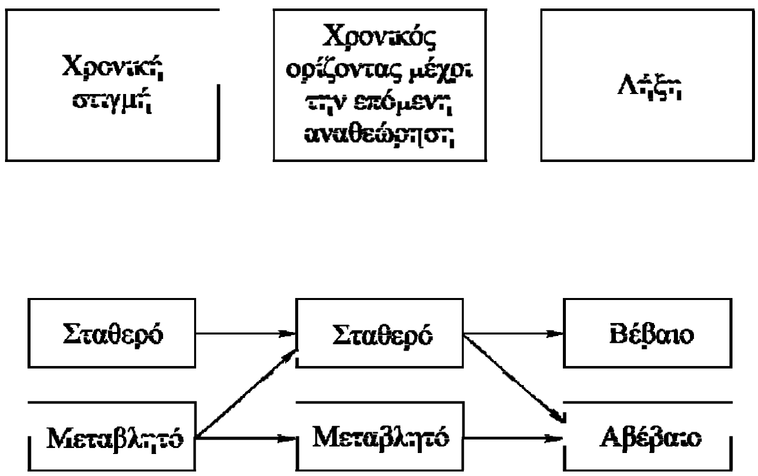
Ακόμα, μερικά από τα επιτόκια που μεταβάλλονται περιοδικά προσδιορίζονται στην αρχή της περιόδου και μερικά στο τέλος της περιόδου. Τις περισσότερες φορές, όμως, προσδιορίζονται στην αρχή της περιόδου. Σε μερικές χώρες συμβαίνει να υπολογίζονται ως ο μέσος όρος των τιμών που παρατηρούνται στο διάστημα μιας συγκεκριμένης περιόδου.

Για παράδειγμα, το ύψος του επιτοκίου ενός μήνα μπορεί να τεθεί ίσο με τη μέση τιμή των ημερήσιων επιτοκίων του προηγούμενου μήνα. Σε αυτές τις περιπτώσεις, το ύψος αυτών των επιτοκίων δεν μπορεί να θεωρηθεί με βεβαιότητα, παρά μόνο στο τέλος της τρέχουσας περιόδου, όπου η αβεβαιότητα διαλύεται. Από την άλλη, τα επιτόκια των οποίων το ύψος είναι δεδομένο στην αρχή της περιόδου θεωρούνται σταθερά μέχρι την ημερομηνία της επόμενης αναθεώρησης.

Μεγάλη σημασία, επίσης, έχει η διάκριση των επιτοκίων εκείνων των οποίων το ύψος είναι γνωστό από εκείνα των οποίων είναι άγνωστο, σε δεδομένη χρονική περίοδο. Ένα μεταβλητό επιτόκιο του οποίου το ύψος είναι δεδομένο παραμένει σταθερό για το χρονικό διάστημα που χωρίζει τις ημερομηνίες αναθεώρησης.

Έτσι, όπως φαίνεται και από το Διάγραμμα 1, υπάρχουν λίγες μόνο περιπτώσεις στις οποίες το μελλοντικό ύψος των επιτοκίων είναι γνωστό με βεβαιότητα, ενώ οι περισσότερες περιπτώσεις αναφέρονται σε επιτόκια των οποίων το ύψος είναι αβέβαιο. Θα θεωρούμε τα σταθερά επιτόκια ως «βέβαια» και τα μεταβλητά επιτόκια ως «αβέβαια».

Διάγραμμα 1
Επιτόκια, περίοδοι αναθεώρησης και ληκτότητα



4.2.4 Διάρθρωση επιτοκίου (interest rate structure) και σχέση βραχυχρόνιων και μακροχρόνιων επιτοκίων ή καμπύλη αποδόσεων (term structure ή yield curve)

Οι αποφάσεις χρηματοδότησης ή επένδυσης απαιτούν την επιλογή ως προς τη λήξη των επιτοκίων, αλλά και την απόφαση επιλογής σταθερών ή κυμαινόμενων επιτοκίων. Γενικά, υπάρχουν διαφορετικά επιτόκια για κάθε μελλοντική χρονική στιγμή. Η επιλογή μεταξύ σταθερών ή κυμαινόμενων επιτοκίων βασίζεται στη σύγκριση μεταξύ του τρέχοντος και του αναμενόμενου μελλοντικού επιτοκίου.

Η *δομή* ή *διάρθρωση του επιτοκίου* (term structure of interest rates) ή *χρονική διάρθρωση των επιτοκίων* αποτελεί τη βασική παράμετρο για την απόφαση αυτή. Εξασφαλίζει το σύνολο των διαθέσιμων επιτοκίων κάθε ληκτότητας. Επιπλέον, προσθέτει πληροφόρηση σχετικά με τα αναμενόμενα στο μέλλον επίπεδα των επιτοκίων και του πληθωρισμού.

Η σχέση μεταξύ των μακροχρόνιων και των βραχυχρόνιων επιτοκίων είναι γνωστή ως term structure των επιτοκίων. Για δεδομένη χρονική στιγμή, η γραφική παρουσίαση των μακροχρόνιων και των βραχυχρόνιων επιτοκίων (δηλαδή το σύνολο των αποδόσεων από σήμερα για κάθε μελλοντική λήξη) μας δίνει ένα γράφημα, γνωστό ως *καμπύλη απόδοσης* (yield curve), για τα δεδομένα αυτά. Δηλαδή, η καμπύλη αποδόσεων αποτελεί τη γραφική παράσταση της σχέσης μεταξύ των αποδόσεων των ομολογιών και της διάρκειας μέχρι τη λήξη τους. Φυσικά, οι καμπύλες απόδοσης μεταβάλλουν τη θέση και την κλίση τους, και στην κλίση των καμπυλών απόδοσης βρίσκεται το μεγάλο θεωρητικό και πρακτικό ενδιαφέρον.

Παρακολουθώντας την εξέλιξη των βραχυχρόνιων και μακροχρόνιων επιτοκίων στις ΗΠΑ, για παράδειγμα, από τις αρχές του αιώνα μέχρι σήμερα, μπορούμε να παρατηρήσουμε τα εξής:

α) Τόσο τα βραχυπρόθεσμα όσο και τα μακροπρόθεσμα επιτόκια σημείωσαν, γενικά, αύξηση κατά τη διάρκεια της περιόδου αυτής.
β) Τα βραχυπρόθεσμα επιτόκια ήταν περισσότερο ασταθή συγκριτικά με τα μακροπρόθεσμα επιτόκια, ιδίως τη δεκαετία 1970–1980.
γ) Τα μακροπρόθεσμα επιτόκια ήταν, γενικά, υψηλότερα από τα βραχυπρόθεσμα επιτόκια, κυρίως την περίοδο 1929–1966.
δ) Η προβλεπτική ικανότητα της καμπύλης αποδόσεων μειώθηκε σημαντικά μετά το 1979, όταν τα επιτόκια παρουσίασαν μικρότερη μεταβλητότητα.
ε) Τα βραχυχρόνια επιτόκια είναι άλλοτε χαμηλότερα από τα μακροπρόθεσμα (περίοδος 1990) και άλλοτε υψηλότερα (περίοδος 1980-1981).

Ιστορικά, τις περισσότερες φορές, έχει παρατηρηθεί ότι τα μακροχρόνια επιτόκια είναι υψηλότερα των βραχυχρόνιων γιατί είναι περισσότερο επικίνδυνα. Έτσι, η καμπύλη απόδοσης έχει, στην περίπτωση αυτή, θετική κλίση (upward sloping). Εάν, αντίθετα, για δεδομένη χρονική στιγμή τα βραχυχρόνια επιτόκια είναι υψηλότερα από τα μακροχρόνια, η καμπύλη απόδοσης θα έχει αρνητική κλίση (downward sloping).

Στην πρώτη περίπτωση, μιλάμε για «κανονική» καμπύλη απόδοσης (normal yield curve) και στη δεύτερη περίπτωση, μιλάμε για αντεστραμμένη ή «μη κανονική» καμπύλη απόδοσης (inverted ή abnormal yield curve).

Έχουν αναπτυχθεί διάφορες θεωρίες για να εξηγήσουν τη σχέση μεταξύ μακροχρόνιων και βραχυχρόνιων επιτοκίων, δηλαδή την κλίση της καμπύλης απόδοσης. Οι τρεις κυριότερες είναι οι ακόλουθες:

- Η *θεωρία της προτίμησης ληκτότητας* ή *υπόθεση της τμηματοποίησης των αγορών* (market segmentation theory), σύμφωνα με την οποία κάθε δανειστής και δανειζόμενος έχει προτίμηση σε διαφορετική ημερομηνία λήξης (prefered maturity).

Η θέση αυτή υποστηρίζεται από το γεγονός ότι, εάν κάποιος επενδύσει τα χρήματα του σε μια σειρά βραχυπρόθεσμων τίτλων αντί σε μια μακροχρόνια ομολογία, τότε υπάρχει ο κίνδυνος επανεπένδυσης. Για παράδειγμα, ένας που δανείζεται για να αγοράσει κατοικία, θα προτιμήσει ένα μακροχρόνιο δάνειο. Αντίθετα, ένας λιανέμπορος, που δανείζεται τον Σεπτέμβριο για την κατασκευή της αποθήκης των χριστουγεννιάτικων ειδών δώρων για τον Δεκέμβριο, θα προτιμήσει ένα βραχυχρόνιο δάνειο.

Το ίδιο ισχύει και για τον αποταμιευτή. Για παράδειγμα, ο εργαζόμενος που προγραμματίζει τις διακοπές του καλοκαιριού θα προτιμήσει να δανείσει τα χρήματα του στη βραχυχρόνια αγορά χρήματος, ενώ, αντίθετα, κάποιος που σκέφτεται να συνταξιοδοτηθεί μετά από 20 χρόνια θα προτιμήσει, πιθανώς, να επενδύσει μακροχρόνια.

Σύμφωνα με τη θεωρία αυτή, η κλίση της καμπύλης απόδοσης εξαρτάται από τις συνθήκες προσφοράς και ζήτησης στη βραχυχρόνια και τη μακροχρόνια αγορά. Με άλλα λόγια, οι αποδόσεις σε κάθε επιμέρους αγορά αντανακλούν τις συνθήκες ζήτησης και προσφοράς στην αγορά αυτή. Έτσι, η καμπύλη απόδοσης σε δεδομένη χρονική στιγμή μπορεί ναι είναι οριζόντια, ανοδική ή καθοδική. Για παράδειγμα, όταν υπάρχει μεγάλη προσφορά χρήματος σχετικά με τη ζήτηση στη βραχυχρόνια αγορά, αλλά και έλλειψη χρήματος στη μακροχρόνια αγορά, τότε η καμπύλη απόδοσης θα είναι θετικής κλίσης. Αντίθετα, εάν υπάρχει ισχυρή ζήτηση χρήματος στη βραχυχρόνια αγορά συγκριτικά με αυτήν στη μακροχρόνια αγορά, τότε η καμπύλη απόδοσης θα έχει αρνητική κλίση.

- Η *θεωρία διαφοροποίησης ρευστότητας* (liquidity preference theory), σύμφωνα με την οποία τα μακροχρόνια ομόλογα, συνήθως, έχουν μεγαλύτερη απόδοση από τα βραχυχρόνια ομόλογα, για δύο λόγους:
  1) Οι επενδυτές, γενικά, προτιμούν να κατέχουν βραχυπρόθεσμους τίτλους, για λόγους ρευστότητας και, συνεπώς, αποδέχονται χαμηλότερες αποδόσεις.
  2) Συγχρόνως, οι δανειζόμενοι αντιδρούν με την αντίθετη ακριβώς συμπεριφορά και προτιμούν μακροχρόνιους τίτλους.

Αυτό σημαίνει ότι οι ομολογίες μεγαλύτερης διάρκειας περιέχουν και ένα ασφάλιστρο κινδύνου ρευστότητας και δεν είναι πλήρη υποκατάστατα μεταξύ τους κατά μήκος της κλίμακας των διαρκειών. Επίσης, σημαίνει ότι οι επενδυτές ζητούν να προστεθεί στην απόδοση που λαμβάνουν το ασφάλιστρο ρευστότητας, προκειμένου να διακρατήσουν τις μακροχρόνιες ομολογίες, οι τιμές των οποίων είναι περισσότερο ευμετάβλητες. Ακόμα, υποτίθεται ότι οι επενδυτές αποστρέφονται τον κίνδυνο.

Η συμπεριφορά τους αυτή είναι αναμενόμενη, αφού στην αντίθετη περίπτωση θα ήταν υποχρεωμένοι να εξυπηρετήσουν άμεσα το χρέος τους. Κατά συνέπεια, είναι διατεθειμένοι να πληρώσουν μεγαλύτερο τόκο για μακροχρόνια δάνεια από ό,τι για βραχυχρόνια. Έτσι, η θεωρία αυτή δέχεται ότι, κάτω από κανονικές συνθήκες, η καμπύλη απόδοσης πρέπει να έχει θετική κλίση.

- Η *θεωρία των προσδοκιών* (expectations theory), σύμφωνα με την οποία η κλίση της καμπύλης απόδοσης εξαρτάται από τις προσδοκίες για το μελλοντικό επίπεδο του πληθωρισμού. Θα έχει θετική κλίση στην περίπτωση που αναμένεται άνοδος των βραχυπρόθεσμων επιτοκίων και αρνητική στην περίπτωση που προεξοφλείται η πτώση των επιτοκίων.

Έτσι, εάν, για παράδειγμα, οι επενδυτές αναμένουν ότι τα βραχυπρόθεσμα επιτόκια θα είναι, κατά μέσο όρο, 5% για τα επόμενα 10 έτη, τότε και το επιτόκιο των δεκαετών ομολογιών θα είναι επίσης 5%. Ειδικότερα, το ονομαστικό επιτόκιο, k_t, ενός ομολόγου που λήγει μετά t έτη βρίσκεται από τη σχέση

$$k_t = k^* + \mathrm{IP}_t$$

όπου IP_t είναι ο αναμενόμενος πληθωρισμός για τα έτη μέχρι τη λήξη του ομολόγου και k^* είναι το επιτόκιο δίχως κίνδυνο της αγοράς (risk free rate).

Σύμφωνα με τη θεωρία των προσδοκιών, η καμπύλη απόδοσης θα έχει θετική κλίση, όταν προεξοφλείται ότι ο πληθωρισμός θα είναι ανοδικός, και αρνητική κλίση στην αντίθετη περίπτωση.

Τα αποτελέσματα πρόσφατων εμπειρικών ερευνών δείχνουν ότι και οι δύο αυτές τελευταίες θεωρίες περιέχουν αρκετή δόση αλήθειας. Συγκεκριμένα, οι εργασίες αυτές υποστηρίζουν ότι, αν οι δανειστές και οι δανειζόμενοι δεν έχουν λόγους να αναμένουν μια μεταβολή στο γενικό επίπεδο των επιτοκίων, η καμπύλη των αποδόσεων θα έχει θετική κλίση λόγω της προτίμησης ρευστότητας. Ωστόσο, είναι γεγονός ότι σε περιόδους ιδιαίτερα υψηλών επιτοκίων, η καμπύλη των αποδόσεων έχει αρνητική κλίση, όπως προκύπτει από την προσέγγιση των ορθολογικών προσδοκιών.

Δραστηριότητα 1/Κεφάλαιο 4

Ποιες θεωρίες έχουν αναπτυχθεί με σκοπό να ερμηνεύσουν τη σχέση μεταξύ των βραχυχρόνιων και των μακροχρόνιων επιτοκίων; Τι έχουν δείξει τα μέχρι σήμερα αποτελέσματα των εμπειρικών ερευνών σχετικά με την ισχύ των υποθέσεων των θεωριών αυτών; Απαντήστε σε ένα κείμενο 100 λέξεων περίπου. Στη συνέχεια, επιστρέψτε στην υποενότητα 4.2.4 και ελέγξτε την ορθότητα της απάντησής σας.

4.2.5 Σχέση κινδύνου και απόδοσης στη διαχείριση του κινδύνου επιτοκίων

Η πολιτική διαχείρισης του κινδύνου επιτοκίων βασίζεται σε ορισμένες μεταβλητές–στόχους με σκοπό τη βελτιστοποίηση της σχέσης κινδύνου–απόδοσης. Ένας τέτοιος στόχος, όπως ήδη έχουμε αναφέρει, είναι το περιθώριο επιτοκίου. Στην περίπτωση αυτή, η απόδοση ορίζεται από την αναμενόμενη τιμή του περιθωρίου και ο κίνδυνος από τη μεταβλητότητα του περιθωρίου.

Σε κάθε έκθεση στον κίνδυνο του επιτοκίου, το περιθώριο είναι αβέβαιο. Ακόμα, μπορεί να αποδειχτεί ότι υπάρχει σχέση μεταξύ κινδύνου και απόδοσης, αφού υπάρχει θετική σχέση μεταξύ αναμενόμενης τιμής και μεταβλητότητας του περιθωρίου επιτοκίου.

Για την ποσοτικοποίηση του κινδύνου, θα πρέπει να καθοριστούν τα πιθανά σενάρια ως προς τις μεταβολές των επιτοκίων.

Παράδειγμα 4

Ας θεωρήσουμε το Παράδειγμα 4 που παρουσιάζει ο Πίνακας 4 (Bessis 1998).

Πίνακας 4
Αναμενόμενη μεταβολή αρχικού επιτοκίου

Πιθανότητα	Μεταβολή	Τελικό επιτόκιο
0.5	+3%	13%
0.5	0%	10%
Αναμενόμενη τιμή	+1.5%	11.5%

Τα βήματα που ακολουθούνται είναι τα παρακάτω:

- Υπολογίζουμε την έκθεση στον κίνδυνο του επιτοκίου από το άνοιγμα.
- Υπολογίζουμε για κάθε τιμή του ανοίγματος το περιθώριο για κάθε σενάριο μεταβολής του ύψους των επιτοκίων.
- Από αυτές τις τιμές υπολογίζουμε τη μέση τιμή.
- Υπολογίζουμε τη διακύμανση των τιμών αυτών.
- Θεωρούμε την τετραγωνική ρίζα (τυπική απόκλιση) της διακύμανσης, που αντιπροσωπεύει τον κίνδυνο.

Ας θεωρήσουμε για το Παράδειγμα 4 του Πίνακα 4 ότι το άνοιγμα ισούται με 6. Η μεταβολή του περιθωρίου ισούται με [άνοιγμα × Δi] από τη σχέση (4). Είναι, δηλαδή, το περιθώριο για τις προβλεπόμενες μεταβολές του επιτοκίου του παραδείγματος

$$6 \times 0.03 = 0.18 \text{ και } 6 \times 0.00 = 0.0$$

Η αναμενόμενη τιμή είναι

$$(0.5 \times 0.18) + (0.5 \times 0.0) = 0.09$$

και η διακύμανση θα ισούται με

$$0.5 \times (0.18 - 0.09)^2 + 0.5 \times (0.0 - 0.09)^2 = 0.0081$$

Συνεπώς, η μεταβλητότητα που δίνεται από την τυπική απόκλιση θα ισούται με την τετραγωνική ρίζα του 0.0081, δηλαδή $\sqrt{0.0081} = 0.09$. Αν θεωρήσουμε διάφορες τιμές του ανοίγματος επιτοκίου, για παράδειγμα μεταξύ του –10 και του +10, τότε η αναμενόμενη μεταβολή και η μεταβλητότητα του περιθωρίου θα είναι όπως στον Πίνακα 5.

Πίνακας 5
Μέση τιμή και μεταβλητότητα περιθωρίου

Άνοιγμα επιτοκίου	Μέση τιμή περιθωρίου	Μεταβλητότητα περιθωρίου
–10	–0.15	0.15
–8	–0.12	0.12
–6	–0.09	0.09
–4	–0.06	0.06
–2	–0.03	0.03
0	0.00	0.00
+2	0.03	0.03
+4	0.06	0.06
+6	0.09	0.09
+8	0.12	0.12
+10	0.15	0.15

Χρήσιμη στην ανάλυση της σχέσης κινδύνου απόδοσης είναι η διαγραμματική απεικόνιση, όπου στον κάθετο άξονα μετρούμε την αναμενόμενη μεταβολή του περιθωρίου και στον οριζόντιο άξονα μετρούμε τη μεταβλητότητα του περιθωρίου.

Η μεταβλητότητα είναι μηδέν, όταν το άνοιγμα επιτοκίου ισούται με το μηδέν. Εάν το άνοιγμα επιτοκίου διαφέρει του μηδενός, τότε υπάρχουν δύο τιμές για το περιθώριο σε δεδομένο επίπεδο μεταβλητότητας. Αυτό συμβαίνει γιατί υπάρχουν δύο ανοίγματα, για παράδειγμα +6 και –6, με την ίδια μεταβλητότητα (0.09) και συμμετρικές μεταβολές του περιθωρίου (+0.09 και –0.09).

Η αναμενόμενη μεταβολή στο περιθώριο είναι θετική, όταν το άνοιγμα είναι θετικό. Εάν μια αύξηση του επιτοκίου είναι αναμενόμενη, το μέσο περιθώριο αυξάνει, όταν το άνοιγμα είναι θετικό. Αυτό είναι αναμενόμενο, αφού το αναμενόμενο επιτόκιο, η μέση τιμή των δύο σεναρίων, είναι υψηλότερο του τρέχοντος επιπέδου του επιτοκίου.

Όταν για δεδομένο επίπεδο κινδύνου το αναμενόμενο περιθώριο είναι υψηλότερο κάθε άλλου πιθανού συνδυασμού, τότε θα λέμε ότι ο συνδυασμός κινδύνου-απόδοσης είναι *αποτελεσματικός* (efficient). Οι αποτελεσματικοί συνδυασμοί που κυριαρχούν έναντι άλλων δημιουργούνται από τις θετικές τιμές του ανοίγματος. Όλοι οι άλλοι συνδυασμοί δημιουργούνται από αρνητικές τιμές του ανοίγματος.

Το βέλτιστο εξαρτάται από τις προτιμήσεις του διαχειριστή. Στην πράξη, οι διαχειριστές θέτουν όρια στη μεταβλητότητα του περιθωρίου και μέσα στα όρια αυτά υπολογίζουν το αναμενόμενο περιθώριο.

4.2.6 Υπολογισμός μέγιστης τιμής ανοίγματος

Η ανάλυση του ανοίγματος διευκολύνει στην κατανόηση της σχέσης μεταξύ της αβεβαιότητας των επιτοκίων και της αβεβαιότητας του περιθωρίου. Η σχέση μεταξύ της αναμενόμενης τιμής του περιθωρίου και της μεταβλητότητας του δίνεται από το άνοιγμα. Η παρακάτω εξίσωση επαναλαμβάνει την (4) και δείχνει τη σχέση μεταξύ του περιθωρίου επιτοκίου, ΙΜ, και των επιτοκίων μεταξύ των χρονικών περιόδων 0 και t:

$$\Delta(\text{IM}) = (\text{άνοιγμα επιτοκίου}) \times \Delta i = (\text{άνοιγμα επιτοκίου}) \times (i_t - i_0) \qquad (4\alpha)$$

Η αναμενόμενη τιμή του περιθωρίου εξαρτάται από την αναμενόμενη μεταβολή των επιτοκίων. Το επίπεδο του επιτοκίου είναι μια τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί μια κατανομή πιθανοτήτων, της οποίας η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση είναι γνωστά μεγέθη. Η κατανομή πιθανότητας του περιθωρίου προκύπτει από αυτή του επιτοκίου με δεδομένο το άνοιγμα επιτοκίου.

Έστω $E(i_t)$ και $\sigma(i_t)$ η αναμενόμενη τιμή και η τυπική απόκλιση της τυχαίας μεταβλητής του επιτοκίου, αντίστοιχα. Είναι γνωστό ότι, εάν X είναι μια τυχαία μεταβλητή με αναμενόμενη τιμή και τυπική απόκλιση $E(X)$ και $\sigma(X)$, αντίστοιχα, τότε κάθε τυχαία μεταβλητή $Y = aX$, όπου a είναι μια σταθερή, ακολουθεί μια κατανομή με αναμενόμενη τιμή $a \times E(X)$ και τυπική απόκλιση $a \times \sigma(X)$.

Η εφαρμογή της πρότασης αυτής στο πρόβλημα μας έχει αποτέλεσμα τις παρακάτω σχέσεις που δίνουν την αναμενόμενη τιμή και την τυπική απόκλιση του περιθωρίου επιτοκίου:

$$E(\text{IM}) = (\text{άνοιγμα επιτοκίου}) \times E(i_t) \qquad (7)$$
$$\sigma(\text{IM}) = |\text{άνοιγμα επιτοκίου}| \times \sigma(i_t) \qquad (8)$$

Η απόλυτη τιμή στο άνοιγμα επιτοκίου της σχέσης (8) χρειάζεται, γιατί η τυπική απόκλιση μιας τυχαίας μεταβλητής είναι πάντοτε θετική.

Στο παράδειγμα του Πίνακα 4 παραπάνω, η τρέχουσα τιμή του επιτοκίου ήταν 10% και η αναμενόμενη ήταν ίση με 11.5% με μεταβλητότητα 0.9%. Συνεπώς, σύμφωνα με τις σχέσεις (7) και (8), η αναμενόμενη τιμή και η μεταβλητότητα του περιθωρίου επιτοκίου είναι αντίστοιχα

$$E(\text{IM}) = (\text{άνοιγμα επιτοκίου}) \times E(i_t) = (\text{άνοιγμα επιτοκίου}) \times 11.5\%$$
$$\sigma(\text{IM}) = |\text{άνοιγμα επιτοκίου}| \times a(i_t) = |\text{άνοιγμα επιτοκίου}| \times 0.9\%$$

Από τη σχέση (8), που δίνει τη μεταβλητότητα του περιθωρίου, μπορεί να εξαχθεί άμεσα το επιθυμητό (ή το μέγιστο) άνοιγμα. Πράγματι, από την (8) προκύπτει εύκολα

$$\sigma(\text{IM})/\sigma(i_t) = |\text{άνοιγμα επιτοκίου}| \tag{9}$$

Αυτό επιτυγχάνεται κάτω από ορισμένες υποθέσεις. Καταρχήν, η μεταβλητότητα του περιθωρίου είναι συνάρτηση του επιτοκίου. Η μεταβλητότητα του επιτοκίου μπορεί να προσδιοριστεί από ιστορικά δεδομένα. Ας υποθέσουμε, για παράδειγμα, ότι η ετήσια μεταβλητότητα του επιτοκίου είναι 1.5%.

Κάτω από την υπόθεση της κανονικής μεταβλητής, η πιθανότητα απόκλισης από τη μέση τιμή εκφράζεται σε πολλαπλάσια της τυπικής απόκλισης. Για παράδειγμα, είναι γνωστό ότι μια τυχαία μεταβλητή θα βρίσκεται στο διάστημα που ορίζεται στο ± 1.96 φορές την τυπική απόκλιση από τη μέση τιμή της με πιθανότητα 95%.

Έστω ότι το περιθώριο δεν μπορεί να κατέλθει περισσότερο του 100 με πιθανότητα 95%. Έτσι, αφού το επιτόκιο, στο παραπάνω παράδειγμα, αποκλίνει περισσότερο του $1.96 \times 1.5\% = 3\%$ σε λιγότερο από το 5% όλων των περιπτώσεων (δηλαδή με πιθανότητα 95%), η επιτρεπόμενη μεταβολή στο περιθώριο θα είναι

$$\Delta(\text{IM}) = \text{άνοιγμα} \times 3\% \leq 100 \Leftrightarrow \text{άνοιγμα} \leq 100/3\% = 3.333.$$

Έτσι, εάν το επιτόκιο αποκλίνει 3% (που είναι 1.96 φορές την τυπική απόκλιση), τότε η μεταβολή του περιθωρίου προς τα κάτω θα είναι ίση με $3.333 \times 3 = 100$, που αποτελεί και το όριο πτώσης του περιθωρίου.

Δραστηριότητα 2/Κεφάλαιο 4

Με βάση όσα μελετήσατε μέχρι τώρα, προσπαθήστε να απαντήσετε στα ακόλουθα ερωτήματα:

1. Τι ονομάζουμε:
    - Κίνδυνο ρευστότητας;
    - Άνοιγμα ρευστότητας;
    - Άνοιγμα επιτοκίων;
    - Περιθώριο επιτοκίου;
    - Δομή επιτοκίων;
    - Καμπύλη απόδοσης;
2. Ποια είναι η διαφορά μεταξύ ανοίγματος ρευστότητας και δυναμικού ανοίγματος;
3. Πότε μιλάμε για κανονική και πότε για μη κανονική καμπύλη απόδοσης;

Εάν δυσκολεύεστε να απαντήσετε, επιστρέψτε στην υποενότητα 4.2.6 και διαβάστε ξανά όσα γράψαμε σχετικά.

Ενότητα 4.3

ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΙ ΤΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ ΑΝΟΙΓΜΑΤΟΣ ΕΠΙΤΟΚΙΩΝ

Όπως έγινε φανερό από τις προηγούμενες ενότητες αυτού του κεφαλαίου, η ανάλυση ανοιγμάτων είναι απλή στην κατανόηση και στην εφαρμογή της. Η χρονική κατανομή των ανοιγμάτων προσφέρει μια ικανοποιητική εικόνα για την κατάσταση της τράπεζας ως προς την έκθεση της στον κίνδυνο των επιτοκίων. Άλλωστε, αποτελεί ένα εργαλείο ελέγχου στη διαχείριση του κινδύνου επιτοκίων. Με λίγα λόγια, αποτελεί έναν εύλογο δείκτη που υπολογίζεται εύκολα από έναν απλό ισολογισμό. Μάλιστα, σε συνδυασμό με άλλες τεχνικές (για παράδειγμα την τεχνική της προσομοίωσης) προσφέρει βαθιά γνώση στη διαχείριση του κινδύνου επιτοκίων που αντιμετωπίζουν οι τραπεζικοί οργανισμοί. Επιπλέον, το άνοιγμα επιτοκίου συνδέεται άμεσα με το περιθώριο επιτοκίου, που αποτελεί έναν από τους βασικούς στόχους πολιτικής στη διαχείριση του κινδύνου επιτοκίων.

Ωστόσο, ως τεχνική στηρίζεται σε μερικές υποθέσεις που δεν ισχύουν σε κάθε κατάσταση και κάθε χρηματοοικονομικό εργαλείο. Υπάρχουν, δηλαδή, κάποιοι περιορισμοί που συνδέονται με τη χρονική διάρκεια της επένδυσης (maturity), την επιλογή του επιτοκίου αναφοράς (interest rate reference), με βάση το οποίο θα σχεδιαστούν τα σενάρια, ή, τέλος, τη χρονική περίοδο που θα επιλεγεί για τον υπολογισμό των ανοιγμάτων. Μερικά από αυτά τα προβλήματα σχολιάζονται, σύντομα, παρακάτω.

4.3.1 Προσδιορισμός των ανοιγμάτων επιτοκίων

Αφού τα ανοίγματα υπολογίζονται από τη σειρά των μελλοντικών εισροών ή εκροών, που μεταβάλλουν την έκθεση στον κίνδυνο επιτοκίων, θα πρέπει να χρονολογηθούν οι εισροές και οι εκροές αυτές. Όταν δε μπορούμε να προσδιορίσουμε το χρόνο που θα πραγματοποιηθούν οι αναμενόμενες εισροές ή εκροές, ο υπολογισμός των ανοιγμάτων γίνεται προβληματικός. Έτσι, τα στοιχεία του ισολογισμού για τα οποία δεν είναι προσδιορισμένη η λήξη τους αποτελούν πρόβλημα στον υπολογισμό των ανοιγμάτων.

Ως πρώτο παράδειγμα θα αναφέρουμε τις καταθέσεις, ένα μεγάλο μέρος των οποίων μπορεί να θεωρηθεί σταθερής απόδοσης, έναντι αυτών που μεταβάλλονται ανάλογα με το επιτόκιο. Σε κάθε περίπτωση, πάντως, ο όγκος των καταθέσεων παραμένει αβέβαιος. Η μεταβολή στον όγκο δημιουργεί ανοίγματα ρευστότητας, τα οποία θα πρέπει να χρηματοδοτηθούν ή να επανεπενδυθούν σε επιτόκιο το ύψος του οποίου είναι άγνωστο.

Ένας τρόπος για να καλυφθεί αυτή η αδυναμία από την απουσία λήξης (absence of maturity) είναι ο διαχωρισμός των καταθέσεων που μένουν σταθερές μέσα στο χρόνο από εκείνες που χαρακτηρίζονται από μεταβλητότητα.

4.3.2 Επιλογή επιτοκίου αναφοράς

Ο απλός υπολογισμός των ανοιγμάτων επιτοκίων στηρίζεται στην υπόθεση ότι τα επιτόκια συναλλαγών αντιγράφουν τα επιτόκια–δείκτες– δηλαδή, στο συσχετισμό των επιτοκίων συναλλαγών με εκείνα τα επιτόκια που χρησιμοποιούνται ως δείκτες. Αυτό, βέβαια, γίνεται για λόγους που εξυπηρετούν την υποδειγματοποίηση των μεταβολών των περιθωρίων και των ανοιγμάτων.

Για παράδειγμα, μια συναλλαγή μπορεί να χρησιμοποιεί ως δείκτη το επιτόκιο 3 μηνών LIBOR, ενώ το ετήσιο επιτόκιο LIBOR θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί ως καλύτερη προσέγγιση για τα βραχυχρόνια επιτόκια. Στην περίπτωση αυτή, το άνοιγμα που προκύπτει από τη χρήση του LIBOR ενός έτους δεν θα αντιγράψει την πραγματική μεταβολή του περιθωρίου από τη μεταβολή του επιτοκίου LIBOR 3 μηνών.

Παρ’ όλο, δηλαδή, που υπάρχει συσχέτιση μεταξύ των επιτοκίων αυτών, η συσχέτιση αυτή δεν είναι ποτέ τέλεια. Μια λύση είναι να υπολογίζεται το άνοιγμα για κάθε επιτόκιο που χρησιμοποιείται ως επιτόκιο αναφοράς στις συναλλαγές. Ωστόσο, και η λύση αυτή είναι πολύπλοκη, αφού θα υπάρχουν τόσα υπολογισμένα ανοίγματα όσα και τα μεταβλητά επιτόκια.

4.3.3 Προβολή στοιχείων ισολογισμού, ανοιγμάτων και ευαισθησία περιθωρίων

Η ανάλυση ανοίγματος δίνει τη δυνατότητα μελέτης της ευαισθησίας του περιθωρίου επιτοκίου κάτω από ορισμένες περιοριστικές υποθέσεις και κυρίως τη

στατική προβολή των στοιχείων του ενεργητικού και του παθητικού του τραπεζικού χαρτοφυλακίου. Ωστόσο, απαραίτητο είναι να μπορούμε να διερευνήσουμε τις επιπτώσεις που προκύπτουν από τον συνδυασμό διάφορων σεναρίων ως προς τα επιτόκια με αντίστοιχα σενάρια ως προς την προβολή των στοιχείων του χαρτοφυλακίου της τράπεζας.

Σκοπός της υποενότητας αυτής είναι η ανάλυση ενός παραδείγματος το οποίο θα χρησιμοποιήσουμε και θα συνεχίσουμε στο επόμενο κεφάλαιο. Έστω, το χαρτοφυλάκιο μιας τράπεζας, το οποίο παρουσιάζεται στον Πίνακα 6.

Πίνακας 6

Προβολή στοιχείων ισολογισμού για το τραπεζικό χαρτοφυλάκιο

Χαρτοφυλάκιο τράπεζας	**Αξία στην περίοδο 1**
Στοιχεία ενεργητικού μη ευαίσθητα στις μεταβολές επιτοκίων (α)	19
Στοιχεία ενεργητικού ευαίσθητα στις μεταβολές επιτοκίων (β)	17
ΣΥΝΟΛΟ (γ = α +β)	36
Στοιχεία παθητικού μη ευαίσθητα στις μεταβολές επιτοκίων (δ)	15
Στοιχεία παθητικού ευαίσθητα στις μεταβολές επιτοκίων (ε)	9
ΣΥΝΟΛΟ(ζ = δ + ε)	24
Άνοιγμα ρευστότητας (η = γ–ζ)	12
Άνοιγμα επιτοκίου (θ = β – ε)	8
ΣΥΝΟΛΙΚΟ ΑΝΟΙΓΜΑ(ι = θ–η)	**–4**

Τα στοιχεία (β) και (ε) είναι αυτά για τα οποία τα επιτόκια μεταβάλλονται στη διάρκεια της περιόδου και στην προβολή του χαρτοφυλακίου του Πίνακα 6 υπάρχει μία μόνο περίοδος και αυτή είναι ένα έτος. Τα αποτελέσματα των οποιωνδήποτε νέων συναλλαγών θεωρείται ότι επηρεάζονται από τις μεταβολές των επιτοκίων. Για τον υπολογισμό τυποποιημένου ανοίγματος, όλα τα στοιχεία σταθμίζονται ανάλογα με την ευαισθησία τους στις μεταβολές των επιτοκίων.

Τα ανοίγματα υπολογίζονται από την προβολή ενός έτους των στοιχείων του ισολογισμού (γραμμές η και θ του πίνακα). Υπενθυμίζεται ότι το άνοιγμα ρευστότητας είναι θετικό, όταν υπάρχει έλλειμμα πόρων, και ότι το άνοιγμα επιτοκίου είναι θετικό, όταν η αξία των στοιχείων του ενεργητικού που εξαρτώνται από τις μεταβολές επιτοκίου είναι μεγαλύτερη από αυτήν των στοιχείων του παθητικού που εξαρτώνται από τις μεταβολές επιτοκίου. Αυτό συμβαίνει, όταν το περιθώριο επιτοκίου αυξάνει με τα επιτόκια.

Παράδειγμα 5

Το συνολικό άνοιγμα του χαρτοφυλακίου υπολογίζεται από τη διαφορά του ανοίγματος επιτοκίου μείον το άνοιγμα ρευστότητας. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα, η διαφορά αυτή ισούται με 8 – 12 = –4 και εμφανίζεται στη γραμμή *ι* του πίνακα.

Το περιθώριο επιτοκίου που δημιουργείται από το επενδυτικό χαρτοφυλάκιο της τράπεζας (banking portfolio) ονομάζεται *εμπορικό περιθώριο* (commercial margin) και δίνει τη σχέση (το άνοιγμα) μεταξύ των επιτοκίων της αγοράς και των επιτοκίων των πελατών. Το άνοιγμα αυτό θεωρείται αβέβαιο στο μέλλον. Το καθαρό περιθώριο προκύπτει μετά τα έξοδα χρηματοδότησης. Για παράδειγμα, έστω ότι το εμπορικό άνοιγμα είναι ±3% και το επιτόκιο της αγοράς είναι ίσο με 8%.

Αυτό σημαίνει ότι το επιτόκιο πελατών είναι μεταξύ 11% στο Ενεργητικό και 5% στο Παθητικό.

Το περιθώριο σε αξία πριν την αποτίμηση του κόστους χρηματοδότησης είναι

$$(36 \times 0.11) - (24 \times 0.05) = 3.96 - 1.20 = 2.76$$

Έτσι, το 2.76 είναι το εμπορικό περιθώριο που δημιουργείται στο χαρτοφυλάκιο της τράπεζας προ του υπολογισμού του κάθε κόστους χρηματοδότησης. Το *λογιστικό περιθώριο επιτοκίου* (accounting interest margin) υπολογίζεται μετά την αφαίρεση του κόστους χρηματοδότησης.

Το *κόστος χρηματοδότησης* (cost of funding) είναι το επιτόκιο της αγοράς συν κάθε πιστωτικό άνοιγμα. Το περιθώριο επιτοκίου μετά το κόστος χρηματοδότησης είναι το εμπορικό περιθώριο μείον το κόστος χρηματοδότησης του ελλείμματος. Στο παράδειγμα που μελετάμε, το έλλειμμα ισούται με 12. Κατά συνέπεια, και με δεδομένο ότι το επιτόκιο της αγοράς ισούται με 8%, το περιθώριο επιτοκίου μετά το κόστος χρηματοδότησης ή το καθαρό λογιστικό περιθώριο είναι

$$2.76 - (0.08 \times 12) = 2.76 - 0.96 = 1.80$$

Ο Πίνακας 7 δίνει και τους υπόλοιπους υπολογισμούς.

Οι δύο τελευταίες στήλες του Πίνακα 7 υπολογίζουν τα περιθώρια μετά τη μεταβολή επιτοκίων. Για παράδειγμα, οι τιμές των εμπορικών ανοιγμάτων πριν και μετά την αύξηση επιτοκίων ισούνται με 2.76 και 3.00, αντίστοιχα.

Η μεταβολή στο εμπορικό άνοιγμα είναι ίση με 0.24 (3.00 − 2.76 = 0.24) για μια αύξηση του επιτοκίου κατά 3%. Ας θυμηθούμε ότι, σύμφωνα με την ανάλυση ανοιγμάτων, η μεταβολή αυτή είναι ίση με το άνοιγμα επιτοκίου επί τη μεταβολή επιτοκίου.

Πράγματι, στο παράδειγμα που μελετάμε, το άνοιγμα επιτοκίου του χαρτοφυλακίου της τράπεζας είναι ίσο με +8. Συνεπώς, η μεταβολή στο περιθώριο είναι ίση με $8 \times 0.03 = 0.24$.

Πίνακας 7
Περιθώρια και ευαισθησία στις μεταβολές επιτοκίων

	Όγκος	**Αρχικό επιτόκιο**	**Έσοδα /Κόστος**	**Τελικό επιτόκιο**	**Έσοδα /Κόστος**
Στοιχεία ενεργητικού μη ευαίσθητα στις μεταβολές επιτοκίων (α)	19	11%	2.09[1]	11%	2.09
Στοιχεία ενεργητικού ευαίσθητα στις μεταβολές επιτοκίων (β)	17	11%	1.87	14%	2.38
Έσοδα			3.96[2]		4.47
Στοιχεία παθητικού μη ευαίσθητα στις μεταβολές επιτοκίων (δ)	15	5%	0.75	5%	0.75
Στοιχεία παθητικού ευαίσθητα στις μεταβολές επιτοκίων (ε)	9	5%	0.45	8%	0.72
Κόστος			1.20		1.47
Εμπορικό περιθώριο			**2.76**[3]		**3.00**
Άνοιγμα ρευστότητας	12	8%	0.96	11%	1.32
Καθαρό περιθώριο επιτοκίου			**1.80**[4]		**1.68**

[1] $19 \times 0.11 = 2.09$

[2] $2.09 + 1.87 = 3.96$

[3] $3.96 - 1.20 = 2.76$

[4] $2.76 - 0.96 = 1.80$

Επιπλέον, το καθαρό περιθώριο επιτοκίου, μετά το κόστος χρηματοδότησης, μειώνεται κατά 1.80 – 1.68 = 0.12. Αυτό συμβαίνει, επειδή το κόστος χρηματοδότησης του ανοίγματος ρευστότητας αυξάνει κατά 12 × 0.03 = 0.36. Η μεταβολή του εμπορικού περιθωρίου μείον την αύξηση του κόστους είναι –0.12 (0.24 – 0.36 = –0.12).

4.3.4 Προσομοιώσεις

Η αντιμετώπιση κινδύνου επιτοκίου με την ανάλυση ανοιγμάτων μας δίνει την ευαισθησία του περιθωρίου επιτοκίου κάτω από ορισμένες προϋποθέσεις. Η ανάλυση αυτή έχει, λοιπόν, αρκετούς περιορισμούς, με βασικότερο, ίσως, το γεγονός ότι θεωρεί μία μόνο κατάσταση του ισολογισμού της τράπεζας. Δεν λαμβάνεται υπόψη η προβολή των νέων εργασιών.

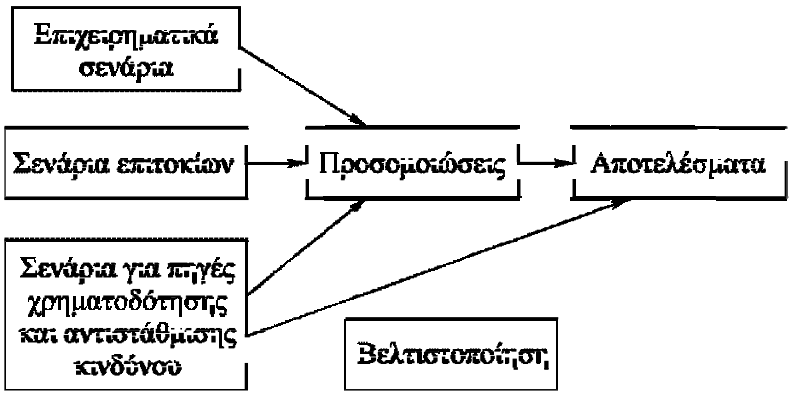
Με την τεχνική των προσομοιώσεων επιδιώκεται η συνδυασμένη ανάλυση των επιπτώσεων όλων των παραμέτρων, με σκοπό την υποδειγματοποίηση του ισολογισμού και των περιθωρίων, έτσι ώστε να ποσοτικοποιηθεί η επίδραση των μεταβολών των επιτοκίων στην αποτίμηση της σχέσης κινδύνου-απόδοσης.

Τα βήματα που ακολουθούνται είναι τα εξής (Διάγραμμα 2):

1. Προσδιορισμός των σεναρίων για τα επιτόκια.
2. Προβολή των στοιχείων του ισολογισμού στο μέλλον και υπολογισμός των ανοιγμάτων.
3. Υπολογισμός των περιθωρίων επιτοκίου.
4. Προσομοίωση των πολιτικών χρηματοδότησης και αντιστάθμισης κινδύνου (hedging) στην αναμενόμενη κερδοφορία με σκοπό την επιλογή της βέλτιστης λύσης.

Τα απαραίτητα στοιχεία στη διαδικασία αυτή είναι τα σενάρια για την προβολή στο μέλλον των στοιχείων του ισολογισμού, η επιλογή των οποίων εξαρτάται από τις στρατηγικές που ακολουθεί η τράπεζα.

Διάγραμμα 2
Γενική διαδικασία προσομοιώσεων



Πηγή: *Bessis (1998), σ. 171, Διάγραμμα 8*

Με τη διαχείριση του χαρτοφυλακίου επιχειρείται ο έλεγχος της έκθεσης στον κίνδυνο των επιτοκίων, προσαρμόζοντας το άνοιγμα μετά το κόστος χρηματοδότησης. Εάν το άνοιγμα είναι μηδέν μετά τη χρηματοδότηση, το καθαρό περιθώριο «ανοσιοποιείται» σε κάθε μεταβολή του επιτοκίου. Εάν όχι, τότε παραμένει ευμετάβλητο και εξαρτάται από το κατάλοιπο άνοιγμα μετά τη χρηματοδότηση.

Για να επιτευχθεί, λοιπόν, η ανοσιοποίηση (immunization), δηλαδή το άνοιγμα να είναι μηδενικό μετά τη χρηματοδότηση, θα πρέπει οι πολιτικές χρηματοδότησης και αναχαίτισης κινδύνου (hedging) να αντισταθμίζουν το θετικό άνοιγμα του χαρτοφυλακίου της τράπεζας. Προς την κατεύθυνση αυτή, συχνά, χρησιμοποιούνται συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης (futures contracts) ή ανταλλαγή επιτοκίων κ.ά.

Ενότητα 4.4

ΜΕΘΟΔΟΣ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ ΚΙΝΔΥΝΟΥ ΠΟΥ ΒΑΣΙΖΕΤΑΙ ΣΤΗ ΔΙΑΡΚΕΙΑ (DURATION ANALYSIS)

Είπαμε και παραπάνω ότι για τη διαχείριση του κινδύνου θα πρέπει να προσδιορίσουμε την ευαισθησία των τιμών της αγοράς στις μεταβολές των επιτοκίων. Όταν ο στόχος, για παράδειγμα, είναι το περιθώριο, τότε η ευαισθησία δίνεται από το άνοιγμα. Για τις τιμές της αγοράς η ευαισθησία εξαρτάται από τη σταθμική διάρκεια (duration).[1]

Η ανάλυση της σταθμικής διάρκειας αποτελεί μια ακόμα παραδοσιακή τεχνική που χρησιμοποιούν τα τραπεζικά ιδρύματα για τη μέτρηση του κινδύνου επιτοκίων.

Η ευαισθησία ορίζεται ως η μεταβολή στις τιμές της αγοράς που δημιουργείται από μετατοπίσεις της καμπύλης αποδόσεων (yield curve). Σε τεχνικούς όρους είναι η παράγωγος της αξίας του περιουσιακού στοιχείου ως προς το επιτόκιο.

Η ευαισθησία σχετίζεται με τη διάρκεια, που είναι ο λόγος της παρούσας αξίας των μελλοντικών εισροών, σταθμισμένων ως προς τον χρόνο, προς την αγοραία αξία του περιουσιακού στοιχείου.

4.4.1 Ευαισθησία των τιμών της αγοράς και σταθμική διάρκεια

Εάν συμβολίσουμε με F_t τις εισροές (cash flows) για τις διάφορες χρονικές στιγμές t και με r το προεξοφλητικό επιτόκιο της αγοράς, τότε ο σχετικός τύπος της σταθμικής διάρκειας θα είναι

$$D = \text{Σταθμική διάρκεια} = \frac{\sum_{t=1}^{N}\left[tF_t/(1+r)^t\right]}{\sum_{t=1}^{N}\left[F_t/(1+r)^t\right]} \qquad (10)$$

Η παραπάνω σχέση εκφράζει τη μέση σταθμισμένη ληκτότητα (maturity) των προεξοφλημένων μελλοντικών εισροών, χρησιμοποιώντας τον λόγο της παρούσας αξίας κάθε αναμενόμενης εισροής προς την παρούσα αξία όλων των ει-

[1] *Βλ. και το κεφάλαιο 1.*

σροών σταθμισμένων στις διαφορετικές ημερομηνίες. Με άλλα λόγια, στον υπολογισμό της σταθμικής διάρκειας χρησιμοποιούνται και ο χρόνος και το μέγεθος των μελλοντικών εισροών.

Η σταθμική διάρκεια ενός χρεογράφου είναι αντίστοιχη της προθεσμίας λήξης του (maturity), με την έννοια ότι και οι δύο μετρώνται σε χρονικές μονάδες. Η προθεσμία λήξης δηλώνει το χρονικό διάστημα που απομένει μέχρι τη λήξη του περιουσιακού στοιχείου και η σταθμική διάρκεια εκφράζει το χρονικό διάστημα εκείνο που απαιτείται για να έχει το χρεόγραφο τη μέση του απόδοση σε όρους παρούσας αξίας. Στην περίπτωση ενός ομολόγου, για παράδειγμα, όπου κεφάλαιο και τόκοι πληρώνονται στη λήξη του, η σταθμική διάρκεια και ο χρόνος λήξης του ομολόγου ταυτίζονται.

Η τροποποιημένη σταθμική διάρκεια (modified duration) είναι η διάρκεια όπως υπολογίστηκε από την παραπάνω σχέση πολλαπλασιασμένη με τον όρο $(1 + r)^{-1}$ και είναι η ευαισθησία της αγοραίας τιμής στις μεταβολές του επιτοκίου (ελαστικότητα τιμής), δηλαδή $D/(1 + r)$.

Η γενική έκφραση της μεταβολής της τιμής είναι

$$\Delta V/V = -[D/(1 + r)] \times \Delta i \qquad (11)$$

δηλαδή, η σχετική μεταβολή της τιμής είναι ίση με το γινόμενο της τροποποιημένης διάρκειας επί την απόλυτη ποσοστιαία μεταβολή των επιτοκίων

ή

$$\Delta V = -[D/(1 + r)] \times V \times \Delta i \qquad (12)$$

όπου Δi είναι η μεταβολή στο επιτόκιο και V είναι η τιμή αγοράς.

Η σταθμική διάρκεια, D, ενός χαρτοφυλακίου υπολογίζεται από τον μέσο όρο της διάρκειας κάθε περιουσιακού στοιχείου, τα οποία σταθμίζονται ως προς την αγοραία τιμή τους.

Παράδειγμα 6

Έστω οι παρακάτω ομολογίες και ότι η καμπύλη αποδόσεων είναι οριζόντια. Στην περίπτωση αυτή, η παρούσα αξία των μελλοντικών εισροών μπορεί να βρεθεί από την προεξόφληση με το επιτόκιο της απόδοσης στη λήξη.

Πίνακας 8

Ομολογία	Λήξη (έτη)	Coupon (%)	Τιμή (par)
O_1	5	12	\$100
O_2	5	10	\$100
O_3	5	6	\$100
O_4	10	10	\$100

Στον επόμενο πίνακα παρουσιάζεται η ακολουθούμενη μεθοδολογία σε τέσσερις στήλες, για την περίπτωση της πρώτης ομολογίας.

Πίνακας 9
Υπολογισμός της σταθμικής διάρκειας της O_1

Περίοδος	Εισροή εισοδήματος ($)	Παρούσα αξία	Σταθμική διάρκεια
1	12	10.7142	10.714
2	12	9.5663	19.132
3	12	8.541	25.623
4	12	7.626	30.504
5	112	63.552	317.780
ΣΥΝΟΛΟ		100	403.753

ΣΤΑΘΜΙΚΗ ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΧΑΡΤΟΦΥΛΑΚΙΟΥ = $\frac{403.753}{100} = 4.03753$ έτη

ΤΡΟΠΟΠΟΙΗΜΕΝΗ ΣΤΑΘΜΙΚΗ ΔΙΑΡΚΕΙΑ = $\frac{4.03753}{1.12} = 3.6049$

ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑ ΤΙΜΗΣ = 3.6049%

- Η πρώτη στήλη δίνει τη χρονική περίοδο.
- Η δεύτερη στήλη δίνει την αναμενόμενη εισροή εισοδήματος.
- Η τρίτη στήλη υπολογίζει την παρούσα αξία της αναμενόμενης εισροής ανά χρονική περίοδο. Το σύνολο των τιμών της στήλης αυτής ισούται με $100 (par bond). Σε άλλη περίπτωση θα ήταν ίσο με την τιμή της ομολογίας στην αγορά. Ωστόσο, ο υπολογισμός της διάρκειας παραμένει ο ίδιος. Για παράδειγμα, η πρώτη γραμμή είναι ίση με 12/(1 + 0.12) = 10.714, η δεύτερη γραμμή είναι ίση με $9.566 = 12/(1 + 0.12)^2$ κλπ.
- Η τέταρτη στήλη υπολογίζει τη διάρκεια (η οποία μετράται πάντα σε χρονικές μονάδες) και είναι ίση με το γινόμενο της πρώτης στήλης επί την τρίτη στήλη.

Στο τέλος του Πίνακα 9 υπολογίζεται και η τροποποιημένη σταθμική διάρκεια, καθώς και η ελαστικότητα τιμής, η οποία βρέθηκε ίση με 3.6049%. Δηλαδή, για μια μεταβολή των επιτοκίων κατά 1%, η τιμή της ομολογίας θα μεταβληθεί κατά 3.6%, περίπου.

Για λόγους οικονομίας δεν θα παρουσιάσουμε αναλυτικά τους υπολογισμούς της σταθμικής διάρκειας και της τροποποιημένης σταθμικής διάρκειας για τις υπόλοιπες ομολογίες του παραδείγματος, αλλά στον Πίνακα 10 συγκεντρώνονται τα αποτελέσματα.

Πίνακας 10
Σύγκριση αποτελεσμάτων του παραδείγματος

Ομολογία	Λήξη (έτη)	Coupon (%)	Τιμή (par)	Διάρκεια (έτη)
O1	5	12	$100	4.0375
0_2	5	10	$100	4.1697
0_3	5	6	$100	4.4651
o_4	10	10	$100	6.7606

Από τον παραπάνω συγκριτικό πίνακα παρατηρούμε δύο σημαντικά φαινόμενα:

1. Όταν δεν υπάρχουν άλλες μεταβολές, όσο μικρότερη είναι η απόδοση, τόσο μεγαλύτερη είναι η διάρκεια.
2. Όταν δεν υπάρχουν άλλες μεταβολές, όσο μεγαλύτερος είναι ο χρόνος μέχρι τη λήξη (maturity), τόσο μεγαλύτερη είναι η διάρκεια.

Δραστηριότητα 3/Κεφάλαιο 4

Να κάνετε αναλυτικά τους υπολογισμούς για τις ομολογίες O_2 και O_3 και να υπολογίσετε τις ελαστικότητες. Συγκρίνετε την απάντηση σας με τη δική μας που βρίσκεται στο Παράρτημα, στο τέλος του κεφαλαίου.

Ο παρακάτω πίνακας συγκεντρώνει τα χαρακτηριστικά της διάρκειας ως προς το κουπόνι, τη λήξη και την απόδοση στη λήξη.

Πίνακας 11

Μεταβλητές της Διάρκειας

	Υψηλός κίνδυνος ή μεγάλη διάρκεια	Μικρός κίνδυνος ή μικρή διάρκεια
Κουπόνι	Μικρό	Υψηλό
Λήξη	Μεγάλη	Μικρή
Απόδοση στη λήξη	Μικρή	Υψηλή

΄Ετσι, μεγάλη διάρκεια ή υψηλός κίνδυνος συνδέεται με μικρό κουπόνι, μεγαλύτερη λήξη και μικρή απόδοση στη λήξη. Αντίθετα, μικρή διάρκεια ή μικρός κίνδυνος συνδέεται με υψηλό κουπόνι, μικρή διάρκεια και υψηλή απόδοση στη λήξη.

Στην περίπτωση ενός χαρτοφυλακίου, η διάρκεια ορίζεται από τη σχέση

$$D = \sum_{i=1}^{N} D_i \times w_i, \qquad \sum_i w_i = 1 \tag{13}$$

όπου D_i είναι η διάρκεια του περιουσιακού στοιχείου i και w_i είναι το ποσοστό επένδυσης του κεφαλαίου στο στοιχείο i.

Παράδειγμα 7

Έστω ένα χαρτοφυλάκιο που αποτελείται από δύο περιουσιακά στοιχεία: μια πενταετή ομολογία με κουπόνι 10% at par και μια δεκαετή ομολογία με κουπόνι 10% at par. Στην πρώτη έχει επενδυθεί 1 εκατ. δολ. και στη δεύτερη 5 εκατ. δολ.

Ποσό	**Διάρκεια**	**Ποσό × Διάρκεια**
1 εκατ. δολ.	4.17	4.17
5 εκατ. δολ.	6.76	33.80

Διάρκεια χαρτοφυλακίου = (4.17 + 33.80)/(1 + 5) = 37.97/6 = 6.3283 έτη

$$\text{Τροποποιημένη διάρκεια} = \frac{\text{διάρκεια χαρτοφυλακίου}}{1+\text{απόδοση χαρτοφυλακίου}} = \frac{6.3283}{1+0.10} = 5.753$$

Ελαστικότητα τιμής = 5.753%

4.4.2 Διάρκεια, ανοσιοποίηση και ληκτότητα

Στο σημείο αυτό κρίνεται σκόπιμο να διευκρινιστούν οι έννοιες της σταθμικής διάρκειας (duration) και της ληκτότητας (maturity, χρόνος λήξης), κατά κύριο λόγο, καθώς και της ανοσιοποίησης (immunization).

Η απόδοση ενός περιουσιακού στοιχείου για όλη τη διάρκεια του, «ανοσιοποιείται» σε κάθε μεταβολή του επιτοκίου. Η απόδοση στη λήξη (maturity) αποκτάται μόνο εάν ο χρόνος της λήξης και η διακράτηση του περιουσιακού στοιχείου ταυτίζονται και η απόδοση αυτή είναι η απόδοση στη λήξη (yield to maturity).

Εάν το περιουσιακό στοιχείο ρευστοποιηθεί πριν από τη λήξη του, τότε η απόδοση του είναι άγνωστη, αφού είναι αβέβαιη η τιμή ρευστοποίησης στον χρόνο εκείνο, η οποία εξαρτάται από το επίπεδο των επιτοκίων εκείνη τη χρονική στιγμή. Εάν το επίπεδο των επιτοκίων αυξηθεί, η τιμή θα μειωθεί, και αντίστροφα.

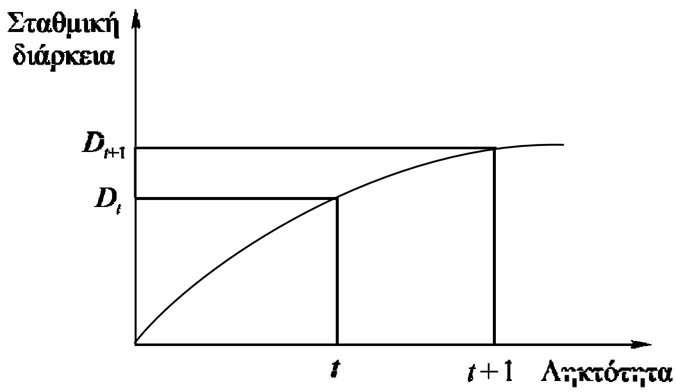
Η απόδοση στη χρονική διάρκεια της διακράτησης του περιουσιακού στοιχείου είναι ο συνδυασμός της τρέχουσας απόδοσης, των (πιθανών) προσόδων από την επανεπένδυση των ενδιάμεσων τόκων της περιόδου (proceeds) και του κέρδους (ή ζημίας) του κεφαλαίου στο τέλος της περιόδου.

Εάν το επίπεδο των επιτοκίων αυξηθεί κατά τη διάρκεια της περιόδου διακράτησης του περιουσιακού στοιχείου (holding period), τότε θα υπάρξει απώλεια κεφαλαίου λόγω της πτώσης της τιμής και, συγχρόνως, όλες οι ενδιάμεσες εισροές θα επανεπενδυθούν με το τέλος της περιόδου διακράτησης με υψηλότερο επιτόκιο.

Εάν, αντίθετα, το επίπεδο επιτοκίων μειωθεί, θα υπάρξει κέρδος κεφαλαίου και, συγχρόνως, όλες οι ενδιάμεσες εισροές θα επανεπενδυθούν μέχρι το τέλος της περιόδου διακράτησης με υψηλότερο επιτόκιο. Τα δύο αυτά αποτελέσματα αντισταθμίζονται. Υπάρχει, βέβαια, κάποια χρονική στιγμή στην οποία το καθαρό αποτέλεσμα της μελλοντικής αξίας εκμηδενίζεται και, τότε, η μελλοντική τιμή ανοσιοποιείται στις μεταβολές του επιτοκίου.

Η σταθμική διάρκεια αυξάνει με τη ληκτότητα, όπως είδαμε και στο παράδειγμα της προηγούμενης ενότητας, αλλά όχι αναλογικά. Είναι μια κυρτή (convex) συνάρτηση της ληκτότητας. Η μεταβολή της διάρκειας με τη ληκτότητα είναι η κλίση της εφαπτομένης της καμπύλης αυτής, που συσχετίζει τη διάρκεια με τη ληκτότητα. Το Διάγραμμα 3 δείχνει τη μορφή της καμπύλης αυτής.

Διάγραμμα 3
Σταθμική διάρκεια



Όπως φαίνεται από το παραπάνω διάγραμμα, όσο προχωράμε στον χρόνο από τη στιγμή t στη στιγμή $t + 1$, η υπόλοιπη σταθμική διάρκεια ζωής του περιουσιακού στοιχείου μέχρι τη λήξη του μεταβάλλεται κατά μία μονάδα ($t + 1 - t = 1$). Όμως, η αντίστοιχη μεταβολή στη σταθμική διάρκεια είναι μικρότερη της μονάδας, λόγω ακριβώς της κυρτότητας (convexity) της καμπύλης. Το φαινόμενο αυτό καλείται «μετατόπιση της σταθμικής διάρκειας» (duration drift).

Για παράδειγμα, εάν το 1998 η διάρκεια ενός περιουσιακού στοιχείου είναι δύο χρόνια, τότε τον επόμενο χρόνο (δηλαδή το 1999) θα είναι μεγαλύτερη από έναν χρόνο, αφού μειώνεται σε μικρότερο ποσοστό από ό,τι η υπολειπόμενη χρονική διάρκεια μέχρι τη ληκτότητα του περιουσιακού στοιχείου. Έτσι, για έναν επενδυτή που ενδιαφέρεται για την απόδοση μετά από πέντε έτη, για παράδειγμα, μετά από ένα έτος η υπολειπόμενη ζωή του χρεογράφου θα έχει μειωθεί κατά ένα έτος (θα είναι τέσσερα έτη), αλλά η σταθμική διάρκεια θα έχει μειωθεί λιγότερο από ένα έτος. Ο χρόνος που υπολείπεται μέχρι τη λήξη θα είναι τέσσερα έτη, ωστόσο η σταθμική διάρκεια θα είναι μεταξύ πέντε και τεσσάρων ετών. Στην περίπτωση ενός χαρτοφυλακίου, για παράδειγμα, θα πρέπει να γίνεται πάντα προσαρμογή στη σταθμική του διάρκεια για να αντισταθμίζεται η «μετατόπιση της σταθμικής διάρκειας». Τέλος, για μια ομολογία zero-coupon, διάρκεια και ληκτότητα ταυτίζονται. Στην περίπτωση αυτή, όλες οι ενδιάμεσες εισροές είναι μηδενικές.

4.4.3 Καθαρή παρούσα αξία και αξία σε κίνδυνο (VaR)

Ένας από τους στόχους της πολιτικής της διαχείρισης επιτοκίων είναι η καθαρή παρούσα αξία (net present value) του ισολογισμού του τραπεζικού οργανισμού. Ο στόχος αυτός είναι σημαντικός, γιατί συλλαμβάνει όλες τις μελλοντικές εισροές και ισούται με την προεξοφλημένη αξία των μελλοντικών περιθωρίων, όταν το προεξοφλητικό επιτόκιο (discount rate) είναι το κόστος όλων των υποχρεώσεων.

Η ευαισθησία της καθαρής παρούσας αξίας (NPV) προέρχεται από τη διάρκεια των στοιχείων του ενεργητικού και του παθητικού. Έτσι έχουμε

$$\frac{\Delta \mathrm{NPV}}{\Delta i} = \frac{1}{1+i} \times (-D_A \mathrm{VA} + D_L \mathrm{VL}) \qquad (14)$$

όπου VA, VL είναι οι τιμές των στοιχείων του ενεργητικού (Assets) και του παθητικού (Liabilities) και D_A, D_L είναι οι αντίστοιχες διάρκειες των στοιχείων αυτών.

Μπορεί να υπολογιστεί, τώρα, η VaR. Για ένα επιτόκιο αναφοράς, μας ενδιαφέρει να προσδιορίσουμε τη μέγιστη μεταβολή της NPV λόγω μιας μεταβολής στο επίπεδο του επιτοκίου. Η μεταβλητότητα της NPV υπολογίζεται από την ευαισθησία της (έστω S_i) και τη μεταβλητότητα του επιτοκίου και είναι

$$\sigma(\mathrm{NPV}) = S_i \times \sigma(i) \qquad (15)$$

Από τη στιγμή που η (ιστορική) μεταβλητότητα είναι γνωστή, η μέγιστη μεταβολή σε δεδομένο επίπεδο εμπιστοσύνης προκύπτει ως πολλαπλάσιο της μεταβλητότητας, κατά τα γνωστά. Για παράδειγμα, κάτω από την υπόθεση της κανονικής κατανομής των επιτοκίων, το πολλαπλάσιο 1.96 αντιστοιχεί στη μέγιστη μεταβολή σε 2.5% επίπεδο εμπιστοσύνης. Έτσι

$$\mathrm{VaR} = 1.96 \times S_i \times \sigma(i) \qquad (16)$$

Στην περίπτωση που υπάρχουν περισσότερα του ενός επιτόκια αναφοράς, η μεταβολή της NPV μπορεί να προσεγγιστεί ως ένας γραμμικός συνδυασμός των μεταβολών που οφείλονται στις μεταβολές κάθε επιτοκίου:

$$\Delta \mathrm{NPV} = S_i \times \Delta i + S_j \times \Delta j + S_k \times \Delta k + \cdots + S_n \times \Delta n \qquad (17)$$

όπου *i, j, k..., n* είναι τα διαφορετικά επιτόκια.

Η μεταβλητότητα της NPV, στην περίπτωση των πολλαπλών επιτοκίων, ισούται με τη μεταβλητότητα του αθροίσματος τυχαίων μεταβλητών, αφού τα επίπεδα μεταβολής όλων των επιτοκίων είναι τυχαία, και για τον υπολογισμό της χρειάζεται να κάνουμε υποθέσεις σχετικά με τον συντελεστή συσχέτισης τους.

Το πρόβλημα είναι το ίδιο με αυτό του υπολογισμού του κινδύνου ενός χαρτοφυλακίου, που θα αναπτύξουμε αναλυτικά σε επόμενη ενότητα.

Σύνοψη

Παραδοσιακά, η διαχείριση τραπεζικών χαρτοφυλακίων αναφέρεται στον προσδιορισμό της κατάλληλης δομής του ισολογισμού της τράπεζας, καθώς και σε προγράμματα αντιστάθμισης κινδύνου (hedging programmes) για την αποτελεσματική αντιμετώπιση του κινδύνου ρευστότητας και του κινδύνου επιτοκίων. Έτσι, το πρώτο βήμα είναι η μέτρηση του κινδύνου ρευστότητας και του κινδύνου επιτοκίων.

Στο κεφάλαιο αυτό αναλύσαμε τους δύο αυτούς κινδύνους. Αφιερώσαμε το σημαντικότερο μέρος του κεφαλαίου στην ανάλυση του κινδύνου των επιτοκίων, η διαχείριση του οποίου μπορεί να γίνει είτε με κάποιο πρόγραμμα αντιστάθμισης (hedging) είτε μέσω των ανοιγμάτων (gap management) είτε με τη χρησιμοποίηση της αξίας των χρηματοοικονομικών μέσων σταθμισμένης με τον χρόνο (duration management).

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ
Απάντηση στη Δραστηριότητα

Δραστηριότητα 3

Για τη δεύτερη ομολογία είναι:

Διάρκεια = 416.97/100 = 4.1697 έτη

Τροποποιημένη διάρκεια = 4.1697/1.1 = 3.790

Ελαστικότητα τιμής = 3.790%

Για την τρίτη ομολογία είναι:

Διάρκεια = 446.51/100 = 4.465 έτη

Τροποποιημένη διάρκεια = 4.65/1.01 = 4.212

Ελαστικότητα τιμής = 4.212%

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Bessis J., *Risk Management in Banking,* Wiley, N.Y. 1998.

ΟΔΗΓΟΣ ΓΙΑ ΠΕΡΑΙΤΕΡΩ ΜΕΛΕΤΗ

1. Bessis J., *Risk Management in Banking*, Wiley, N.Y. 1998.

Το βιβλίο αυτό εξετάζει όλες τις όψεις της διαχείρισης χρηματοοικονομικών κινδύνων σε έναν τραπεζικό οργανισμό και απαντά σε ερωτήματα, όπως: «πώς σχεδιάζεται ένα σύστημα διαχείρισης κινδύνων σε έναν οργανισμό;», «ποιες είναι οι τεχνικές διαχείρισης κινδύνου;», «ποιες είναι οι πρακτικές συνέπειες της χρήσης των τεχνικών και των μεθόδων διαχείρισης σε έναν τραπεζικό οργανισμό;» κ.λπ. Τα κεφάλαια 10–12 και 16 συμπληρώνουν όσα ειπώθηκαν στο κεφάλαιο 3 του παρόντος τόμου.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

ΚΙΝΔΥΝΟΣ ΑΓΟΡΑΣ ΚΑΙ ΧΑΡΤΟΦΥΛΑΚΙΑ

Σκοπός

Στο κεφάλαιο αυτό θα κάνουμε μια εισαγωγή στη σύγχρονη θεωρία χαρτοφυλακίου, η οποία έχει εξελιχθεί πολύ τα τελευταία 45, περίπου, χρόνια.

Τα τραπεζικά χαρτοφυλάκια εμφανίζονται σε κάθε διάσταση και μέγεθος και σε κάθε λειτουργική μονάδα του οργανισμού. Θα πρέπει, λοιπόν, ο κίνδυνος να ποσοτικοποιείται ανεξαρτήτως του μεγέθους του χαρτοφυλακίου και του επιπέδου της λειτουργικής μονάδας της τράπεζας.

Θα πρέπει, όμως, η πιστότητα και αποτελεσματικότητα ενός κατανοητού συστήματος διαχείρισης κινδύνου να απορρέουν άμεσα από τους κανόνες και τις τεχνικές που χρησιμοποιούνται για τη σύνδεση των επιμέρους κινδύνων των διάφορων χαρτοφυλακίων.

Προσδοκώμενα Αποτελέσματα

Όταν θα έχετε ολοκληρώσει τη μελέτη αυτού του κεφαλαίου, θα μπορείτε να:

- περιγράφετε τα εργαλεία της σύγχρονης θεωρίας της διαχείρισης χαρτοφυλακίου και την έννοια της διαφοροποίησης τραπεζικών χαρτοφυλακίων·
- κατανοείτε τις βασικότερες έννοιες και τεχνικές ποσοτικοποίησης των αποτελεσμάτων της διαφοροποίησης του κινδύνου των χαρτοφυλακίων των χρηματοπιστωτικών οργανισμών·
- εκτιμάτε την αξία σε κίνδυνο (VaR) των χαρτοφυλακίων αυτών·
- αποτιμάτε την απόδοση των χαρτοφυλακίων με τους λόγους Sharpe, Treynor, Jensen, το γενικευμένο κριτήριο Sharpe, RAROC και άλλα κριτήρια.

Έννοιες Κλειδιά

- Θεωρία χαρτοφυλακίου, ειδικός και συνολικός κίνδυνος
- Διαφοροποίηση, συσχέτιση και συνδιακύμανση
- Υπόδειγμα αγοράς, συντελεστής βήτα, αποτελεσματική αγορά
- Μεθοδολογία d_VaR
- Πιστωτικός κίνδυνος χαρτοφυλακίου
- Άριστος συντελεστής αντιστάθμισης κινδύνου (optimal hedge ratio)
- Μέθοδοι αποτίμησης χαρτοφυλακίου

Εισαγωγικές Παρατηρήσεις

Η θεωρία χαρτοφυλακίου αποτελεί μια κλασική προσέγγιση στην αποτίμηση και διαχείριση κινδύνου. Η θεωρία χαρτοφυλακίου αρχίζει από την υπόθεση ότι οι επενδυτές επιλέγουν μεταξύ των διάφορων χαρτοφυλακίων σύμφωνα με την αναμενόμενη απόδοση τους και τη διακύμανση των αποδόσεων αυτών (κίνδυνος). Στόχος είναι να μεγιστοποιηθεί η αναμενόμενη απόδοση και να ελαχιστοποιηθεί ο κίνδυνος των αποδόσεων. Αυτό σημαίνει ότι ο επενδυτής επιθυμεί τη μεγιστοποίηση της αναμενόμενης απόδοσης για δεδομένο επίπεδο κινδύνου ή, εναλλακτικά, την ελαχιστοποίηση του κινδύνου για δεδομένο επίπεδο απόδοσης.

Η θεωρία αυτή είναι χρήσιμη, γιατί επιτρέπει τη διαχείριση διαφοροποιημένων κινδύνων καθώς και των αλληλεπιδράσεων τους. Συγχρόνως, αποτελεί απαραίτητο εργαλείο για τους διαχειριστές κεφαλαίων, τους διαχειριστές αμοιβαίων κεφαλαίων και τους επενδυτές. Στο κεφάλαιο αυτό θα κάνουμε μια πλήρη περιγραφή της θεωρίας χαρτοφυλακίου και των διεξόδων της στη διαχείριση του κινδύνου.

Ενότητα 5.1

ΣΥΝΟΛΙΚΟΣ ΚΙΝΔΥΝΟΣ ΚΑΙ ΟΙ ΣΥΝΙΣΤΩΣΕΣ ΤΟΥ: Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΔΙΑΦΟΡΟΠΟΙΗΣΗΣ

Από τις παλαιότερες βασικές αρχές της διαχείρισης του τραπεζικού κινδύνου είναι η αρχή της διαφοροποίησης (diversification). Σύμφωνα με την αρχή της διαφοροποίησης, δεν είναι δυνατόν να εμφανιστούν όλοι οι κίνδυνοι την ίδια χρονική στιγμή. Η διαφοροποίηση οδηγεί το συνολικό κίνδυνο ενός χαρτοφυλακίου σε πολύ χαμηλότερα επίπεδα από ό,τι το άθροισμα όλων των κινδύνων των μεμονωμένων συναλλαγών.

Η παραπάνω θέση, όμως, ισχύει κάτω από δύο, τουλάχιστον, βασικές προϋποθέσεις:

1. Τα οφέλη που προκύπτουν από την εφαρμογή στρατηγικών διαφοροποίησης πρέπει να αποτιμώνται ποσοτικά.
2. Η σύνδεση του συνολικού κινδύνου του χαρτοφυλακίου με τις επιμέρους συνιστώσες του –μεμονωμένες συναλλαγές ή υποσύνολο συναλλαγών– θα πρέπει να ορίζεται καθαρά.

Η δεύτερη προϋπόθεση είναι βασική για δύο λόγους:

- πρώτον, για να μπορούν να επιμεριστούν τα όρια του συνολικού κινδύνου στους επιμέρους κινδύνους και
- δεύτερον, για να μπορεί να γίνει η «άθροιση» των επιμέρους κινδύνων σε κάθε επίπεδο απόφασης.

Το αποτέλεσμα της διαφοροποίησης (diversification effect ή portfolio effect) δεν μπορεί να μετρηθεί με τη χρήση των παραδοσιακών και απλών μεγεθών μέτρησης κινδύνου. Για παράδειγμα, ένα κοινό μέγεθος μέτρησης του πιστωτικού κινδύνου είναι το ύψος του κινδύνου (ή έκθεση σε κίνδυνο). Αλλά η έκθεση στον κίνδυνο δεν είναι ο κίνδυνος. Το ίδιο ισχύει και ως προς τον κίνδυνο της αγοράς (market risk). Ένα κοινό μέγεθος εκτίμησης του κινδύνου είναι η μεταβλητότητα των τιμών της αγοράς, που οφείλεται στις μεταβολές των παραμέτρων της αγοράς (βλ. και προηγούμενα κεφάλαια, όπου συζητήθηκε η μεταβλητότητα). Ωστόσο, το άθροισμα όλων των μεταβολών των επιμέρους στοιχείων δεν έχει νόημα, αφού δεν μπορούν να μεταβληθούν όλες οι παράμετροι την ίδια χρονική στιγμή.

Για τους λόγους αυτούς, είναι απαραίτητο να υπάρχουν περισσότερο λεπτομερή μεγέθη μέτρησης του κινδύνου, ικανά να συλλάβουν τα αποτελέσματα της διαφοροποίησης.

5.1.1 Διαφοροποίηση και πιστωτικός κίνδυνος

Παράδειγμα 1

Για την κατανόηση του αποτελέσματος της διαφοροποίησης, ας δεχτούμε ένα απλό παράδειγμα δύο, ξένων μεταξύ τους, αντισυμβαλλομένων με έναν τραπεζικό οργανισμό, τους *A* και *B,* οι οποίοι χαρακτηρίζονται από τον ίδιο κίνδυνο αθέτησης (αφερεγγυότητας). Ο επόμενος πίνακας συγκεντρώνει τα δεδομένα του παραδείγματος.

Πίνακας 1
Πιθανότητες κινδύνου αφερεγγυότητας δύο αντισυμβαλλομένων

Ενδεχόμενο	Πιθανότητα	Ζημία
Μη αφερεγγυότητα του *A*	90%	0
Αφερεγγυότητα του *A*	10%	100
Σύνολο	100%	
Μη αφερεγγυότητα του *B*	90%	0
Αφερεγγυότητα του *B*	10%	100
Σύνολο	100%	

Στο παράδειγμα αυτό, η πιθανότητα αφερεγγυότητας για τους *A και B* είναι η ίδια και ίση με 10%, ενώ η ζημία κάθε αντισυμβαλλομένου ισούται με 100 με πιθανότητα 10%, ή 0 με πιθανότητα 90%, και είναι ίδια και για τους δύο.

Για να μπορέσουμε να χαρακτηρίσουμε τον κίνδυνο του χαρτοφυλακίου, χρειαζόμαστε επιπλέον των παραπάνω πληροφοριών και την πιθανότητα και οι δύο αντισυμβαλλόμενοι να αθετήσουν την υποχρέωση τους ταυτόχρονα, δηλαδή την κοινή πιθανότητα αθέτησης. Στην περίπτωση του παραδείγματος μας, η πιθανότητα αυτή ισούται με $0.1 \times 0.1 = 0.01$ ή 1% (εάν οι *A* και *B* είναι ανεξάρτητοι, π.χ. δεν είναι συνέταιροι, δεν συνεννοούνται κτλ.).

Αυτό ισχύει διότι τα γεγονότα «αφερεγγυότητα του *A*» και «αφερεγγυότητα του *B*» είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους. Δύο γεγονότα είναι ανεξάρτητα, εάν η πιθανότητα εμφάνισης του ενός δεν εξαρτάται από την εμφάνιση ή όχι του άλλου. Τα ενδεχόμενα *A* και *B* θα είναι ανεξάρτητα, εάν ισχύει η σχέση

$$P(A \cap B) = P(A)P(\mathrm{B})$$

όπου $P(A \cap B)$ ή $P(A$ και $B)$ εκφράζει την πιθανότητα να συμβούν και τα δύο ενδεχόμενα ταυτόχρονα.

Έτσι, εάν δύο γεγονότα είναι ανεξάρτητα, τότε η δεσμευμένη (ή υπό συνθήκη) και η μη υπό συνθήκη πιθανότητες είναι ίδιες, δηλαδή

$$P(A/B) = P(A)$$

ή

$$P(B/A) = P(B)$$

[αφού $P(A/B) = P(A \cap B)/P(B)$, τότε: $P(A \cap B) = P(A)P(B)$, όπου $P(A/B)$ είναι η πιθανότητα να συμβεί το ενδεχόμενο A με δεδομένο το ενδεχόμενο B, και ονομάζεται δεσμευμένη πιθανότητα].

Ο Πίνακας 2 συνοψίζει τους αντίστοιχους υπολογισμούς για τα τέσσερα πιθανά ενδεχόμενα.

Πίνακας 2
Ενδεχόμενα και πιθανότητες αφερεγγυότητας του χαρτοφυλακίου

Ενδεχόμενο	**Πιθανότητα**	**Ζημία**
Μη αφερεγγυότητα του *A* και του *B*	81%	0
Αφερεγγυότητα του *A* και όχι του *B*	9%	100
Αφερεγγυότητα του *B* και όχι του *A*	9%	100
Αφερεγγυότητα του *A* και του *B*	1%	200
Σύνολο	100%	

Οι μαθηματικοί τύποι για την αναμενόμενη ζημία και τη μεταβλητότητα ζημίας των A και B είναι, αντίστοιχα

$$E(x) = \sum_{i=1}^{k} x_i p_i$$

για την αναμενόμενη (ή μέση τιμή), όπου x_i είναι η τιμή της ζημίας και p_i είναι η αντίστοιχη πιθανότητα εμφάνισης αυτού του ενδεχομένου. Η διακύμανση δίνεται από τη σχέση

$$\mathrm{Var}(x) = \sum_{i=1}^{k} [x_i - E(x)]^2 p_i$$

και η μεταβλητότητα μετράται από την τετραγωνική ρίζα αυτής της ποσότητας, $\sqrt{Var(x)}$.

Από τον Πίνακα 1 προκύπτει ότι η αναμενόμενη ζημία είναι ίδια για τους *A* και *B* και ίση με $100 \times 0.10 = 10$ για τον καθένα. Επίσης, η διακύμανση για κάθε αντισυμβαλλόμενο είναι

$$\mathrm{Var(x)} = (0 - 10)^2 \times 0.90 + (100 - 10)^2 \times 0.10$$
$$= 100 \times 0.90 + 8100 \times 0.10 = 90 + 810 = 900$$

Η τετραγωνική ρίζα της ποσότητας αυτής ισούται με 30 και εκφράζει τη μεταβλητότητα της ζημίας.

Έτσι, εάν μετρούσαμε τον συνολικό κίνδυνο του χαρτοφυλακίου με το άθροισμα των επιμέρους κινδύνων των δύο αντισυμβαλλομένων, θα είχαμε 30 + 30 = 60. Ωστόσο, η μεταβλητότητα της ζημίας είναι μικρότερη από το άθροισμα των επιμέρους ζημιών, όπως είπαμε και στην εισαγωγή της ενότητας 5.1.

Από τον Πίνακα 2 έχουμε

$$E(x) = 0 \times 0.81 + 100 \times 0.09 + 100 \times 0.09 + 200 \times 0.01 = 20$$

και

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(x) &= (0-20)^2 \times 0.81 + (100-20)^2 \times 0.09 \\ &\quad + (100-20)^2 \times 0.09 + (200-20)^2 \times 0.01 = 1800 \end{aligned}$$

όπου η τετραγωνική ρίζα της ποσότητας αυτής είναι 42.43 (= $\sqrt{1800}$), που είναι μικρότερη του αθροίσματος των ζημιών των δύο αντισυμβαλλομένων, δηλαδή του 60, αλλά και μεγαλύτερη από τη μεταβλητότητα του ενός μόνο αντισυμβαλλομένου, δηλαδή του 30.

Το αποτέλεσμα της διαφοροποίησης ισούται με τη διαφορά του κινδύνου χωρίς διαφοροποίηση και του κινδύνου που προκύπτει εάν θεωρήσουμε τους δύο αντισυμβαλλομένους σε ένα χαρτοφυλάκιο, δηλαδή 60 – 42.43 = 17.57 ≈ 18.

Το Διάγραμμα 1 συνοψίζει το άθροισμα των μεμονωμένων κινδύνων σε ένα χαρτοφυλάκιο και παρουσιάζει το αποτέλεσμα της διαφοροποίησης.

Διάγραμμα 1
Το άθροισμα μεμονωμένων κινδύνων σε ένα χαρτοφυλάκιο με τη χρήση της μεταβλητότητας της ζημίας ως μεγέθους μέτρησης του κινδύνου

Πίστωση στον *A*	Πίστωση στον *B*	Χαρτοφυλάκιο (*A*+*B*)
100	100	200
Κίνδυνος από τον *A*	Κίνδυνος από τον *B*	
30	30	
↓		↓
Κίνδυνος από τον *A* + Κίνδυνος από τον *B*		Κίνδυνος (*A* + *B*)
60		42.43

Έτσι, το μέγεθος αποτίμησης του κινδύνου είναι η μεταβλητότητα της ζημίας, με δεδομένο ότι για την ποσοτικοποίηση του αποτελέσματος της διαφοροποίησης οι μεμονωμένοι κίνδυνοι ορίστηκαν ποσοτικά ακριβώς.

Γενικότερα, η σύνδεση μεταξύ των μεμονωμένων κινδύνων μπορεί να δοθεί από τον συντελεστή συσχέτισης, όπως θα δούμε παρακάτω. Στο παράδειγμα μας, δηλαδή, μπορεί να δοθεί από τη συσχέτιση μεταξύ των δύο ενδεχομένων, «αφερεγγυότητα του Α» και «αφερεγγυότητα του Β».

Συνοπτικά, λοιπόν, διακρίνουμε τον *διαφοροποιήσιμο ή μη συστηματικό κίνδυνο,* ο οποίος αναφέρεται στον κίνδυνο που αντιστοιχεί σε μεμονωμένες συναλλαγές. Ο κίνδυνος αυτός είναι διαφοροποιήσιμος, με την έννοια ότι μπορεί να μειωθεί από ένα καλά διαφοροποιημένο χαρτοφυλάκιο.

Επίσης, διακρίνουμε τον *μη διαφοροποιήσιμο ή συστηματικό κίνδυνο,* που δεν μπορεί να μειωθεί από ένα καλό χαρτοφυλάκιο. Ο κίνδυνος αυτός αναφέρεται στον κίνδυνο από τις μεταβολές των επιπέδων των επιτοκίων, του πληθωρισμού, της αγοράς κ.λπ.

Ωστόσο, η διακύμανση και η μέση τιμή δεν είναι αρκετά για να περιγράψουν την κατανομή ενός επενδυτή. Ο συντελεστής ασυμμετρίας αποτελεί ένα επιπλέον στατιστικό μέτρο, το οποίο είναι χρήσιμο. Όταν ο συντελεστής ασυμμετρίας είναι στατιστικά ίσος με το μηδέν, μας πληροφορεί ότι η κατανομή είναι συμμετρική. Μια θετική (αρνητική) τιμή του συντελεστή ασυμμετρίας μας πληροφορεί ότι η πιθανότητα τιμών μικρότερων της μέσης τιμής είναι μεγάλη (μικρή), αλλά οι τιμές αυτές δεν απέχουν (απέχουν) πολύ από τη μέση τιμή.

Άσκηση Αυτοαξιολόγησης 1/Κεφάλαιο 5

Ποιες είναι οι προϋποθέσεις της διαφοροποίησης και πώς μετράται το αποτέλεσμα της; Επιστρέψτε στην υποεν. 5.1.1 και ελέγξτε την ορθότητα της απάντησης σας.

5.1.2 Σύγχρονη θεωρία χαρτοφυλακίου

Η σύγχρονη θεωρία χαρτοφυλακίου (Markowitz, 1952) βασίζεται στη στατιστική, ξεκινώντας από την υπόθεση ότι οι αποδόσεις των χρηματοοικονομικών επενδύσεων είναι τυχαίες μεταβλητές και, ως τέτοιες, μπορούν να περιγραφούν από την αναμενόμενη τιμή τους (μέση απόδοση) και την τυπική τους απόκλιση (κίνδυνος). Επιδίωξη κάθε επενδυτικής δραστηριότητας είναι να μεγιστοποιήσει την αναμενόμενη απόδοση και συγχρόνως να ελαχιστοποιήσει τον κίνδυνο (αβεβαιότητα).

Μια ενδιαφέρουσα συνέπεια αυτών των δύο αλληλοσυγκρουόμενων στόχων είναι ότι ο επενδυτής θα πρέπει να διαφοροποιήσει το χαρτοφυλάκιο του συμπεριλαμβάνοντας σε αυτό περισσότερες της μίας μετοχές ή άλλα περιουσιακά στοιχεία.

Η μέθοδος που μπορεί να ακολουθηθεί στην επιλογή του περισσότερο επιθυμητού χαρτοφυλακίου είναι αυτή που χρησιμοποιεί τις *καμπύλες αδιαφορίας* (indifference curves), οι οποίες παριστάνουν τις προτιμήσεις των επενδυτών και των διαχειριστών για κίνδυνο και απόδοση.

Η τελική επιλογή χαρτοφυλακίου εξαρτάται από τη διάθεση του κάθε διαχειριστή να αναλάβει μικρότερο ή μεγαλύτερο κίνδυνο, όπως προσδιορίζεται από τις καμπύλες αδιαφορίας του, στους άξονες κινδύνου (οριζόντιος άξονας) και απόδοσης (κατακόρυφος άξονας).

Αυτές οι καμπύλες αδιαφορίας έχουν τις εξής ιδιότητες:

α) Όλα τα χαρτοφυλάκια που βρίσκονται σε μια δεδομένη καμπύλη αδιαφορίας είναι το ίδιο επιθυμητά από τον διαχειριστή.

β) Οι καμπύλες αδιαφορίας δεν τέμνονται (είναι παράλληλες).

γ) Κάθε χαρτοφυλάκιο που βρίσκεται σε μια καμπύλη αδιαφορίας που είναι «περισσότερο βορειοδυτικά» είναι προτιμότερο από κάθε άλλο χαρτοφυλάκιο που βρίσκεται «λιγότερο βορειοδυτικά».

δ) Κάθε διαχειριστής ή επενδυτής έχει άπειρες καμπύλες αδιαφορίας. Προφανώς, οι επενδυτές που αποδέχονται τον κίνδυνο θα έχουν καμπύλες αδιαφορίας με ασθενή κλίση (σχεδόν παράλληλες με τον οριζόντιο άξονα, τον άξονα του κινδύνου).

5.1.3 Αποτελεσματικά χαρτοφυλάκια

Πίσω από τη συζήτηση για τις καμπύλες αδιαφορίας βρίσκονται δύο βασικές υποθέσεις.

Η **πρώτη** θέτει ότι οι επενδυτές, μπροστά στην επιλογή μεταξύ δύο όμοιων χαρτοφυλακίων, θα επιλέξουν εκείνο με τη μεγαλύτερη αναμενόμενη απόδοση. Γενικότερα, χρησιμοποιώντας τη θεωρία χαρτοφυλακίου του Markowitz, δεν υπάρχει σημείο κορεσμού για τους επενδυτές (nonsatiation), εννοώντας ότι οι επενδυτές θα προτιμούν ολοένα και υψηλότερα επίπεδα αποδόσεων.

Η **δεύτερη** αφορά την αποστροφή προς τον κίνδυνο των επενδυτών (risk aversion), δηλαδή το ότι επιλέγουν χαρτοφυλάκια με τον μικρότερο κίνδυνο.

Ο υπολογισμός της απόδοσης ενός χαρτοφυλακίου (r_P) είναι συνάρτηση των αναμενόμενων αποδόσεων που απαρτίζουν το χαρτοφυλάκιο, καθώς και των ποσοστών του κεφαλαίου που επενδύονται σε αυτές X_i. Δηλαδή

$$r_P = \sum_{i=1}^{N} X_i r \tag{1}$$

Με άλλα λόγια, είναι το σταθμισμένο άθροισμα των αναμενόμενων αποδόσεων των επιμέρους μετοχών, όπου οι σταθμίσεις είναι το ποσοστό επένδυσης σε κάθε μετοχή. Η τυπική απόκλιση (κίνδυνος) του χαρτοφυλακίου υπολογίζεται από τη σχέση

$$\sigma_P = [\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} X_i X_j \sigma_{ij}]^{1/2} \tag{2}$$

όπου

$$\sigma_{ij} = \text{cov}(r_i, r_j) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}[r_i - E(r_i)][r_j - E(r_j)] \tag{3}$$

είναι η συνδιακύμανση (covariance) των αποδόσεων των μετοχών *i* και *j*.

Ο συντελεστής συσχέτισης θα είναι:

$$\rho_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_i \sigma_j}$$

από όπου

$$\sigma_{ij} = \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j. \quad (4)$$

Ο συντελεστής συσχέτισης παίρνει τιμές μεταξύ 1 (τέλεια θετική συσχέτιση) και –1 (τέλεια αρνητική συσχέτιση). Για τιμή του συντελεστή συσχέτισης ίση με το μηδέν, οι αποδόσεις των δύο μετοχών είναι ασυσχέτιστες.

Έτσι, για την περίπτωση των δύο μετοχών, έχουμε μία μόνο συνδιακύμανση. Γενικά, για N μετοχές, ο αριθμός των υπολογιζόμενων συνδιακυμάνσεων είναι $(N^2 - N)/2$.

Ο *πίνακας διακυμάνσεων-συνδιακυμάνσεων* (variance-covariance matrix) είναι ένας τετραγωνικός πίνακας (δηλαδή, ο αριθμός των στηλών ισούται με τον αριθμό των γραμμών και ο συνολικός αριθμός των στοιχείων της για N μετοχές ισούται με N^2). Επίσης, οι διακυμάνσεις παρουσιάζονται στη διαγώνιο του πίνακα.

Τέλος, ο πίνακας διακυμάνσεων-συνδιακυμάνσεων είναι συμμετρικός (δηλαδή, το στοιχείο της γραμμής i και της στήλης j είναι το ίδιο με αυτό της γραμμής j και της στήλης i). Ο λόγος είναι απλός, αφού η συνδιακύμανση δύο περιουσιακών στοιχείων δεν εξαρτάται από τη σειρά με την οποία θεωρούνται τα δύο αυτά περιουσιακά στοιχεία στον υπολογισμό της συνδιακύμανσης.

Στην περίπτωση που διαθέτουμε N περιουσιακά στοιχεία, είναι φανερό ότι μπορούμε να κατασκευάσουμε άπειρα χαρτοφυλάκια. Αν, για παράδειγμα, χρησιμοποιήσουμε $m < N$ περιουσιακά στοιχεία για να απαρτίζουν το χαρτοφυλάκιο μας, τότε ο αριθμός των πιθανών συνδυασμών είναι

$$N!/(N-m)!m!$$

όπου $m! = 1 \times 2 \times 3 ... (m-1) \times m$ και διαβάζεται «m παραγοντικό».

Για παράδειγμα, αν $N = 10$ μετοχές, ο επενδυτής έχει να επιλέξει από 10 μετοχές. Με άλλα λόγια, έχει να επιλέξει μεταξύ 10 διαφορετικών χαρτοφυλακίων αποτελούμενα το καθένα από μία μόνο μετοχή, 45 χαρτοφυλάκια από δύο μετοχές το καθένα, κο.κ., μέχρι ένα χαρτοφυλάκιο αποτελούμενο και από τις 10 μετοχές. Τελικά, με την εφαρμογή του παραπάνω κλάσματος, βλέπουμε ότι ο επενδυτής μπορεί να επιλέξει μεταξύ 1,023 πιθανών χαρτοφυλακίων και, φυσικά, με διαφορετικά ποσοστά σε κάθε μετοχή.

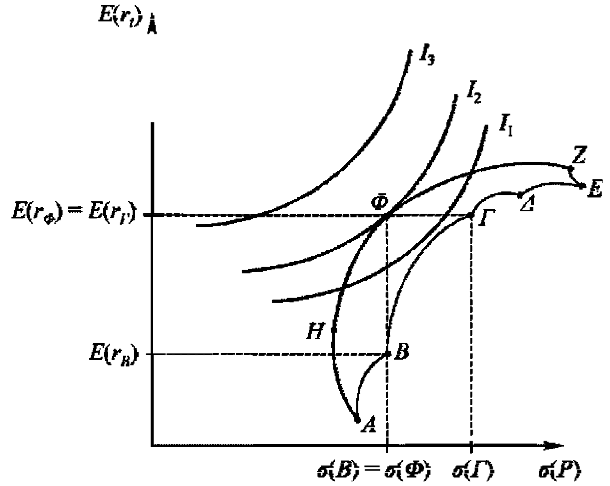
Έτσι, προκύπτει άμεσα το ερώτημα: πρέπει ένας επενδυτής να αξιολογήσει όλα αυτά τα χαρτοφυλάκια πριν επιλέξει ένα; Ευτυχώς όχι, χάρη στο *θεώρημα του συνόλου των αποτελεσματικών χαρτοφυλακίων* (efficient set theorem). Σύμφωνα με το θεώρημα αυτό, ένας επενδυτής θα επιλέξει από το σύνολο των δυνατών χαρτοφυλακίων (feasible set) το χαρτοφυλάκιο εκείνο (άριστο χαρτοφυλάκιο) που του προσφέρει:

1) τη μέγιστη δυνατή απόδοση για διάφορα επίπεδα κινδύνου ή
2) τον μικρότερο δυνατό κίνδυνο για διάφορα επίπεδα αποδόσεων.

Το σύνολο όλων των δυνατών χαρτοφυλακίων έχει τη μορφή ομπρέλας και απεικονίζεται στους άξονες αναμενόμενης απόδοσης (κατακόρυφος άξονας) και κινδύνου (οριζόντιος άξονας). Αυτό συμβαίνει, γιατί κάθε ζεύγος περιουσιακών στοιχείων από σύνολο των *N* είναι πολύ πιθανό να έχει συντελεστή συσχέτισης θετικό (έστω και μικρό) και, συνεπώς, οι δυνατοί συνδυασμοί κάθε ζεύγους θα βρίσκονται σε μια καμπύλη που συνδέει τα στοιχεία αυτά. Αυτό δίνει μια οδοντωτή καμπύλη, όπως η *ΑΒ, ΒΓ* κ.ο.κ. στο Διάγραμμα 2.

Οι συνδυασμοί περισσότερων από δύο χρηματοοικονομικών εργαλείων θα βρίσκονται, επίσης, σε καμπύλες κάτω από την ομπρέλα ή στο σύνορο της.

Διάγραμμα 2
Σύνολο δυνατών και αποτελεσματικών χαρτοφυλακίων



Για τον προσδιορισμό του συνόλου αποτελεσματικών χαρτοφυλακίων (efficient set), ας προσέξουμε στο ίδιο διάγραμμα πού ικανοποιούνται οι συνθήκες (1) και (2) του θεωρήματος.

Παρατηρούμε, λοιπόν, ότι το χαρτοφυλάκιο με τον μικρότερο κίνδυνο βρίσκεται στη θέση *Η* και αυτό με τον μεγαλύτερο κίνδυνο στη θέση *Ε*. Το σύνολο των χαρτοφυλακίων που προσφέρουν τη μεγαλύτερη δυνατή απόδοση για διάφορα επίπεδα κινδύνου θα βρίσκεται στο πάνω μέρος της καμπύλης (μεταξύ των σημείων *Η* και *Ε*), που αποτελεί το σύνορο των αποτελεσματικών χαρτοφυλακίων (efficient frontier).

Θεωρώντας, τώρα, τη δεύτερη συνθήκη του θεωρήματος, δεν υπάρχει χαρτοφυλάκιο που να προσφέρει μεγαλύτερη απόδοση από αυτό που βρίσκεται στη θέση *Ζ*, ούτε χαρτοφυλάκιο με μικρότερη απόδοση από αυτό της θέσης *Α*.

Έτσι, δεν υπάρχει χαρτοφυλάκιο που να προσφέρει τον μικρότερο κίνδυνο για διάφορα επίπεδα απόδοσης, εκτός από αυτά τα χαρτοφυλάκια που βρίσκονται στο αριστερό μέρος της καμπύλης των δυνατών χαρτοφυλακίων, δηλαδή μεταξύ των σημείων *Α* και *Ζ*.

Συνολικά, τα αποτελεσματικά χαρτοφυλάκια που ικανοποιούν τις δύο συνθήκες του θεωρήματος των αποτελεσματικών χαρτοφυλακίων βρίσκονται στο πάνω και αριστερό μέρος της καμπύλης των αποτελεσματικών χαρτοφυλακίων μεταξύ *Η* και *Ζ* Όλα τα άλλα χαρτοφυλάκια είναι αναποτελεσματικά (inefficient portfolios).

Για παράδειγμα, το χαρτοφυλάκιο *Φ* υπερέχει του *Β*, γιατί προσφέρει μεγαλύτερη απόδοση για ίδιο επίπεδο κινδύνου, αφού $E(r_{Φ}) > E(r_B)$. Επίσης, είναι προτιμότερο του *Γ*, γιατί προσφέρει την ίδια απόδοση με μικρότερο κίνδυνο, αφού $σ(Φ) < σ(Γ)$.

Για την επιλογή του άριστου χαρτοφυλακίου (optimal portfolio), ο επενδυτής πρέπει να χαράξει τις καμπύλες αδιαφορίας του στο ίδιο διάγραμμα και να επιλέξει το χαρτοφυλάκιο εκείνο το οποίο βρίσκεται στην καμπύλη αδιαφορίας που είναι στο πάνω και αριστερό μέρος του διαγράμματος. Αυτό το χαρτοφυλάκιο αντιστοιχεί στο σημείο επαφής της καμπύλης αδιαφορίας με το σύνορο των αποτελεσματικών χαρτοφυλακίων.

Στο Διάγραμμα 2, αυτή είναι η καμπύλη αδιαφορίας I_2 και το άριστο χαρτοφυλάκιο είναι το χαρτοφυλάκιο *Φ*. Όσο πλησιέστερα στο *Η* βρίσκεται το χαρτοφυλάκιο αυτό, τόσο περισσότερο αποστρέφεται τον κίνδυνο ο επενδυτής. Αντίθετα, εάν βρίσκεται προς την περιοχή του σημείου *Ζ*, τόσο περισσότερο αποδέχεται τον κίνδυνο ο επενδυτής.

Αποδεικνύεται ότι το σύνολο των αποτελεσματικών χαρτοφυλακίων είναι, γενικά, κοίλο (concave). Αυτό σημαίνει ότι, εάν χαραχθεί ένα ευθύγραμμο τμήμα μεταξύ δύο οποιωνδήποτε σημείων της καμπύλης του συνόρου των αποτελεσματικών χαρτοφυλακίων, τότε το ευθύγραμμο αυτό τμήμα θα βρίσκεται κάτω από το σύνορο των αποτελεσματικών χαρτοφυλακίων. Η ιδιότητα αυτή είναι πολύ σημαντική, γιατί σημαίνει ότι υπάρχει ένα και μόνον ένα σημείο επαφής μεταξύ των καμπυλών αδιαφορίας του επενδυτή και του συνόρου των αποτελεσματικών χαρτοφυλακίων. Ωστόσο, η απόδειξη της ιδιότητας αυτής ξεφεύγει του παρόντος.

Ο συντελεστής συσχέτισης των αποδόσεων των δύο μετοχών παίζει σπουδαίο ρόλο. Συγκεκριμένα, είναι το μέγεθος εκείνο που αιτιολογεί τη *διαφοροποίηση* (diversification) του χαρτοφυλακίου. Όσο ο συντελεστής συσχέτισης τείνει στο –1, τόσο μεγαλύτερα είναι τα οφέλη από τη διαφοροποίηση μεταξύ των μετοχών *Α* και *Β*.

5.1.4 Συσχέτιση, κίνδυνος αφερεγγυότητας και κίνδυνος αγοράς

Για τον κίνδυνο αφερεγγυότητας, οι ενδιαφέρουσες συσχετίσεις είναι αυτές που αποτιμούν τη σχέση μεταξύ των ενδεχομένων αθέτησης της υποχρέωσης των αντισυμβαλλομένων. Η ύπαρξη αυτών των συσχετίσεων είναι απλή.

Εάν, για παράδειγμα, η εταιρεία Χ παρουσιάζει τη μεγαλύτερη αύξηση των πωλήσεων της τους καλοκαιρινούς μήνες και η εταιρεία Υ τους χειμερινούς μήνες, τότε η σχέση τους ως προς τις πωλήσεις είναι αντιστρόφως ανάλογη.

Μπορεί, ωστόσο, η πιθανότητα αφερεγγυότητας της κάθε εταιρείας χωριστά να είναι ίδιες, όμως εάν θεωρηθούν μαζί και η Χ αθετήσει την υποχρέωση της, επειδή οι πωλήσεις της είναι πολύ χαμηλές, η Υ, αντίθετα, θα έχει πολύ μικρή πιθανότητα αφερεγγυότητας, επειδή την ίδια χρονική στιγμή οι πωλήσεις της θα είναι πολύ αυξημένες.

Αυτό οδηγεί στην εξειδίκευση της πιθανότητας αφερεγγυότητας. Ας υποθέσουμε, για παράδειγμα, ότι ο κίνδυνος αφερεγγυότητας ισούται με 1% τόσο για τη Χ όσο και για την Υ. Σύμφωνα με τα παραπάνω, λοιπόν, εάν η μια εταιρεία αποδειχθεί αφερέγγυα, τότε η άλλη θα έχει πιθανότητα αθέτησης μικρότερη του 1%. Σε όρους στατιστικής, αυτό σημαίνει ότι η δεσμευμένη πιθανότητα αθέτησης της δεύτερης εταιρείας, όταν η πρώτη αθετήσει την υποχρέωση της, είναι μικρότερη του 1%:

$$\text{Prob}(\text{Υ αφερέγγυα} \mid \text{Χ αφερρέγυα}) < 1\%$$

Έχει, μάλιστα, παρατηρηθεί, από στοιχεία χρονολογικών σειρών, ότι τα ποσοστά αθέτησης της υποχρέωσης για τις διάφορες ταξινομημένες κατηγορίες ή για τους διάφορους επιχειρηματικούς κλάδους τείνουν να κινούνται μαζί με τον χρόνο. Ωστόσο, συχνά συμβαίνει και το αντίθετο, ανάλογα με τις συνθήκες της αγοράς που επικρατούν σε διάφορες οικονομίες. Συνεπώς, τα οφέλη της διαφοροποίησης αναμένεται να είναι σημαντικά.

Αναφορικά με τον κίνδυνο της αγοράς, το ζητούμενο είναι η αποτίμηση της σχέσης των παραμέτρων που την επηρεάζουν. Δηλαδή, σε ποια έκταση οι τιμές των διάφορων παραμέτρων μεταβάλλονται ανάλογα ή αντιστρόφως ανάλογα. Οι τιμές της αγοράς είναι τυχαίες και, συνεπώς, τυχαίες είναι και οι αξίες των μεμονωμένων συναλλαγών. Κατά συνέπεια, στην περίπτωση του κινδύνου της αγοράς, είναι εύκολο να υπολογίσουμε τους συντελεστές συσχέτισης μεταξύ των μεταβολών των τιμών των διάφορων παραμέτρων.

Έτσι, η μεταβολή της αξίας του χαρτοφυλακίου είναι το άθροισμα των τυχαίων μεταβολών των τιμών της αγοράς των μεμονωμένων συναλλαγών.

Ενότητα 5.2

ΠΙΣΤΩΤΙΚΟΣ ΚΙΝΔΥΝΟΣ ΧΑΡΤΟΦΥΛΑΚΙΩΝ

Η προσέγγιση του κινδύνου με τη θεωρία χαρτοφυλακίου είναι σχετικά διαφορετική από αυτήν που στηρίζεται στις θεωρούμενες χωριστά συναλλαγές. Σκοπός της ενότητας αυτής είναι να καλύψει το κενό που προκύπτει από τις διαφορές των δύο προσεγγίσεων.

Συγχρόνως, θα παρουσιαστεί και η διαδικασία που εφαρμόζεται σε κάθε χαρτοφυλάκιο τραπεζικού οργανισμού, αναφορικά με τη μέτρηση του κινδύνου, που στηρίζεται στην προσέγγιση της σύγχρονης θεωρίας χαρτοφυλακίου.

5.2.1 Κίνδυνος μεμονωμένων συναλλαγών και κίνδυνος χαρτοφυλακίου

Η αποτίμηση του κινδύνου μεμονωμένων συναλλαγών (standalone risk) έχει σημασία, όταν πρόκειται να ληφθεί απόφαση σχετικά με μια νέα συναλλαγή ή έναν νέο αντισυμβαλλόμενο. Σε επίπεδο χαρτοφυλακίου, η μέτρηση του κινδύνου αποκτά μεγάλο ενδιαφέρον, όταν πρόκειται να αποτιμηθεί η συνέπεια μιας συναλλαγής στο χαρτοφυλάκιο, συνολικά. Τόσο στην πρώτη όσο και στη δεύτερη περίπτωση, ο κίνδυνος ποσοτικοποιείται με τη βοήθεια δύο βασικών παραμέτρων:

- της αναμενόμενης ζημίας και
- της μεταβλητότητας της ζημίας.

Όταν υπάρχει μόνο ένας αντισυμβαλλόμενος, η κατανομή της ζημίας είναι απλή. Είτε ο αντισυμβαλλόμενος αθετεί την υποχρέωση του και η ζημία είναι L, το σύνολο του ποσού, είτε όχι και η ζημία είναι μηδενική.

Παράδειγμα 2

Ας θεωρήσουμε, για παράδειγμα, ότι το ποσό σε κίνδυνο είναι 1,000 ευρώ και η πιθανότητα αθέτησης του αντισυμβαλλομένου είναι 1%. Τότε, η αναμενόμενη ζημία είναι, κατά τα γνωστά

$$1{,}000 \times 0.01 = 10 \text{ ευρώ}$$

με διακύμανση

$$0.01 \times (1{,}000 - 10)^2 + 0.99 \times (0 - 10)^2 = 9{,}801 + 99 = 9{,}900$$

και τυπική απόκλιση

$$\sqrt{9{,}900} = 99.5$$

Γενικά, εάν e είναι η έκθεση στον κίνδυνο *και* $p(d)$ είναι πιθανότητα αθέτησης, τότε έχουμε

$$E(L) = p(d) \times e + [1 - p(d)] \times 0 = p(d) \times e \tag{5}$$

και

$$\begin{aligned} V(L) &= p(d) \times [e - E(L)]^2 + [1 - p(d)] \times [0 - E(L)]^2 \\ &= p(d) \times [e - p(d)e]^2 + [1 - p(d)] \times [0 - p(d)e]^2 \\ &= e^2 \times p(d) \times [1 - p(d)] \end{aligned}$$

Συνεπώς, η μεταβλητότητα της ζημίας είναι

$$\sigma(L) = e \times \sqrt{p(d) \times [1 - p(d)]} \tag{6}$$

Στο παράδειγμα μας είναι

$$1{,}000 \times \sqrt{0.01 \times (1 - 0.01)} = 1{,}000 \times 0.0995 = 99.5$$

Φαίνεται, λοιπόν, ότι τόσο η αναμενόμενη ζημία όσο και η μεταβλητότητα της εξαρτώνται σημαντικά από την έκθεση σε κίνδυνο, e, και την πιθανότητα αθέτησης, $p(d)$. Επιπλέον, υπάρχει μια σχέση μεταξύ των δύο αυτών στατιστικών μεγεθών, αφού $E(L) = e \times p(d)$:

$$\sigma(L) = ep(d)\sqrt{[1 - p(d)]/p(d)} = E(L)\sqrt{[1 - p(d)]/p(d)} \tag{7}$$

Ο κίνδυνος του χαρτοφυλακίου μπορεί, επίσης, να χαρακτηριστεί από την αναμενόμενη ζημία και τη μεταβλητότητα της. Ωστόσο, το σημείο εκκίνησης διαφέρει, αφού υπάρχουν πολλοί αντισυμβαλλόμενοι.

Πράγματι, στην περίπτωση αυτή, ο αριθμός της πιθανής αθέτησης των υποχρεώσεων των αντισυμβαλλομένων είναι τυχαίος και μπορεί να κυμανθεί από το μηδέν μέχρι το σύνολο των αντισυμβαλλομένων που θεωρούνται στο χαρτοφυλάκιο.

Παράδειγμα 3

Ας πάρουμε ένα απλό παράδειγμα με δύο αντισυμβαλλομένους, *A* και *B*. Έστω ότι η έκθεση στον κίνδυνο είναι 100 και 200 με πιθανότητες αθέτησης 10% και 5%, αντίστοιχα. Οι κίνδυνοι αθέτησης θεωρούνται ανεξάρτητοι μεταξύ των αντισυμβαλλομένων.

Σύμφωνα με τη θεωρία χαρτοφυλακίου, η αναμενόμενη ζημία είναι το σταθμισμένο άθροισμα των αναμενόμενων ζημιών των *A* και *B*, δηλαδή

$$100 \times 0.10 = 10 \quad \text{και} \quad 200 \times 0{,}05 = 10$$

Κάτω από την υπόθεση της ανεξαρτησίας των κινδύνων, η μεταβλητότητα του συνολικού κινδύνου του χαρτοφυλακίου, $\Lambda = L_A + L_B$, είναι η τετραγωνική ρίζα του αθροίσματος των διακυμάνσεων των ζημιών του *A* και του *B*:

$$\sigma(\Lambda) = \sqrt{\sigma^2(L_A) + \sigma^2(L_B)} \qquad (8)$$

όπου οι μεταβλητότητες $a(L_A)$ και $a(L_B)$ είναι, αντίστοιχα

$$\sigma(L_A) = 100\sqrt{0.1 \times 0.9} = 100 \times 0.3 = 30$$

$$\sigma(L_B) = 200\sqrt{0.05 \times 0.95} = 200 \times 0.218 = 43.59$$

Οι παραπάνω μεταβλητότητες υπολογίζουν τον κίνδυνο του κάθε αντισυμβαλλομένου. Εάν, λοιπόν, οι ζημίες είναι ανεξάρτητες, τότε η μεταβλητότητα της ζημίας του χαρτοφυλακίου είναι

$$\sigma(\Lambda) = \sqrt{30^2 + 43.59^2} = 52.92$$

Πράγματι, παρατηρούμε ότι η μεταβλητότητα της ζημίας του χαρτοφυλακίου είναι μεγαλύτερη από ό,τι η μεταβλητότητα των αντισυμβαλλομένων χωριστά, αλλά μικρότερη από το άθροισμα τους ($52.92 < 30 + 43.59 = 73.59$). Η διαφορά $73.59 - 52.92 = 20.67$ είναι η ποσοτική έκφραση του αποτελέσματος της διαφοροποίησης.

Βέβαια, στο προηγούμενο παράδειγμα δεχτήκαμε την υπόθεση ότι η αθέτηση της υποχρέωσης του *A* είναι ανεξάρτητη από αυτήν του *B*. Η υπόθεση αυτή δεν είναι κατ' ανάγκην ορθή και πιθανόν να συσχετίζονται, αφού πάντα η περίπτωση αθέτησης εξαρτάται από το κοινό οικονομικό περιβάλλον και τις συνθήκες.

Στην επόμενη υποενότητα θα παρουσιάσουμε την περίπτωση αυτή στο πλαίσιο της σύγχρονης θεωρίας χαρτοφυλακίου, που παρουσιάσαμε στην ενότητα 5.1

Δραστηριότητα 1/Κεφάλαιο 5

Έστω δύο αντισυμβαλλόμενοι *A* και *B* με την τράπεζα Τ, και έκθεση στον κίνδυνο 100 με πιθανότητα 5% και 200 με πιθανότητα 7%, αντίστοιχα. Να δείξετε με αναλυτικά βήματα:

α) ότι ο κίνδυνος της ζημίας του χαρτοφυλακίου είναι μεγαλύτερος από τον κίνδυνο ζημίας των *A* και *B* χωριστά, αλλά μικρότερος από το άθροισμα τους·

β) το αποτέλεσμα διαφοροποίησης.

Τη δική μας απάντηση θα βρείτε στο Παράρτημα στο τέλος του κεφαλαίου.

5.2.2 Αναμενόμενη ζημία και μεταβλητότητα χαρτοφυλακίων

Η προσέγγιση που θα παρουσιάσουμε παρακάτω μπορεί να εφαρμοστεί στην περίπτωση χαρτοφυλακίων για τα οποία υπάρχουν διαθέσιμα ιστορικά στοιχεία χρονολογικών σειρών αφερεγγυότητας. Ο μέσος και η μεταβλητότητα των ποσοστών αφερεγγυότητας για διάφορες κατηγορίες ταξινομημένες σύμφωνα με τον κίνδυνο που αντιπροσωπεύουν (ο λόγος του παρατηρούμενου αριθμού αφερεγγυότητας προς τον πληθυσμό), τα οποία προσφέρουν εξειδικευμένοι οργανισμοί, μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τον προσδιορισμό της αναμενόμενης ζημίας και της μεταβλητότητας της ζημίας αυτής.

Η συνολική έκθεση στον κίνδυνο, $\mathcal{E}$, του χαρτοφυλακίου ισούται με το άθροισμα των επιμέρους αντίστοιχων κινδύνων:

$$\mathcal{E} = \sum_i e_i$$

Επίσης, η συνολική ζημία, Λ, του χαρτοφυλακίου είναι τυχαία και ισούται με το άθροισμα των επιμέρους ζημιών:

$$\Lambda = \sum_i L_i$$

Η ζημία L_i είναι τυχαία. Ισούται με την έκθεση στον κίνδυνο e_i, όταν ο αντισυμβαλλόμενος δεν μπορέσει να ικανοποιήσει την υποχρέωση του (ενδεχόμενο της αθέτησης), και με μηδέν σε κάθε άλλη περίπτωση.

Η αναμενόμενη ζημία για κάθε αντισυμβαλλόμενο i με έκθεση στον κίνδυνο e_i είναι

$$E(L_i) = e_i \times E(d_i)$$

όπου d_i είναι το ποσοστό αφερεγγυότητας, που είναι δεδομένο, και $E(d)$ η αναμενόμενη τιμή του. Η αναμενόμενη ζημία του χαρτοφυλακίου Λ είναι, συνεπώς

$$E(\Lambda) = \sum_i E(L_i) = \sum_i [e_i \times E(d)] = [\sum_i e_i] \times E(d) = \mathcal{E} \times E(d)$$

Η μεταβλητότητα της ζημίας είναι

$$\sigma(\Lambda) = \sigma\left(\sum_i L_i\right) = \sigma\left(\sum_i (d \times e_i)\right) = \left(\sum_i e_i\right) \times \sigma(d) = \mathcal{E} \times \sigma(d)$$

Έτσι:

- Η αναμενόμενη ζημία του χαρτοφυλακίου ισούται με το γινόμενο της έκθεσης στον κίνδυνο επί την αναμενόμενη τιμή του ποσοστού αθέτησης.
- Ο κίνδυνος (τυπικής απόκλισης) της ζημίας του χαρτοφυλακίου ισούται με το γινόμενο της μεταβλητότητας του ποσοστού αθέτησης επί την έκθεση στον κίνδυνο.

Άσκηση Αυτοαξιολόγησης 2/Κεφάλαιο 5

1. Δώστε τους ορισμούς:

- της αναμενόμενης ζημίας,
- του κινδύνου (τυπική απόκλιση) ζημίας χαρτοφυλακίου.

2. Δώστε, επίσης, το αντίστοιχο τυπολόγιο των υπολογισμών.

Επιστρέψτε στην υποενότητα 5.2.2 και ελέγξτε την ορθότητα των απαντήσεών σας.

5.2.3 Ζημία χαρτοφυλακίου όταν ο κίνδυνος διαφοροποιείται

Η διαφοροποίηση αποτελεί το επόμενο και βασικότερο στάδιο της προσέγγισης της θεωρίας χαρτοφυλακίου και μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε κάθε χαρτοφυλάκιο τραπεζικού οργανισμού, με δεδομένα τα στατιστικά μεγέθη αφερεγγυότητας για κάθε κατηγορία ταξινόμησης. Το χαρτοφυλάκιο διαιρείται σε υποδεέστερα χαρτοφυλάκια με ομοιογενείς κινδύνους.

Παράδειγμα 4

Ας πάρουμε το παράδειγμα ενός χαρτοφυλακίου το οποίο απαρτίζεται από δύο εκθέσεις σε κίνδυνο, μία 50 και μία 150, δύο διαφορετικών υποχαρτοφυλακίων, που ανήκουν σε δύο διαφορετικές βιομηχανίες, την 1η και τη 2η.

Από τις διαθέσιμες χρονολογικές σειρές των ποσοστών αφερεγγυότητας για τους δύο κλάδους μπορούν να υπολογιστούν η αναμενόμενη τιμή και η μεταβλητότητα. Χάριν του παραδείγματος μας, ας υποθέσουμε ότι είναι

αναμενόμενη τιμή 1% και 2% και μεταβλητότητα 2% και 3%, αντίστοιχα.

Ας υποθέσουμε, επίσης, ότι ο συντελεστής συσχέτισης των ποσοστών αφερεγγυότητας μπορεί να είναι είτε ίσος με το μηδέν είτε ίσος με 0.5. Ζητάμε την αναμενόμενη ζημία του χαρτοφυλακίου και τη μεταβλητότητα.

Οι ζημίες των υποχαρτοφυλακίων είναι συνάρτηση των τυχαίων ποσοστών αφερεγγυότητας d_1 και d_2. Η αναμενόμενη ζημία και η αναμενόμενη τιμή των ποσοστών αφερεγγυότητας είναι $E(L_1)$, $E(L_2)$, $E(\mathrm{d}_1)$ και $E(d_2)$. Αντίστοιχα, η μεταβλητότητα (τυπική απόκλιση) είναι $a(L_1)$, $a(L_2)$, $\sigma(d_1)$ και $\sigma(d_2)$, ενώ οι διακυμάνσεις είναι $\mathrm{Var}(L_1)$, $\mathrm{Var}(L_2)$, $\mathrm{Var}(d_1)$ και $\mathrm{Var}(d_2)$.

Η συνολική ζημία του χαρτοφυλακίου δίνεται από τη σχέση

$$\Lambda = L_1 + L_2$$

με αναμενόμενη τιμή και διακύμανση, αντίστοιχα

$$E(\Lambda) = E(L_1 + L_2) = E(L_1) + E(L_2) = e_1 E(d_1) + e_2 E(d_2),$$
$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(\Lambda) &= \mathrm{Var}(L_1 + L_2) = \mathrm{Var}(L_1) + \mathrm{Var}(L_2) + 2\operatorname{cov}(L_1, L_2)\\ &= \mathrm{Var}(d_1 e_1) + \mathrm{Var}(d_2 e_2) + 2\operatorname{cov}(d_1 e_1, d_2 e_2)\\ &= e_1^2 \mathrm{Var}(d_1) + e_2^2 \mathrm{Var}(d_2) + 2 e_1 e_2 \operatorname{cov}(d_1, d_2)\\ &= e_1^2 \mathrm{Var}(d_1) + e_2^2 \mathrm{Var}(d_2) + 2 e_1 e_2 \rho_{12} \sigma(d_1) \sigma(d_2)\end{aligned}$$

Η αναμενόμενη τιμή της L_1 είναι

$$E(L_1) = 50 \times 0.01 = 0.5$$

και της L_2

$$E(L_2) = 150 \times 0.02 = 3$$

Η αναμενόμενη τιμή του χαρτοφυλακίου ισούται, συνεπώς, με το άθροισμα τους και είναι

$$E(\Lambda) = 0.5 + 3 = 3.5$$

Για τη διακύμανση του χαρτοφυλακίου θα έχουμε, ανάλογα με την τιμή του συντελεστή συσχέτισης των ποσοστών αφερεγγυότητας ρ_{12}:

1. $\rho_{12} = 0.5$

$$\mathrm{Var}(\Lambda) = (50^2 \times 0.02^2) + (150^2 + 0.03^2) + (2 \times 0.5 \times 150 \times 50 \times 0.02 \times 0.03) = 25.75$$

2. $\rho_{12} = 0$

$$\mathrm{Var}(\Lambda) = (50^2 \times 0.02^2) + (150^2 + 0.03^2) + 0 = 21.25$$

Είναι σημαντικό να παρατηρήσουμε ότι όσο μεγαλύτερος και θετικός είναι ο συντελεστής συσχέτισης, τόσο μεγαλύτερη είναι και η διακύμανση, αποτέλεσμα που ήδη γνωρίζουμε από τη θεωρία χαρτοφυλακίου.

Για να γίνει αντιληπτό το όφελος από τη διαφοροποίηση, στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζονται συγκριτικά οι τυπικές αποκλίσεις (μεταβλητότητα) του συνολικού χαρτοφυλακίου, καθώς και των δύο επιμέρους χαρτοφυλακίων. Ακόμα, υπολογίζεται η μεταβλητότητα για διαφορετικές τιμές του συντελεστή συσχέτισης των ποσοστών αφερεγγυότητας.

Πίνακας 3
Μεταβλητότητα ζημίας και συσχέτιση

Κίνδυνος επιμέρους χαρτοφυλακίων	Μεταβλητότητα ζημίας
Έκθεση σε κίνδυνο 50	2%
Έκθεση σε κίνδυνο 150	3%
Άθροισμα επιμέρους κινδύνων	5.5
Χαρτοφυλάκιο {50, 150}	
Συντελεστής συσχέτισης +1	5.50
Συντελεστής συσχέτισης 0	4.61
Συντελεστής συσχέτισης −1	3.50

Στον πίνακα 3 παρουσιάζονται και τα αποτελέσματα του κινδύνου για τρεις διαφορετικές τιμές του συντελεστή συσχέτισης: $\rho_{12} = +1$, $\rho_{12} = 0$ και $\rho_{12} = -1$. Τα αποτελέσματα της διαφοροποίησης φαίνονται καθαρά από τα στοιχεία του πίνακα. Η μεταβλητότητα ζημίας παίρνει τιμές για διαφορετικό συντελεστή συσχέτισης, από το 5.5 (καθόλου διαφοροποίηση) μέχρι το 3.5 (που αποτελεί τη μικρότερη τιμή του κινδύνου για τιμή του συντελεστή συσχέτισης $\rho_{12} = -1$, δηλαδή τέλεια αρνητική συσχέτιση).

Όταν τα ποσοστά αφερεγγυότητας δεν συσχετίζονται μεταξύ τους ($\rho_{12} = 0$), τότε ο κίνδυνος είναι 4.61. Ας σημειωθεί ότι

3.5 (περίπτωση $\rho_{12} = -1$) < 4.61 (περίπτωση $\rho_{12} = 0$) < 5.5 (περίπτωση $\rho_{12} = -1$).

Γενικά, ισχύει η σχέση

$$|\sigma(x) - \sigma(y)| \leq \sigma(x + y) \leq \sigma(x) + \sigma(y) \tag{9}$$

δηλαδή, η απόλυτη διαφορά των μεταβλητοτήτων των κινδύνων είναι μικρότερη ή ίση της μεταβλητότητας (κινδύνου) του αθροίσματος, που είναι μικρότερη ή ίση από το άθροισμα των μεταβλητοτήτων των κινδύνων.

Ενότητα 5.3

ΧΑΡΤΟΦΥΛΑΚΙΑ ΚΑΙ ΚΙΝΔΥΝΟΣ ΑΓΟΡΑΣ

Ο κίνδυνος αγοράς ενός χαρτοφυλακίου προέρχεται από την πιθανή πτωτική μεταβολή των τιμών των παραμέτρων της αγοράς, με δεδομένο ένα επίπεδο εμπιστοσύνης.

Η μεθοδολογία d_VaR (delta VaR methodology) ή ανάλυση συσχέτισης (correlation methodology) χρησιμοποιείται για να υπολογίσει το συνολικό κίνδυνο όλων των χρηματοοικονομικών στοιχείων του χαρτοφυλακίου, καθώς και τις μεταβλητότητες και τις συσχετίσεις των παραμέτρων της αγοράς.

Κατά μια έννοια, η ανάλυση VaR μπορεί να θεωρηθεί ως φυσική επέκταση της σύγχρονης θεωρίας χαρτοφυλακίου. Παρ' όλα αυτά, υπάρχουν σημαντικές διαφορές μεταξύ τους:

- Η θεωρία χαρτοφυλακίου ερμηνεύει τον κίνδυνο σε όρους τυπικής απόκλισης των αποδόσεων, ενώ η προσέγγιση VaR σε όρους πιθανότητας της μέγιστης ζημίας και, συνεπώς, είναι πιο χρήσιμη.
- Δεν έχουν όλες οι προσεγγίσεις VaR ως θεωρητική βάση τη θεωρία χαρτοφυλακίου (για παράδειγμα, η προσέγγιση με Monte Carlo προσομοιώσεις), με εξαίρεση την προσέγγιση διακύμανσης-συνδιακύμανσης.
- Η θεωρία χαρτοφυλακίου εφαρμόζεται μόνο στην ανάλυση των κινδύνων της αγοράς, ενώ η VaR καλύπτει ένα μεγαλύτερο σύνολο κινδύνων: πιστωτικό κίνδυνο, κίνδυνο ρευστότητας κλπ.
- Η VaR είναι περισσότερο ευέλικτη, με την έννοια ότι μπορούν να επιλεγούν διάφορες προσεγγίσεις VaR.
- Η VaR συνδυάζεται καλύτερα με διάφορα στατιστικά προβλήματα, όπως, για παράδειγμα, το πρόβλημα της μη κανονικότητας των αποδόσεων.

5.3.1 Συσχέτιση μεταξύ των παραμέτρων της αγοράς και οι επιπτώσεις της

Η αξία σε κίνδυνο, VaR, κάθε μεμονωμένου χρηματοοικονομικού εργαλείου της αγοράς υπολογίζεται με βάση την ευαισθησία του στις παραμέτρους της αγοράς καθώς και τη μεταβλητότητα των παραμέτρων αυτών, μέσω του γενικού τύπου

$$\Delta(\text{MTM}) = S \times \Delta m$$

όπου MTM είναι η αξία στην αγορά ενός χρηματοοικονομικού εργαλείου, S είναι η ευαισθησία του σε αξία στην κατά μία μονάδα μεταβολή της παραμέτρου της αγοράς, m και «Δ» σημαίνει μεταβολή. Ο κίνδυνος όλου του χαρτοφυλακίου είναι η μεταβολή όλων των τρεχουσών τιμών (mark–to–market) των διάφορων χρηματοοικονομικών εργαλείων.

Ωστόσο, η ευαισθησία των χρηματοοικονομικών εργαλείων στις παραμέτρους της αγοράς δεν μπορεί να προστεθεί, αφού δεν μεταβάλλονται προς την ίδια κατεύθυνση όλες οι παράμετροι της αγοράς κατά μία μονάδα συγχρόνως. Στην περίπτωση αυτή, η εκτίμηση του συντελεστή συσχέτισης αποκτά ιδιαίτερη σημασία και αξία στην ανάλυση.

Έτσι, το ζητούμενο είναι να υπολογιστεί η μεταβολή της τιμής της αγοράς, δηλαδή ενός αθροίσματος από τυχαίες μεταβλητές, συνδυάζοντας τις ευαισθησίες των μεμονωμένων συναλλαγών με τις μεταβολές των παραμέτρων της αγοράς:

$$\sigma(\mathrm{MTM}) = \sigma\left(\sum_i S_i \times \Delta m_i\right)$$

Παρόμοιο είναι το πρόβλημα και στην περίπτωση του κινδύνου επιτοκίου. Όταν η μεταβλητή–στόχος είναι το περιθώριο επιτοκίου (margin), η μεταβλητότητα του προκύπτει από τα ανοίγματα (gaps) ως προς τα διάφορα επιτόκια. Αντί να προστεθούν οι μεταβλητότητες κάθε ανοίγματος, μπορούμε να θεωρήσουμε τη μεταβλητότητα του περιθωρίου ως το άθροισμα των τυχαίων μεταβολών των μεμονωμένων περιθωρίων για κάθε επιτόκιο. Έτσι, έχουμε

$$\sigma(\mathrm{margin}) = \sigma\left(\sum_{i=1}^{n} \mathrm{gap}_i \times \Delta(\mathrm{interest\ rate}_i)\right)$$

όπου i είναι το επιτόκιο και n ο αριθμός των επιτοκίων αναφοράς.

Στην περίπτωση των χαρτοφυλακίων σε παράγωγα προϊόντα, ο κίνδυνος προκύπτει από τις πιθανές αποκλίσεις από την τιμή ρευστοποίησης στη διάρκεια της ζωής του προϊόντος.

Η μεταβολή της τιμής της αγοράς ενός χαρτοφυλακίου σε κάθε μελλοντική χρονική στιγμή είναι το αλγεβρικό άθροισμα των τυχαίων μεταβλητών των αποκλίσεων των διαφορετικών προϊόντων

$$\sigma(\mathrm{MTM}_t) = \sigma\left(\sum_i S_{it} \times \Delta m_{it}\right)$$

όπου το i αναφέρεται στο παράγωγο προϊόν που εξαρτάται από τις τυχαίες μεταβολές της παραμέτρου της αγοράς m_i.

Παράδειγμα 5

Ας δούμε ένα παράδειγμα του υπολογισμού της μεταβλητότητας της αξίας ενός χαρτοφυλακίου, στο οποίο η έκθεση σε δύο κινδύνους προκύπτει από περιουσιακά στοιχεία που είναι σε δολάρια ΗΠΑ και γερμανικά μάρκα, αξίας 50 USD και 100 DEM, αντίστοιχα. Η αξία των στοιχείων αυτών σε γαλλικά φράγκα (FRF) είναι αβέβαιη εξαιτίας των μεταβολών των συναλλαγματικών ισοτιμιών των USD και DEM ως προς το FRF.

Ο κίνδυνος της αγοράς είναι, ακριβώς, η μεταβλητότητα αυτών των συναλλαγματικών ισοτιμιών και εξαρτάται από το μέγεθος της έκθεσης σε κίνδυνο, σε συνδυασμό με τη μεταβλητότητα των συναλλαγματικών ισοτιμιών και τη συσχέτιση τους.

Ας υποθέσουμε, επίσης, ότι οι τρέχουσες συναλλαγματικές ισοτιμίες είναι 5 FRF/USD και 3 FRF/DEM με μεταβλητότητα 10% για το δολάριο ΗΠΑ και 5% για το μάρκο Γερμανίας. Ο παρακάτω πίνακας 4 συνοψίζει τα δεδομένα και παρουσιάζει τα αποτελέσματα των υπολογισμών για διάφορους συντελεστές συσχέτισης μεταξύ των συναλλαγματικών ισοτιμιών.

Πίνακας 4
Η συνολική μεταβλητότητα των δύο εκθέσεων σε συναλλαγματικό κίνδυνο

ΣΥΝΑΛΛΑΓΜΑΤΙΚΗ ΙΣΟΤΙΜΙΑ		
USD/FRF (m_1)	5 FRF/USD	
DEM/FRF (m_2)	3 FRF/DEM	
ΕΤΗΣΙΑ ΜΕΤΑΒΛΗΤΟΤΗΤΑ ΑΓΟΡΑΣ		
USD/FRF $\sigma(m_1)$	0.5 FRF (0.10 × 5 FRF/USD)	
DEM/FRF $\sigma(m_2)$	0.15 FRF (0.05 × 3 FRF/DEM)	
ΕΚΘΕΣΗ ΣΕ ΚΙΝΔΥΝΟ		
Έκθεση σε USD	50 USD	
Έκθεση σε DEM	100 DEM	
Συνολική έκθεση σε κίνδυνο σε γαλλικά φράγκα	$100\Delta m_2 + 50\Delta m_1$	
ΜΕΤΑΒΛΗΤΟΤΗΤΑ		
Έκθεση σε USD	25 FRF	
Έκθεση σε DEM	15 FRF	
ΣΥΝΟΛΙΚΗ ΜΕΤΑΒΛΗΤΟΤΗΤΑ		ΑΞΙΑΣΕ ΚΙΝΔΥΝΟ
$\rho_{DEM/USD} = +1$	40.0	78.4
$\rho_{DEM/USD} = 0$	29.2	57.2
$\rho_{DEM/USD} = -1$	10.0	19.6
$\rho_{DEM/USD} = -0.3$	25.0	49

Ο υπολογισμός της μεταβλητότητας έγινε με βάση τον τύπο της μεθόδου διακύμανσης-συνδιακύμανσης. Η μεταβλητότητα κάθε έκθεσης σε κίνδυνο χωριστά είναι ίση με το γινόμενο της έκθεσης σε κίνδυνο επί τη μεταβλητότητα της συναλλαγματικής ισοτιμίας. Έτσι, για παράδειγμα, είναι

$$50 \text{ USD} \times 0.5 \text{ FRF/USD} = 25 \text{ FRF}$$

$$100 \text{ DEM} \times 0.15 \text{ FRF/DEM} = 15 \text{ FRF}$$

όπως φαίνονται και στον πίνακα.

Ο υπολογισμός της συνολικής μεταβλητότητας για διάφορες τιμές του γραμμικού συντελεστή συσχέτισης έγινε με τον γενικό τύπο

$$[[(50 \times 0.5)^2 + (100 \times 0.15)^2 + 2 \times \rho_{DEM/USD} \times 50 \times 0.5 \times 100 \times 0.15]^{1/2}$$

όπου ο συντελεστής συσχέτισης παίρνει διαφορετικές τιμές, και συγκεκριμένα:

$$\rho_{DEM/USD} = \{-1, -0.3, 0, +1\}.$$

Όταν ο συντελεστής συσχέτισης των δύο συναλλαγματικών ισοτιμιών είναι ίσος με μηδέν, η διακύμανση του χαρτοφυλακίου ισούται με το άθροισμα των διακυμάνσεων κάθε έκθεσης σε κίνδυνο χωριστά, δηλαδή με 625 + 225 = 850 και $\sqrt{850} = 29.16$, αποτέλεσμα που διαφέρει από το άθροισμα των μεμονωμένων κινδύνων, 25 + 15 = 40.

Η μεγαλύτερη τιμή του κινδύνου –κατά τα γνωστά– είναι όταν οι μεταβολές των τιμών των δύο συναλλαγματικών ισοτιμιών σχετίζονται τέλεια θετικά μεταξύ τους, δηλαδή όταν $\rho_{DEM/USD} = +1$. Αντίθετα, ο κίνδυνος του χαρτοφυλακίου παίρνει τη μικρότερη τιμή, όταν ο συντελεστής συσχέτισης είναι ίσον με –1, δηλαδή όταν οι μεταβολές των τιμών των δύο συναλλαγματικών ισοτιμιών σχετίζονται τέλεια αρνητικά μεταξύ τους.

Η αξία σε κίνδυνο (VaR) του χαρτοφυλακίου είναι ένα πολλαπλάσιο αυτών των μεταβλητοτήτων. Σε επίπεδο σημαντικότητας 2.5% (ή πιθανότητα 95%), η αξία σε κίνδυνο (VaR) ισούται με 1.96 φορές στη συνολική μεταβλητότητα.

Οι αντίστοιχες αξίες σε κίνδυνο του παραδείγματος που εξετάζουμε, για τις διάφορες τιμές του συντελεστή συσχέτισης, υπολογίστηκαν και εμφανίζονται στον πίνακα. Η μικρότερη τιμή της αξίας σε κίνδυνο (VaR) παρατηρείται στην περίπτωση της τέλειας αρνητικής συσχέτισης των συναλλαγματικών ισοτιμιών, όπως, άλλωστε, αναμενόταν.

5.3.2 Προσαυξημένη VaR, IVaR

Μια σημαντική άποψη στην ανάλυση VaR είναι η κατανόηση και, στη συνέχεια, ο υπολογισμός του περιουσιακού στοιχείου ή του συνδυασμού περιουσιακών στοιχείων που συμβάλλουν περισσότερο στον κίνδυνο του χαρτοφυλακίου. Με άλλα λόγια, πρέπει να εξετάσουμε τη συμβολή των μεμονωμένων συνιστωσών (ή στοιχείων) του χαρτοφυλακίου στον συνολικό κίνδυνο (στη συνολική VaR).

Η γνώση αυτής της πληροφορίας είναι σημαντική για μια σειρά από λόγους:

- συμβολή συγκεκριμένης μετοχής συγκεκριμένου κλάδου ή συγκεκριμένου τύπου ομολογίας στον συνολικό κίνδυνο·

- προσδιορισμός των κυριότερων πηγών έκθεσης στον συνολικό κίνδυνο·
- πληροφορία με σκοπό την αναπροσαρμογή των αποδόσεων στον κίνδυνο·
- πληροφορία με σκοπό την παρακολούθηση και τον προσδιορισμό των ορίων του κινδύνου·
- πληροφορία για την αποτίμηση των επενδυτών και των διαχειριστών·
- πληροφορία με σκοπό την απόφαση νέας τοποθέτησης σε ένα περιουσιακό στοιχείο στο ήδη υπάρχον χαρτοφυλάκιο.

Ένας τρόπος να προσδιορίσουμε το αποτέλεσμα των μεμονωμένων επενδυτικών θέσεων στη συνολική VaR είναι να υπολογίσουμε τη VaR του νέου χαρτοφυλακίου (που συμπεριλαμβάνει, δηλαδή, το νέο προϊόν, έστω A) και να αφαιρέσουμε τη VaR του ήδη υπάρχοντος χαρτοφυλακίου.

Η προσαυξημένη VaR (Incremental VaR, IVaR) για το περιουσιακό στοιχείο A, IVaR(A), θα είναι, λοιπόν

IVaR(A) = VaR(χαρτοφυλακίου με το A) – VaR(χαρτοφυλακίου χωρίς το A)

Η IVaR(A) είναι θετική, εάν το περιουσιακό στοιχείο A προσθέτει σημαντικά στον κίνδυνο του χαρτοφυλακίου, αρνητική, εάν συμβαίνει το αντίθετο, και μηδενική, εάν δεν μεταβάλλεται ο συνολικός κίνδυνος.

Ωστόσο, υπάρχει ένας σημαντικός πρακτικός περιορισμός: Εάν ο αριθμός των χρηματοοικονομικών προϊόντων είναι πολύ μεγάλος, οι απαραίτητοι υπολογισμοί με πίνακες γίνονται ιδιαίτερα πολύπλοκοι. Ακόμα περισσότερο, η παρακολούθηση και ο υπολογισμός της IVaR σε πραγματικό χρόνο (real time) είναι δυσκολότερα.

Όμως, υπάρχει ένας τρόπος που απλοποιεί τους υπολογισμούς και εξομαλύνει, έτσι, τα μειονεκτήματα της IVaR. Η προσέγγιση αυτή ξεκινά από τον υπολογισμό της διακύμανσης του νέου χαρτοφυλακίου, $\sigma^2_{\varrho H,,}$, με πληροφόρηση από τις διακυμάνσεις και συνδιακυμάνσεις του υπάρχοντος χαρτοφυλακίου, καθώς και του νέου περιουσιακού στοιχείου,

$$\sigma^2_{p^{\text{new}}} = (1+\alpha)^{-2}[\sigma_p^2 + \alpha^2\sigma_A^2 + 2\alpha\sigma_{A,p}]$$

$$\Rightarrow \quad \sigma_{p^{\text{new}}} = (1+\alpha)^{-1}\ [\sigma_p^2 + \alpha^2\sigma_A^2 + 2\alpha\sigma_{A,p}]^{1/2} \qquad (10)$$

όπου $\sigma_{A,p}$ είναι η συνδιακύμανση μεταξύ των νέου περιουσιακού στοιχείου A και του υπάρχοντος χαρτοφυλακίου και α είναι το μέγεθος της θέσης στο στοιχείο A (έτσι, το μέγεθος του νέου χαρτοφυλακίου είναι 1 + α φορές το μέγεθος του υπάρχοντος χαρτοφυλακίου).

Επειδή για τις περισσότερες συναλλαγές το ποσοστό α είναι πολύ μικρό συγκριτικά με το μέγεθος W του υπάρχοντος χαρτοφυλακίου (οι ποσότητες α^2 και $\alpha^2\sigma_A^2$ είναι αμελητέες), η παραπάνω σχέση γίνεται

$$\sigma_p \approx (1+\alpha)^{-1}\sqrt{\sigma_p^2 + 2\alpha\sigma_{A,p}} \qquad (11)$$

Πολλαπλασιάζοντας και τις δύο πλευρές της ισότητας αυτής με την ποσότητα $-\varepsilon(1+a)W$, μπορούμε να υπολογίσουμε τη νέα αξία σε κίνδυνο, $\mathrm{VaR}^{\mathrm{new}}$,

$$\mathrm{VaR}^{\mathrm{new}} \approx \sqrt{(\mathrm{VaR}^{\mathrm{old}})^2 + 2\alpha\varepsilon^2\sigma_{A,p}W^2} \quad (12)$$

όπου ε είναι το επίπεδο εμπιστοσύνης.

Μπορούμε, έτσι, να υπολογίσουμε αναλυτικά την

$$\mathrm{IVaR} = \Delta(\mathrm{VaR}) = \mathrm{VaR}^{\mathrm{new}} - \mathrm{VaR}^{\mathrm{old}}$$

Επίσης, αποδεικνύεται ότι

$$\Delta\mathrm{VaR} \approx \frac{\alpha\sigma_{A,p}W}{\mathrm{VaR}^{\mathrm{old}}}\varepsilon^2$$

Η έκφραση αυτή μας λέει ότι η προσαυξημένη αξία σε κίνδυνο εξαρτάται από την αξία σε κίνδυνο του υπάρχοντος χαρτοφυλακίου, $\mathrm{VaR}^{\mathrm{old}}$, το μέγεθος της νέας επένδυσης, α, το μέγεθος του υπάρχοντος χαρτοφυλακίου, W, το επίπεδο εμπιστοσύνης, ε, και τη συνδιακύμανση $\sigma_{A,p}$.

Ακόμα, μπορούμε να αποδείξουμε (αφήνεται σαν άσκηση στον αναγνώστη) ότι

$$\Delta\mathrm{VaR} \approx \alpha\beta_{A,p}\mathrm{VaR}^{\mathrm{old}}$$

όπου $\beta_{A,p} = \sigma_{A,p}/\sigma_p^2$ είναι ο συντελεστής βήτα του χαρτοφυλακίου.

5.3.3 VaR χαρτοφυλακίου

Ας θυμηθούμε πάλι τη σχέση που υπολογίζει τον συνολικό κίνδυνο χαρτοφυλακίου δύο περιουσιακών στοιχείων, 1 και 2, που αναφέραμε στην υποενότητα 5.1.2

$$\sigma_p^2 = w_1^2\,\sigma_1^2 + w_2^2\sigma_2^2 + 2w_1w_2\,\sigma_1\sigma_2\rho_{1,2}$$

ή την τυπική απόκλιση

$$\sigma_p = [w_1^2\,\sigma_1^2 + w_2^2\sigma_2^2 + 2w_1w_2\,\sigma_1\sigma_2\rho_{1,2}]^{1/2}$$

Αντίστοιχα, η αξία σε κίνδυνο του χαρτοφυλακίου που αποτελείται από αυτά τα δύο περιουσιακά στοιχεία, VaR_p, είναι

$$VaR_p = -\alpha\sigma_p W = -a \times \sqrt{w_1^2\sigma_1^2 + w_2^2\sigma_2^2 + 2w_1w_2\ \rho_{1,2}\ \sigma_1\sigma_2} \times W$$

$$= \sqrt{VaR_1^2 + VaR_2^2 + 2\rho_{1,2}VaR_1VaR_2}$$

όπου W είναι η αρχική θέση της επένδυσης, w_1 και w_2 είναι το ποσοστά επένδυσης στα περιουσιακά στοιχεία 1 και 2 αντίστοιχα, VaR1 είναι η αξία σε κίνδυνο του περιουσιακού στοιχείου 1, δηλαδή

$$\mathrm{VaR}_1 = -a\sigma_1 w_1 W$$

και VaR_2 είναι η αξία σε κίνδυνο του περιουσιακού στοιχείου 2, δηλαδή

$$VaR_2 = -a\varsigma_2 w_2 W$$

Η παραπάνω σχέση δίνει την αξία σε κίνδυνο του χαρτοφυλακίου σε όρους διακύμανσης, κατανομής επένδυσης και συντελεστή συσχέτισης των επιμέρους στοιχείων που απαρτίζουν το χαρτοφυλάκιο.

Το κρίσιμο σημείο στην παραπάνω σχέση είναι ο συντελεστής συσχέτισης $\varrho_{1,2}$. Θα είναι γενικά:

$$VaR_p = \sqrt{VaR_1^2 + VaR_2^2 + 2\rho_{1,2} VaR_1 VaR_2} \tag{13}$$

α) Εάν ο συντελεστής συσχέτισης πάρει τη μέγιστη τιμή του, δηλαδή $\varrho_{1,2} = +1$, με άλλα λόγια εάν οι αποδόσεις των δύο περιουσιακών στοιχείων του χαρτοφυλακίου συσχετίζονται (γραμμικά) τέλεια θετικά μεταξύ τους, τότε η συνολική αξία σε κίνδυνο του χαρτοφυλακίου θα είναι:

$$\begin{aligned} VaR_p &= \sqrt{VaR_1^2 + VaR_2^2 + 2\rho_{1,2} VaR_1 VaR_2} \\ &= \sqrt{VaR_1^2 + VaR_2^2 + 2VaR_1 VaR_2} \\ &= \sqrt{(VaR_1 + VaR_2)^2} \\ &= VaR_1 + VaR_2 \end{aligned} \tag{14}$$

β) Εάν ο συντελεστής συσχέτισης είναι ίσος με μηδέν, δηλαδή $\varrho_{1,2} = 0$, με άλλα λόγια εάν οι αποδόσεις των δύο περιουσιακών στοιχείων δεν συσχετίζονται μεταξύ τους, τότε προκύπτει εύκολα ότι η συνολική αξία του χαρτοφυλακίου θα είναι

$$[VaR_1^2 + VaR_2^2]^{1/2}$$

Αν σημειωθεί ότι

$$[VaR_1^2 + VaR_2^2]^{1/2} < VaR_1 + VaR_2$$

γ) Εάν ο συντελεστής συσχέτισης παίρνει τη μικρότερη δυνατή τιμή του, δηλαδή εάν $\varrho_{1,2} = -1$, που σημαίνει ότι οι αποδόσεις των δύο περιουσιακών στοιχείων του χαρτοφυλακίου συσχετίζονται τέλεια αρνητικά μεταξύ τους, τότε η συνολική αξία σε κίνδυνο του χαρτοφυλακίου είναι

$$|VaR_1 - VaR_2|$$

δηλαδή ισούται με την απόλυτη διαφορά των αξιών σε κίνδυνο των δύο περιουσιακών στοιχείων.

Αξίζει να σημειωθεί η παρακάτω σχέση

$$|VaR_1 - VaR_2| < [VaR_1^2 + VaR_2^2]^{1/2} < VaR_1 + VaR_2$$

Συμπερασματικά, *η συνολική αξία σε κίνδυνο του χαρτοφυλακίου μειώνεται όσο μειώνεται και ο συντελεστής συσχέτισης μεταξύ των δύο περιουσιακών στοιχείων.*

Με άλλα λόγια, η συνολική αξία σε κίνδυνο του χαρτοφυλακίου μειώνεται ως αποτέλεσμα της διαφοροποίησης των περιουσιακών στοιχείων του χαρτοφυλακίου.

Βέβαια, η παραπάνω ανάλυση έγινε σε ένα υποθετικό χαρτοφυλάκιο αποτελούμενο από δύο περιουσιακά στοιχεία. Όμως, μπορούμε να γενικεύσουμε τη μέθοδο αυτή και σε ένα χαρτοφυλάκιο που αποτελείται από n περιουσιακά στοιχεία. Στην περίπτωση αυτή, η συνολική διακύμανση του χαρτοφυλακίου είναι

$$\sigma_p^2 = [w_1, w_2, ..., w_n]\begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \sigma_{13} & ... & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \sigma_{23} & ... & \sigma_{2n} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n1} & \sigma_{n3} & ... & \sigma_n^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ . \\ . \\ . \\ w_n \end{bmatrix}$$

με τους γνωστούς μας συμβολισμούς.

Η προηγούμενη παράσταση μπορεί να γραφεί με μορφή πινάκων, όπως

$$\sigma_p^2 = \mathbf{w} \cdot \mathbf{\Sigma} \cdot \mathbf{w}' \tag{15}$$

όπου **w** είναι το διάνυσμα των σταθμίσεων των στοιχείων του χαρτοφυλακίου, **w**΄ είναι το ανάστροφό του διάνυσμα (κάθετα) και **Σ** είναι ο πίνακας διακυμάνσεων-συνδιακυμάνσεων.

Έτσι, η αξία σε κίνδυνο του χαρτοφυλακίου είναι

$$\mathrm{VaR}_p = -\alpha\sigma_p W = -\alpha[\mathbf{w} \cdot \mathbf{\Sigma} \cdot \mathbf{w}']^{1/2} W = [\mathbf{VaR} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{VaR}']^{1/2} \tag{16}$$

όπου **C** είναι ο *n × n πίνακας* των συσχετίσεων

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & \rho_{12} & ... & \rho_{1n} \\ \rho_{21} & 1 & ... & \rho_{2n} \\ .... & & & \\ .... & & & \\ .... & & & \\ \rho_{n1} & \rho_{n2} & ... & 1 \end{bmatrix}$$

VaR είναι το $n \times 1$ διάνυσμα $[\mathrm{VaR}_1, \mathrm{VaR}_2, ..., \mathrm{VaR}_n]$ των μεμονωμένων περιουσιακών στοιχείων που συνθέτουν το χαρτοφυλάκιο και **VaR**΄ είναι το ανάστροφο διάνυσμα του **VaR.**

Το αποτέλεσμα της διαφοροποίησης φαίνεται στον πίνακα των συσχετίσεων. Εάν όλα τα περιουσιακά στοιχεία που συνθέτουν το χαρτοφυλάκιο συσχετίζονται τέλεια θετικά μεταξύ τους, τότε όλα τα στοιχεία του πίνακα **C** θα είναι ίσα με τη μονάδα και, συνεπώς, η αξία σε κίνδυνο του χαρτοφυλακίου, VaR_p, θα ισούται με το άθροισμα των VaR των μεμονωμένων στοιχείων από τα οποία αποτελείται το χαρτοφυλάκιο.

Βλέπουμε, λοιπόν, από την παραπάνω σχέση, ότι η αξία σε κίνδυνο του χαρτοφυλακίου εξαρτάται από τις VaR των περιουσιακών στοιχείων του χαρτοφυλακίου και από τον πίνακα των συσχετίσεων των αποδόσεων των περιουσιακών στοιχείων.

Ακόμα, παρατηρούμε, από την ίδια σχέση, ότι η αξία σε κίνδυνο του χαρτοφυλακίου εξαρτάται από τις σταθμίσεις των περιουσιακών στοιχείων, αλλά και από τις μεταβλητότητες τους, όπως απεικονίζονται στις τυπικές αποκλίσεις και τον πίνακα των συσχετίσεων.

Η παραπάνω ερμηνεία της αξίας σε κίνδυνο του χαρτοφυλακίου είναι πολύ σημαντική και σημαίνει ότι ο διαχειριστής, για την καλύτερη εκτίμηση της VaR_p, τουλάχιστον στη θεωρία, θα πρέπει πρώτα να προβλέψει τις μεταβλητότητες και συσχετίσεις (ή, με άλλα λόγια, τα στοιχεία του πίνακα Σ), μιας και τις σταθμίσεις τις γνωρίζει.

Παράδειγμα 6

Ας θεωρήσουμε ένα παράδειγμα, στο οποίο η τιμή δύο ομολόγων εξαρτάται από την τιμή δύο διαφορετικών επιτοκίων. Επίσης, η ευαισθησία για κάθε μοναδιαία μεταβολή των επιτοκίων της αγοράς είναι 2,000 και 5,000, αντίστοιχα και ισούται με το γινόμενο της τροποποιημένης διάρκειας (modified duration) επί την τρέχουσα τιμή της αγοράς επί τη μοναδιαία μεταβολή των επιτοκίων. Για τον υπολογισμό της VaR πρέπει να εκτιμηθεί πρώτα η μεταβλητότητα των τιμών της αγοράς του χαρτοφυλακίου.

Για τον υπολογισμό της διακύμανσης και της συνδιακύμανσης δίνεται, επιπλέον, ότι ο συντελεστής συσχέτισης μεταξύ των επιτοκίων είναι 0.5. Η μεταβλητότητα του ενός επιτοκίου (επιτόκιο 1, βραχυχρόνιο επιτόκιο) είναι 20% και η τρέχουσα τιμή του ισούται με 10%. Συνεπώς, η μεταβλητότητα του επιτοκίου 1 είναι ίση με $0.20 \times 0.10 = 0.02 = 2\%$.

Αντίστοιχα, η μεταβλητότητα του άλλου επιτοκίου (επιτόκιο 2, μακροχρόνιο επιτόκιο) είναι 10% με τρέχουσα αξία 12% και μεταβλητότητα $0.12 \times 0.10 = 0.012 = 1.2\%$.

Η συνδιακύμανση μεταξύ των δύο επιτοκίων είναι

$$\sigma_{12} = \rho_{12}\sigma_1\sigma_2 = 0.5 \times 0.02 \times 0.012 = 0.012\%$$

Με δεδομένους τους συντελεστές ευαισθησίας, κάθε μικρή μεταβολή της αξίας του χαρτοφυλακίου, *p*, θα είναι ίση με

$$\Delta p = 2{,}000 \times \Delta i_1 + 5{,}000 \times \Delta i_2$$

όπου Δi_1 και Δi_2 εκφράζουν τις μεταβολές των επιτοκίων 1 και 2. Η μεταβλητότητα της τρέχουσας τιμής της αγοράς (mark-to-market value) των δύο περιουσιακών στοιχείων προκύπτει από το άθροισμα των δύο γινομένων $2{,}000 \times \Delta i_1$ και $5{,}000 \times \Delta i_2$. Έτσι, θα είναι

$$\sigma(P) = \sqrt{S_1^2\sigma_1^2 + S_2^2\sigma_2^2 + 2S_1S_2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2} = \sqrt{7{,}600} = 87.2$$

Χρησιμοποιώντας πίνακες μπορούμε να γενικεύσουμε τους παραπάνω υπολογισμούς για τη διακύμανση και τη μεταβλητότητα στη μορφή

$$\text{Διακύμανση} = \mathbf{S}\cdot\mathbf{\Sigma}\cdot\mathbf{S}^T$$

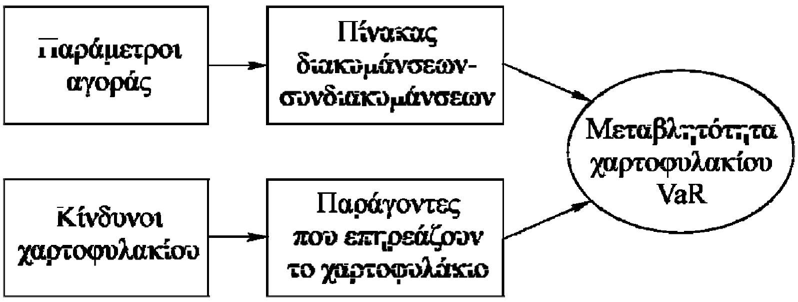
και

$$\text{Μεταβλητότητα} = \sqrt{\mathbf{S}\cdot\mathbf{\Sigma}\cdot\mathbf{S}^T}$$

όπου **S** είναι το διάνυσμα-γραμμή της ευαισθησίας του περιουσιακού στοιχείου για κάθε μοναδιαία μεταβολή της παραμέτρου της αγοράς, **Σ** είναι ο πίνακας διακυμάνσεων-συνδιακυμάνσεων και $\mathbf{S}^T$ είναι το ανάστροφο διάνυσμα.

Η αρχή της βασικής εφαρμογής της μεθοδολογίας d_VaR παρουσιάζεται στο παρακάτω διάγραμμα. Η μεθοδολογία αυτή μπορεί να χρησιμοποιηθεί και στην περίπτωση κινδύνου επιτοκίων των τραπεζικών χαρτοφυλακίων.

Διάγραμμα 3
Η μεθοδολογία d_VaR



Παράδειγμα 7

Ας δούμε ένα άλλο παράδειγμα. Έστω, λοιπόν, ότι ένας ισολογισμός χωρίζεται σε δύο χαρτοφυλάκια που εξαρτώνται από δύο διαφορετικά επιτόκια, έστω i_1 i_2, με μεταβλητότητα 3% και 2%, αντίστοιχα. Έστω, ακόμα, ότι ο συντελεστής συσχέτισης μεταξύ τους μπορεί να πάρει τιμές 0, +1 και +0.3. Η ευαισθησία του περιθωρίου επιτοκίου είναι τα ανοίγματα των επιτοκίων και είναι, αντίστοιχα, 100 και 200. Ο παρακάτω πίνακας συνοψίζει τα δεδομένα και τους αντίστοιχους υπολογισμούς.

Ο μεμονωμένος κίνδυνος για το πρώτο άνοιγμα είναι 100 × 3% = 3 και για το δεύτερο είναι 200 × 2% = 4. Το άθροισμα αυτών των δύο είναι ίσο με 7, το οποίο υπερεκτιμά τον πραγματικό κίνδυνο, εκτός και εάν τα επιτόκια συσχετίζονται τέλεια θετικά μεταξύ τους, δηλαδή στην περίπτωση όπου $\rho_{i_1 i_2} = +1$.

Η συνολική μεταβλητότητα του χαρτοφυλακίου υπολογίστηκε από τη σχέση

$$[(100 \times 0.03)^2 + (200 \times 0.02)^2 + 2 \times \rho_{i_1 i_2} \times 100 \times 0.03 \times 200 \times 0.02]^{1/2}$$

όπου ο συντελεστής συσχέτισης $\rho_{i_1 i_2} = +1, 0, 0.3$.

Πίνακας 5
Συνολική μεταβλητότητα έκθεσης σε κίνδυνο δύο επιτοκίων

ΜΕΤΑΒΛΗΤΟΤΗΤΑ ΑΓΟΡΑΣ	Δεδομένα και υπολογισμοί
Επιτόκιο i_1	$\Delta i_1 = 3\%$
Επιτόκιο i_2	$\Delta i_2 = 2\%$
ΕΚΘΕΣΗ ΣΕ ΚΙΝΔΥΝΟ	
Έκθεση 1	Άνοιγμα 1 = 100
Έκθεση 2	Άνοιγμα 2 = 200
Συνολική έκθεση σε κίνδυνο	$100 \times \Delta i_1 + 200 \times \Delta i_2$
ΜΕΤΑΒΛΗΤΟΤΗΤΑ ΧΑΡΤΟΦΥΛΑΚΙΟΥ	
$\rho = 0$	5.00
$\rho = +1$	7.00
$\rho = +0.3$	5.67

Και εδώ παρατηρείται ότι η μεταβλητότητα (μέτρο κινδύνου) παίρνει τη μικρότερη τιμή της στην περίπτωση που ο συντελεστής συσχέτισης έχει την τιμή μηδέν, έναντι των τιμών του +1 ή +0.3.

Δραστηριότητα 2/Κεφάλαιο 5

Ένα χαρτοφυλάκιο αποτελείται από τρεις μετοχές, 1–2–3, με επενδυμένη αξία σε κάθε μια 50 εκ.€ στην πρώτη, 60 εκ. € στη δεύτερη και 20 εκ.€ στην τρίτη. Η μεταβλητότητα κάθε μιας μετοχής (τυπική απόκλιση) είναι, αντίστοιχα για τις 3 μετοχές: 1.2%, 2% και 1.1%, ενώ οι συντελεστές συσχέτισης είναι: για τις 1 και 2 ισούται με 0.7, για τις 1 και 3 είναι ίσος με 0.5 και για τις 2 και 3 ισούται με 0.3. Να υπολογίσετε σε επίπεδο σημαντικότητας 1% (α) την αξία σε κίνδυνο κάθε μετοχής μεμονωμένα και, (β) την αξία σε κίνδυνο του χαρτοφυλακίου των 3 μετοχών. Δείτε τη δική μας απάντηση στο Παράρτημα, στο τέλος του κεφαλαίου.

5.3.4 Αποτέλεσμα διαφοροποίησης χαρτοφυλακίου και VaR

Μπορούμε να υπολογίσουμε το όφελος από τη διαφοροποίηση του χαρτοφυλακίου, εάν γνωρίζουμε τον συντελεστή συσχέτισης μεταξύ των περιουσιακών στοιχείων. Συγκεκριμένα, το αποτέλεσμα της διαφοροποίησης του χαρτοφυλακίου (p), που αποτελείται από δύο περιουσιακά στοιχεία θα είναι ίσο με τη διαφορά της σχέσης (17), που επαναλαμβάνουμε:

$$VaR_P^{div} = \sqrt{VaR_1^2 + VaR_2^2 + 2 * \varrho_{1,2} * VaR_1 * VaR_2} \tag{17}$$

και του αθροίσματος των VaR_1 και VaR_2:

$$VaR_p^{non-div} = VaR_1 + VaR_2 \tag{18}$$

όπου η σχέση (17) δίνει τη VaR του διαφοροποιημένου χαρτοφυλακίου, ενώ η σχέση (18) δίνει τη VaR του μη-διαφοροποιημένου χαρτοφυλακίου.

Παράδειγμα 8

Ένα χαρτοφυλάκιο αποτελείται από δύο μετοχές, την Α και την Β. Στον παρακάτω πίνακα δίνεται η αξία του χαρτοφυλακίου, η ημερήσια μεταβλητότητα των μετοχών, καθώς και ο συντελεστής συσχέτισής τους. Ο υπολογισμός της αξίας σε κίνδυνο γίνεται με πιθανότητα 99% για 10 ημέρες.

Μετοχή	**Αξία χαρτοφυλακίου**	**Ημερήσια Μεταβλητότητα**
Α	10 εκατομ. ευρώ	2%
Β	5 εκατομ. Ευρώ	1%
ρ(Α, Β) = 0,3 και επίπεδο σημαντικότητα α = 0,01		

Θα είναι, λοιπόν:

$VaR_p^{non-div} = 2{,}326 \cdot (10 \cdot 0{,}02 + 5 \cdot 0{,}01) \cdot \sqrt{10} = 1.84$ εκατομ. ευρώ, περίπου.

$VaR_P^{div} = 2{,}326 \cdot \sqrt{0{,}2^2 + 0{,}05^2 + 2 \cdot 0^2 \cdot 0{,}05 \cdot 0{,}3} \cdot \sqrt{10} = 1.62$ εκατομ. ευρώ περίπου.

Συνεπώς, το όφελος από τη διαφοροποίηση του χαρτοφυλακίου ισούται με μείωση της VaR κατά 220.000 ευρώ.

Ενότητα 5.4

ΤΟ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ ΤΙΜΟΛΟΓΗΣΗΣ ΠΕΡΙΟΥΣΙΑΚΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΚΑΙ VaR ΧΑΡΤΟΦΥΛΑΚΙΟΥ

Με τη σύγχρονη θεωρία χαρτοφυλακίου του Markowitz, ένας επενδυτής ή ένας τραπεζικός οργανισμός μπορούν να προσδιορίσουν το άριστο χαρτοφυλάκιο. Η θεωρία χαρτοφυλακίου μας λέει πώς πρέπει να συμπεριφέρεται ο επενδυτής, δεν αναφέρεται, όμως, στο πώς τα περιουσιακά στοιχεία δια–μορφώνουν τις τιμές τους.

Η *θεωρία της κεφαλαιαγοράς* (capital market theory) περιγράφει ακριβώς τις σχέσεις της αγοράς που οδηγούν σε ισορροπία, εάν οι επενδυτές ή οι οργανισμοί συμπεριφέρονται σύμφωνα με τις προδιαγραφές της θεωρίας χαρτοφυλακίου. Αυτές οι σχέσεις καταλήγουν στον προσδιορισμό μεγεθών μέτρησης του κινδύνου χαρτοφυλακίων και μεμονωμένων περιουσιακών στοιχείων.

Για να δούμε πώς τιμολογούνται τα περιουσιακά στοιχεία, πρέπει να κατασκευάσουμε ένα υπόδειγμα. Η σημαντικότερη συνέπεια του υποδείγματος αυτού είναι ότι η αναμενόμενη απόδοση ενός περιουσιακού στοιχείου συνδέεται με ένα μέγεθος κινδύνου του περιουσιακού στοιχείου, γνωστού ως *συντελεστής βήτα* (beta coefficient).

Τον ακριβή τρόπο της σχέσης αναμενόμενης απόδοσης και συντελεστή βήτα περιγράφει το *υπόδειγμα τιμολόγησης περιουσιακών στοιχείων* (capital asset pricing model, CAPM), το οποίο αναπτύχθηκε από τους W. Sharpe (1964), J. Litner (1965) και Jon Mossin (1966). Το μέγεθος του συντελεστή βήτα είναι, επίσης, σημαντικό στην ανάλυση των πηγών κινδύνου της VaR ενός χαρτοφυλακίου, όπως θα δούμε στην επόμενη υποενότητα.

5.4.1 Συντελεστής βήτα και VaR χαρτοφυλακίου ή «beta model»

Ο συντελεστής συστηματικού κινδύνου, συντελεστής βήτα (β), είναι ιδιαίτερα χρήσιμος στην ανάλυση της VaR του χαρτοφυλακίου. Θεωρώντας το γινόμενο του συντελεστή βήτα επί την VaR του χαρτοφυλακίου, παίρνουμε την οριακή μεταβολή της VaR από μια μοναδιαία μεταβολή της τιμής του κάθε περιουσιακού στοιχείου που συνθέτει το χαρτοφυλάκιο.

Πράγματι, αποδεικνύεται ότι η συνολική διακύμανση ενός χαρτοφυλακίου, σ_p^2 μπορεί να αναλυθεί ως εξής:

$$\sigma_P = w_1 \operatorname{cov}(R_1, R_P) + w_2 \operatorname{cov}(R_2, R_P) + \cdots$$

$$= w_1(\beta_1 \sigma_P^2) + w_2(\beta_2 \sigma_P^2) + \cdots$$

$$= \sigma_P^2 \left(\sum_{i=1}^{N} w_i \beta_i \right)$$

όπου w_i είναι οι σταθμίσεις και ο συντελεστής βήτα του χαρτοφυλακίου είναι, όπως ήδη γνωρίζουμε

$$\beta_P = \sum_{i=1}^{N} w_i \beta_i = \mathbf{w}'\boldsymbol{\beta}$$

όπου β_i προκύπτει από την παλινδρόμηση των αποδόσεων του στοιχείου i, r_i, στις αποδόσεις της αγοράς, r_m:

$$r_i = a_i + \beta_i \cdot r_m + \varepsilon_i$$

Συνεπώς, η VaR του χαρτοφυλακίου μπορεί να γραφεί ως

$$\mathrm{VaR}_p = \mathrm{VaR}_m \beta_p$$

Η προσέγγιση αυτή για τον υπολογισμό της VaR χαρτοφυλακίου είναι ικανοποιητική, όταν το χαρτοφυλάκιο περιλαμβάνει πολλές μετοχές και έχει υιοθετηθεί από την Επιτροπή της Βασιλείας για να αντικατοπτρίζει τον κίνδυνο της αγοράς (τη) καλά διαφοροποιημένων χαρτοφυλακίων.

Παράδειγμα 9

Ας δούμε ένα ακόμα παράδειγμα, το οποίο αναφέρεται στην πτώχευση της Barings PLC (Jorion, 1997), μιας τράπεζας με ιστορία 233 ετών! Ο N. Leeson (o 28χρονος διαχειριστής της τράπεζας) στην έκθεση του αναφέρει ότι είχε μία ανοιχτή θέση αγοράς (long posistion) σε συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης (futures contracts) επί μετοχών του χρηματιστηριακού δείκτη του Τόκιο (Nikkei 225) αξίας 7.7 δις δολ. ΗΠΑ και μία θέση ανοιχτής πώλησης (short position) σε συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης σε ιαπωνικά κυβερνητικά ομόλογα (JGB) αξίας 16 δις δολ. ΗΠΑ.

Πίνακας 6

Προϊόν	Κίνδυνος (%)	Πίνακας συσχετίσεων	Πίνακας συνδιακυμάνσεων	Θέση σε εκ. $ (X)
10–yr JGB *Nikkei*	1.18 5.83	$\begin{bmatrix} 1 & -0.144 \\ -0.144 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.000139 & -0.000078 \\ -0.000078 & 0.003397 \end{bmatrix}$	($16,000) $7,700
			Σύνολο	$8,300

Πηγή: *Jorion, 1997*

Στον παραπάνω πίνακα 6 παρουσιάζονται, ανά προϊόν χαρτοφυλακίου, ο κίνδυνος, ο πίνακας συσχετίσεων μεταξύ των δεκαετών ομολόγων του Ιαπωνικού Δημοσίου και του χρηματιστηριακού δείκτη του Χρηματιστηρίου του Τόκιο, ο πίνακας συνδιακυμάνσεων καθώς και η αντίστοιχη θέση σε εκατομμύρια δολάρια ΗΠΑ ανά προϊόν. Το στοιχείο ($16,000) δηλώνει ότι ο διαχειριστής της τράπεζας είχε ανοιχτή θέση πώλησης.

Ο συντελεστής συσχέτισης μεταξύ των μετοχών του Χρηματιστηρίου του Τόκιο και των ιαπωνικών ομολόγων είναι αρνητικός, που σημαίνει ότι μια αύξηση στις τιμές των μετοχών θα συνοδευτεί από μια πτώση των τιμών των ομολόγων και, κατά συνέπεια, αυτό θα οδηγήσει σε αύξηση των επιτοκίων.

Για τον υπολογισμό της VaR θα πρέπει πρώτα να υπολογίσουμε τον πίνακα των συνδιακυμάνσεων. Στη συνέχεια, θα πρέπει να υπολογιστεί το διάνυσμα **ΣΧ**, στο οποίο αναφερθήκαμε στην υποενότητα 4.3.3 (η διαφορά είναι ότι εκεί χρησιμοποιήσαμε το σύμβολο *S* αντί του *X,* που χρησιμοποιούμε εδώ). Για παράδειγμα, το στοιχείο –2.82 του Πίνακα 10 προκύπτει ως εξής:

$$X_1\sigma_1^2 + X_2\sigma_{12} = -\$16{,}000 \times 0.000139 + \$7{,}700 \times (-0.000078) = -2.82$$

Τα υπόλοιπα στοιχεία προκύπτουν όπως δείχνει ο πίνακας 7. Για παράδειγμα, θα είναι –2.82 × (–16,000) = 45,138 (περίπου), από όπου προκύπτει η συνολική διακύμανση του χαρτοφυλακίου, η οποία είναι ίση με 256,193.8 και, συνεπώς, η συνολική μεταβλητότητα του χαρτοφυλακίου είναι $\sqrt{256{,}194}$ = $506 εκατ. περίπου.

Σε επίπεδο εμπιστοσύνης 95% (όπου α = 1.65), η VaR της Barings είναι

$$\text{VaR} = 1.65 \times \$\,506 = \$\,835 \text{ εκατ.}$$

Το στοιχείο αυτό παριστάνει τη χειρότερη μηνιαία πιθανή ζημία της τράπεζας σε επίπεδο εμπιστοσύνης 95% κάτω από κανονικές συνθήκες της αγοράς. Στην έκθεση του ο Leeson ανέφερε συνολική ζημία της τάξης του 1.3 δις δολ. ΗΠΑ, που δεν απέχει πολύ από τους παραπάνω υπολογισμούς. Η διαφορά οφείλεται σε μεταβολή της θέσης του χαρτοφυλακίου.

Πίνακας 7

Προϊόν (*i*)	**Συνολική VaR**		**Προσαυξημένη VaR**		
	$(\mathbf{\Sigma X})_i$	$X_i\Sigma X^T_i$	β_i = $(\Sigma X)_i / \mathbf{X}_i\mathbf{\Sigma X}^T_i$	για $1εκατ. $\beta_i \times$ VaR	για X_i $\beta_i \times X_i \times$ VaR
10-yr JGB	–2.82	45,138.8	–0.0000110	($0.00920)	$147.15
Nikkei	27.41	211,055.1	0.0001070	$0.08935	$688.01
Σύνολο		256,193.8			$835.16
Κίνδυνος (σ_P)		506.16			
VaR = $\alpha\sigma_P$($εκ)		$835.16			

Πηγή: *Jorion, 1997*

Ενδιαφέρον, επίσης, παρουσιάζει ο προσαυξημένος κίνδυνος κάθε περιουσιακού στοιχείου. Με δεδομένη την αρνητική συσχέτιση μεταξύ των δύο περιουσιακών στοιχείων, ομολόγων και μετοχών, μια θέση αντιστάθμισης του κινδύνου (hedge position) θα απαιτούσε την ανάληψη θέσεων long και στα δύο περιουσιακά στοιχεία. Αντίθετα, όμως, ο Leeson δεν είχε τέτοια θέση στην αγορά, με αποτέλεσμα να έχει αυξημένο κίνδυνο.

Η στήλη στον πίνακα 7 που υπολογίζει τον συντελεστή βήτα βρίσκεται από τη διαίρεση –2.82/256,193.8 και τη διαίρεση 27.41/ 256,193.8. Πολλαπλασιάζοντας τον συντελεστή βήτα επί την VaR παίρνουμε την οριακή μεταβολή της VaR που οφείλεται στη μεταβολή κατά $ 1 εκατ. των ομολόγων (ίση με –$ 0.00920 εκατ.) και των μετοχών (που είναι ίση με $ 0.08935).

Συνολικά, η προσαυξημένη VaR (βλ. και υποενότητα 4.3.2) που οφείλεται στη θέση της τράπεζας σε ομόλογα είναι ίση με $147.15 εκατ. και αυτή που οφείλεται στις μετοχές είναι ίση με $688.01 εκατ. Το άθροισμα τους δίνει ένα σύνολο ίσο με $835.16 εκατ.

Η παραπάνω ανάλυση, αναφορικά με την πτώχευση της τράπεζας Barings, αποκαλύπτει ότι το μεγαλύτερο μέρος της συνολικής ζημίας οφείλεται στην έκθεση στον κίνδυνο των επενδυόμενων μετοχών στον δείκτη Nikkei του χρηματιστηρίου του Τόκιο και ότι η short θέση στα ομόλογα επιβάρυνε το χαρτοφυλάκιο της τράπεζας ακόμα περισσότερο.

Παράδειγμα 10

Έστω ένα χαρτοφυλάκιο που αποτελείται από τρεις μετοχές, την Α, τη Β και τη Γ. Υποθέτουμε ότι έχουν επενδυθεί ισόποσα 100 εκατ. € σε όλες τις μετοχές, δηλαδή 33.33 εκατ. € σε καθεμία. Ο πίνακας συσχετίσεων (σύμφωνα με το υπόδειγμα CAPM) περιλαμβάνεται στον επόμενο πίνακα.

Πίνακας 8
Ο πίνακας συσχετίσεων των μετοχών Α, Β και Γ

	Α	**Β**	**Γ**
Α	1		
Β	0.164	1	
Γ	0.221	0.339	1

Επίσης, ο Πίνακας 9 δίνει τον πίνακα συνδιακυμάνσεων των τριών μετοχών.

Πίνακας 9
Ο πίνακας συνδιακυμάνσεων των μετοχών Α, Β και Γ

	Α	**Β**	**Γ**
Α	72.17	11.33	17.85
Β	11.33	66.12	26.21
Γ	17.85	26.21	90.41

Ακόμα, έχουν υπολογιστεί οι συντελεστές βήτα και βρέθηκαν, αντίστοιχα, ίσοι με 0.806 για τη μετοχή Α, 1.183 για τη μετοχή Β και 1.864 για τη μετοχή Γ. Η διακύμανση της αγοράς βρέθηκε Var(R) = 11.90, ενώ οι διακυμάνσεις της κάθε μετοχής είναι Var(R) = 72.17, Var(R) = 66.12 και $Var(R_Γ)$ = 90.41. Η διακύμανση των καταλοίπων είναι $Var(R_e)$ = {64.44, 49.46, 49.10} για τις μετοχές Α, Β και Γ, αντίστοιχα.

Υπολογίσαμε τη VaR της θέσης σε κάθε μετοχή σε μηνιαία βάση και επίπεδο εμπιστοσύνης 95%, και βρέθηκε

VaR (A) = 14.01 εκατ. €, VaR (B) = 13.41 εκατ. € και VaR (Γ) = 15.68 εκατ. €

Η συνολική VaR του χαρτοφυλακίου, VaR_p, είναι ίση με 10.13 εκατ. €.

Δραστηριότητα 3/Κεφάλαιο 5

Ένα χαρτοφυλάκιο αποτελείται από τρεις μετοχές, 1-2-3, με επενδυμένη αξία σε κάθε μια 50 εκ.€ στην πρώτη, 60 εκ. € στη δεύτερη και 20 εκ.€ στην τρίτη. Ο συντελεστής συστηματικού κινδύνου (συντελεστής βήτα) της κάθε μετοχής είναι: για την πρώτη ίσος με 0.82, για τη δεύτερη ίσος με 1.4 και για την τρίτη ίσος με 1.8. Εάν η μεταβλητότητα (τυπική απόκλιση) της αγοράς ισούται με 15%:

(α) Να υπολογίσετε σε επίπεδο σημαντικότητας 1% την αξία σε κίνδυνο του χαρτοφυλακίου των 3 μετοχών.

(β) Να συγκρίνετε και να σχολιάσετε τα αποτελέσματα με εκείνα της Δραστηριότητας 2.

Δείτε τη δική μας απάντηση στο Παράρτημα, στο τέλος του κεφαλαίου.

Δραστηριότητα 4/Κεφάλαιο 5

Η τράπεζα Τ έχει ένα μετοχικό χαρτοφυλάκιο αξίας 50,000,000€ με συστηματικό κίνδυνο ίσο με το χαρτοφυλάκιο αγοράς και τυπική απόκλιση των ημερήσιων αποδόσεων της αγοράς είναι 2.78%.

(α) Να υπολογίσετε την αξία σε κίνδυνο 5-ημερών του χαρτοφυλακίου σε επίπεδο σημαντικότητας 99%.

(β) Να επαναλάβετε εάν το βήτα χαρτοφυλακίου ισούται με 1.23 και να συγκρίνετε.

Δείτε τη δική μας απάντηση στο Παράρτημα, στο τέλος του κεφαλαίου.

5.4.2 Η αποτελεσματικότητα της αντιστάθμισης του κινδύνου των μετοχών

Για την αντιστάθμιση (hedging) του κινδύνου στην περίπτωση χαρτοφυλακίων μετοχών, μπορούν να χρησιμοποιηθούν μέθοδοι διαφοροποίησης, όπως είδαμε παραπάνω, αλλά και τεχνικές μέσω των παράγωγων προϊόντων. Οι μέθοδοι αντιστάθμισης του κινδύνου μέσω διαφοροποίησης ή μέσω των παράγωγων προϊόντων μπορούν να είναι χρήσιμες και αποτελεσματικές σε περιπτώσεις, όπως, για παράδειγμα, όταν θέλουμε να εξετάσουμε την πιθανή μείωση του κινδύνου του χαρτοφυλακίου μέσω ενός προγράμματος αντιστάθμισης έναντι της μη αντιστάθμισης. Με άλλα λόγια, εάν ο κίνδυνος μπορεί να μειωθεί, όταν ακολουθήσουμε ένα πρόγραμμα αντιστάθμισης κινδύνου, ή εάν δεν επηρεάζεται με τη χρήση του.

Ας θεωρήσουμε ένα χαρτοφυλάκιο P που περιλαμβάνει δύο μετοχές στις οποίες το χρηματοπιστωτικό ίδρυμα έχει ανοιχτές θέσεις αγοράς (long positions), A και B αντίστοιχα. Στην περίπτωση αυτή, γνωρίζουμε ότι η συνολική μεταβλητότητα του χαρτοφυλακίου, η οποία δίνεται από τη διακύμανση του χαρτοφυλακίου, θα είναι

$$\begin{aligned}\sigma_p^2 &= \alpha^2\,\sigma_A^2 + (1-\alpha)^2\sigma_B^2 + 2\alpha(1-\alpha)\sigma_{A\,B}\\ &= \alpha^2\,\sigma_A^2 + (1-\alpha)^2\sigma_B^2 + 2\rho_{A,B}\alpha(1-\alpha)\sigma_A\,\sigma_B\end{aligned}$$

όπου α και $1-\alpha$ είναι το αντίστοιχο ποσοστό του συνολικού κεφαλαίου που έχει επενδυθεί στις μετοχές A και B, αντίστοιχα, και $\varrho_{A\beta}$ είναι ο συντελεστής συσχέτισης μεταξύ των αποδόσεων των δύο μετοχών.

Αν, για λόγους ευκολίας απαλλάξουμε την παραπάνω σχέση από τις σταθμίσεις α και $1-\alpha$, τότε η παραπάνω σχέση γίνεται

$$\begin{aligned}\sigma_p^2 &= \sigma_A^2 + \sigma_B^2 + 2\rho_{A,B}\sigma_A\,\sigma_B\\ &= (\sigma_A + \rho_{A,B}\,\sigma_B)^2 + \sigma_B^2\,(1-\rho^2_{A,B})\end{aligned}$$

Για παράδειγμα, εάν $\sigma_A = 4\%$ και $\sigma_B = 3\%$, τότε θα έχουμε, ανάλογα με την τιμή του συντελεστή συσχέτισης των αποδόσεων των δύο μετοχών τις ακόλουθες τιμές:

	$\varrho_{A,B} = 1$	$\varrho_{A,B} = 0$	$p_{A,B} = -1$
σ_P	7%	5%	1%

Ο σχολιασμός των παραπάνω αποτελεσμάτων είναι προφανής και ήδη γνωστός από τα προηγούμενα.

Εάν, τώρα, υποθέσουμε ότι θέλουμε να χρησιμοποιήσουμε ένα ποσό α της Α για να αντισταθμίσουμε ένα ποσό 1 – α της Β, τότε θα πρέπει στην παραπάνω σχέση να σημειώσουμε ένα αρνητικό πρόσημο μπροστά από το α και λύνοντας ως προς α, βρίσκουμε ότι η άριστη σχέση αντιστάθμισης (optimal hedge ratio) είναι

$$\frac{\alpha}{1-\alpha} = \frac{\sigma_B}{\sigma_A}\rho_{A,B}$$

όπου $\frac{\alpha}{1-\alpha}$ είναι ο λόγος αντιστάθμισης (hedge ratio).

Θέτοντας το αποτέλεσμα αυτό στη σχέση που δίνει τη μεταβλητότητα του χαρτοφυλακίου, αποδεικνύεται ότι

$$\sigma_P{}^2 = (1-\alpha)^2\sigma_B{}^2(1-\rho^2_{A,B})$$

και το αποτέλεσμα στη μείωση του κινδύνου ορίζεται ως

$$1-\frac{(1-\alpha)^2\sigma_B^2(1-\rho^2_{A,B})}{(1-\alpha)^2\sigma_B^2} = \rho^2_{A,B}$$

Ο αριθμητής εκφράζει το αποτέλεσμα στον κίνδυνο μετά την εφαρμογή της αντιστάθμισης και ο παρονομαστής εκφράζει το αποτέλεσμα στον κίνδυνο πριν την εφαρμογή του προγράμματος της αντιστάθμισης του κινδύνου. Συνολικά, η σχέση αυτή εκφράζει την ποσοστιαία μεταβολή του τετραγώνου του κινδύνου.

Από τη σχέση του λόγου αντιστάθμισης, παρατηρούμε ότι:

- ο λόγος αυτός αυξάνει όσο το μέγεθος της τυπικής απόκλισης σ_B μειώνεται σχετικά με το μέγεθος της σ_A·
- ο λόγος αυτός αυξάνει όσο αυξάνει ο συντελεστής συσχέτισης $\varrho_{A,B}$·
- ο βαθμός στον οποίο η μετοχή (γενικά, το προϊόν) Α είναι ικανή για την αντιστάθμιση του κινδύνου της Β είναι συνάρτηση του συντελεστή συσχέτισης των αποδόσεων των δύο προϊόντων, $\varrho_{A,B}$.

Η τελευταία παρατήρηση αξίζει να διερευνηθεί περισσότερο. Για παράδειγμα, εάν χρησιμοποιηθεί μία μονάδα του Α για την αντιστάθμιση μίας μονάδας του Β κατά μη άριστο τρόπο, τότε είναι πιθανόν να αυξηθεί ο κίνδυνος, εκτός και εάν ο συντελεστής συσχέτισης είναι αρκετά μεγάλος. Γενικότερα, θα πρέπει ο συντελεστής συσχέτισης, σε απόλυτη τιμή, να είναι μεγαλύτερος του 0.5 για να έχει αποτελεσματικότητα η εφαρμογή προγράμματος αντιστάθμισης του κινδύνου ένα προς ένα.

Δραστηριότητα 5/Κεφάλαιο 5

Έστω ότι η VaR ενός περιουσιακού στοιχείου είναι ίση με 150 και ενός άλλου ίση με 430. Εάν ο συντελεστής συσχέτισης των αποδόσεων των δυο περιουσιακών στοιχείων ισούται με 0,78, να υπολογίσετε τη VaR του χαρτοφυλακίου των δυο περιουσιακών στοιχείων. Δείτε τη δική μας απάντηση στο Παράρτημα, στο τέλος του κεφαλαίου.

Ενότητα 5.5

ΟΛΙΚΗ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗ-ΑΠΟΤΙΜΗΣΗ ΚΑΙ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ VaR

Στους σημερινούς ρυθμούς εξέλιξης των χρηματοοικονομικών αγορών, τα συστήματα διαχείρισης κινδύνου προσφέρουν μια αποτελεσματική προστασία έναντι των πολλαπλών και πολύπλοκων κινδύνων της αγοράς. Ωστόσο, στο πλαίσιο αυτό πρέπει να αναζητηθεί η λεπτή ισορροπία μεταξύ:

α) της επεξεργασίας και εφαρμογής μεθόδου αποτελεσματικής διαχείρισης και διαδικασιών εσωτερικού ελέγχου από το ίδιο το χρηματοπιστωτικό ίδρυμα (in-house control system) και

β) της θέσπισης κανονιστικών ρυθμίσεων από πλευράς των εποπτικών αρχών.

Η αξία σε κίνδυνο αποτελεί τη σημαντικότερη συνιστώσα σε αυτά τα συστήματα, αφού επιτρέπει τη μέτρηση και τον έλεγχο των χρηματοοικονομικών κινδύνων. Επίσης, στα ιδρύματα που απαιτείται κεντρική διαχείριση κινδύνου, τα συστήματα VaR είναι απαραίτητα.

5.5.1 Αναγκαιότητα γνωστοποίησης της αξίας σε κίνδυνο των τραπεζικών χαρτοφυλακίων

Η τάση για ολική κεντρική διαχείριση κινδύνου, τα τελευταία χρόνια έχει οδηγηθεί από δύο κύριους παράγοντες:

α) την έκθεση σε νέους κινδύνους και

β) την αυξημένη μεταβλητότητα των νέων προϊόντων και των χρηματοοικονομικών εργαλείων.

Με την παγκοσμιοποίηση των χρηματοοικονομικών αγορών, τα πιστωτικά ιδρύματα –και οι επενδυτές, γενικά– είναι εκτεθειμένα σε νέους κινδύνους. Ας υποθέσουμε, για παράδειγμα, ότι οι πελάτες μιας τράπεζας περιμένουν την επίσημη ανακοίνωση των νέων θέσεων εργασίας στις ΗΠΑ.

Οι επενδυτές σε συναλλαγματικές ισοτιμίες θα πάρουν θέση ανοιχτής πώλησης του δολαρίου, προεξοφλώντας υψηλό αριθμό νέων θέσεων, που θα οδηγήσει σε πτώση τα επιτόκια και, συνεπώς, το δολάριο.

Οι επενδυτές στην αγορά των ομολόγων μπορεί, επίσης, να περιμένουν μείωση της ανεργίας και αγοράζουν ανοιχτά ομόλογα. Ακόμα, η μείωση πληθωριστικών προσδοκιών μπορεί να οδηγήσει τους επενδυτές προϊόντων να πάρουν ανοιχτές θέσεις πώλησης σε χρυσό.

Θεωρώντας μεμονωμένα τους παραπάνω κινδύνους, πιθανόν να είναι αποδεκτά τα όρια τους. Ωστόσο, εάν θεωρήσουμε συνολικά τον κίνδυνο κάθε θέσης της τράπεζας, τότε το ύψος του συνολικού κινδύνου είναι απαγορευτικό.

Είναι πολύ πιθανό σήμερα, το χαρτοφυλάκιο ενός τραπεζικού οργανισμού να είναι σε διάφορα προϊόντα (σταθερού εισοδήματος, συναλλαγματικές ισοτιμίες, προϊόντα, μετοχές κ.λπ.) σε περισσότερες αγορές (ώριμες αγορές και αναδυόμενες αγορές), για τη διαχείριση του οποίου μπορεί να απαιτούνται κάθε ημέρα χιλιάδες συναλλαγές και ο συνολικός όγκος των συναλλαγών να είναι της τάξης των 30 - 70 δις δολ. ΗΠΑ. Γίνεται κατανοητό, λοιπόν, πόσο σημαντική είναι η ποσοτικοποίηση του συνολικού κινδύνου σε ένα μόνο αριθμό, ασχέτως της κερδοφορίας των μεμονωμένων συναλλαγών.

Σήμερα, στα περισσότερα πιστωτικά ιδρύματα οι ομάδες διαχείρισης κινδύνου δημοσιεύουν σε περιοδικές εκθέσεις, προς τον κεντρικό διαχειριστή και τους μετόχους, τη συνολική αξία σε κίνδυνο των συναλλαγών των ιδρυμάτων. Ουσιαστικά, λοιπόν, η VaR αποτελεί ένα σημαντικό στοιχείο πληροφορίας που μπορεί να χρησιμοποιηθεί σαν ένα εργαλείο για την επιβολή ορίων κινδύνων στα διάφορα τμήματα του οργανισμού, αλλά και σαν ένα εργαλείο για την αποτίμηση των επενδύσεων του οργανισμού αλλά και των υποδειγμάτων που χρησιμοποιούνται σε διαφορετικές αγορές και προϊόντα με διαφορετικά χαρακτηριστικά και συμπεριφορά μεταβλητότητας.

Τέλος, η ανάπτυξη και η βελτίωση των συστημάτων διαχείρισης κινδύνου δεν είναι άσχετες με την εξέλιξη στον τομέα των πληροφοριακών συστημάτων, με τη βοήθεια των οποίων θα πρέπει να επιτευχθεί η ολοκλήρωση μεταξύ των συστημάτων συναλλαγών, των συστημάτων εκκαθάρισης και των συστημάτων διαχείρισης κινδύνου.

Έτσι, η υλοποίηση ολικών συστημάτων διαχείρισης κινδύνου συνεπάγεται την ανάπτυξη κατάλληλων λογισμικών πακέτων, ικανές βάσεις διαχείρισης δεδομένων, ολοκληρωμένα πληροφοριακά συστήματα και, φυσικά, ικανά κεφάλαια για μια τέτοια επένδυση. Επιπρόσθετα, προαπαιτεί και μια σημαντική επένδυση σε κατάλληλο προσωπικό με ικανή εμπειρία στη διαχείριση κινδύνου χαρτοφυλακίων, μεγάλη αναλυτική ικανότητα και εξειδικευμένη γνώση.

Σε μια πρόσφατη έκθεση της IOSCO (International Organisation of Securities Commissions) που δημοσιεύτηκε από κοινού με την Επιτροπή της Βασιλείας (Basle Committee on Banking Supervision) το 1995, ανάμεσα σε 79 διεθνείς τραπεζικούς οργανισμούς, οι 18 δημοσιεύουν ημερησίως πληροφορίες για την αξία σε κίνδυνο των χαρτοφυλακίων τους, VaR. (Βλέπε τον Πίνακα 10, που συνοψίζει τα αποτελέσματα της έρευνας.) Εκτιμάται ότι η κοινοποίηση αυτής της πληροφορίας είναι σημαντική στις εποπτικές αρχές και, συνεπώς, συμβάλλει στη σταθερότητα του χρηματοοικονομικού συστήματος, γενικά. Ας σημειωθεί ότι το 1993 μόνο τέσσερα πιστωτικά ιδρύματα δημοσίευαν την αξία σε κίνδυνο των χαρτοφυλακίων τους.

Η ποσοτικοποίηση της αξίας σε κίνδυνο είναι απαραίτητη, επίσης, και στη λήψη αποφάσεων για την αποτελεσματικότερη χρήση και αναδιανομή των κεφαλαίων.

Στον Πίνακα 10 παρουσιάζεται ο αριθμός των ιδρυμάτων που ανάλογα με τα λογιστικά πρότυπα της κάθε χώρας μπορούν να ενσωματώσουν πληροφορίες σχετικά με τις θέσεις τους σε παράγωγα προϊόντα. Οι ετήσιες χρηματοοικονομικές τους καταστάσεις και οι υποσημειώσεις τους ελέγχονται από ανεξάρτητους ορκωτούς ελεγκτές.

Πίνακας 10

Αριθμός ιδρυμάτων που δημοσιοποιούν την αξία σε κίνδυνο και τις αλλαγές στα χαρτοφυλάκια τους (1994)

	Σύνολο ιδρυμάτων	Γνωστοποίηση ημερήσιας VaR	Γνωστοποίηση μεταβολών της αξίας του χαρτ/ου	Γνωστοποίηση διαχείρισης κεφαλαίου
ΒΕΛΓΙΟ	3	0	0	3
ΚΑΝΑΔΑΣ	6	0	0	2
ΓΑΛΛΙΑ	8	5	1	7
ΓΕΡΜΑΝΙΑ	7	1	0	7
ΙΤΑΛΙΑ	8	0	0	8
ΙΑΠΩΝΙΑ (ΤΡΑΠ.)	7	3	0	1
ΙΑΠΩΝΙΑ (ΑΧΕ)	2	0	0	0
ΟΛΛΑΝΔΙΑ	3	0	0	3
ΣΟΥΗΔΙΑ	4	0	0	0
ΕΛΒΕΤΙΑ	3	1	0	3
ΑΓΓΛΙΑ	8	0	0	8
ΗΠΑ (ΤΡΑΠ.)	10	8	4	9
ΗΠΑ(ΑΧΕ)	10	0	0	8
ΣΥΝΟΛΟ	79	18	5	59

Πηγή: *Jorion 1997, σ. 282*

Από τα 79 τραπεζικά ιδρύματα και χρηματιστηριακές εταιρείες (ΑΧΕ), τα 18 δίνουν τα μεγέθη VaR, αλλά μόνο τα 5 ενημερώνουν και τις αλλαγές στα χαρτοφυλάκια που αντιστοιχούν στις τιμές VaR. Η πληροφορία αυτή είναι ιδιαίτερα χρήσιμη και σημαντική, γιατί επιτρέπει στον χρήστη να αποτιμήσει την αποτελεσματικότητα των συστημάτων διαχείρισης κινδύνου.

Επιπλέον, από τον πίνακα προκύπτει ότι οι περισσότερες εταιρείες δημοσιεύουν πληροφορίες σχετικά με τη διαχείριση εισοδήματος. Ακόμα, από τον πίνακα μπορούμε να παρατηρήσουμε τις διαφοροποιήσεις μεταξύ των διάφορων χωρών. Για παράδειγμα, τα τραπεζικά ιδρύματα των ΗΠΑ είναι τα περισσότερα που γνωστοποιούν την αξία σε κίνδυνο, γεγονός που δεν ισχύει σε άλλα κράτη.

Βέβαια, διαφοροποιήσεις υπάρχουν και σε άλλες παραμέτρους των συστημάτων VaR. Για παράδειγμα, η JP Morgan χρησιμοποιεί ως επίπεδο εμπιστοσύνης 95%, η Bankers Trusts 99%, η Bank America 97.5% κ.λπ.

Άσκηση Αυτοαξιολόγησης 3/Κεφάλαιο 5

Ποια είναι η αναγκαιότητα της γνωστοποίησης της αξίας σε κίνδυνο για τα τραπεζικά ιδρύματα; Απαντήστε σε μια παράγραφο 80 λέξεων. Επιστρέψτε στην υποενότητα 5.5.1 και ελέγξτε την ορθότητα της απάντησης σας.

5.5.2 VaR και αποτίμηση χαρτοφυλακίων

Θα πρέπει εδώ να διαχωρίσουμε την περίπτωση όπου ο κίνδυνος είναι προσδιορισμένος από την αρχή ή όχι. Για παράδειγμα, οι εταιρείες διαχείρισης αμοιβαίων κεφαλαίων (ΑΕΔΑΚ) επιλέγουν το επιθυμητό επίπεδο κινδύνου για τα χαρτοφυλάκια που διαχειρίζονται και αυτό το γνωρίζουν οι επενδυτές πριν αποφασίσουν να επενδύσουν σε αυτά. Έτσι, ένας επενδυτής θέλει να μάθει, για παράδειγμα, ποιο χαρτοφυλάκιο δίνει τη μεγαλύτερη απόδοση ως προς τον κίνδυνό του.

Από την άλλη, οι διαχειριστές άλλων χαρτοφυλακίων, όπως αυτών των συνταξιοδοτικών ταμείων, μπορεί να έχουν κάποιον περιορισμό ως προς το μέγεθος του κινδύνου που μπορούν να αναλάβουν. Στην περίπτωση αυτή, αυτό που ενδιαφέρει τον επενδυτή είναι ποιος διαχειριστής ήταν καλύτερος δεδομένου του επιπέδου του κινδύνου.

Τα δύο μεγέθη στη στήλη «απόδοση ανά μονάδα κινδύνου» του επόμενου πίνακα μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την κατάταξη των χαρτοφυλακίων. Και τα δύο αυτά μεγέθη βασίζονται στο CAPM. Ο δείκτης του Sharpe (1966) χρησιμοποιεί την τυπική απόκλιση των αποδόσεων του χαρτοφυλακίου ως μέγεθος κινδύνου, ενώ ο δείκτης του Treynor (1965) χρησιμοποιεί τον συντελεστή βήτα του χαρτοφυλακίου.

Υπολογίζοντας τους δείκτες αυτούς, ο επενδυτής –ανάλογα με την προσωπική του περίπτωση– επιλέγει το χαρτοφυλάκιο με την υψηλότερη κατάταξη (υψηλότερη τιμή των δεικτών).

Ο δείκτης του Treynor υποθέτει ότι το χαρτοφυλάκιο είναι πλήρως διαφοροποιημένο, για τούτο χρησιμοποιεί τον συντελεστή βήτα ως μέγεθος κινδύνου. Ο δείκτης αυτός μετράει, απλώς, την ικανότητα του διαχειριστή χαρτοφυλακίου να επιλέγει επενδύσεις με υψηλότερες αποδόσεις έναντι ενός άλλου διαχειριστή, με παρόμοιες τιμές για τον συντελεστή κινδύνου βήτα.

Ο δείκτης του Sharpe διαφοροποιείται από τον προηγούμενο μόνο ως προς τον συντελεστή κινδύνου που χρησιμοποιεί. Μετράει όχι μόνο την ικανότητα του διαχειριστή έναντι κάποιου άλλου, αλλά και την ικανότητα του να διαφοροποιεί αποτελεσματικά το χαρτοφυλάκιο που διαχειρίζεται.

Παράδειγμα 11

Έστω τρία χαρτοφυλάκια Α, Β και Γ με αποδόσεις, αντίστοιχα, 12%, 10%, 13%, τυπικές αποκλίσεις 25%, 10%, 30% και συντελεστές βήτα 1.3, 1.1 και 1.4. Οι δείκτες Sharpe και Treynor (επιτόκιο χωρίς κίνδυνο, RF = 8%) είναι $S_A = 0.16$ και $T_A = 0.031$, $S_B = 0.20$ και $T_B = 0.018$, $S_Γ = 0.17$ και $T_Γ = 0.036$.

Στον Πίνακα 11 συγκεντρώνονται συγκριτικά τα κλασικά μεγέθη αποτίμησης που σχολιάσαμε προηγουμένως.

Στη συνέχεια, θα αναφερθούμε και σε άλλα μεγέθη προσαρμοσμένα στον κίνδυνο.

Πίνακας 11
Μέθοδοι αποτίμησης χαρτοφυλακίων

ΚΙΝΔΥΝΟΣ /ΑΠΟΔΟΣΗ	**Απόδοση ανά μονάδα κινδύνου**	**Διαφοροποιημένη απόδοση**
Τυπική απόκλιση	$S = \frac{R_p - \mathrm{RF}}{\sigma_p}$ ***Δείκτης Sharpe***	$R_p - R_{benchmark}$ όπου $R_{benchmark} = R_b$ και $R_b = \mathrm{RF} + \frac{R_m - \mathrm{RF}}{\sigma_m}\sigma$
Συντελεστής Βήτα	$T = \frac{R_p - \mathrm{RF}}{\beta_p}$ ***Δείκτης Treynor***	$R_p - R_{benchmark}$ όπου $R_{benchmark} = R_b$ και $R_b = \mathrm{RF} + (R_m - \mathrm{RF})\beta_m$ ***Δείκτης Jensen***

Αντίθετα, όταν ο κίνδυνος είναι προσδιορισμένος, χρησιμοποιούνται τα μεγέθη της στήλης «διαφοροποιημένη απόδοση» του προηγούμενου πίνακα. Στην περίπτωση αυτή, το benchmark χαρτοφυλάκιο αναφέρεται σε μια (πραγματική) εναλλακτική επένδυση, όπου θα μπορούσε να τοποθετηθεί ο διαχειριστής, για παράδειγμα το χαρτοφυλάκιο της αγοράς.

Έτσι, η σύγκριση της απόδοσης του διαχειριζόμενου χαρτοφυλακίου με αυτήν του χαρτοφυλακίου της αγοράς αποτελεί, ουσιαστικά, έλεγχο της αποτελεσματικότητας της αγοράς και των υπερκανονικών αποδόσεων, καθώς και της αποτελεσματικότητας της ενεργητικής στρατηγικής έναντι της παθητικής επενδυτικής στρατηγικής. Εάν ο δείκτης Jensen (1969) είναι θετικός, τότε ο διαχειριστής του χαρτοφυλακίου «νίκησε» την αγορά.

Ακόμα, ένας τρόπος να εξετάσουμε την αποτελεσματικότητα από την αναδιάρθρωση του χαρτοφυλακίου στον χρόνο –συνεπώς την αλλαγή του συστηματικού του κινδύνου– είναι να μελετήσουμε την κίνηση του συντελεστή βήτα του χαρτοφυλακίου με την κίνηση των αποδόσεων της αγοράς.

Εάν ο διαχειριστής προέβλεπε σωστά την αγορά και έπαιρνε τις ορθές επενδυτικές αποφάσεις, θα πρέπει μια αύξηση του συντελεστή βήτα να συνοδεύεται από αύξηση των αποδόσεων της αγοράς. Εάν ο διαχειριστής δεν ήταν αποτελεσματικός, τότε δεν θα πρέπει να βρούμε κάποια θετική σχέση στα δύο αυτά μεγέθη.

5.5.3 Γενικευμένο κριτήριο Sharpe

Ωστόσο, ένα πρόβλημα τίθεται, όταν σε ένα υπάρχον χαρτοφυλάκιο επιθυμούμε να προσθέσουμε ένα νέο περιουσιακό στοιχείο. Αυτό το πρόβλημα είναι σημαντικό, όταν το νέο περιουσιακό στοιχείο συσχετίζεται με το υπόλοιπο χαρτοφυλάκιο.

Για παράδειγμα, έστω ότι θέλουμε να επιλέξουμε μεταξύ των χρηματοοικονομικών στοιχείων Α και Β για να προστεθούν στο ήδη υπάρχον χαρτοφυλάκιο μας. Το κριτήριο του δείκτη Sharpe, ως γνωστόν, μπορεί να μας βοηθήσει στην επιλογή αυτή. Συγκεκριμένα, θα επιλέξουμε το στοιχείο εκείνο για το οποίο ο δείκτης Sharpe παίρνει τη μεγαλύτερη τιμή. Έστω, λοιπόν, ότι $S(\mathrm{B}) > S(\mathrm{A})$.

Ωστόσο, ένα σημαντικό κριτήριο στην καλύτερα διαφοροποιημένη διάρθρωση ενός χαρτοφυλακίου είναι ο συντελεστής συσχέτισης, όπως έχουμε δει. Ας υποθέσουμε, λοιπόν, ότι οι αποδόσεις του χρηματοοικονομικού μέσου Α συσχετίζονται αρνητικά με το υπόλοιπο χαρτοφυλάκιο, ενώ εκείνες του στοιχείου Β συσχετίζονται θετικά. Έτσι, ενώ η επιλογή του Α θα μείωνε τον κίνδυνο του χαρτοφυλακίου, η επιλογή του Β δεν θα είχε κανένα ευεργετικό αποτέλεσμα διαφοροποίησης, παρ' όλο που ο δείκτης Sharpe προτείνει το χρηματοοικονομικό προϊόν Β.

Με άλλα λόγια, υπάρχει ένα σημαντικό πρόβλημα με τη χρήση του δείκτη Sharpe, εκτός και εάν υποθέσουμε μηδενικές συσχετίσεις. Ωστόσο, μπορούμε να υπερνικήσουμε το πρόβλημα αυτό, εάν υπολογίσουμε τον δείκτη Sharpe του υπάρχοντος χαρτοφυλακίου προσθέτοντας και το περιουσιακό στοιχείο Α, και τον δείκτη Sharpe του υπάρχοντος χαρτοφυλακίου προσθέτοντας και το περιουσιακό στοιχείο Β. Θα επιλέξουμε την αγορά εκείνου του περιουσιακού στοιχείου, σύμφωνα με τον κανόνα της τιμής του κριτηρίου Sharpe. Δηλαδή, επιλέγεται το στοιχείο εκείνο, όπου το κριτήριο Sharpe παίρνει μεγαλύτερη τιμή:

$$S(\mathrm{P} + \mathrm{A}) > S(\mathrm{P} + \mathrm{B})$$

όπου $S(\text{P} + x)$ είναι ο δείκτης Sharpe του χαρτοφυλακίου μας, στο οποίο έχει προστεθεί το νέο περιουσιακό στοιχείο *x*.

Ο παραπάνω κανόνας αποτελεί τη γενίκευση του κριτηρίου Sharpe (Generalised Sharpe Ratio) και αποφεύγει το πρόβλημα της συσχέτισης.

Ας δούμε αναλυτικότερα τη γενίκευση του κριτηρίου Sharpe. Έστω ότι R_{p}^{old}, R_p^{new}, $\sigma_{\text{R}_p^{old}}$ και $\sigma_{\text{R}_p^{new}}$ είναι, αντίστοιχα, η απόδοση του χαρτοφυλακίου, η απόδοση του χαρτοφυλακίου με την προσθήκη του νέου περιουσιακού στοιχείου και οι αντίστοιχες τυπικές αποκλίσεις των αποδόσεων των χαρτοφυλακίων (κίνδυνος). Έστω, ακόμα, ότι d^{old} είναι η διαφοροποιημένη απόδοση (δηλαδή, ο αριθμητής στον λόγο του Sharpe) του –ήδη υπάρχοντος– χαρτοφυλακίου. Τέλος, ας υποθέσουμε ότι στο νέο περιουσιακό στοιχείο και το χαρτοφυλάκιο επενδύουμε, αντίστοιχα, α και $1 - \alpha$.

Θα είναι, λοιπόν

$$R_p^{\text{new}} = \alpha R_A + (1-\alpha) R_p^{\text{old}}$$

και η αναμενόμενη διαφοροποιημένη απόδοση του νέου χαρτοφυλακίου θα είναι

$$d^{\text{new}} = R_p^{\text{new}}$$

Σύμφωνα, λοιπόν, με το γενικευμένο κριτήριο του Sharpe, θα προχωρήσουμε στο νέο χαρτοφυλάκιο, εάν

$$S^{\text{new}} = \frac{d^{\text{new}}}{\sigma_{R_p^{\text{new}}}} \geq \frac{d^{\text{old}}}{\sigma_{R_p^{\text{old}}}} = S^{\text{old}}$$

όπου με αντικατάσταση στην προηγούμενη σχέση έχουμε

$$R_A \geq R_p^{\text{old}} + \left[\frac{\sigma_{R_p^{\text{new}}}}{\sigma_{R_p^{\text{old}}}} - 1 \right] \times \frac{R_p^{\text{old}}}{\alpha} \tag{19}$$

Η τελευταία σχέση σημειώνει ότι η αναμενόμενη απόδοση του (νέου) περιουσιακού στοιχείου Α πρέπει να είναι τουλάχιστον ίση με την παράσταση δεξιά της ανισότητας για να συμπεριληφθεί το στοιχείο Α στο –ήδη υπάρχον– χαρτοφυλάκιο. Έτσι, η παράσταση $R_p^{\text{old}} + \left[\frac{\sigma_{R_p^{\text{new}}}}{\sigma_{R_p^{\text{old}}}} - 1 \right] \times \frac{R_p^{\text{old}}}{\alpha}$ ερμηνεύει την απαιτούμενη απόδοση του στοιχείου Α.

Παράδειγμα 12

Ας υποθέσουμε ότι $R_p^{\text{old}} = 0.12$, $\sigma_{R_p^{\text{old}}} = \sigma_{R_A}$ και $\alpha = 0.01$. Σύμφωνα με την προηγούμενη σχέση, είναι

$$R_A \geq 0.12 + \left[\frac{\sigma_{R_p^{\text{new}}}}{\sigma_{R_p^{\text{old}}}} - 1 \right] \times \frac{0.12}{0.01}$$

και ο λόγος των τυπικών αποκλίσεων, $\dfrac{\sigma_{R_p^{\text{new}}}}{\sigma_{R_p^{\text{old}}}}$, γίνεται

$$\sqrt{\alpha^2 + (1-\alpha)^2 + 2\rho\alpha(1-\alpha)}$$

όπου ρ είναι ο συντελεστής συσχέτισης μεταξύ R_A και $\sigma_{R_p^{\text{old}}}$.

Αυτό σημαίνει ότι η απαιτούμενη απόδοση του νέου περιουσιακού στοιχείου Α, ώστε αυτό να συμπεριληφθεί στο χαρτοφυλάκιο, εξαρτάται από τον συντελεστή συσχέτισης του κινδύνου των αποδόσεων του Α και του κινδύνου των αποδόσεων του υπάρχοντος χαρτοφυλακίου.

Έτσι, για τις τρεις ειδικές περιπτώσεις του συντελεστή συσχέτισης, έχουμε

$$\rho = 1 \Leftrightarrow R_A \geq 0.12$$

$$\rho = 0 \Leftrightarrow R_A \geq 0$$

$$\rho = -1 \Leftrightarrow R_A \geq -0.12$$

Για $\rho = 1$, δεν υφίσταται διαφοροποίηση του κινδύνου. Όταν $\rho = 0$, η ανεξαρτησία του κινδύνου που ενσωματώνει το νέο περιουσιακό στοιχείο συνεπάγεται σταθερή απόδοση για το χαρτοφυλάκιο. Τέλος, όταν $\rho = -1$, έχουμε μείωση του κινδύνου.

5.5.4 Άλλα μεγέθη αποτίμησης και VaR

Τα προηγούμενα μεγέθη αποτίμησης μπορούν να προσαρμοστούν στην αξία σε κίνδυνο των χαρτοφυλακίων των τραπεζικών οργανισμών.

Δείκτης Sharpe

Συγκεκριμένα, ο δείκτης Sharpe γίνεται

$$S_i = \frac{\text{Excess Profit}_i}{\text{VaR}_i} \tag{20}$$

Ο αριθμητής παρουσιάζει τη διαφορά μεταξύ των εισοδημάτων και των εξόδων. Ο παρονομαστής, VaR_i, παριστάνει το ύψος του κεφαλαίου που απαιτείται για τη στήριξη του πιστωτικού κινδύνου και του κινδύνου της αγοράς.

Οι συναλλαγές ενός τραπεζικού ιδρύματος μπορούν να αναλυθούν σε διάφορες συνιστώσες, όπως εκτέλεση εντολών για λογαριασμό πελατών, χαρτοφυλάκια πελατών ή χαρτοφυλάκιο του οργανισμού. Σε καθεμία από αυτές τις συνιστώσες αντιστοιχεί ένα έσοδο και ένα κόστος.

Για παράδειγμα, στο έσοδο από τη συνιστώσα εκτέλεση εντολών για λογαριασμό της πελατείας, αντιστοιχεί το έσοδο από τις προμήθειες. Επίσης, στην ίδια συνιστώσα, το κόστος που αντιστοιχεί αναφέρεται στο λειτουργικό κόστος και στο κόστος εκκαθάρισης.

Μια ουσιαστική δυσκολία παρουσιάζεται με τη χρήση του παραπάνω δείκτη, όταν θεωρούμε το συνολικό χαρτοφυλάκιο ενός τραπεζικού οργανισμού, επειδή η κερδοφορία των συναλλαγών ενός τμήματος συνδέεται με τους κινδύνους άλλων τμημάτων του οργανισμού.

Ας θεωρήσουμε, για παράδειγμα, μια τράπεζα που αποτελείται από δύο μόνο τμήματα: ένα τμήμα συναλλαγών σε ομόλογα και ένα δεύτερο τμήμα για συναλλαγές σε συμβόλαια μελλοντικών συναλλαγών (futures). Εάν και τα δύο τμήματα έχουν συγχρόνως θέσεις αγοράς, επειδή, για παράδειγμα, προεξοφλούν μια πτώση στα επιτόκια, τότε ο συνολικός κίνδυνος του οργανισμού θα είναι πολύ υψηλός.

Αντίθετα, εάν το τμήμα συναλλαγών σε μελλοντικά συμβόλαια έχει θέση ανοιχτής πώλησης και το τμήμα ομολόγων έχει θέση αγοράς, ο συνδυασμός των δύο αυτών θέσεων μπορεί να έχει πολύ μικρό κίνδυνο. Η εφαρμογή της VaR στο κάθε τμήμα χωριστά, ωστόσο, υπερεκτιμά τον συνδυασμό των κινδύνων.

Στην περίπτωση αυτή, ο δείκτης του Treynor είναι χρησιμότερος. Στον δείκτη αυτό, ο αριθμητής παριστάνει το κέρδος (τη διαφορά εσόδων και εξόδων, όπως και ο δείκτης Sharpe) και ο παρονομαστής τον συστηματικό κίνδυνο, δηλαδή τον συντελεστή βήτα.

Γενικευμένο κριτήριο Sharpe

Μπορούμε, επίσης, να έχουμε την ισοδύναμη έκφραση VaR του γενικευμένου κριτηρίου Sharpe, κάτω από την υπόθεση της κανονικής κατανομής και με δεδομένο ότι το μέγεθος του χαρτοφυλακίου δεν μεταβάλλεται. Κάτω από τις υποθέσεις αυτές, ισχύει η ισότητα

$$\frac{\mathrm{VaR}^{\mathrm{new}}}{\mathrm{VaR}^{\mathrm{old}}} = \frac{\sigma_{R_p^{\mathrm{new}}}}{\sigma_{R_p^{\mathrm{old}}}}$$

Έτσι, ο κανόνας απόφασης γίνεται

$$R_A \geq R_p^{\mathrm{old}} + \left[\frac{\mathrm{VaR}^{\mathrm{new}}}{\mathrm{VaR}^{\mathrm{old}}} - 1\right] \times \frac{R_p^{\mathrm{old}}}{\alpha}$$

Με δεδομένο ότι $\Delta\mathrm{VaR} = \mathrm{VaR}^{\mathrm{new}} - \mathrm{VaR}^{\mathrm{old}}$, και κατόπιν των απαραίτητων πράξεων στην παραπάνω σχέση, έχουμε

$$R_A \geq R_p^{\mathrm{old}} + \left[\frac{\Delta\mathrm{VaR}}{\mathrm{VaR}^{\mathrm{old}}}\right] \times \frac{R_p^{\mathrm{old}}}{\alpha} \tag{21}$$

Δείκτης Treynor

Από τη θεωρία χαρτοφυλακίου, όπου αναφερθήκαμε στην αξία σε κίνδυνο του χαρτοφυλακίου, γνωρίζουμε ότι η συνολική αξία σε κίνδυνο μπορεί να αναλυθεί σε

$$\mathrm{VaR}\left(\sum_{i=1}^{N} X_i \beta_i\right)$$

όπου X_i είναι το επενδεδυμένο ποσοστό του κεφαλαίου στο προϊόν i και β_i ο αντίστοιχος συστηματικός κίνδυνος (συντελεστής βήτα). Κατά συνέπεια, ο δείκτης Treynor μπορεί να πάρει τη μορφή

$$T_i = \frac{\text{Excess Profit}_i}{(\mathrm{VaR} \times X_i \beta_i)}$$

Ακόμα, εάν $\Delta\mathrm{Var}_i$ είναι η μεταβολή της συνολικής αξίας σε κίνδυνο, τότε ο προηγούμενος λόγος Treynor είναι

$$T_i = \frac{\text{Excess Profit}_i}{(\Delta\mathrm{VaR}_i)} \tag{22}$$

Ο δείκτης Sharpe εστιάζεται στη μεταβλητότητα μιας επενδυτικής θέσης. Ωστόσο, εάν αυτή η θέση έχει πολύ χαμηλό συντελεστή συσχέτισης με το υπόλοιπο χαρτοφυλάκιο της τράπεζας, τότε είναι προτιμότερος ο δείκτης του Treynor, ο οποίος χρησιμοποιεί τον συστηματικό κίνδυνο (συντελεστής βήτα). Όμως και ο δείκτης αυτός είναι προβληματικός, όταν η τιμή του συντελεστή βήτα είναι πολύ μικρή. Στην περίπτωση αυτή, η τιμή του δείκτη του Treynor θα είναι υπερβολικά υψηλή.

Είπαμε, ακόμα, ότι η αξία σε κίνδυνο μπορεί να αποτελέσει σημαντικό εργαλείο για την αποτίμηση των υποδειγμάτων διαχείρισης κινδύνου. Για παράδειγμα, εάν η VaR έχει εκτιμηθεί σε διάστημα εμπιστοσύνης 95%, τότε μόνο το 5% των παρατηρήσεων θα πρέπει να βρίσκονται έξω από τα όρια που θέτει.

Έτσι, θα είναι πολύ χρήσιμο στον διαχειριστή κινδύνου ενός τραπεζικού ιδρύματος το να μπορεί να συγκρίνει τα πραγματοποιηθέντα κέρδη ή ζημίες με την προβλεπόμενη κατανομή τους. Εάν, για παράδειγμα, περισσότερες από το 5% των παρατηρήσεων βρίσκονται εκτός των ορίων της VaR, τότε το υπόδειγμα υποεκτιμά τον κίνδυνο.

Δείκτης αποτελεσματικότητας

Γενικά, οι αποκλίσεις μεταξύ πραγματοποίησης και πρόβλεψης θα πρέπει να είναι πολύ μικρές. Ένας κατάλληλος δείκτης για την αποτίμηση αυτής της σχέσης είναι ο λόγος παρατηρούμενων και προβλεπόμενων κινδύνων (risk efficiency ratio):

$$E_i = \frac{\sigma^{\mathrm{obs}}(R_i)}{\sigma^{\mathrm{pred}}(R_i)} \tag{23}$$

όπου σ^{obs} και σ^{pred} αναφέρονται στις παρατηρούμενες και προβλεπόμενες τιμές, αντίστοιχα. Συστηματικές αποκλίσεις από τη μονάδα δηλώνουν ότι ο κίνδυνος δεν μετράται σωστά και θα πρέπει να επανεξεταστεί το υπόδειγμα και οι υποθέσεις του.

RAROC

Ένας άλλος δείκτης είναι ο δείκτης RAROC, ο οποίος ορίζεται από τον λόγο

$$\text{RAROC} = \frac{r}{\text{VaR}} \tag{24}$$

όπου r είναι οι αποδόσεις του χαρτοφυλακίου. Η τιμή του RAROC αυξάνει όσο μεγαλύτερος είναι ο αριθμητής (δηλαδή οι αποδόσεις του χαρτοφυλακίου) και μειώνεται όσο μεγαλώνει ο κίνδυνος (στη συγκεκριμένη περίπτωση, η VaR), και αντίστροφα.

Όμως, έχει και μειονεκτήματα, όπως:

α) Αντιμετωπίζει το ίδιο πρόβλημα της μηδενικής συσχέτισης, όπως και ο δείκτης του Sharpe. Ωστόσο, το πρόβλημα αυτό, όπως έχουμε ήδη δει, μπορεί να υπερνικηθεί με τη χρήση της προσαυξημένης VaR, IVaR.

β) Όταν ο κίνδυνος, θεωρητικά, είναι πάρα πολύ μικρός (VaR $\rightarrow$ 0), ο λόγος RAROC θα τείνει στο άπειρο (RAROC $\rightarrow \infty$). Αυτό σημαίνει ότι κάθε επένδυση μηδενικού κινδύνου θα έχει τιμή RAROC άπειρη. Με άλλα λόγια, κάθε επένδυση χωρίς κίνδυνο (για παράδειγμα, έντοκα γραμμάτια του δημοσίου) οδηγεί σε πολύ υψηλή τιμή του μεγέθους αυτού.

γ) Το ότι είναι ένα εσφαλμένο μέγεθος αποτίμησης του πραγματικού κινδύνου μπορεί να φανεί και αν πολλαπλασιάσουμε τη RAROC με τη VaR κάτω από την υπόθεση της κανονικότητας, οπότε παίρνουμε

$$E(r) = E(\text{RAROC})\text{VaR} = -E(\text{RAROC})\alpha\sigma W$$

Η σχέση αυτή μας πληροφορεί ότι η αναμενόμενη απόδοση της επένδυσης σε προϊόν χωρίς κίνδυνο είναι μηδενική, πράγμα που δεν μπορεί να ισχύει. Επίσης, φαίνεται ότι η αναμενόμενη απόδοση εξαρτάται από το επίπεδο σημαντικότητας α. Με άλλα λόγια, μπορούμε να επιλέγουμε την τιμή εκείνη του α για την οποία η αναμενόμενη απόδοση θα είναι μέγιστη!

Πληροφοριακό κριτήριο

Είδαμε ότι το κριτήριο Sharpe χρησιμοποιεί τη διαφοροποιημένη απόδοση ως προς την απόδοση μιας εναλλακτικής επένδυσης ή benchmark. Όμως, γιατί να μην μπορούμε να συγκρίνουμε την αναμενόμενη (ή πραγματοποιούμενη απόδοση) μόνο ως προς τον κίνδυνο, χωρίς αναφορά σε μια benchmark;

Η απάντηση στο ερώτημα αυτό δίνεται από τον λόγο της απόδοσης προς την τυπική απόκλιση (ή κίνδυνο) των αποδόσεων, γνωστό ως πληροφοριακό κριτήριο (information criterion).

Παράδειγμα 13

Ας δούμε, όμως, ένα απλό παράδειγμα, για να κατανοήσουμε τόσο τη διαφορά του από το κριτήριο Sharpe όσο και τις αδυναμίες του. Έστω δύο επενδύσεις, η Α με απόδοση 5% και τυπική απόκλιση 10%, και η Β με απόδοση 8% και κίνδυνο 20%. Το επιτόκιο χωρίς κίνδυνο έστω ότι είναι 3%.

Πίνακας 12

	Επένδυση Α	**Επένδυση Β**	**Επιλογή**
Κριτήριο Sharpe	(5–3)/10 = 0.2	(8–3)/20 = 0.25	Επένδυση Β
Πληροφοριακό κριτήριο	5/10 = 0.5	8/20 = 0.4	Επένδυση Α

Εύκολα, ωστόσο, αποδεικνύεται ότι προτιμότερη είναι η επιλογή της επένδυσης Β, δηλαδή αυτής που προτείνεται με το κριτήριο του Sharpe.

Ο Δείκτης Treynor–Black

Τέλος, ένα άλλο μέγεθος αποτίμησης είναι αυτό των Treynor και Black, το οποίο είναι το τετράγωνο του κριτηρίου του Sharpe. Ωστόσο, το μεγάλο μειονέκτημα είναι ότι η πληροφορία της θετικής ή αρνητικής διαφοροποιημένης απόδοσης χάνεται με την εφαρμογή του κριτηρίου αυτού.

Παράδειγμα 14

Ο επόμενος πίνακας δίνει μια απλή εφαρμογή.

Πίνακας 13

	Απόδοση	**Κίνδυνος**	**Επιτόκιο χωρίς κίνδυνο**
Επένδυση Α	10%	5%	
Επένδυση Β	4%	2%	7%
Sharpe	**A:** (10 – 7)/5 = 3/5 = 0.6 **B:** (4 – 7)/2 = –1.5		
Treynor-Black	**A:** $[(10 - 7)/5]^2 = 0.36$ **B:** $[(4 - 7)/2]^2 = [(-3)/2]^2 = 2.25$		

Είναι, όμως, φανερό ότι αποτελεσματικότερη είναι η επένδυση Α, δηλαδή αυτή που επιλέγεται σύμφωνα με το κριτήριο του Sharpe.

Άσκηση Αυτοαξιολόγησης 4/Κεφάλαιο 5

Παρουσιάστε και σχολιάστε σύντομα καθεμία από τις μεθόδους αποτίμησης (50 λέξεις). Επιστρέψτε στην υποενότητα 5.5.4 και ελέγξτε την ορθότητα των απαντήσεών σας.

5.5.5 Υποθέσεις και μειονεκτήματα της ανάλυσης VaR

Ήδη, από το κεφάλαιο 1 αναφερόμαστε στην αξία σε κίνδυνο (VaR), η οποία έχει ιδιαίτερα αναπτυχθεί τα τελευταία χρόνια. Μάλιστα, θεωρείται ότι η εξέλιξη και οι θεωρητικές βελτιώσεις της ανάλυσης αυτής αποτελούν έναν από τους παράγοντες της υιοθέτησης των συστημάτων διαχείρισης τραπεζικού κινδύνου στην πράξη.

Έτσι, επανειλημμένα θίξαμε τη σπουδαιότητα των συστημάτων διαχείρισης κινδύνου και την αναγκαιότητα τους στη σύγχρονη τραπεζική. Όμως, παρ’ όλα τα πλεονεκτήματα των ποσοτικών μεθόδων και τεχνικών για την αποτίμηση του κινδύνου, δεν θα πρέπει να παραβλέψουμε και τα όποια μειονεκτήματα έχουν αυτές οι μέθοδοι.

Ας θυμηθούμε μόνο ότι τα υποδείγματα αυτά στηρίζονται σε ένα σύνολο υποθέσεων, τόσο στατιστικών όσο και σχετικών με τη λειτουργία της αγοράς, που δεν ικανοποιούνται κατ’ ανάγκη στην πράξη. Χρειάζεται, λοιπόν, πλήρης κατανόηση των πλεονεκτημάτων και των μειονεκτημάτων των μεθόδων αυτών και της VaR ειδικότερα, αλλά και των δυνατοτήτων των τεχνικών αυτών.

Είναι απαραίτητο τόσο στον διαχειριστή κινδύνου όσο και στη διοίκηση του οργανισμού –αλλά και στην εποπτική αρχή– να έχουν επίγνωση των περιορισμών των καθαρά ποσοτικών συστημάτων διαχείρισης.

Η ανάλυση VaR χρησιμοποιείται περίπου 3-4 χρόνια τώρα και είναι ιδιαίτερα χρήσιμη και αποτελεσματική στη διαχείριση του κινδύνου των χαρτοφυλακίων των τραπεζικών οργανισμών. Ωστόσο, όπως έχουμε δει, στηρίζεται σε ορισμένες βασικές υποθέσεις που δεν ικανοποιούνται στην πράξη, πάντοτε.

Δεν είναι πλεονασμός να επαναλάβουμε και να ξαναδούμε τα μειονεκτήματα και τους περιορισμούς της ανάλυσης αυτής. Συνολικά και συνοπτικά, η ανάλυση VaR εξαρτάται από:

α) τις παραμέτρους,
β) τα ιστορικά δεδομένα,
γ) τις υποθέσεις και
δ) τη μεθοδολογία υπολογισμού.

Μερικές από τις βασικές υποθέσεις δεν ισχύουν πάντα και έτσι:

1. η VaR δεν μετρά τον κίνδυνο σε κάθε συνθήκη της αγοράς·
2. από μόνο του το μέγεθος του κινδύνου αυτού δεν είναι αρκετό·
3. η VaR δεν συλλαμβάνει τη θετική ασυμμετρία της χρονοσειράς των αποδόσεων·
4. για τον υπολογισμό της VaR στην περίπτωση χαρτοφυλακίων, απαιτείται οι συσχετίσεις να παραμένουν σταθερές διαχρονικά, ακόμα και σε περιόδους διαταραχών·
5. η διαφοροποίηση των αποτελεσμάτων διαφορετικών μεθοδολογιών της VaR είναι μεγάλη και δεν είναι ανάλογη της πολυπλοκότητας των χαρτοφυλακίων·
6. υπάρχουν και τεχνολογικοί περιορισμοί στον υπολογισμό ορισμένων μεθόδων VaR·
7. η προσέγγιση VaR, ενώ μας πληροφορεί για τη μέγιστη ζημία (με την αντίστοιχη πιθανότητα πραγματοποίησης της), δεν μπορεί να μας δώσει μια ιδέα ως προς την ευαισθησία του χαρτοφυλακίου του τραπεζικού οργανισμού στις πιθανές μεταβολές των παραγόντων της αγοράς (για παράδειγμα, εάν αυξηθεί κατά $x\%$ η συναλλαγματική ισοτιμία και μειωθούν κατά $y\%$ τα επιτόκια).

Stress Testing

Για μια απάντηση στο 7ο μειονέκτημα που αναφέρθηκε προηγουμένως, είναι δυνατόν να διεξαγάγουμε συμπληρωματικούς ελέγχους (stress tests). Τέτοιοι έλεγχοι μας πληροφορούν ακριβώς για τη θέση του χαρτοφυλακίου σε αντίθετες (από τις αναμενόμενες) κινήσεις των παραμέτρων της αγοράς. Ωστόσο, αυτή η ανάλυση ευαισθησίας εξαρτάται σημαντικά από το υπόδειγμα κινδύνου που υποστηρίζει τον έλεγχο και αυτή η εξάρτηση αποτελεί το σημαντικό τους μειονέκτημα.

Η ανάλυση ευαισθησίας αποτελεί την απλούστερη μορφή ελέγχου. Για παράδειγμα, ένα απλό σενάριο ευαισθησίας θα μπορούσε να θεωρήσει μια μεταβολή 2% των επιτοκίων και μια μεταβολή στη συναλλαγματική ισοτιμία 30%. Σενάρια έχουν προταθεί και από το Derivatives Policy Group (1985) και περιέχουν παράλληλη μετατόπιση της καμπύλης των αποδόσεων συν/πλην 100 μονάδες (basis points), 25 μονάδες, μεταβολή στον δείκτη του χρηματιστηρίου κατά 10% (συν ή πλην), μεταβολή στη συναλλαγματική ισοτιμία συν/πλην 6% και μεταβλητότητα συν/πλην 20%.

Ωστόσο, οι έλεγχοι αυτοί θα πρέπει να λαμβάνουν υπόψη τους και τις περιόδους όπου σημειώνονται ακραίες μεταβολές στις αγορές, για παράδειγμα η κρίση του Οκτωβρίου του 1987, η πτώση των ομολόγων το 1994, οι συναλλαγματικές ισοτιμίες στο ERM το 1992 κ.λπ.

Η συλλογή των στοιχείων σε τέτοιες περιόδους χρειάζεται ιδιαίτερη προσοχή. Ο αναλυτής οφείλει να συλλέξει συστηματικά δεδομένα χρονολογικών σειρών περιόδων σημαντικών κρίσεων στην αγορά, που είχαν αποτέλεσμα την απότομη μεταβολή των τιμών. Τα δεδομένα αυτά πρέπει να έχουν τον απαραίτητο αριθμό περιπτώσεων, την απότομη μεταβολή των παραμέτρων στις μεμονωμένες αγορές, αλλά και να συνδυάζονται με αλλαγές στις συσχετίσεις μεταξύ των αγορών (inter-market correlation).

Τα δεδομένα σε κάθε αγορά που συλλέγονται, καλό είναι να μην αναφέρονται αποκλειστικά και μόνο στις απότομες πτωτικές διακυμάνσεις. Είναι γεγονός ότι οι απότομες αρνητικές διακυμάνσεις των τιμών των παραμέτρων της αγοράς αποτελούν έναν μεγάλο κίνδυνο για τις καθαρές θέσεις αγοράς των χρηματοοικονομικών προϊόντων που συνθέτουν ένα χαρτοφυλάκιο. Ωστόσο, τα τραπεζικά χαρτοφυλάκια αποτελούνται και από ανοιχτές θέσεις πώλησης σε ορισμένα προϊόντα και, κατά συνέπεια, οι απότομες θετικές (ανοδικές) διακυμάνσεις των τιμών είναι εξίσου επικίνδυνες.

Θα πρέπει, στη συνέχεια, να επιλεγεί από τον αναλυτή η επιθυμητή ποσοστιαία μεταβολή των τιμών. Θα είναι αυτή ίση με 2%, που μπορεί να παρατηρείται πολλές φορές μέσα σε ένα έτος, ένα μήνα, μία εβδομάδα κ.λπ., ή ίση με 23%, που παρατηρήθηκε στην κρίση της 19ης Οκτωβρίου του 1987; Η πρώτη περίπτωση είναι προφανής, αφού οι μεταβολές αυτές δεν είναι σημαντικές σε κάθε αγορά.

Στη δεύτερη περίπτωση χρειάζεται μεγαλύτερη προσοχή: α) τέτοιες μεταβολές είναι ιδιαίτερα σπάνιες και έχουν επαναληφθεί πολύ λίγες φορές ιστορικά, β) για κάθε αγορά η σημαντική μεταβολή διαφέρει, γ) τέτοιες μεταβολές είναι πραγματικά απρόβλεπτες και δ) σε διάφορες αγορές υπάρχουν, συχνά, όρια της μέγιστης μεταβολής.

Για παράδειγμα, στον δείκτη FTSE–A All Share Index του Χρηματιστηρίου του Λονδίνου, ανάμεσα σε 2,800 ημερήσιες αποδόσεις από το 1985 έως το 1995 παρατηρήθηκαν μόνο 6 ημερήσιες διακυμάνσεις μεγαλύτερες του 5%. Ακόμα, στις ΗΠΑ, ο δείκτης Dow Jones Industrial από το 1885 έως το 1993 είχε ημερήσια μεταβολή μεγαλύτερη ή ίση του 5% μόνο 120 φορές και οι περισσότερες παρατηρήθηκαν στο πρώτο μισό της περιόδου αυτής. Ο δείκτης Nikkei Stock Average από το 1949 παρουσίασε μόνο 19 μεταβολές (ημέρες) μεγαλύτερες του 5%. Στον δείκτη του Χρηματιστηρίου της Αυστραλίας για το διάστημα 1974-1993 παρατηρήθηκαν 10 ημέρες όπου η ανοδική μεταβολή ήταν μεγαλύτερη του 5% και 12 ημέρες για την περίπτωση πτωτικής κίνησης του γενικού δείκτη τιμών ίση με 5% και μεγαλύτερη. Στο Χρηματιστήριο Αξιών Αθηνών, σύμφωνα με απόφαση του, η μέγιστη ημερήσια μεταβολή είναι ±10%, ενώ με μεταγενέστερη τροποποίηση της απόφασης έχει ορισθεί στο ±12%

Γίνεται φανερό ότι θα πρέπει ο αναλυτής να είναι προσεκτικός στην επιλογή της μεταβολής και δεν θα πρέπει να δίνεται πολύ μεγάλη σημασία στις ιστορικές μεταβολές και μόνο. Επιπλέον, εάν ενδιαφερόμαστε για διάστημα μεγαλύτερο από μία ημέρα, τότε οι παρατηρήσεις μας θα είναι μειωμένες, δεδομένου ότι έχει παρατηρηθεί ότι η πρώτη απότομη μεταβολή είναι πολύ μεγαλύτερη εκείνης που την ακολουθεί.

Σύνοψη

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάσαμε αναλυτικότερα την έννοια της διαφοροποίησης και κάναμε μια σύντομη, αλλά περιεκτική και ολοκληρωμένη, εισαγωγή στη σύγχρονη θεωρία χαρτοφυλακίου, με πολλά αριθμητικά παραδείγματα και πραγματικές περιπτώσεις.

Στο πλαίσιο της σύγχρονης θεωρίας, συνδέσαμε την ανάλυση VaR και την προσαυξημένη VaR, IVaR, και παρουσιάσαμε τον τρόπο υπολογισμού της αξίας σε κίνδυνο του χαρτοφυλακίου. Οι έννοιες αυτές είναι οι πλέον σημαντικές για την ανάλυση της αξίας σε κίνδυνο των χαρτοφυλακίων των τραπεζικών οργανισμών. Συγχρόνως, συνδέσαμε τον συντελεστή συστηματικού κινδύνου, συντελεστής βήτα, με την αξία σε κίνδυνο (beta model).

Είδαμε, επίσης, τις μεθόδους αποτίμησης χαρτοφυλακίων (Sharpe, Γενικευμένο κριτήριο Sharpe, Jensen, Treynor, μεταξύ άλλων), καθώς και την προσαρμογή των κριτηρίων αυτών στην αξία σε κίνδυνο.

Τέλος, αναφερθήκαμε, συνολικά πλέον, στη σημαντικότητα ανάπτυξης συστημάτων VaR σε έναν τραπεζικό οργανισμό, χωρίς, ωστόσο, να παραλείψουμε να παρουσιάσουμε και τα μειονεκτήματα της προσέγγισης αυτής.

Πράγματι, από τη μέχρι τώρα παρουσίαση προκύπτει εύκολα η σημαντικότητα της ανάλυσης VaR στη διαχείριση κινδύνου. Ωστόσο, δεν θα πρέπει να λησμονούμε τους περιορισμούς και τα μειονεκτήματα της μεθοδολογίας αυτής.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Απαντήσεις σε Δραστηριότητες

Δραστηριότητα 1

$E(L_A)$ = 100 × 0.05 = 5, αναμενόμενη ζημία του A

$E(L_A)$ = 200 × 0.07 = 14, αναμενόμενη ζημία του B

$\sigma(L_A) = 5 \times \sqrt{0.05 \times (1-0.05)} = 1.1$, μεταβλητότητα ζημίας του A

$\sigma(L_B) = 14 \times \sqrt{0.07 \times (1-0.07)} = 3.57$, μεταβλητότητα ζημίας του B

$\sigma(\Lambda) = \sqrt{(1.1)^2 + (3.57)^2} \approx 3.7356$

3,7356 < 1.1 + 3.57 = 4.67

και 4.67 – 3.7356 = 0.93 είναι το αποτέλεσμα της διαφοροποίησης.

Δραστηριότητα 2

Μετοχή 1	Μετοχή 2	Μετοχή 3	
50	60	40	**Θέση**
0.012	0.2	0.15	**Επικινδυνότητα**
1	0.7	0.5	**Μήτρα Συσχετίσεων**
0.7	1	0.3	
0.5	0.3	1	
1.40	28	13.96	**VaR μετοχών**
	36		**VaR χαρτοφυλακίου**

Αναλυτικά, οι υπολογισμοί είναι:

Α) Για τη μετοχή 1: $50 \cdot 2.326 \cdot 1.2 = 1.40$. Όμοια οι υπόλοιπες.

Β) $VaR^{99\%}_{PORTFOLIO} = \sqrt{\sum_{i=1}^{3} VaR_i^2 + \sum_{i=1}^{3}\sum_{j \neq i} VaR_i VaR_j \rho_{ij}} = 36$

Δραστηριότητα 3

(α) Η συνολική αξία του χαρτοφυλακίου είναι:

$$\sum_{i=1}^{3} \beta_i \cdot V_i = 0.82 \cdot 50 + 1.4 \cdot 60 + 1.8 \cdot 20 = 161 \text{εκ.€}.$$

Συνεπώς, η VaR θα είναι:

$$VaR_{PORTFOLIO}^{99\%} = V_{PORTFOLIO} = 161 \cdot 2.326 \cdot 0.15 = 56.17$$

(β) Η διαφορά οφείλεται στο γεγονός ότι στη δεύτερη προσέγγιση (mapped portfolio) δεν λαμβάνεται υπόψη ο ειδικός κίνδυνος κάθε μετοχής που συνθέτει το χαρτοφυλάκιο. Αντίθετα, η πρώτη προσέγγιση, της Δραστηριότητας 4, θεωρεί κάθε μετοχή σαν έναν παράγοντα κινδύνου, ξεχωριστά. Με άλλα λόγια, η δεύτερη περίπτωση παραλείπει τον ειδικό κίνδυνο. Αυτό είναι λογικό και, αναμενόμενο, σε μεγάλα, συνήθως, καλώς διαφοροποιημένα χαρτοφυλάκια.

Δραστηριότητα 4

(α) Αφού το χαρτοφυλάκιο έχει βήτα ίσο με 1, μπορούμε να υποθέσουμε ότι η τυπική απόκλιση των αποδόσεων του χαρτοφυλακίου ισούται με 2.78%. Έτσι, αθ είναι:

$$50000000 \cdot 0.0278 \cdot 2.326 \cdot \sqrt{5} = 7{,}229{,}521 \text{€}.$$

(β) $50000000 \cdot (1.23 \cdot 0.0278) \cdot 2.326 \cdot \sqrt{5} = 8{,}892{,}311 \text{€}$, όπου $1.23 \cdot 2.78\%$ είναι η τυπική απόκλιση των αποδόσεων του χαρτοφυλακίου με βήτα 1.23. Έτσι η αξία σε κίνδυνο είναι τώρα 8,892,311 = 1.23 · 7,229,521.

Στην περίπτωση ενός καλά διαφοροποιημένου χαρτοφυλακίου, όπως στην περίπτωση (α), το βήτα αντιπροσωπεύει και τον διαφοροποιήσιμο κίνδυνο και η χρήση του συντελεστή του συστηματικού κινδύνου είναι ενδεδειγμένη. Όταν το χαρτοφυλάκιο δεν είναι καλά διαφοροποιημένο, όπως στην περίπτωση (β), τότε δεν ενδείκνυται διότι:

(τυπική απόκλιση αποδόσεων χ/φ) > (βήτα) · (τυπική απόκλιση αποδόσεων αγοράς)

Δραστηριότητα 5

$$VaR(A,B) = \sqrt{150^2 + 430^2 + 2 \cdot 150 \cdot 430 \cdot 0{,}78} = 555 \text{ €}$$

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

ΕΛΛΗΝΟΓΛΩΣΣΗ

Συριόπουλος Κ., *Διεθνείς Κεφαλαιαγορές: Τόμος 1 – Ανάλυση και Θεωρία*, Ανικούλα, Θεσσαλονίκη 1999.

ΞΕΝΟΓΛΩΣΣΗ

Dowd K., *Beyond value at risk,* Wiley, N.Y. 1998.

Jensen M.C., «Risk, The Pricing of Capital Assets, and the evaluation of investment portfolios», *Journal of Business,* 42(2), σ. 167-247, April 1969.

Jorion P., *Value at Risk: The new benchmark for controlling market risk*, Irwin, N.Y. 1997.

Sharpe W.F., «Mutual Fund Performance», *Journal of Business,* 39(1), σ. 119-138, January 1966.

Treynor J.L., «How to rate management of investment funds», *Harvard Business Review,* 43(1), σ. 63-75, Jan-Feb. 1965.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗ ΚΙΝΔΥΝΟΥ ΚΑΙ ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΑ ΠΑΡΑΓΩΓΑ

Σκοπός

Είναι πολλοί οι λόγοι που οδήγησαν στη μεγάλη ανάπτυξη της παγκόσμιας αγοράς των παραγώγων: η κινητικότητα των κεφαλαίων, η αναδιανομή του κινδύνου, η αυξημένη μεταβλητότητα και άλλοι πολιτικοί κίνδυνοι ή κίνδυνοι χώρας (country risk). Σκοπός του κεφαλαίου αυτού είναι να καταγράψει την τεράστια αυτή ανάπτυξη, να σχολιάσει τους πιθανούς κινδύνους που απορρέουν από τη χρήση των παράγωγων χρηματοοικονομικών προϊόντων και να δείξει τη χρησιμότητα τους στη διαχείριση κινδύνου.

Προσδοκώμενα Αποτελέσματα

Όταν θα έχετε ολοκληρώσει τη μελέτη αυτού του κεφαλαίου, θα είστε σε θέση να:

- περιγράφετε την ιστορική εξέλιξη και ανάπτυξη των αγορών παραγώγων·
- κατανοείτε τους λόγους της ανάπτυξης της αγοράς παραγώγων·
- διακρίνετε τα παράγωγα προϊόντα·
- περιγράφετε τα χαρακτηριστικά και τους κινδύνους των παράγωγων προϊόντων·
- κατανοείτε τη χρηματοοικονομική μηχανική, τις μεθόδους και τα εργαλεία της.

Έννοιες Κλειδιά

- Παράγωγα προϊόντα
- Συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης (futures contracts) και συμβόλαια δικαιωμάτων προαίρεσης ή δικαιώματα (options)
- Εξωχρηματιστηριακή αγορά (OTC)
- Κίνδυνος από παράγωγα προϊόντα
- Στοιχειώδης ή βασικός κίνδυνος, κίνδυνος υποδείγματος
- Κίνδυνος «αναφοράς κινδύνου» (risk report)
- Εξισορροπητική αγοραπωλησία (arbitrage)
- Program trading
- Τεχνική ανάλυση

Εισαγωγικές Παρατηρήσεις

Η ανάπτυξη της αγοράς παραγώγων ήταν πολύ μεγάλη τα τελευταία 25 χρόνια. Μέχρι το 1972 τα μόνα παράγωγα ήταν συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης (futures), διάφορα προθεσμιακά συμβόλαια (forwards) και δικαιώματα (options) σε κάποια προϊόντα, τα οποία ήταν διαπραγματεύσιμα κατευθείαν μεταξύ των αντισυμβαλλομένων και όχι σε μια οργανωμένη αγορά (over the counter).

Τον Μάιο του 1972 άρχισε η διαπραγμάτευση σε συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης στις συναλλαγματικές ισοτιμίες (foreign currency futures contracts) στο Χρηματιστήριο του Chicago Mercantile Exchange και λίγο αργότερα, το 1973, στο Chicago Board Options Exchange άρχισαν οι συναλλαγές σε δικαιώματα αγοράς επί μετοχών (equity call options). Στη συνέχεια, τα αμέσως επόμενα χρόνια, σταδιακά, εισήχθησαν προς διαπραγμάτευση και άλλα παράγωγα προϊόντα, χρηματοοικονομικά και μη.

΄Ετσι, σήμερα, υπάρχουν διεθνώς πολλές αγορές παράγωγων προϊόντων, με σημαντικότερες τις Chicago Mercantile Exchange και Chicago Board Options Exchange στις ΗΠΑ, τη LIFFE (London International Financial Futures and Options Exchange) στο Λονδίνο, τη MATIF στο Παρίσι και την Deutsche Terminborse στη Γερμανία, ενώ υπάρχουν και αρκετές μικρότερες και νέες που δημιουργούνται, όπως το Χρηματιστήριο Παραγώγων Αθηνών (ΧΠΑ), το οποίο λειτούργησε τον Αύγουστο του 1999.

Επιπρόσθετα, υπάρχουν και λειτουργούν και εξωχρηματιστηριακές αγορές παραγώγων (Over-the-Counter, OTC). Οι αγορές αυτές είναι εξίσου αναπτυγμένες για λόγους που θα εξηγήσουμε σε επόμενη ενότητα. Για παράδειγμα, το 1992 η ονομαστική αξία των συναλλασσόμενων συμβολαίων στην εξωχρηματιστηριακή αγορά παραγώγων ήταν 5.4 τρις δολ. ΗΠΑ και αντιπροσώπευε το 54% της συνολικής συναλλακτικής δραστηριότητας στις διεθνείς αγορές παραγώγων.

Στην τραπεζική, η χρήση της αγοράς των παράγωγων προϊόντων αυξάνει ταχύτατα, ωστόσο η ευρύτερη χρήση της αγοράς αυτής εξακολουθεί να περιορίζεται στις λίγες μεγάλες τράπεζες. Για παράδειγμα, το 1993 μόνο 6 τραπεζικοί οργανισμοί των ΗΠΑ κυριαρχούσαν στην αγορά των παραγώγων σε ποσοστό 90%: Bankers Trust, Bank of America, Chase Manhattan, Chemical Bank, Citicorp και JP Morgan. Ωστόσο, συνολικά, το 1992 600 τραπεζικοί οργανισμοί χρησιμοποιούσαν την αγορά παραγώγων και 11,000 οργανισμοί δεν έκαναν χρήση της αγοράς αυτής.

Το κεφάλαιο αυτό δεν φιλοδοξεί στις λίγες σελίδες του να παρουσιάσει ολοκληρωμένα τα παράγωγα προϊόντα, γατί κάτι τέτοιο θα απαιτούσε τη συγγραφή ενός μόνο τόμου. Ωστόσο, θα γίνει μια πλήρης και περιεκτική παρουσίαση των παράγωγων προϊόντων και των τεχνικών που χρησιμοποιούνται.

Δραστηριότητα 1/Κεφάλαιο 6

Καταγράψτε σε μια παράγραφο 50 λέξεων την ιστορική εξέλιξη και ανάπτυξη των αγορών παράγωγων προϊόντων.

Μπορείτε συμπληρωματικά να ανατρέξετε στο κεφάλαιο 1 του βιβλίου του R.W. Kolb, *Financial Derivatives* (1996).

Ενότητα 6.1

ΑΓΟΡΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΩΝ

Τα χρηματοοικονομικά παράγωγα προϊόντα (financial derivatives) είναι χρηματοοικονομικά εργαλεία, τα οποία βασίζονται σε άλλα βασικότερα χρηματοοικονομικά προϊόντα και η τιμή τους εξαρτάται από τη μεταβολή των υποκείμενων χρηματοοικονομικών προϊόντων. Τέτοια υποκείμενα (underlying) προϊόντα μπορεί να είναι μετοχές, ομόλογα, επιτόκια, δείκτες κ.λπ.

Για παράδειγμα, ένα δικαίωμα προαίρεσης επί μετοχών (stock option) που αγοράστηκε δίνει το δικαίωμα στον κάτοχο του να αγοράσει ή να πουλήσει μετοχές και με αυτή την έννοια το δικαίωμα επί μετοχών *παράγεται* από ένα βασικότερο *χρηματοοικονομικό προϊόν,* τη μετοχή, και δεν υπάρχει χωρίς αυτήν. Ένα δικαίωμα επί μετοχών είναι, λοιπόν, ένα χρηματοοικονομικό παράγωγο.

Τα πλέον γνωστά χρηματοοικονομικά παράγωγα, μεταξύ άλλων, είναι τα συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης (futures contracts) και τα χρηματοοικονομικά δικαιώματα προαίρεσης (options).

Στα παράγωγα προϊόντα αναφέρονται, επίσης, δύο μεγάλα κοινωνικά οφέλη:
α) η χρησιμότητα τους στη διαχείριση του κινδύνου και
β) το γεγονός ότι οι τιμές των προϊόντων είναι δημόσια παρατηρήσιμες, προσφέροντας, έτσι, στη ροή της πληροφορίας στην αγορά.

Ως αποτέλεσμα της δεύτερης παρατήρησης είναι αναμενόμενο η τιμή των προϊόντων βάσης (πάνω στα οποία στηρίζονται τα παράγωγα) στην τρέχουσα αγορά να προσεγγίζει την πραγματική αξία των προϊόντων αυτών (price discovery).

Στο κεφάλαιο αυτό γίνεται μια εισαγωγή στις βασικές έννοιες των παράγωγων προϊόντων και των αγορών τους.

6.1.1 Η ραγδαία εξέλιξη της αγοράς παράγωγων προϊόντων

Το 1995 η Bank of International Settlement (BIS) δημοσίευσε ότι η συνολική ονομαστική αξία των αγορών παράγωγων προϊόντων (οργανωμένα χρηματιστήρια και εξωχρηματιστηριακή αγορά) ήταν ίση με 50 τρις δολ. ΗΠΑ. Να σημειωθεί ότι το ετήσιο εθνικό προϊόν των ΗΠΑ είναι μόλις 7 τρις δολ. ΗΠΑ και η συνολική αξία της αγοράς των μετοχών και των ομολόγων είναι 35 τρις δολ. ΗΠΑ.

Ο λόγος της ραγδαίας και μεγάλης ανάπτυξης αυτών των προϊόντων και αγορών είναι η αναδιανομή του κινδύνου. Άλλοι φορολογικοί και θεσμικοί λόγοι είναι δευτερεύοντες. Γενικότερα, οι βασικοί λόγοι που οδήγησαν στην αυξημένη ζήτηση της αγοράς των παραγώγων είναι οι εξής:

- Η *αυξανόμενη μεταβλητότητα στην παγκόσμια οικονομία.* Η μεγάλη μεταβλητότητα των αγορών που παρατηρήθηκε στις δεκαετίες του 1970 και του 1980, σε συνδυασμό με την παγκοσμιοποίηση, δημιούργησε επιπρόσθετες πηγές κινδύνων στη βιομηχανία και στο διεθνές εμπόριο. Τα παράγωγα προϊόντα μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τη διαχείριση του κινδύνου που απορρέει από τη μεταβλητότητα των τιμών.
- Η *απελευθέρωση στην κίνηση των κεφαλαίων* και η συνεπαγόμενη μεταβλητότητα των συναλλαγματικών ισοτιμιών, επιτοκίων κ.λπ., που οδηγούν σε επιβάρυνση του κόστους στις επιχειρήσεις που δεν ακολουθούν στρατηγικές αντιστάθμισης των κινδύνων αυτών.
- Η *τεχνολογική εξέλιξη,* η οποία οδηγήθηκε από α) την τεχνολογία της πληροφορικής και β) την εξέλιξη και ανάπτυξη της χρηματοοικονομικής θεωρίας. Το κλασικό παράδειγμα από το «πάντρεμα» αυτό είναι το υπόδειγμα Black-Scholes, που χρησιμοποιείται για την τιμολόγηση και αντιστάθμιση κινδύνου των χρηματοοικονομικών δικαιωμάτων.
- *Πολιτικές εξελίξεις.* Ενώ μέχρι και τη δεκαετία του 1960 το κράτος θεωρούνταν η μηχανή της οικονομίας, από τη δεκαετία του 1970 και ύστερα, η αδυναμία της πολιτικής αυτή οδήγησε σε σημαντικές μεταβολές, οικονομικές και πολιτικές. Αποτέλεσμα ήταν να εμφανιστεί μια νέα τάση προσανατολισμένη στην αγορά και την απελευθέρωση των χρηματοοικονομικών αγορών.

Ο Πίνακας 1 παρουσιάζει μια άποψη της ραγδαίας εξέλιξης της αγοράς των συμβολαίων μελλοντικής εκπλήρωσης.

Πίνακας 1

Ανάπτυξη της βιομηχανίας της διαχείρισης συμβολαίων μελλοντικής εκπλήρωσης

΄Ετος	Δισεκατομμύρια $
1980–1984	< 1
1985	1
1986–1988	1–5
1989	8
1990	10
1991	12
1992	20
1993	23
1994	26

Δραστηριότητα 2/Κεφάλαιο 6

Υπάρχει κοινωνικό όφελος από την ύπαρξη της αγοράς των παραγώγων; Απαντήστε σε μια παράγραφο 50 λέξεων. Επιστρέψτε στην υποενότητα 6.1.1 και ελέγξτε την ορθότητα της απάντησης σας.

6.1.2 Η χρήση των αγορών παραγώγων

Η ραγδαία ανάπτυξη των αγορών παράγωγων προϊόντων τεκμηριώνεται από το μεγάλο ενδιαφέρον των χρηματοπιστωτικών ιδρυμάτων για τη χρήση των αγορών από αυτά. Ακόμα και σε μικρές οικονομίες (και αγορές) τα αποτελέσματα πρόσφατων ερευνών δείχνουν ότι το ενδιαφέρον είναι, πράγματι, μεγάλο και αυξανόμενο.

Το γνωστό περιοδικό *Financial Management* σε μια σειρά από άρθρα και μελέτες (τεύχη: χειμώνας και καλοκαίρι 1995, χειμώνας και καλοκαίρι 1996 και χειμώνας 1997) έχει παρουσιάσει τα πορίσματα αντίστοιχων μελετών τόσο για ορισμένες από τις αναπτυγμένες οικονομίες όσο και για μερικές αναδυόμενες αγορές.

Ας δεχτούμε, όμως, ενδεικτικά τις εταιρείες και τους μη χρηματοπιστωτικούς οργανισμούς για να παρουσιάσουμε το σχετικό μέγεθος της χρήσης της αγοράς των παραγώγων. Το δείγμα αναφέρεται στο 41% (έρευνα του 1995) του συνόλου των εταιρειών που δραστηριοποιούνται στην αγορά αυτή στις ΗΠΑ.

Τα αποτελέσματα της μελέτης δείχνουν ότι το 65% των οργανισμών με μέγεθος μεγαλύτερο των 250 εκατ. δολ. χρησιμοποιούν την αγορά των παραγώγων. Το 30% των ιδρυμάτων με κεφάλαιο μεταξύ 51 και 250 εκατ. δολ. και το 12% των μικρού μεγέθους εταιρειών (κεφάλαιο μικρότερο των 50 εκατ. δολ.), επίσης χρησιμοποιούν τα παράγωγα προϊόντα, με σκοπό τη διαχείριση των διάφορων χρηματοοικονομικών κινδύνων που αντιμετωπίζουν.

Αντίστοιχα, στη Νέα Ζηλανδία, για παράδειγμα, που αποτελεί μια μικρότερου μεγέθους οικονομία και αγορά, τα ποσοστά είναι 100%, 70% και 36% για τα τρία διαφορετικά μεγέθη μη χρηματοπιστωτικών ιδρυμάτων. Ωστόσο, και στις δύο οικονομίες παρατηρείται μικρότερη χρήση της αγοράς των παραγώγων από τον τομέα των υπηρεσιών (14% στις ΗΠΑ και 31% στη Νέα Ζηλανδία).

Η μεγαλύτερη χρήση της αγοράς των παραγώγων στις ΗΠΑ γίνεται από τις εταιρείες προϊόντων (49% έναντι 29% για τη Νέα Ζηλανδία), ενώ στην περίπτωση της Νέας Ζηλανδίας από τον τομέα του λιανεμπορίου και χονδρεμπορίου (με 86% έναντι 29% στις ΗΠΑ). Η παρατήρηση αυτή επιβεβαιώνεται και από το γεγονός ότι στη Νέα Ζηλανδία μόνο το 7% των ερωτηθέντων 124 επιχειρήσεων χρησιμοποιεί την αγορά των παραγώγων για διαχείριση των τιμών των προϊόντων, ενώ το αντίστοιχο ποσοστό στις ΗΠΑ ανέρχεται στο 37%. Αντίθετα, η χρήση της αγοράς των παραγώγων για διαχείριση συναλλαγματικού κινδύνου είναι υψηλότερη και ίδια περίπου και για τις δύο χώρες.

Σημαντικό, τέλος, είναι να παρατηρήσουμε, από τις μελέτες αυτές, το ποσοστό και τη συχνότητα της έκθεσης προς το διοικητικό συμβούλιο των επιχειρήσεων, σχετικά με τη θέση που έχουν στην αγορά παραγώγων και, συνεπώς, την έκθεση στον κίνδυνο.

Παρατηρούμε, λοιπόν, ότι πλέον του 61% των εταιρειών στη Νέα Ζηλανδία ενημερώνουν σε μηνιαία βάση έναντι μόνο 7% στις ΗΠΑ. Αντίθετα, στις ΗΠΑ η ενημέρωση είναι συχνότερη. Σε τρίμηνη βάση το ποσοστό ανέρχεται σε 26% έναντι 6% στη Νέα Ζηλανδία.

Οι παραπάνω παρατηρήσεις μας δίνουν μια εικόνα για το μέγεθος της χρήσης της αγοράς των παράγωγων προϊόντων σε μια αναπτυγμένη οικονομία και ώριμη αγορά, όπως αυτή των ΗΠΑ, σε σύγκριση με την αντίστοιχη χρήση σε μια μικρότερη οικονομία και αγορά, όπως αυτή της Νέας Ζηλανδίας.

Βέβαια, θα ήταν παρακινδυνευμένο να επιχειρήσουμε μια γενίκευση των συμπερασμάτων από τις δύο αυτές περιπτώσεις, ωστόσο με αρκετή βεβαιότητα μπορούμε να δεχθούμε ότι η ύπαρξη οργανωμένης αγοράς παραγώγων σε μια οικονομία αποτελεί ένα επιπλέον εργαλείο διαχείρισης κινδύνου.

Γενικά, οι κύριοι χρήστες της αγοράς των παραγώγων μπορούν να ταξινομηθούν όπως παρακάτω:

- σε αυτούς που θέλουν να καλυφθούν έναντι διάφορων επιχειρηματικών κινδύνων,
- σε αυτούς που θέλουν να αναλάβουν τον κίνδυνο που αποστρέφονται οι προηγούμενοι (κερδοσκόποι) και
- στους arbitrageurs.

Ενότητα 6.2

ΠΑΡΑΓΩΓΑ ΠΡΟΪΟΝΤΑ ΚΑΙ ΚΙΝΔΥΝΟΙ

Είναι γεγονός ότι η ύπαρξη των παράγωγων προϊόντων προσφέρει σημαντικά οφέλη μέσω της χρηματοοικονομικής μηχανικής, ιδίως στις λιγότερο αναπτυγμένες αγορές. Από την άλλη, οι επενδυτές, οι επενδυτικοί οργανισμοί, αλλά κυρίως οι εποπτικές αρχές κατανοούν πολύ καλά και τους πιθανούς κινδύνους της αγοράς των παραγώγων. Άλλωστε, τα τελευταία χρόνια συνέβησαν σε μεγάλους οργανισμούς τεράστιες καταστροφές, όπως στην περίπτωση των Barings, Sumitomo, Bankers Trust κ.ά.

6.2.1 «Θεμελιώδεις» κίνδυνοι παράγωγων προϊόντων

Οι θεμελιώδεις ή βασικοί κίνδυνοι (elementary risks) των παραγώγων δεν διαφέρουν από τους κινδύνους κάθε αγοράς. Η ομάδα των 30 (Group of Thirty) τους ταξινομεί ως εξής:

- Κίνδυνος αγοράς (market risk), όπου η αξία ενός χαρτοφυλακίου μπορεί να μεταβλήθηκε, επειδή μεταβλήθηκαν οι συνθήκες τις αγοράς, όπως οι τιμές των μετοχών ή τα επιτόκια·
- πιστωτικός κίνδυνος (credit risk), όταν ο ένας των αντισυμβαλλομένων αδυνατεί να ικανοποιήσει τις υποχρεώσεις του·
- λειτουργικός κίνδυνος (operational risk), που δημιουργείται από ένα ανεπαρκές σύστημα κινδύνου και ελέγχου του κινδύνου, από ανθρώπινα σφάλματα ή ανικανότητα της διαχείρισης·
- νομικός κίνδυνος (legal risk) ή κίνδυνος ζημίας επειδή δεν μπορεί να εκτελεστεί ένα συμβόλαιο·
- κίνδυνος ρευστότητας (liquidity risk), σε μια αγορά χαμηλής ρευστότητας.

Βέβαια, μπορούμε να απαριθμήσουμε και άλλους, επιμέρους, κινδύνους παραγώγων, όπως:

- κίνδυνος χρηματοοικονομικών δικαιωμάτων προαίρεσης (options risk), όταν ο αντισυμβαλλόμενος εκτελεί ένα χρηματοοικονομικό δικαίωμα σε χρονική στιγμή που δεν είναι κατάλληλη για τον κάτοχο της μετοχής·
- κίνδυνος διαχείρισης (management risk), που αποτελεί έναν από τους λειτουργικούς κινδύνους·
- θεσμικός κίνδυνος (regulatory risk), επειδή η αξία ενός χαρτοφυλακίου μπορεί να μεταβληθεί λόγω των αλλαγών και των προσαρμογών του θεσμικού–κανονιστικού πλαισίου σε μια αγορά·

- κίνδυνος άλλων γεγονότων (event risk), που μεταβάλλει, επίσης, την αξία του χαρτοφυλακίου λόγω διάφορων γεγονότων, όπως πολιτική αστάθεια·
- κίνδυνος διασύνδεσης (interconnection risk), που αναφέρεται στους συνδυασμούς κινδύνων ενός χαρτοφυλακίου, οι οποίοι δεν είναι άμεσα εμφανείς και προκαλούνται από τις διασυνδέσεις που προκύπτουν από την επίδραση των ίδιων παραγόντων σε διαφορετικές αγορές και διαφορετικά προϊόντα.

Είναι βέβαιο ότι κάθε βασικός κίνδυνος εξαρτάται από το συγκεκριμένο παράγωγο προϊόν. Για παράδειγμα, ο κίνδυνος ρευστότητας και ο πιστωτικός κίνδυνος έχουν μεγαλύτερη βαρύτητα στην εξωχρηματιστηριακή αγορά (OTC), ενώ οι ανταλλαγές νομισμάτων (currency swaps) έχουν μεγαλύτερο πιστωτικό κίνδυνο. Πρέπει να σημειωθεί ότι η ολοκληρωμένη αποτίμηση εμφάνισης κινδύνων στην εξωχρηματιστηριακή αγορά δεν είναι εύκολη λόγω των περιορισμένων πληροφοριών στην αγορά αυτή.

6.2.2 Παράγωγα προϊόντα και συστημικός κίνδυνος

Υπάρχει μια διαμάχη σχετικά με το εάν τα παράγωγα προϊόντα μπορούν να δημιουργήσουν συστημικό κίνδυνο και ιδίως στην περίπτωση της εξωχρηματιστηριακής αγοράς. Ο νομπελίστας M. Miller ανήκει στην κατηγορία εκείνων που δεν θεωρούν ότι τα παράγωγα μπορούν να δημιουργήσουν συστημικό κίνδυνο. Ο ίδιος, μάλιστα, σημειώνει –μια ακραία θέση– ότι «ο μεγαλύτερος κίνδυνος για τη σταθερότητα των χρηματοοικονομικών αγορών δεν είναι ο κίνδυνος που μπορεί να προέλθει από τις συναλλαγές των παραγώγων, αλλά ο πραγματικός κίνδυνος βρίσκεται στις αντιδράσεις των εποπτικών αρχών».

Οι υποστηρικτές της θέσης ότι τα παράγωγα προϊόντα μπορεί να δημιουργήσουν συστημικούς κινδύνους βασίζονται σε μερικά γεγονότα, όπως:

- η πολυπλοκότητα των νέων χρηματοοικονομικών εργαλείων, όπου ακόμα και οι έμπειροι επαγγελματίες διαχειριστές δυσκολεύονται να αποτιμήσουν τις συνέπειες στην αγορά από την εσφαλμένη διαχείριση των εργαλείων αυτών·
- η μείωση της διαφάνειας, κυρίως στις αγορές των χρηματοοικονομικών δικαιωμάτων προαίρεσης και των συμβολαίων μελλοντικής εκπλήρωσης, όπου δύσκολα διακρίνεται ο τελικός αποδέκτης του κινδύνου·
- η συγκεντρωσιμότητα των βασικών κινδύνων, κυρίως στην εξωχρηματιστηριακή αγορά·
- η μεταφορά στοιχειωδών κινδύνων σε μη εποπτευόμενους οργανισμούς, όπως τα κεφάλαια αντιστάθμισης κινδύνου (hedge funds).

Ωστόσο, η παραπάνω επιχειρηματολογία δεν είναι ικανή να συνθέσει μια νέα θεωρία σχετικά με τον συστημικό κίνδυνο που, πιθανώς, μπορούν να δημιουργήσουν τα παράγωγα χρηματοοικονομικά προϊόντα.

6.2.3 Πηγές ζημιών στις αγορές παράγωγων προϊόντων

Οι κυριότεροι λόγοι που οδήγησαν στην τεράστια αύξηση των ζημιών είναι:

- η κίνηση της αγοράς, κατά κύριο λόγο·
- η μη κατανόηση των προϊόντων στα οποία επένδυαν και, συνεπώς, των δυνητικών κινδύνων που διέτρεχαν οι θέσεις τους στην αγορά των παραγώγων·
- η ελλιπής εσωτερική διαχείριση, που αφορά κυρίως τον διαχωρισμό μεταξύ dealing και back-office, καθώς και τις αντίστοιχες, σημαντικές, λειτουργίες τους·
- η φτωχή διαχείριση του κινδύνου·
- η μη ύπαρξη ικανοποιητικού συστήματος reporting του κινδύνου, με αποτέλεσμα τη μη έγκαιρη ενεργοποίηση της διοίκησης·
- η μεγάλη εμπιστοσύνη των διαχειριστών στα μαθηματικά υποδείγματα ή και η μη κατανόηση από τη διοίκηση των διαστημάτων «εμπιστοσύνης» στην αποτίμηση του κινδύνου.

Εάν θελήσουμε να αναπτύξουμε μια συνολική κατανομή των κινδύνων, θα μπορούσαμε να ακολουθήσουμε τον επόμενο πίνακα.

Πίνακας 2

Κατανομή των ζημιών των παραγώγων

	Barings	**Gibson Gretins**	**Procter & Gamble**
Ελλιπής μηχανισμός αναφοράς κινδύνων	✓		✓
Ελλιπής έλεγχος συναλλαγών	✓	✓	
Ελλιπής αποτίμηση χαρτοφυλακίων και θέσεων στην αγορά	✓	✓	✓
Μη κατανόηση από τη διοίκηση της λειτουργίας των παράγωγων προϊόντων και των κινδύνων τους	✓		✓

Στον Πίνακα 2 παρουσιάζεται μια κατανομή σε τύπους των κινδύνων που παρουσιάστηκαν σε σχέση με τρεις γνωστές περιπτώσεις όπου σημειώθηκαν τεράστιες ζημίες στις αγορές παραγώγων. Βέβαια, τα τελευταία χρόνια σημειώθηκαν και άλλες ζημιές, ωστόσο οι παραπάνω τρεις περιπτώσεις είναι οι γνωστότερες.

Ο Πίνακας 3 δείχνει τις αθροιστικές ζημίες στην αγορά των παραγώγων τη δεκαετία 1987-1997. Από τον πίνακα παρατηρούμε τον εκθετικό ρυθμό της αύξησης

των αθροιστικών ζημιών στη δεκαετία αυτή, με σημαντικό έτος αναφοράς τη μεταβολή 1993-1994, όπου παρατηρήθηκαν οι μεγαλύτερες ζημίες. Μάλιστα, το 1994 η απόδοση των μετοχών των ΗΠΑ (όπως αποτιμώνται από την απόδοση του δείκτη S&P 500 Index με τα μερίσματα να επανεπενδύονται μηνιαία) ήταν μόλις 1.3%, η απόδοση των ομολόγων ΗΠΑ ήταν αρνητική και ίση με –7.9% και ο διεθνής δείκτης μετοχών MSCI είχε απόδοση 7.8%.

Πίνακας 3

Αθροιστικές ζημίες (προ φόρων) στην αγορά των παραγώγων

΄Ετος	Αθροιστική ζημία (δις $)	Μεταβολή (%)
1987	1.15	–
1988	1.61	40
1989	1.64	1.2
1990	1.65	0.6
1991	2.02	22.4
1992	2.24	10.9
1993	3.96	76.8
1994	**13.82**	**249**
1995	16.7	20.8
1996	20.95	25.5
1997	21.15	0.9

Παρ’ όλα αυτά, η ζημία αυτή θεωρείται μικρή σε σχέση με το μέγεθος της αγοράς των παραγώγων. Συγχρόνως, οι λόγοι που οδήγησαν στις ζημίες αυτές θα μπορούσαν κάλλιστα να οδηγήσουν σε αντίστοιχες ζημίες οποιαδήποτε χρηματοοικονομική αγορά. Δηλαδή, *τα παράγωγα δεν περιέχουν κατ' ανάγκη μεγαλύτερο κίνδυνο από τα χρηματοοικονομικά εργαλεία στην τρέχουσα αγορά.*

Ας προστεθεί, ακόμα, ότι οι ζημίες στην οργανωμένη αγορά των παράγωγων προϊόντων είναι περίπου οι ίδιες με τις ζημίες στην εξωχρηματιστηριακή αγορά παραγώγων.

Με δεδομένο, λοιπόν, το γεγονός της ύπαρξης του αυστηρού κανονιστικού–ρυθμιστικού πλαισίου στις οργανωμένες αγορές, καθώς και του κόστους που αυτό συνεπάγεται, μπορεί να υποστηριχτεί η άποψη ότι επιπλέον κανονισμοί και ρυθμίσεις δεν θα ήταν ικανά να περιορίσουν τις ζημίες.

Ακόμα, τα στατιστικά στοιχεία αποκαλύπτουν ότι:

α) οι θεσμικοί επενδυτές σημείωσαν το 1/3 των συνολικών ζημιών την τελευταία δεκαετία και

β) όλες σχεδόν αυτές οι ζημίες σημειώθηκαν στα exotic collateralized mortgage obligations (CMO), structured derivatives, OTC Swaps, FRAs και OTC options, δηλαδή σε προϊόντα που ονομάζονται και financially engineered securities (FES).

Επίσης, σε πολλές περιπτώσεις, οι ζημίες στα παράγωγα και τα FES αποκάλυψαν την αδυναμία των εργαλείων διαχείρισης ζημίας της δεκαετίας του 1970 να αντιμετωπίσουν την έκθεση στον κίνδυνο στις δεκαετίες του 1980 και του 1990.

Ένας άλλος «ένοχος» των καταγραφόμενων ζημιών είναι ο «κίνδυνος του υποδείγματος» (model risk), που προέρχεται από τα υποδείγματα κινδύνου. Ένα υπόδειγμα χρησιμοποιείται από τα τραπεζικά ιδρύματα ως η καλύτερη προσέγγιση της πραγματικότητας της αγοράς στο πλαίσιο της διαχείρισης κινδύνου.

Έτσι, ενώ οι καταστάσεις απολογισμού του κινδύνου (risk reports) αναφέρουν λεπτομερειακά την έκθεση σε κίνδυνο σε αναπροσαρμοσμένες τιμές στα επίπεδα της αγοράς (mark-to-market), στην πραγματικότητα απεικονίζουν την έκθεση κινδύνου σε αναπροσαρμοσμένες τιμές στα επίπεδα της αγοράς των εκτιμήσεων του υποδείγματος (mark-to-model). Είναι, επίσης, γεγονός ότι με τα ίδια στατιστικά δεδομένα μπορούν να εκτιμηθούν διαφορετικά υποδείγματα.

Η ανάλυση υποδειγμάτων κινδύνου είναι βασική, αλλά οι υποθέσεις που γίνονται δεκτές σε κάθε υπόδειγμα επηρεάζουν πολύ το αποτέλεσμα. Το γεγονός αυτό λαμβάνεται σοβαρά υπόψη τόσο από τους διαχειριστές και τα τμήματα διαχείρισης κινδύνου των οργανισμών όσο και από τις εποπτικές αρχές. Για παράδειγμα, οι υποθέσεις αυτές στρέφονται γύρω από τα παρακάτω ερωτήματα:

- Ποιες είναι οι μεταβλητές εκείνες των οποίων μια μικρή μεταβολή οδηγεί σε μεγάλη μεταβολή τις τιμές ή τον κίνδυνο;
- Ποια είναι η σημαντικότερη μεταβλητή στο χαρτοφυλάκιο και ποια είναι η πιθανότητα μεταβολής της;
- Πόση διαφορά έχουν τα αποτελέσματα του υποδείγματος που χρησιμοποιούμε με αυτά άλλων υποδειγμάτων;
- Πόσο αποδεκτό είναι το υπόδειγμα από την αγορά; Για παράδειγμα, οι άλλοι οργανισμοί αποδέχονται τις υποθέσεις του υποδείγματος, τα στατι-

στικά δεδομένα και την ιστορική περίοδο για τον υπολογισμό των βασικών μέτρων θέσης (αναμενόμενη απόδοση) και διασποράς (μεταβλητότητα);

Στην υποδειγματοποίηση των προϊόντων της τρέχουσας αγοράς οι απαντήσεις στα παραπάνω υποδείγματα δεν διαφέρουν σημαντικά. Όμως, στην αγορά παραγώγων και όσο πολυπλοκότερα είναι αυτά, τόσο μπορεί να αποκλίνουν σημαντικά μεταξύ τους. Πάντα, βέβαια, θα πρέπει να λαμβάνουμε υπόψη ότι οι ποσοτικές τεχνικές μέτρησης του κινδύνου είναι μεν απαραίτητες, δεν φτάνουν, όμως, από μόνες τους να λάβουν υπόψη τους όλες τις παραμέτρους που μπορεί να επηρεάσουν την αγορά. Τέτοια παραδείγματα υπάρχουν πολλά, ιδίως σε περιόδους κρίσεων. Άλλες μεταβλητές κινδύνου είναι επίσης σημαντικές: πολιτικός κίνδυνος, λογιστικός κίνδυνος, φορολογικός κίνδυνος, κίνδυνος αντιστάθμισης (hedging risk) κ.ά.

Στη φάση αυτή, μεγάλη σημασία έχει η επιλογή τού προς διαχείριση κινδύνου. Ένας μέσος αριθμός πιθανών κινδύνων («galaxy of risks»), όπως απαριθμούνται από τους οργανισμούς, ξεπερνά τους 45. Ο πρώτος τέτοιος κατάλογος δημιουργήθηκε το 1987 και απαριθμούσε τους βασικότερους κινδύνους–αιτίες μεγάλων ζημιών σε παράγωγα, ενώ μέχρι το 1980 βασικός κίνδυνος καταστροφής θεωρούνταν μόνο ο πιστωτικός κίνδυνος.

Πώς είναι δυνατόν να διαχειριστεί ένας οργανισμός τόσους πολλούς κινδύνους; Είναι γεγονός ότι η τεχνολογία προσφέρει, σήμερα, τη δυνατότητα υπολογισμού και αναφοράς όλων των κινδύνων, συνολικά ή τμηματικά. Ωστόσο, η ανάγνωση όλων των τύπων των κινδύνων δεν είναι η κατάλληλη προσέγγιση, αφού μπορεί να δημιουργήσει έναν νέο κίνδυνο, τον κίνδυνο «αναφοράς κινδύνου» (risk report). Τούτο σημαίνει ότι η διαχείριση του κινδύνου μπορεί να αποδειχθεί επικίνδυνη διαδικασία, εάν ο κάθε κίνδυνος δεν θεωρηθεί στην πολλαπλή του διάσταση. Για παράδειγμα, δεν αποτελεί διαχείριση κινδύνου η διαδικασία κατά την οποία θέτουμε απλώς τα όρια κινδύνου σε κάθε πηγή κινδύνου. Αρκεί να αναλογιστούμε ότι οι κίνδυνοι μεταβάλλονται και αυτοί όχι μόνο λόγω των αλλαγών στη διάρθρωση των χαρτοφυλακίων, αλλά και λόγω των σημαντικών μεταλλαγών των αγορών ή των οικονομιών. Έτσι, ο κάθε κίνδυνος πρέπει να αναλύεται στις λειτουργίες του.

Επίσης, ένα άλλο σημαντικό μάθημα των κινδύνων των παραγώγων της δεκαετίας του 1990 είναι ότι σημαντικές μεταβολές και κρίσεις σε μια αγορά ή περιοχή αγορών έχουν ιδιαίτερες επιπτώσεις στην παγκόσμια οικονομία.

Έτσι, υπήρξε μεγάλη εξέλιξη των μεγεθών μέτρησης κινδύνου των χαρτοφυλακίων των τραπεζικών ιδρυμάτων σε σχέση με τον όγκο των συναλλαγών των παράγωγων προϊόντων, την τελευταία δεκαετία. Το σημαντικότερο μέρος της εξέλιξης αυτής οφείλεται ακριβώς στην εμπειρία των ζημιών που προήλθαν από πραγματικά γεγονότα, όπως η κρίση στο Μεξικό ή στην Ασία.

Στην υποενότητα 5.5.2 αναπτύξαμε μερικά από τα μειονεκτήματα και τις υποθέσεις της μεθοδολογίας VaR στα χαρτοφυλάκια. Ας συμπληρώσουμε τον κατάλογο των δυσκολιών αυτών στην περίπτωση των παράγωγων προϊόντων:

- Ο κίνδυνος διακύμανσης-συνδιακύμανσης διατυπώνεται εσφαλμένα στην περίπτωση των χρηματοοικονομικών εργαλείων με μη γραμμική συνάρτηση τιμών (περίπτωση των χρηματοοικονομικών δικαιωμάτων προαίρεσης).

Πολύ συχνά, στις περιπτώσεις που οι ζημίες είναι πολύ μεγάλες (συνήθως στις περιόδους κρίσεων), τίθενται υπό συζήτηση και επανεξέταση τα μεγέθη μέτρησης κινδύνου. Συνήθως, η αιτία αναζητείται στις ικανότητες διαχείρισης του διαχειριστή του χαρτοφυλακίου. Αυτό είναι λάθος. Η ζημία είναι πιθανότερο να οφείλεται στην ανικανότητα του διαχειριστή να «επικοινωνήσει» με τις δυνατότητες των εργαλείων που διαθέτει για την αποτίμηση του κινδύνου: τα μαθηματικά και τις ποσοτικές μεθόδους, γενικότερα.

Για παράδειγμα:

- Υποθέτουμε ότι οι μαθηματικές συναρτήσεις είναι συνεχείς, ενώ η αγορά δεν είναι πάντοτε συνεχής·
- πολλά μαθηματικά υποδείγματα στηρίζονται στην υπόθεση των ορθολογικών προσδοκιών, ενώ τα χρηματοοικονομικά εργαλεία και οι αγορές δεν συμπεριφέρονται, κατ' ανάγκη, σύμφωνα με αυτή την υπόθεση.

Είναι γεγονός ότι τα 2/3 των παραμέτρων ενός ικανού συστήματος διαχείρισης κινδύνου είναι ποιοτικές μεταβλητές. Ακόμα, πολλές φορές, η γνώση αυτών των παραμέτρων είναι ελλιπής και αβέβαιη και η καθαρά πιθανοθεωρητική λογική δεν μπορεί να συλλάβει την πολλαπλή τους διάσταση.

Είναι φανερό ότι η διαχείριση κινδύνου και, κυρίως, των χαρτοφυλακίων των παράγωγων προϊόντων δεν είναι εύκολη υποχρέωση για τον τραπεζικό οργανισμό. Η ευθύνη του διαχειριστή (κυρίως για την καριέρα του) είναι μεγάλη, ιδίως εάν αναλογιστούμε ότι δαπανώνται 25 δις δολ. ετησίως στα συστήματα διαχείρισης κινδύνου. Μπορούμε, μάλιστα, να πούμε ότι η διαχείριση κινδύνου ενός οργανισμού δεν είναι μόνο επιστήμη, αλλά και τέχνη, και απαιτεί γνώσεις, ταλέντο, εμπειρία και συλλογική εργασία.

Δραστηριότητα 3/Κεφάλαιο 6

Σχολιάστε τους κινδύνους παράγωγων προϊόντων (100 λέξεις). Στη συνέχεια συγκρίνετε την απάντηση σας με όσα αναφέρονται σχετικά στην ενότητα 6.2.

Δραστηριότητα 4/Κεφάλαιο 6

Σχολιάστε σύντομα (100 λέξεις) τη σπουδαιότητα των υποθέσεων των συστημάτων διαχείρισης κινδύνου. Στη συνέχεια, συγκρίνετε την απάντηση σας με όσα αναφέρονται σχετικά στην υποενότητα 6.2.3.

Δραστηριότητα 5/Κεφάλαιο 6

Υπάρχουν περιορισμοί στα μαθηματικά και στατιστικά υποδείγματα μέτρησης κινδύνου; Απαντήστε σε μια παράγραφο 80 λέξεων. Επιστρέψτε στην υποενότητα 6.2.3 και ελέγξτε την ορθότητα της απάντησης σας.

Ενότητα 6.3

ΣΥΜΒΟΛΑΙΑ ΜΕΛΛΟΝΤΙΚΗΣ ΕΚΠΛΗΡΩΣΗΣ, ΠΡΟΘΕΣΜΙΑΚΑ ΣΥΜΒΟΛΑΙΑ ΚΑΙ ΔΙΚΑΙΩΜΑΤΑ ΠΡΟΑΙΡΕΣΗΣ

6.3.1 Συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης και προθεσμιακά συμβόλαια

Ένα συμβόλαιο μελλοντικής εκπλήρωσης (ΣΜΕ, futures contract) είναι μία συμφωνία για αγορά ή για πώληση ενός προϊόντος σε μελλοντική χρονική στιγμή σε συγκεκριμένη τιμή. Ο αγοραστής λέμε ότι έχει θέση αγοράς (long position) και έχει την υποχρέωση να αγοράσει, ενώ ο πωλητής θέση πώλησης (short position) και έχει υποχρέωση να πουλήσει. Τα ΣΜΕ (όσο και τα προθεσμιακά συμβόλαια) έχουν μηδενική καθαρή προσφορά (net supply), αφού για κάθε αγοραστή υπάρχει ένας πωλητής. Τα κέρδη και οι ζημίες αντιπροσωπεύουν ένα *παίγνιο μηδενικού αθροίσματος* (zero sum game), που σημαίνει ότι για κάθε ευρώ που κερδίζει ο ένας των αντισυμβαλλομένων, ο άλλος πρέπει να το χάσει.

Ένα προθεσμιακό συμβόλαιο (ΠΣ, forward contract) είναι παρόμοιο με το ΣΜΕ, αλλά οι δύο τύποι συμβολαίων διαφέρουν στα παρακάτω σημεία:

(i) Τα ΣΜΕ είναι *τυποποιημένα* συμβόλαια και μόνο η τιμή τους διαπραγματεύεται. Φέρουν την ίδια ποσότητα (μέγεθος του συμβολαίου), ποιότητα, ημερομηνία και τόπο παράδοσης. Αντίθετα, τα ΠΣ είναι διαπραγματεύσιμα και προσαρμόζονται στις ανάγκες των δύο αντισυμβαλλομένων.

(ii) Τα ΣΜΕ παρουσιάζουν μεγαλύτερη *ρευστότητα* από τα ΠΣ, λόγω της ιδιότητας (i) και του γεγονότος ότι διαπραγματεύονται σε οργανωμένες χρηματιστηριακές αγορές. Αυτό σημαίνει ότι ο αγοραστής (πωλητής) μπορεί πάντα να πουλήσει (αγοράσει) το ΣΜΕ σε οποιαδήποτε στιγμή πριν τη λήξη του (κλείσιμο της συναλλαγής, offsetting). Βέβαια, ορισμένες αγορές ΠΣ έχουν, επίσης, μεγάλη ρευστότητα, όπως η προθεσμιακή αγορά σε συνάλλαγμα ή σε επιτόκια.

(iii) Ο *Οργανισμός Εκκαθάρισης* των Συναλλαγών σε ΣΜΕ, που ελαχιστοποιεί τον κίνδυνο του αντισυμβαλλόμενου. Ο κίνδυνος αθέτησης της συμφωνίας είναι υψηλότερος στα ΠΣ, ενώ είναι σχεδόν μηδενικός στις μελλοντικές αγορές, λόγω του οργανισμού της εκκαθάρισης (exchange clearinghouse), που αποτελεί μέρος της συναλλαγής και, συνήθως, είναι μέλος του χρηματιστηρίου παραγώγων. Στην Ελλάδα, με το Ν.2533/1997, η Εταιρία Εκκαθάρισης Συναλλαγών Επί Παραγώγων (Ε.Τ.Ε.Σ.Ε.Π.) είναι η εταιρία εκκαθάρισης συναλλαγών που γίνονται στο Χρηματιστήριο Παραγώγων Αθηνών (Χ.Π.Α.).

(iv) Τα ΣΜΕ συναλλάσσονται σε *οργανωμένες χρηματιστηριακές αγορές* και οι περισσότερες θέσεις σε ΣΜΕ κλείνουν πριν τη λήξη τους με ρευστά διαθέσιμα (cash settlement). Αντίθετα, τα ΠΣ δεν συναλλάσσονται σε οργανωμένα χρηματιστήρια (over–the–counter ή OTC) και η συμφωνία εκπνέει με την παράδοση του προκαθορισμένου αγαθού. Οι εξω–χρηματιστηριακές αγορές (OTC) αποτελούν ένα δίκτυο (ηλεκτρονικό ή τηλεφωνικό) μεταξύ των dealers, που είναι χρηματοπιστωτικά ιδρύματα ή χρηματοπιστωτικό ίδρυμα και εταιρία.

Πίνακας 4

Χαρακτηριστικά των ΣΜΕ

Υποκείμενη αξία (underlying asset)	Ώρες συναλλαγής (trading hours)
Μέθοδος παράδοσης (Delivery type): φυσική ή με ρευστά	Ημέρα εκκαθάρισης (settlement date): συνήθως, πριν την έναρξη της συνεδρίασης της T+1
Μονάδα συναλλαγής (trading unit): μονάδες δείκτη (για ΣΜΕ σε δείκτη), ουγκιές (για ΣΜΕ σε χρυσό) κ.λπ.	Ημέρα λήξης (Last trading date): τελευταία ημέρα συναλλαγών για συγκεκριμένη σειρά ΣΜΕ
Ημερομηνία λήξης (expiration date)	Τελευταία ημέρα εκκαθάρισης (final settlement date)
Σειρά (series)	Τελική τιμή διακανονισμού (exchange settlement price): τιμή τελικής εκκαθάρισης
Μέγεθος συμβολαίου ή πολλαπλασιαστής (size ή multiplier): αξία της μονάδας συναλλαγής του ΣΜΕ. Π.χ. για ΣΜΕ επί του FTSE/ASE–20 το μέγεθος του συμβολαίου είναι 5 €/μονάδα.	

Υπάρχουν, λοιπόν, αρκετοί λόγοι για τους οποίους η τιμή των ΣΜΕ και των προθεσμιακών συμβολαίων διαφέρουν, ακόμα και εάν έχουν το ίδιο υποκείμενο αγαθό και την ίδια λήξη: διαφορετική φορολογική μεταχείριση, διαφορετικό κόστος συναλλαγών, διαφορετικούς κανόνες περιθωρίου ασφάλισης, διαφορετική πιθανότητα αθέτησης αντισυμβαλλομένου (default risk) –επειδή στην αγορά των προθεσμιακών συμβολαίων δεν γίνεται εκκαθάριση συναλλαγών όπως στα ΣΜΕ (lack of a clearinghouse). Ακόμα, η διαφορά προκύπτει και από τον διακανονισμό στο τέλος της ημέρας, που χαρακτηρίζει την αγορά των ΣΜΕ. Αυτό σημαίνει ότι ενώ ο επενδυτής σε προθεσμιακά συμβόλαια είναι αδιάφορος ως προς τη συγκεκριμένη εξέλιξη των τιμών <άνοδος → πτώση> ή <πτώση → άνοδος>, ο επενδυτής στα ΣΜΕ, αντίθετα, ενδιαφέρεται. Για παράδειγμα, εάν ένας επενδυτής στα ΣΜΕ έχει ανοιχτή θέση αγοράς σε ΣΜΕ, προτιμά τη διαδρομή <άνοδος → πτώση> έναντι της αντίστροφης, για τον λόγο ότι κάθε ημέρα που η τιμή ανεβαίνει αυτός πληρώνεται το ποσό από τον ημερήσιο διακανονισμό, που μπορεί να επενδύσει με βάση το επιτόκιο της αγοράς.

Εάν το επιτόκιο μεταξύ διάφορων περιόδων είναι γνωστό, τότε οι τιμές των ΣΜΕ θα πρέπει να ισούνται με τις τιμές των προθεσμιακών συμβολαίων οποιαδήποτε χρονική στιγμή. Αυτό, όμως, στην πραγματικότητα δεν είναι γνωστό εκ των προτέρων. Έτσι, ως γενικό κανόνα, μπορούμε να πούμε ότι: *εάν οι τιμές των ΣΜΕ συσχετίζονται θετικά με το επιτόκιο, τότε οι τιμές των ΣΜΕ θα υπερβούν τις τιμές των προθεσμιακών συμβολαίων. Αντίθετα, εάν συσχετίζονται αρνητικά, τότε οι τιμές των ΣΜΕ θα είναι χαμηλότερες των τιμών των προθεσμιακών συμβολαίων*.

Όλοι οι στατιστικοί έλεγχοι επί των μελλοντικών τιμών στηρίζονται στην υπόθεση ότι η κατανομή των μεταβολών των τιμών ακολουθεί τον κανονικό νόμο. Πολλές μελέτες, όμως, έχουν δείξει ότι η ακολουθούμενη κατανομή δεν είναι η κανονική και, οι μεταβολές των μελλοντικών τιμών χαρακτηρίζονται από λεπτοκύρτωση (δηλαδή παρατηρούνται πολλές εξτρεμιστικές τιμές, σε σχέση με την κανονική κατανομή).

Μία άλλη σειρά μελετών οδήγησε στον έλεγχο αυτοσυσχέτισης των μεταβολών των μελλοντικών τιμών. Εάν, για παράδειγμα, η σειρά παρουσιάζει ισχυρή θετική αυτοσυσχέτιση πρώτης τάξης, τότε θετική απόδοση της μιας περιόδου θα τείνει να ακολουθείται από θετική απόδοση την αμέσως επόμενη περίοδο. Έτσι, είναι δυνατόν να κατασκευαστεί ένας κανόνας συναλλαγών που να αποφέρει κέρδη, κάτω από την υπόθεση του μη κόστους συναλλαγών, φόρων κ.λπ.

Σε ένα από τα κλασικά άρθρα της διεθνούς βιβλιογραφίας, ο τιμηθείς με το βραβείο Νόμπελ Paul Samuelson (1965), τεκμηρίωσε την άποψη ότι η μεταβλητότητα των μελλοντικών τιμών αυξάνεται όσο το ΣΜΕ πλησιάζει στη λήξη του. Η υπόθεση αυτή είναι γνωστή ως Υπόθεση Samuelson, σύμφωνα με την οποία οι ανταγωνιστικές δυνάμεις στη μελλοντική αγορά κρατούν τις μελλοντικές τιμές σε επίπεδο ίσο με την αναμενόμενη μελλοντική τιμή στην τρέχουσα αγορά, στη λήξη του ΣΜΕ. Κάτω από αυτή την υπόθεση οι μελλοντικές τιμές ακολουθούν ένα martingale –μία στοχαστική ανέλιξη στην οποία η μαθηματική ελπίδα της επόμενης μελλοντικής τιμής ισούται με την μελλοντική τιμή κατά την τρέχουσα περίοδο, δηλαδή η αναμενόμενη μεταβολή της μελλοντικής τιμής είναι μηδέν. Με άλλα λόγια, η μελλοντική τιμή ισούται με την αναμενόμενη μελλοντική τιμή στην τρέχουσα αγορά.

Τελευταία, ενδιαφέρον παρουσιάζεται από τους ερευνητές στη διερεύνηση μη-γραμμικών εξαρτήσεων των μεταβολών των μελλοντικών τιμών, στην ύπαρξη χαοτικής δυναμικής κλπ.

Περιθώριο ασφάλισης για ΣΜΕ

Οι αντισυμβαλλόμενοι (αγοραστής και πωλητής) υποχρεούνται να καταβάλλουν στον οργανισμό εκκαθάρισης μια χρηματική εγγύηση καλής εκτέλεσης (ή ενέχυρο), η οποία ονομάζεται *περιθώριο ασφάλισης* (margin), που εξαρτάται από τον τύπο της συναλλαγής (hedging, κερδοσκοπία, μέσα στην ημέρα κ.λπ.). Κάθε επενδυτής σε ΣΜΕ έχει ανοίξει στην τράπεζα τήρησης του περιθωρίου ασφάλισης (margin bank) έναν *λογαριασμό ασφαλείας* (margin account), στον οποίο καταθέτει το *αρχικό περιθώριο ασφάλειας* (initial margin account), όταν παίρνει μία θέση. Το αρχικό περιθώριο ασφάλειας ορίζεται από το χρηματιστήριο και μπορεί να το αυξήσει εάν αυξηθεί σημαντικά η τιμή της υποκείμενης αξίας ή η μεταβλητότητα της τιμής της, ή να εφαρμόσει ενδο-ημερήσιο (intra-day margin call) σε περιόδους κρίσεων ή όταν το κρίνει απαραίτητο, για παράδειγμα. Από τα παραπάνω συνάγεται ότι η αγορά ΣΜΕ διαφέρει από την απευθείας αγορά μετοχών ή αγαθών στο γεγονός ότι δεν απαιτεί αρχική επένδυση, παρά μόνο το περιθώριο ασφάλειας.

Ο οργανισμός εκκαθάρισης έχει, επίσης, ορίσει ένα κατώτερο *επίπεδο του περιθωρίου ασφάλισης διατήρησης* (maintenance margin, συνήθως το 75% του αρχικού περιθωρίου ασφάλισης) και, εάν η διαφορά ενός λογαριασμού μειωθεί κάτω από αυτό το επίπεδο, τότε ο ζημιωμένος επενδυτής καλείται (margin call) να συμπληρώσει με πρόσθετα κεφάλαια, που ονομάζονται *περιθώριο ασφάλισης μεταβολής* (variation margin), ειδάλλως η θέση του ρευστοποιείται αυτόματα. Όλες οι θέσεις των συναλλασσομένων σε ΣΜΕ αποτιμούνται ημερησίως και, στο τέλος της ημέρας, ο λογαριασμός περιθωρίου ασφάλισης προσαρμόζεται ώστε να αντικατοπτρίζει τα κέρδη ή ζημίες (marking to market). Η διαδικασία αυτή ονομάζεται ημερήσιος διακανονισμός.

6.3.2 Δικαιώματα προαίρεσης

Τα δικαιώματα προαίρεσης (ΔΠ, options), αντίθετα από τα ΣΜΕ που εκφράζουν υποχρέωση, εκφράζουν το *δικαίωμα* του αγοραστή ή του πωλητή να αγοράσει ή να πουλήσει την υποκείμενη αξία σε κάποια μελλοντική στιγμή στην προκαθορισμένη τιμή. Γενικά, κάθε ΔΠ είναι είτε δικαίωμα αγοράς (κλήσης-ΚΛΗ, call option) είτε δικαίωμα πώλησης (επίδοσης-ΕΠΙ, put option). Ο κάτοχος ενός δικαιώματος αγοράς έχει το δικαίωμα να αγοράσει την υποκείμενη αξία σε μελλοντικό χρόνο και σε συγκεκριμένη τιμή. Ο κάτοχος του δικαιώματος πώλησης έχει το δικαίωμα να πουλήσει την υποκείμενη αξία σε μελλοντικό χρόνο και σε δεδομένη χρονική στιγμή.

Η τιμή του συμβολαίου ΔΠ είναι η τιμή εξάσκησης (exercise price, strike price) και η ημερομηνία είναι η ημερομηνία εξάσκησης ή ληκτότητα (expiration date, exercise date, maturity). Ένα ΔΠ Ευρωπαϊκού τύπου (European option) μπορεί να εξασκηθεί μόνο στη λήξη του. Αντίθετα, ένα ΔΠ Αμερικανικού τύπου (American option) μπορεί να εξασκηθεί οποιαδήποτε στιγμή μέχρι τη λήξη του.

Αντίθετα από τα ΣΜΕ, ο αγοραστής ενός δικαιώματος αγοράς (buyer of a call option) οφείλει να πληρώσει ένα κόστος, την τιμή του δικαιώματος (price of the option), για να έχει το δικαίωμα να εξασκήσει ή να μην εξασκήσει το δικαίωμα αγοράς της υποκείμενης αξίας.

Υπάρχουν 4 θέσεις που μπορούν να λάβουν οι συμμετέχοντες στην αγορά δικαιωμάτων: αγοραστές call, αγοραστές put, πωλητές call και πωλητές put. Οι δύο πρώτες θέσεις αγοράς λέγονται *long positions* και οι θέσεις πώλησης θα λέγονται *short positions.* Ακόμα, η πώληση ενός ΔΠ αναφέρεται και ως writing the option.

6.3.3 Τιμές συμβολαίων μελλοντικής εκπλήρωσης: Πώς οι μελλοντικές τιμές συνδέονται με τις τιμές στην τρέχουσα αγορά;

Θα θεωρήσουμε δύο υποδείγματα μελλοντικών τιμών:

(i) Το υπόδειγμα των ορθολογικών προσδοκιών (expectations hypothesis model).

(ii) Το υπόδειγμα κόστους εξαιτίας κατοχής του υποκειμένου (cost-of-carry model in perfect markets).

Μία από τις υποθέσεις των υποδειγμάτων αυτών είναι ότι δεν υπάρχουν ευκαιρίες για εξισορροπητική κερδοσκοπία (arbitrage). Επίσης, για λόγους απλοποίησης δεχόμαστε ότι η μελλοντική αγορά είναι τέλεια (perfect market). Σε μια τέτοια αγορά δεν υπάρχει κόστος συναλλαγών και κανένας περιορισμός στη συναλλαγή μεταξύ δύο αντισυμβαλλομένων.

(i) Το υπόδειγμα των ορθολογικών προσδοκιών

Η τρέχουσα μελλοντική τιμή ισούται με την αναμενόμενη τιμή στην τρέχουσα αγορά (spot market) την ημερομηνία της παράδοσης του μελλοντικού συμβολαίου.

$$F_{0,t} \approx E_0(S_t) \tag{1}$$

όπου $F_{0,t}$ είναι η μελλοντική τιμή τη χρονική στιγμή $t=0$ για παράδοση τη χρονική στιγμή t, S_0 είναι η τιμή στην τρέχουσα αγορά και $E_0(S_t)$ είναι η προσδοκία τη στιγμή $t=0$ για την τιμή στην τρέχουσα αγορά τη στιγμή t. Με άλλα λόγια, η σχέση (1) μας λέει ότι η μελλοντική τιμή ισούται (προσεγγιστικά) με την προσδοκία της αγοράς για το ποια θα είναι στο μέλλον (στη λήξη) η τρέχουσα τιμή και, έτσι, οι μελλοντικές τιμές είναι αμερόληπτοι εκτιμητές των μελλοντικών τιμών της τρέχουσας αγοράς.

Εάν η σχέση (1) δεν ισχύει, τότε υπάρχει δυνατότητα κερδοσκοπίας. Αγνοώντας το περιθώριο ασφάλισης (margin requirement), ένας κερδοσκόπος που παίρνει θέση αγοράς (long position) στη μελλοντική αγορά συμφωνεί να πληρώσει τιμή $F_{0,t}$ την ημέρα της παράδοσης (delivery date), που αναμένεται να ισούται με την τιμή S_t την ίδια χρονική στιγμή. Σύμφωνα με την υπόθεση των ορθολογικών προσδοκιών, το κέρδος της κίνησης αυτής ισούται με τη διαφορά $F_{0,t} - E_0(S_t)$, η οποία είναι ίση με μηδέν. Το ίδιο ισχύει και για τον κερδοσκόπο που εισέρχεται στην αγορά με θέση πώλησης (short position).

Η σχέση (1) ισχύει προσεγγιστικά για δύο κυρίως λόγους:

(1) Λόγω ύπαρξης κόστους συναλλαγών.

(2) Λόγω της αποστροφής προς τον κίνδυνο (risk aversion) των συμμετεχόντων στη μελλοντική αγορά (αντισταθμιστών κινδύνου και κερδοσκόπων: hedgers, speculators). Όσο περισσότερο αποστρέφονται τον κίνδυνο οι συμμετέχοντες στη μελλοντική αγορά, τόσο θα διαφοροποιείται η μελλοντική τιμή από την αναμενόμενη μελλοντική τιμή στην τρέχουσα αγορά, συνήθως.

Για το πώς επηρεάζει η αποστροφή προς τον κίνδυνο των συμμετεχόντων στην αγορά τις τιμές των συμβολαίων μελλοντικής εκπλήρωσης, έχουν αναπτυχθεί δύο θεωρίες:

Α. Η θεωρία των αντιστραμμένων τιμών (the theory of normal backwardation), που αναπτύχθηκε από τον J.M. Keynes και τον J. Hicks.

Ο J.M. Keynes διατύπωσε τη θέση ότι η θεωρία των ορθολογικών προσδοκιών δεν είναι ικανή να ερμηνεύσει πλήρως τις μελλοντικές τιμές. Τόσο ο Keynes όσο και ο Hicks θεώρησαν ότι οι αντισταθμιστές παίρνουν θέση πώλησης στη μελλοντική αγορά (net short position). Οι αντισταθμιστές, κάτω από αυτή την οπτική είναι οι παραγωγοί του προϊόντος (δηλαδή είναι αγορασμένοι στο φυσικό προϊόν) και παίρνουν θέση πώλησης στη μελλοντική αγορά για να αποφύγουν τους κινδύνους (κυρίως τον κίνδυνο τιμής) που αντιμετωπίζουν. Με άλλα λόγια, ο παραγωγός βάμβακος, για παράδειγμα, είναι «αγορασμένος» στην τρέχουσα αγορά του βάμβακος και παίρνει θέση πώλησης στη μελλοντική αγορά για να αντισταθμίσει τον κίνδυνο της μεταβολής της τιμής στην τρέχουσα αγορά τη χρονική στιγμή της συγκομιδής της εσοδείας του. Στην περίπτωση αυτή, ο παραγωγός πουλάει ΣΜΕ σε τιμή χαμηλότερη από την αναμενόμενη μελλοντική τιμή στην τρέχουσα αγορά. Οι κερδοσκόποι παίρνουν θέση αγοράς στη μελλοντική αγορά, με άλλα λόγια «αναλαμβάνουν» τον κίνδυνο που θέλουν να αποφύγουν οι αντισταθμιστές, οι οποίοι πληρώνουν στους πρώτους ως premium τη διαφορά μεταξύ της μελλοντικής τιμής και της αναμενόμενης μελλοντικής τιμής στην τρέχουσα αγορά.

Οι κερδοσκόποι μπορούν να πάρουν θέση αγοράς ή θέση πώλησης, αλλά δεν θα πάρουν καμία θέση στην αγορά, εάν η μελλοντική τιμή ισούται με την αναμενόμενη μελλοντική τιμή στην τρέχουσα αγορά. Εάν η μελλοντική τιμή είναι μεγαλύτερη από την αναμενόμενη μελλοντική τιμή στην τρέχουσα αγορά, οι κερδοσκόποι θα είναι πωλητές στη μελλοντική αγορά, όπως και οι αντισταθμιστές. Αντίθετα, εάν μελλοντική τιμή είναι μικρότερη από την αναμενόμενη μελλοντική τιμή στην τρέχουσα αγορά, οι κερδοσκόποι θα είναι καθαροί αγοραστές στη μελλοντική αγορά.

Σύμφωνα με αυτή την προσέγγιση του προσδιορισμού της μελλοντικής τιμής, η μελλοντική τιμή θα τείνει, στη διάρκεια ζωής του ΣΜΕ, να προσεγγίσει την τιμή του προϊόντος στην τρέχουσα αγορά (κάτι που είναι αναμενόμενο, αφού η βάση πρέπει να τείνει στο μηδέν στη λήξη του συμβολαίου). Η άποψη ότι η μελλοντική τιμή τείνει να αυξάνεται στη διάρκεια της ζωής του ΣΜΕ, λόγω του γεγονότος ότι οι αντισταθμιστές είναι καθαροί πωλητές στη μελλοντική αγορά είναι γνωστή ως **κατάσταση αντιστραμμένων τιμών**.

Η αντίθετη κατάσταση, δηλαδή η υπόθεση ότι οι αντισταθμιστές παίρνουν θέση αγοράς στη μελλοντική αγορά, όπως, για παράδειγμα, ένας εισαγωγέας, ο οποίος είναι «πουλημένος» στην τρέχουσα αγορά, οδηγεί τους κερδοσκόπους να λάβουν θέση πώλησης στη μελλοντική αγορά. Στην περίπτωση αυτή, η μελλοντική τιμή είναι υψηλότερη από την αναμενόμενη μελλοντική τιμή στην τρέχουσα αγορά και, κατά συνέπεια, η τιμή του ΣΜΕ θα πρέπει να μειωθεί στη διάρκεια της ζωής του. Η περίπτωση αυτή είναι γνωστή ως **κατάσταση ορθών τιμών** (contango). Τέλος, υπάρχει και μια πραγματική περίπτωση, όπου οι αντισταθμιστές από θέση πώλησης (στην αρχή του ΣΜΕ) παίρνουν θέση αγοράς και οι κερδοσκόποι οδηγούνται αντίθετα. Η περίπτωση αυτή είναι γνωστή ως **υπόθεση καθαρής αντιστάθμισης** (net hedging hypothesis).

Β. Η θεωρία, που βασίζεται στο υπόδειγμα τιμολόγησης κεφαλαιουχικών στοιχείων (Capital Asset Pricing Model, CAPM).

Σύμφωνα με το υπόδειγμα τιμολόγησης κεφαλαιουχικών στοιχείων, CAPM, τιμολογούνται έτσι, ώστε να δώσουν μία αναμενόμενη απόδοση ανάλογη του αναλαμβανόμενου κινδύνου:

$$E(R_i) = RFR + [E(R_m) - RFR]\beta_i \qquad (2)$$

Σύμφωνα με το υπόδειγμα αυτό, οι επενδυτές επιτυγχάνουν τη μείωση του κινδύνου του χαρτοφυλακίου τους μέσω διαφοροποίησης. Ακόμα και ύστερα από τη διαφοροποίηση, κάποιος κίνδυνος παραμένει –λόγω της συσχέτισης των κεφαλαιουχικών στοιχείων με την αγορά στο σύνολό της– και αυτός είναι ο συστηματικός κίνδυνος, ο οποίος προσεγγίζεται από τον συντελεστή β.

Η συναλλαγή σε ΣΜΕ δεν απαιτεί καμία αρχική επένδυση (κόστος), πλην του περιθωρίου ασφάλισης που δεν αποτελεί, ωστόσο, επένδυση. Χωρίς την καταβολή αρχικού κόστους, δεν μπορεί με σαφήνεια να καθοριστεί ποσοστό αναμενόμενης απόδοσης. Με άλλα λόγια, δεν υπάρχει κεφάλαιο για να «κερδίσει» την απόδοση χωρίς κίνδυνο (RFR). Αυτό σημαίνει ότι εάν $\beta=0$, τότε η απόδοση της θέσης στη μελλοντική αγορά είναι μηδέν. Εάν ο συντελεστής βήτα (β) της θέσης στη μελλοντική αγορά είναι μεγαλύτερος από μηδέν, τότε μία θέση αγοράς στα ΣΜΕ αναμένεται να έχει θετική απόδοση.

Για παράδειγμα, εάν για μία θέση i στη μελλοντική αγορά έχουμε $E(R_m)$ =0.09, RFR=0.06 και β_i =0.7, τότε από την εφαρμογή της (2) προκύπτει αναμενόμενη απόδοση της θέσης αυτής ίση με 0.21. Γενικά, όταν η τιμή του συντελεστή βήτα είναι θετική, τότε αναμένεται αύξηση των μελλοντικών τιμών.

(ii) Το υπόδειγμα κόστους εξαιτίας κατοχής του υποκειμένου

Σε αυτό το υπόδειγμα η τιμή του ΣΜΕ καθορίζεται ως η αξία μιας μονάδας του υποκείμενου αγαθού (underlying asset) στο οποίο βασίζεται το ΣΜΕ. Η τιμή του υποκειμένου είναι η τρέχουσα τιμή στην υποκείμενη αγορά και ως κόστος νοείται το κόστος που απαιτείται για την κατοχή του υποκείμενου στην υποκείμενη αγορά. ΄Ετσι, στο υπόδειγμα αυτό η αγορά ΣΜΕ θεωρείται υποκατάστατο της απόκτησης μέσω της αγοράς του στοιχείου στην υποκείμενη αγορά. Κανονικά, ένας ορθολογικός επενδυτής και, εάν η μελλοντική τιμή έχει αποτιμηθεί δίκαια, είναι αδιάφορος ως προς τους παραπάνω τρόπους απόκτησης του αγαθού:

$$F_{0,t} = S_0(1+CC) = S_0(1+r_{0,t}) \tag{3}$$

όπου CC είναι το κόστος κατοχής της υποκείμενης αξίας (cost–of–carry) και $r_{0,t}$ είναι το επιτόκιο που αντιστοιχεί στη χρονική περίοδο [$0\to t$]. Εάν το επιτόκιο r υπολογίζεται συνεχώς ανατοκιζόμενο ή ανατοκιζόμενο σε διακριτό χρόνο, τότε η σχέση (3) γράφεται, αντίστοιχα:

$$F_{0,t} = S_0 e^{rt} \quad \text{και} \quad F_{0,t} = S_0(1+r)^t \tag{4}$$

για παράδειγμα αν το επιτόκιο ανατοκίζεται μηνιαία, τότε θα είναι

$$F_{0,t} = S_0(1+\frac{r}{12})^t .$$

Βέβαια, η παραπάνω σχέση δεν ισχύει πάντοτε στις πραγματικές αγορές, για τον λόγο αυτό η σχέση (4) αποτελεί τη <u>θεωρητική τιμή ενός ΣΜΕ</u>. ΄Ετσι, στην περίπτωση που δεν ισχύει η ισότητα (3) (ή η (4)), υπάρχουν ευκαιρίες εξισορροπητικής κερδοσκοπίας (arbitrage):

Arbitrage	**Σχέση**	**Στρατηγική**
Cash-and-carry arbitrage (CCA)	$F_{0,t} > S_0(1+CC)$	i. Δανεισμός κεφαλαίων ii. Αγορά του αγαθού στην υποκείμενη αγορά iii. Πώληση ΣΜΕ iv. Παράδοση αγαθού την ημερομηνία παράδοσης ΣΜΕ
Reverse Cash-and-carry arbitrage (RCCA)	$F_{0,t} < S_0(1+CC)$	i. Ανοιχτή πώληση υποκείμενης αξίας ii. Διασφάλιση εσόδων από i. iii. Αγορά ΣΜΕ iv. Αποδοχή παράδοσης του αγαθού

Δραστηριότητα 6/Κεφάλαιο 6

Σε μία τέλεια αγορά η τιμή του χρυσού στην τρέχουσα αγορά είναι $370 και το τρέχον επιτόκιο είναι 10% ανατοκιζόμενο μηνιαία. Σύμφωνα με το υπόδειγμα cost-of-carry, ποια θα είναι η τιμή του ΣΜΕ του χρυσού εάν λήγει σε 6 μήνες από τώρα;

Θα βρείτε τη δική μας απάντηση στο Παράρτημα, στο τέλος του κεφαλαίου.

Η θεωρητική τιμή υπολογίζεται με βάση το εξής σκεπτικό: όταν ένας επενδυτής αγοράζει το συμβόλαιο στην τρέχουσα αγορά (δηλαδή αγοράζει την υποκείμενη αξία), χρειάζεται να δεσμεύσει κεφάλαια την ίδια ημέρα που ολοκληρώνει τη συμφωνία. Με άλλα λόγια, ο αγοραστής πρέπει να αποποιηθεί οποιοδήποτε εισόδημα από τόκους που προκύπτει από αυτό το κεφάλαιο, αντίθετα από τον πωλητή, ο οποίος χάνει τόκο. Επομένως, για να μην αδικείται κανένας από τους αντισυμβαλλομένους πρέπει ο αγοραστής του συμβολαίου να πληρώσει στον πωλητή τους διαφυγόντες τόκους. Άρα η θεωρητική τιμή θα είναι ίση με τη σημερινή ανατοκιζόμενη, μέχρι τη λήξη με το επιτόκιο χωρίς κίνδυνο.

Απλοποιώντας τους παραπάνω συμβολισμούς, η τιμή αυτή δίνεται από τη σχέση[1]:

[1] *Για τον απλό ανατοκισμό ο τύπος γίνεται F = S(1+r)·T/360, όπου T είναι ο χρόνος ως τη λήξη σε ημέρες.*

$$F = S \cdot e^{r \cdot T/360} \tag{5}$$

όπου S η σημερινή τιμή της υποκείμενης αξίας (spot price), F η θεωρητική τιμή του ΣΜΕ, r το χωρίς κίνδυνο επιτόκιο σε ετήσια ποσοστιαία βάση και T ο χρόνος μέχρι τη λήξη του συμβολαίου σε ημέρες (έχουμε χρησιμοποιήσει έτος 360 ημερών).

Στο σημείο αυτό πρέπει να γίνει ένας λεπτός **διαχωρισμός μεταξύ της αξίας και της τιμής του ΣΜΕ**. Η αξία ενός προθεσμιακού συμβολαίου δίνεται από τη σχέση:

$$f = S - X \cdot e^{-r \cdot T/360}$$

με X τη συμφωνημένη τιμή του συμβολαίου. Πράγματι, αν είμαστε κάτοχοι ενός ΣΜΕ μιας μετοχής με τιμή S σε συμφωνημένη τιμή X μετά από χρονικό διάστημα T τότε, αν διαθέτουμε ένα ποσό $X \cdot e^{-r \cdot T/360}$ σήμερα, αυτό το ποσό με την πάροδο του χρόνου T θα γίνει ίσο με X, οπότε η ικανοποίηση του συμβολαίου μας (δηλαδή η αγορά της μετοχής στην τιμή X) είναι δυνατή. Όταν οριστικοποιείται ή συμφωνία ενός ΣΜΕ η τιμή του ισούται με τη συμφωνημένη τιμή X και διαλέγεται ώστε η αξία του συμβολαίου να είναι ίση με μηδέν, δηλαδή το F είναι η τιμή του X που κάνει το f ίσο με μηδέν, οπότε από τη σχέση (2) και την $F{=}X$ έχουμε $f{=}0 \Rightarrow F = S \cdot e^{r \cdot T/360}$.

Τα ΣΜΕ επί δεικτών διαφέρουν από τα άλλα συμβόλαια στο γεγονός ότι αυτά, αν κρατηθούν μέχρι τη λήξη τους, η τελική εκκαθάριση γίνεται πάντοτε τοις μετρητοίς. Ένας χρηματιστηριακός δείκτης μπορεί να θεωρηθεί ως η τιμή ενός περιουσιακού στοιχείου που διανέμει μερίσματα. Το στοιχείο αυτό είναι ένα χαρτοφυλάκιο μετοχών που περιλαμβάνονται στον δείκτη. Στην περίπτωση αυτή, αν d είναι η μερισματική απόδοση, τότε η μελλοντική τιμή δίνεται από τον τύπο:

$$F = S \cdot e^{(r-d) \cdot T/360}$$

Παράδειγμα 1

Έστω ένα προθεσμιακό συμβόλαιο επί του δείκτη FTSE/ASE–20, που λήγει σε 90 ημέρες. Η τρέχουσα τιμή της υποκείμενης αξίας είναι 1500 μονάδες, το χωρίς κίνδυνο επιτόκιο είναι r = 4,5% και η μερισματική απόδοση είναι d = 2% ανά έτος. Τότε, βάσει του τύπου 2, η θεωρητική τιμή του συμβολαίου είναι:

$$F = S \cdot e^{(r-d) \cdot T/360} = 1500{*}e^{(0.045 - 0.02) \cdot 90/360} = 1509{,}40$$

Στην περίπτωση αυτή, η πρώτη δυσκολία παρουσιάζεται με τα μερίσματα, τα οποία δεν καταβάλλονται από όλες τις μετοχές του δείκτη την ίδια χρονική περίοδο. Συνήθως για την εκτίμηση της παραμέτρου d χρησιμοποιείται η μέση ετήσια μερισματική απόδοση. Άλλοι αναλυτές θεωρούν τον δείκτη ως ένα περιουσιακό στοιχείο με γνωστό και σταθερό εισόδημα (έστω I) οπότε ο παραπάνω υπολογισμός γίνεται $\boldsymbol{F = (S - I) \cdot e^{r \cdot T/360}}$. Στην περίπτωση των ΣΜΕ σε συναλλαγματικές ισοτιμίες, η παράμετρος d αντικαθίσταται από το χωρίς κίνδυνο επιτόκιο του ξένου νομίσματος.

Παρόλ' αυτά η παραπάνω τιμή ονομάζεται θεωρητική, για τον απλούστατο λόγο ότι η τρέχουσα τιμή ενός ΣΜΕ σε δείκτη, όπως και η τιμή της υποκείμενης αξίας, καθορίζεται σύμφωνα με τον νόμο της προσφοράς και της ζήτησης. Όταν λοιπόν μιλούμε για υπολογισμό της τιμής του ΣΜΕ, απλώς σκοπεύουμε στον καθορισμό μιας αξίας αναφοράς (reference value).

Η διαφορά της τρέχουσας τιμής του δείκτη με την τιμή του ΣΜΕ ονομάζεται **βάση**. Όσο οι μέρες περνούν και πλησιάζει η μέρα εκπνοής (λήξης) του συμβολαίου, τόσο η βάση τείνει προς το μηδέν. Στη λήξη του ΣΜΕ πρέπει να είναι μηδέν.

Η βάση εξαρτάται από διάφορους παράγοντες. Για παράδειγμα θα μπορούσαμε να αναφέρουμε το κόστος φύλαξης, το κόστος διατήρησης αποθεμάτων, το κόστος επιτοκίων κ.λπ. Τέτοιοι παράγοντες καθορίζουν αν η βάση είναι θετική (δηλαδή η τρέχουσα τιμή είναι χαμηλότερη από αυτή των ΣΜΕ και ονομάζεται προθεσμιακό πριμ – futures premium) ή αρνητική (δηλαδή η τρέχουσα τιμή είναι υψηλότερη από την τιμή των ΣΜΕ και ονομάζεται προθεσμιακή έκπτωση – futures discount).

Τόσο η τιμή των συμβολαίων, όσο και η τρέχουσα τιμή έχουν διακυμάνσεις. Υπό κανονικές συνθήκες, η διαφορά μεταξύ των δύο τιμών συρρικνώνεται με την πάροδο του χρόνου.

Δραστηριότητα 7/Κεφάλαιο 6

Πρόσφατα, μια επιχείρηση αγόρασε ένα προθεσμιακό συμβόλαιο για την αγορά 1 εκατ. Λιρών Αγγλίας έναντι 1.5 εκατ. Δολ. ΗΠΑ. Η ημερήσια μεταβλητότητα μιας ομολογίας 6-μηνών μηδενικού τοκομεριδίου σε λίρες Αγγλίας είναι 0.06% και ημερήσια μεταβλητότητα μιας ομολογίας 6-μηνών μηδενικού τοκομεριδίου σε Δολ. ΗΠΑ είναι 0.05%. Ο συντελεστής συσχέτισης μεταξύ των αποδόσεων των δύο ομολογιών είναι 0.8. Η τρέχουσα συναλλαγματική ισοτιμία είναι 1.53. Να υπολογίσετε την αξία σε κίνδυνο 10-ημερών σε επίπεδο εμπιστοσύνης 99%, όταν το 6-μηνών επιτόκιο σε λίρες και δολάρια είναι 5% ετησίως.

Θα βρείτε τη δική μας απάντηση στο Παράρτημα, στο τέλος του κεφαλαίου.

6.3.4 Βασικές θέσεις σε ΣΜΕ

Η θέση περιγράφει τα δικαιώματα και τις υποχρεώσεις που συνδέονται με συναλλαγές που ήδη έχουν γίνει και μπορεί να είναι θέσεις αγοράς ή πώλησης. Μια θέση αγοράς (πώλησης) είναι σε γενικές γραμμές μια αγορά (πώληση) που δεν έχει ακόμα κλείσει (ισοσταθμιστεί από μια αντίστροφη συναλλαγή). Οι μη κλεισμένες θέσεις λέγονται ανοικτές θέσεις.

Οι βασικές θέσεις παρουσιάζονται γραφικά στα επονομαζόμενα διαγράμματα κέρδους-ζημιάς (P/L Diagrams). Τα διαγράμματα αυτά αποτυπώνουν το κέρδος ή τη ζημιά μιας θέσης όταν η τιμή της υποκείμενης αξίας ακολουθεί διάφορες τάσεις. Για να γίνουν πιο κατανοητά τα διαγράμματα, αναφέρονται πάντα στην τελευταία ημέρα των συναλλαγών. Το νεκρό σημείο είναι το σημείο στο οποίο το γράφημα τέμνει τον άξονα των *X*.

Τα παραδείγματα θα αναφέρονται σε ΣΜΕ επί του δείκτη FTSE/ASE–20 (ο οποίος έχει πολλαπλασιαστή 5). Επίσης, η επίπτωση του κόστους συναλλαγής δεν θα ληφθεί υπόψη.

Θέση αγοράς ΣΜΕ (Long Position)

Ο αγοραστής ενός ΣΜΕ έχει την υποχρέωση να δεχθεί την παράδοση της υποκείμενης αξίας στην προσυμφωνημένη τιμή συμβολαίου στην ημερομηνία λήξης-παράδοσης του συμβολαίου.

Προσδοκία: Ο επενδυτής που παίρνει θέση αγοράς στην υποκείμενη αξία, εκτιμά ότι η τιμή της θα ανέβει. Στην περίπτωση αυτή, το κέρδος είναι ίσο με το ποσό της διαφοράς μεταξύ της τρέχουσας τιμής και της τιμής του συμβολαίου.

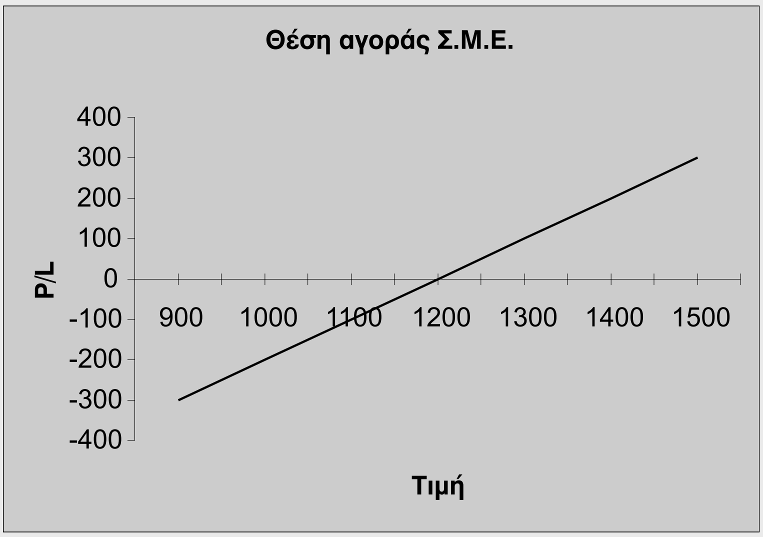
Μέγιστο κέρδος: Το μέγιστο κέρδος αυτής της θέσης είναι απεριόριστο καθώς δεν υπάρχει κανένα όριο στις ανοδικές μεταβολές της τιμής της υποκείμενης αξίας.

Μέγιστη ζημία: Η μέγιστη ζημία πραγματοποιείται όταν θα έχει μηδενική τιμή η υποκείμενη αξία. Η ζημία αυτή είναι ίση με την τιμή αγοράς του ΣΜΕ επί τον πολλαπλασιαστή του.

Νεκρό σημείο: Είναι ίσο με την τιμή αγοράς του συμβολαίου.

Παράδειγμα 2

Διάγραμμα 1



Το διάγραμμα 1 αποτυπώνει το κέρδος ή τη ζημιά μιας θέσης αγοράς ΣΜΕ. Το συμβόλαιο αγοράστηκε στις 1200 μονάδες. Αν στη λήξη η τιμή του υποκειμένου είναι στις 1300 μονάδες τότε η επένδυση θα αποφέρει κέρδη 1300 – 1200 = 100 μονάδων ή 500 ευρώ (= 100 × 5) ανά συμβόλαιο. Αν αντίθετα η τρέχουσα τιμή του FTSE/ASE–20 είναι στις 1000 μονάδες, θα έχουμε ζημία 1300 – 1000 = 300 μονάδων ή 1.500 ευρώ (= 300 × 5) ανά συμβόλαιο. Το μέγιστο κέρδος είναι απεριόριστο και η μέγιστη ζημιά είναι ίση με 1200 μονάδες ή 6.000 ευρώ.

Θέση πώλησης ΣΜΕ (Short Position)

Ο πωλητής ενός ΣΑΜΕ αναλαμβάνει την υποχρέωση να παραδώσει την υποκείμενη αξία στην προσυμφωνημένη τιμή συμβολαίου στην ημερομηνία λήξης–παράδοσης του συμβολαίου.

Προσδοκία: Ο επενδυτής που παίρνει θέση πώλησης στην υποκείμενη αξία εκτιμά ότι η τιμή της θα μειωθεί. Στην περίπτωση αυτή το κέρδος είναι ίσο με το ποσό της διαφοράς μεταξύ της τιμής του συμβολαίου και της τρέχουσας τιμής.

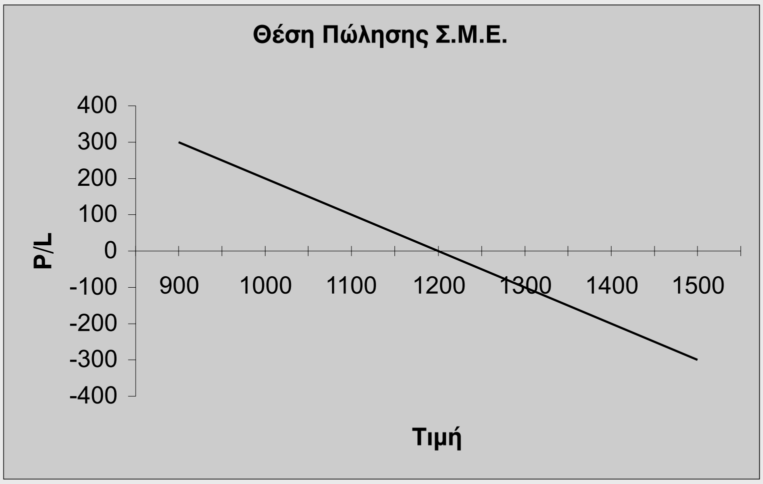
Μέγιστο κέρδος: Το μέγιστο κέρδος αυτής της θέσης είναι περιορισμένο, πραγματοποιείται όταν μηδενιστεί η τιμή της υποκείμενης αξίας και ισούται με την τιμή πώλησης του συμβολαίου επί τον πολλαπλασιαστή.

Μέγιστη ζημία: Η μέγιστη ζημία είναι απεριόριστη καθώς δεν υπάρχει όριο στις ανοδικές μεταβολές της τιμής της υποκείμενης αξίας.

Νεκρό σημείο: Είναι ίσο με την τιμή πώλησης του συμβολαίου.

Παράδειγμα 3

Διάγραμμα 2



Το Διάγραμμα 2 αποτυπώνει το κέρδος ή τη ζημιά μιας θέσης αγοράς ΣΜΕ. Το συμβόλαιο αγοράστηκε στις 1200 μονάδες. Αν στη λήξη η τιμή του υποκειμένου είναι στις 1300 μονάδες, τότε η επένδυση θα αποφέρει ζημιά 1300 – 1200 = 100 μονάδων ή 500 (= 100 × 5) ευρώ ανά συμβόλαιο. Αν αντίθετα η τρέχουσα τιμή του FTSE/ASE–20 είναι στις 1000 μονάδες, θα έχουμε κέρδος 1300 – 1000 = 300 μονάδων ή 1.500 ευρώ (= 300 × 5) ανά συμβόλαιο. Το μέγιστο κέρδος είναι ίσο με 1.200 μονάδες ή 6.000 ευρώ ενώ η μέγιστη ζημιά είναι απεριόριστη.

Κλείσιμο θέσεων

Οι ανοιχτές θέσεις αγοράς ή πώλησης στα ΣΜΕ μπορούν να διατηρηθούν μέχρι τη λήξη του συμβολαίου ή να κλειστούν οποιαδήποτε στιγμή με μια αντίθετη συναλλαγή ίσου αριθμού συμβολαίων. Για παράδειγμα μια θέση αγοράς 10 ΣΜΕ Μαρτίου επί της μετοχής της Εθνικής Τράπεζας, κλείνει με μια θέση πώλησης 10 συμβολαίων Μαρτίου, με αποτέλεσμα να μην εμφανίζεται πλέον στη θέση του επενδυτή.

Επίσης, με το κλείσιμο της θέσης απελευθερώνονται από την Ε.Τ.Ε.Σ.Ε.Π. και το περιθώριο ασφάλισης του επενδυτή.

Πρέπει να σημειώσουμε ότι ο αριθμός των συμβολαίων που διατηρούνται ανοικτές μέχρι την ημέρα της λήξης είναι περιορισμένος, επειδή όταν επιτευχθεί ο σκοπός του επενδυτή αυτός κλείνει τη θέση. Πάντως αν παραμείνει ανοιχτή η θέση, τότε κατά την τελευταία ημέρα και ανάλογα με την υποκείμενη αξία (δείκτης ή μετοχή), η θέση μπορεί να κλείσει είτε με χρηματικό διακανονισμό είτε με παράδοση της υποκείμενης αξίας. Πρέπει δε να σημειώσουμε ότι αν ο επενδυτής έκανε μια **ακάλυπτη** (**ανοικτή**) **πώληση** ΣΜΕ επί μετοχών (δηλαδή δεν κατείχε τις μετοχές), τότε κατά την ημερομηνία λήξης–παράδοσης είναι υποχρεωμένος πρώτα να τις αγοράσει και μετά να τις πουλήσει.

Η αρχή του Arbitrage

Η θεωρητική τιμή ενός Συμβολαίου Μελλοντικής Εκπλήρωσης (ΣΜΕ) δίνεται από τη σχέση:

$$\boldsymbol{F = S \cdot e^{(r-d) \cdot T/360}}$$

Όταν διαταραχθεί η ισότητα της σχέσης αυτής, τότε έχουμε την αρχή του arbitrage. Είναι δηλαδή δυνατόν, με μια σειρά από ενέργειες αγοραπωλησίας στις μετοχές του δείκτη και των ΣΜΕ, να δημιουργηθούν κέρδη χωρίς κίνδυνο (**arbitrage**), ανεξάρτητα από το πώς θα κινηθεί η αγορά.

Παράδειγμα 4

Έστω η θεωρητική τιμή ενός ΣΜΕ στον FTSE/ASE–20 με δείκτη στις 1.500 μονάδες και μηνιαίο επιτόκιο ίσο με 4,5%. Χωρίς μερισματική απόδοση είναι $F = 1500 \cdot e^{0.045 \cdot 30/360} = 1.505{,}64$ μονάδες.

➢ Έστω ότι $F > S \cdot e^{(r-d) \cdot T/360}$. Ας υποθέσουμε ότι στο παραπάνω παράδειγμα η τιμή του συμβολαίου είναι 1.520 (αντί του 1.505,64). Αυτό σημαίνει ότι το συμβόλαιο είναι «υπερτιμημένο» σε σχέση με τη θεωρητική του τιμή. Στην περίπτωση αυτή οι ενέργειες που κάνουμε είναι οι εξής:

- Ενέργειες σήμερα:
  - Ενέργεια 1η: Πουλάμε το προθεσμιακό συμβόλαιο στις 1.520 μονάδες.
  - Ενέργεια 2η: Δανειζόμαστε 7.500 ευρώ με επιτόκιο 4,5%.
  - Ενέργεια 3η: Αγοράζουμε τον δείκτη[2] στις 1.500 μονάδες (1.500 × 5 = 7.500).

Οι συνολικές εισροές/εκροές από τις παραπάνω συναλλαγές είναι μηδέν.

- Ενέργειες μετά από ένα μήνα:
  - Έστω ότι ο δείκτης έχει πάει στις 1600 μονάδες. Αυτό σημαίνει ότι θα έχουμε μια ζημία από την πώληση που κάναμε της τάξεως των 80 μονάδων (=1.600–1.520) ή 80×5= 400 ευρώ.
  - Από την πώληση[3] του δείκτη που έχουμε στα χέρια μας εισπράττουμε 1.600×5= 8.000 ευρώ.
  - Αποπληρώνουμε το δάνειό μας καταβάλλοντας 7.528,13 ευρώ [=7500*(1+30/360*4,5%)].

Οι συνολικές εισροές μας είναι: –400 + 8.000 –7.528,13 = 71,87 ευρώ.

  - Αν ο δείκτης είχε πάει στις 1.400 μονάδες, τότε από το προθεσμιακό συμβόλαιο θα είχαμε κέρδος 120 μονάδες (=1.520–1.400) ή 120×5=600 ευρώ.
  - Από την πώληση του δείκτη που έχουμε στα χέρια μας εισπράττουμε 1400×5=7.000 ευρώ.
  - Αποπληρώνουμε το δάνειό μας δίνοντας 7.528,13 ευρώ.

Οι συνολικές εισροές μας είναι: 600 + 7.000 – 7.528,13 = 71,87 ευρώ.

Παρατηρούμε ότι και στις δύο περιπτώσεις έχουμε ένα κέρδος 71,87 ευρώ **ανεξάρτητα** από την κίνηση του δείκτη.

➢ Έστω ότι $F < S \cdot e^{(r-d) \cdot T/360}$. Ας υποθέσουμε ότι στο παραπάνω παράδειγμα η τιμή του συμβολαίου είναι 1.490 (αντί του 1.505,64). Αυτό σημαίνει ότι το συμβόλαιο είναι «υποτιμημένο» σε σχέση με τη θεωρητική του τιμή. Στην περίπτωση αυτή, οι ενέργειες που κάνουμε είναι οι εξής:

---

[2] *Δηλαδή είτε αγοράζουμε απευθείας τον δείκτη, εφόσον αυτό είναι δυνατό, είτε αγοράζουμε τις μετοχές που αποτελούν τον δείκτη σε αναλογία ίδια με αυτή που η καθεμιά συμμετέχει στον δείκτη. Δηλαδή αγοράζουμε ένα χαρτοφυλάκιο που έχει beta ίσο με 1 σε σχέση με τον δείκτη.*

[3] *Δηλαδή από την πώληση του δείκτη ή του χαρτοφυλακίου που έχουμε στην κατοχή μας.*

- <u>Ενέργειες σήμερα</u>:
  - Ενέργεια 1η: Αγοράζουμε το προθεσμιακό συμβόλαιο στις 1.490 μονάδες.
  - Ενέργεια 2η: Πουλάμε τον δείκτη στις 1.500 μονάδες (1.500 × 5 = 7.500).
  - Ενέργεια 3η: Καταθέτουμε το ποσό των 7.500 ευρώ που εισπράξαμε με επιτόκιο 4,5%.

Οι συνολικές εισροές/εκροές από τις παραπάνω συναλλαγές είναι μηδέν.

- <u>Ενέργειες μετά από ένα μήνα</u>:
  - Έστω ότι ο δείκτης έχει πάει στις 1.600 μονάδες. Αυτό σημαίνει ότι θα έχουμε ένα κέρδος από την αγορά του δείκτη της τάξεως των 110 μονάδων (=1.600–1.490) ή 110×5= 550 ευρώ.
  - Για την αγορά του δείκτη που πουλήσαμε πληρώνουμε 1.600×5=8.000 ευρώ.
  - Εισπράττουμε από την επένδυσή μας 7.528,13 ευρώ.

Οι συνολικές εισροές μας είναι: 550 – 8.000 +7.528,13 = 78,13 ευρώ.

  - Αν ο δείκτης είχε πάει στις 1.400 μονάδες, τότε από το προθεσμιακό συμβόλαιο θα είχαμε ζημία 90 μονάδες (=1.490–1.400) ή 90×5=450 ευρώ.
  - Για την αγορά του δείκτη που πουλήσαμε πληρώνουμε 1.400×5=7.000 ευρώ.
  - Εισπράττουμε από την επένδυσή μας 7.528,13 ευρώ.

Οι συνολικές εισροές μας είναι: –450 – 7000 + 7528,13 = 78,13 ευρώ.

Παρατηρούμε ότι και πάλι έχουμε ένα κέρδος 78,13 ευρώ **ανεξάρτητα** από την κίνηση της υποκείμενης αξίας.

<u>ΠΡΟΣΟΧΗ:</u> Στην παραπάνω εξήγηση της λειτουργίας του μηχανισμού του arbitrage έχουμε υποθέσει ότι:

1. Δεν υπάρχουν κόστη συναλλαγών (προμήθειες και έξοδα για τις αγοραπωλησίες μετοχών και συμβολαίων).
2. Ο επενδυτής μπορεί να δανείζει και να δανείζεται στην αγορά ελεύθερα και με το ίδιο επιτόκιο το οποίο συμπίπτει με αυτό του χωρίς κίνδυνο επιτοκίου.
3. Επιτρέπεται η πώληση μετοχών που ο επενδυτής δεν κατέχει (short selling).
4. Μπορούν να γίνουν αγοραπωλησίες οποιουδήποτε ύψους ποσού (ακόμα και λεπτών του ευρώ) όπως και ότι μπορούν να γίνουν αγοραπωλησίες σε κλάσματα μετοχών.

Προστασία χαρτοφυλακίου από μείωση της αξίας του

Ο συστηματικός κίνδυνος (συντελεστής βήτα) ενός χαρτοφυλακίου συνδέει την αναμενόμενη απόδοση της μετοχής με τη μεταβλητότητα των αποδόσεων της αγοράς. Για παράδειγμα, έστω η τιμή μιας μετοχής είναι 17 ευρώ και το β της είναι 0,6 (αμυντική μετοχή). Τότε αν η αγορά αυξηθεί κατά 10%, αναμένουμε αύξηση της τιμής της μετοχής κατά 6% (=10% * 0,6). Δηλαδή περιμένουμε αναπροσαρμογή της τιμής της στα 18,02 ευρώ. Σε περίπτωση που θα έχουμε πτώση της αγοράς κατά 10%, αναμένουμε μείωση της τιμής κατά 6%, δηλαδή αναπροσαρμογή της τιμής της στα 15,98 ευρώ.

Παράδειγμα 5

Έστω ότι ένα χαρτοφυλάκιο αποτελείται από τις παρακάτω μετοχές:

Μετοχή	Beta	Όγκος	Τιμή σε ευρώ	Ποσό Επένδυσης
Μετοχή Α	0,7	10.000	3	30.000
Μετοχή Β	1,2	8.000	5	40.000
Μετοχή Γ	1,5	2.000	12,5	25.000
Συνολική Αξία				95.000

Τότε το β χαρτοφυλακίου είναι ίσο με:

$$\frac{30.000}{95.000} \times 0,7 + \frac{40,000}{95,000} \times 1,2 + \frac{25,000}{95,000} \times 1,5 = 1,1211$$

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε ένα μετοχικό χαρτοφυλάκιο που αποτελείται από τις μετοχές του δείκτη FTSE/ASE–20 σε ποσοστά συμμετοχής ίδια με αυτά με τα οποία συμμετέχουν στον δείκτη. Εκτιμάμε ότι ο δείκτης έχει ακολουθήσει μια ανοδική πορεία η οποία αναμένεται να αντιστραφεί στο προσεχές διάστημα.

Μια κίνηση που θα μπορούσαμε να κάνουμε είναι να πουλήσουμε όλο το χαρτοφυλάκιό μας και να τις ξαναγοράσουμε αργότερα όταν θα έχει ολοκληρωθεί η διόρθωση. Κάτι τέτοιο όμως θα είχε αυξημένο κόστος συναλλαγών, ενώ αν το χαρτοφυλάκιό μας είναι μεγάλο, οι πωλήσεις μας θα πιέσουν κι άλλο τις τιμές των μετοχών. Μια εναλλακτική στρατηγική είναι να διασφαλίσουμε το χαρτοφυλάκιό μας με πώληση προθεσμιακών συμβολαίων στον FTSE/ASE–20. Ο αριθμός των συμβολαίων που θα χρειαστεί να πουλήσουμε δίνεται από τον τύπο:

$$\# \, futures = \frac{\text{Αξία χαρτοφυλακίου προς ασφάλιση}}{(\text{Επίπεδα δείκτη}) \times \text{μέγεθος συμβολαίου}} \times \text{beta} \qquad (6)$$

Να διευκρινίσουμε ότι ο όρος «επίπεδα δείκτη», που εμφανίζεται στον παραπάνω τύπο, αναφέρεται στην αξία του μέσου που χρησιμοποιούμε για να αντισταθμίσουμε το χαρτοφυλάκιο (στην περίπτωσή μας η αξία του ΣΜΕ επί του δείκτη).

Παράδειγμα 6

Έστω ότι το χαρτοφυλάκιό μας έχει αξία 500.000 ευρώ και μιμείται τον δείκτη FTSE/ASE–20 (δηλαδή το β του χαρτοφυλακίου μας ως προς τον δείκτη είναι 1). Έστω ακόμα ότι ο δείκτης βρίσκεται στις 1.230 μονάδες και το ΣΜΕ με λήξη ενός μηνός διαπραγματεύεται στις 1.250 μονάδες. Μία από τις αποφάσεις που πρέπει να πάρουμε είναι τι ποσοστό της αξίας του χαρτοφυλακίου μας θέλουμε να ασφαλίσουμε, δηλαδή να καθορίσουμε τον **συντελεστή αντιστάθμισης (Hedge Ratio)** και επομένως να πουλήσουμε τον ανάλογο αριθμό συμβολαίων. Αυτό σημαίνει ότι αν για την προστασία του χαρτοφυλακίου μας χρειάζεται να πουλήσουμε *#N* συμβόλαια και θέλουμε την προστασία του ενός τετάρτου του χαρτοφυλακίου, τότε ο συντελεστής είναι 25% και θα πουλήσουμε *#N*/4 συμβόλαια. Στη συνέχεια του παραδείγματος θα αναπτύξουμε δύο περιπτώσεις για συντελεστές 100% και 50%.

Επιλογή 1η: Επιθυμούμε την προστασία ΟΛΟΚΛΗΡΗΣ της αξίας του χαρτοφυλακίου μας (Hedge Ratio = 100%).

Πουλάμε προθεσμιακά συμβόλαια ονομαστικής αξίας 500.000 ευρώ. Με το συμβόλαιο στις 1.250 μονάδες απαιτείται, βάσει της σχέσης (6), η πώληση 80 συμβολαίων [$=(500000 \times X1)/(1250 \times X5)$] για τα οποία θα απαιτηθεί η καταβολή margin.

Κρατάμε τα συμβόλαια μέχρι τη λήξη τους.

- Ο δείκτης πέφτει στις 1.107 μονάδες (–10% από τα αρχικά επίπεδα). Το κέρδος μας από τα ΣΜΕ που πουλήσαμε είναι 143 μονάδες (=1.250–1.107) δηλαδή 715 ευρώ ($=143 \times X5$) για κάθε συμβόλαιο ή 57.200 ευρώ για όλα τα συμβόλαια. Αντίθετα οι μετοχές μας έχουν χάσει το 10% της αξίας τους δηλαδή η ζημιά είναι 50.000 ευρώ. Επομένως η συνολική μας θέση, παρά τη μείωση των μετοχών έχει κλείσει με κέρδος 7.200 ευρώ[4].
- Ο δείκτης κλείνει στις 1.476 μονάδες (20% από τα αρχικά επίπεδα). Η ζημιά μας από τη θέση στα ΣΜΕ είναι 1476–1250=226 μονάδες ή 1.130 ευρώ ανά συμβόλαιο, δηλαδή συνολικά 90.400 ευρώ. Από την άλλη μεριά, η αξία των μετοχών

[4] *Δεν έχουμε πλήρη αντιστάθμιση κερδών-ζημιών γιατί υποθέσαμε ότι τα προθεσμιακά συμβόλαια έκλεισαν 11,44% κάτω από τα αρχικά επίπεδα ενώ ο δείκτης 10%. Αν σε κάποια δεδομένη χρονική στιγμή, επειδή πιστεύαμε ότι η διόρθωση έχει ολοκληρωθεί, αποφασίζαμε να κλείσουμε τη θέση μας στα προθεσμιακά συμβόλαια με το να τα αγοράσουμε και, τόσο τα ΣΜΕ όσο και ο δείκτης είχαν χάσει 10% της αξίας τους, τότε από τις μεν μετοχές θα είχαμε ζημιά 50.000 ευρώ αλλά από τα ΣΜΕ (που θα διαπραγματεύονταν 10% χαμηλότερα) το κέρδος θα ήταν 1250–1125=125 μονάδες ή 625 ευρώ ανά συμβόλαιο και συνολικά 50.000 ευρώ. Επομένως, θα υπήρχε πλήρης αντιστάθμιση.*

μας έχει αυξηθεί κατά 20%, δηλαδή κατά 100.000 ευρώ. Επομένως, η συνολική μας θέση παρά τη ζημιά από τα ΣΜΕ έχει κλείσει με ένα κέρδος 9.600 ευρώ.

Επιλογή 2η: Επιθυμούμε την προστασία ΜΕΡΟΥΣ της αξίας του χαρτοφυλακίου μας (τη μισή αξία – Hedge Ratio = 50%)

Έστω ότι παρά τις προβλέψεις μας για πτώση της αγοράς, θέλουμε να αναλάβουμε τον κίνδυνο να ασφαλίσουμε μόνο το 50% της αξίας του χαρτοφυλακίου μας. Αυτό σημαίνει ότι θα πρέπει να πουλήσουμε το 50% των συμβολαίων που απαιτεί η σχέση (5). Πουλάμε λοιπόν 40 συμβόλαια. Στη λήξη τους:

- Ο δείκτης πέφτει στις 1.107 μονάδες (–10% από τα αρχικά επίπεδα). Το κέρδος μας από τα ΣΜΕ που πουλήσαμε είναι 143 μονάδες (=1.250–1.107) δηλαδή 715 ευρώ (=143×X5) για κάθε συμβόλαιο ή 28.600 ευρώ για όλα τα συμβόλαια. Αντίθετα οι μετοχές μας έχουν χάσει το 10% της αξίας τους, δηλαδή η ζημιά είναι 50.000 ευρώ. Επομένως, η συνολική μας θέση έχει παρουσιάσει ζημιά 21.400 ευρώ η οποία όμως έχει μετριαστεί λόγω της πώλησης των ΣΜΕ
- Ο δείκτης κλείνει στις 1.476 μονάδες (20% από τα αρχικά επίπεδα). Η ζημιά μας από τη θέση στα ΣΜΕ είναι 1476–1250=226 μονάδες ή 1.130 ευρώ ανά συμβόλαιο, δηλαδή συνολικά 45.200 ευρώ. Από την άλλη μεριά, η αξία των μετοχών μας έχει αυξηθεί κατά 20% δηλαδή κατά 100.000 ευρώ. Επομένως, η συνολική μας θέση παρά τη ζημιά από τα ΣΜΕ έχει κλείσει με ένα κέρδος 54.800 ευρώ.

Έστω ότι το χαρτοφυλάκιό μας έχει θετικό beta ίσο με 1,5. Υποθέτουμε ότι θέλουμε να ασφαλίσουμε την αξία του από ενδεχόμενη πτώση της αγοράς. Ο δείκτης είναι στις 1.230 μονάδες και το ΣΜΕ λήξης ενός μήνα διαπραγματεύεται στις 1.250 μονάδες.

Χρησιμοποιώντας τη σχέση (5) βρίσκουμε ότι πρέπει να πουλήσουμε 120 συμβόλαια. Έστω λοιπόν ότι σε κάποια δεδομένη χρονική στιγμή πριν από τη λήξη του συμβολαίου, εκτιμούμε ότι οι στόχοι μας επιτεύχθηκαν και κλείνουμε τη θέση μας. Επειδή η ημερομηνία κατά την οποία διενεργούμε τη συναλλαγή είναι πριν τη λήξη του συμβολαίου, η τιμή του είναι διαφορετική από αυτή του δείκτη.

- Υποθέτουμε ότι ο δείκτης έχει πέσει κατά 10% στις 1.107 μονάδες, όπως και το ΣΜΕ το οποίο διαμορφώνεται στις 1.125 μονάδες. Την ίδια στιγμή το μετοχικό μας χαρτοφυλάκιο έχει χάσει το 15% της αξίας του (=10×1,5), επομένως παρουσιάζει ζημιά ίση με 75.000 ευρώ. Από τα ΣΜΕ έχουμε κέρδος 1250–1125=125 μονάδες ή 625 ευρώ ανά συμβόλαιο, δηλαδή 75.000 ευρώ συνολικά. Παρατηρούμε ότι υπάρχει πλήρης αντιστάθμιση των ζημιών του χαρτοφυλακίου μας με τα κέρδη από την πώληση των ΣΜΕ.
- Ο δείκτης έχει κερδίσει 20% και βρίσκεται στις 1.476 μονάδες και το ΣΜΕ στις 1.500 μονάδες. Η ζημιά από τα προθεσμιακά συμβόλαια είναι 1500–1250=250 μονάδες ή 1.250 ευρώ ανά συμβόλαιο δηλαδή 150.000 ευρώ συνολικά. Από την άλλη μεριά η αξία του χαρτοφυλακίου μας έχει αυξηθεί κατά 30% ή κατά 150.000 ευρώ συνολικά, όσο και η ζημιά από τα ΣΜΕ.

Ο βαθμός επιτυχίας της αντιστάθμισης στα παραδείγματά μας, εξαρτάται από τη **σωστή εκτίμηση του beta**. Η παράμετρος αυτή δεν είναι στατιστική και ο υπολογισμός της εξαρτάται από τον χρονικό ορίζοντα του δείγματος που χρησιμοποιούμε, αλλά και από την ίδια τη συμπεριφορά της μετοχής. Ένα άλλο πρόβλημα των παραδειγμάτων μας είναι ότι έχουμε αποδεχτεί ότι το beta του ΣΜΕ σε σχέση με τον δείκτη είναι 1. Αυτό όμως δεν συμβαίνει στην πραγματικότητα. Η πράξη δείχνει ότι τα ΣΜΕ είναι πιο ευμετάβλητα από ό,τι ο δείκτης και επομένως έχουν beta μεγαλύτερο της μονάδας. Αυτό το πρόβλημα μπορεί να λυθεί με δύο τρόπους:

1ος τρόπος: Υπολογίζουμε το beta του ΣΜΕ σε σχέση με τον δείκτη και αντικαθιστούμε τη σχέση (5) με την:

$$\#\,futures = \frac{\text{Αξία χαρτοφυλακίου προς ασφάλιση}}{(\text{Επίπεδα δείκτη}) \times \text{μέγεθος συμβολαίου}} \times \frac{\text{betaχαρτοφυλακίου}}{\text{betaΣ.Μ.Ε.}} \qquad (7)$$

Πράγματι, αν στο παράδειγμα που αναφέραμε προηγουμένως (όπου το beta του χαρτοφυλακίου είναι 1,5) έχουμε βρει ότι το beta του ΣΜΕ είναι 1,2, τότε, αντικαθιστώντας στη σχέση (7), βρίσκουμε ότι ο απαιτούμενος αριθμός των ΣΜΕ που πρέπει να πουλήσουμε είναι 100 [=(500000×1,5)/(1250×5×1,2)]. Αν θεωρήσουμε τώρα την πτωτική πορεία του δείκτη κατά 10% στις 1.107 μονάδες, τότε η τιμή του ΣΜΕ έχει πέσει κατά 12% στις 1.100 μονάδες και η αξία του μετοχικού μας χαρτοφυλακίου έχει μειωθεί κατά 15%, δηλαδή κατά 75.000 ευρώ. Από τα ΣΜΕ το κέρδος μας είναι 1250–1100=150 μονάδες ή 750 ευρώ ανά συμβόλαιο δηλαδή 75.000 ευρώ συνολικά, όση είναι η ζημιά από την πτώση των μετοχών μας.

Με τον ίδιο τρόπο θα είχαμε αντιστάθμιση και στην περίπτωση ανόδου του δείκτη.

2ος τρόπος: Να υπολογίσουμε το beta του χαρτοφυλακίου σε σχέση με το προθεσμιακό συμβόλαιο και όχι με τον δείκτη. Τότε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη σχέση (5), αλλά στη θέση του beta του χαρτοφυλακίου πρέπει να βάλουμε το beta σε σχέση με το ΣΜΕ που έχουμε υπολογίσει.[5] Για παράδειγμα, έστω ότι έχουμε βρει ότι το β του χαρτοφυλακίου μας σε σχέση με το προθεσμιακό συμβόλαιο είναι 2. Ο αριθμός των ΣΜΕ που πρέπει να πουλήσουμε είναι 160 [=500000/(1250×5) ×2]. Αν η τιμή του ΣΜΕ κινηθεί κατά 15% στις 1437,5 μονάδες, η αξία των μετοχών θα έχει αυξηθεί κατά 30%, δηλαδή θα έχουμε κέρδος 150.000 ευρώ. Από την άλλη μεριά, από την πώληση των ΣΜΕ έχουμε ζημιά

[5] *Ο υπολογισμός του beta μιας μετοχής μπορεί να γίνει αν χρησιμοποιήσουμε το υπόδειγμα της αγοράς (market model, $R_{it}=\alpha+\beta_i R_{mt}+\varepsilon_t$), όπου R_{it} είναι οι αποδόσεις της μετοχής σε μια περίοδο t, R_{mt} είναι οι αποδόσεις του δείκτη για την ίδια περίοδο, b το ζητούμενο beta, α μια σταθερά της εξίσωσης και ε_t ο συντελεστής λάθους με μέση τιμή 0 και τυπική απόκλιση 1. Στην πράξη χρησιμοποιούμε ημερήσιες, εβδομαδιαίες ή μηνιαίες αποδόσεις της μετοχής, κατόπιν τις αντίστοιχες αποδόσεις του ΣΜΕ και μετά με γραμμική παλινδρόμηση (linear regression), με τη βοήθεια κάποιου στατιστικού πακέτου, υπολογίζουμε το beta.*

1437.5–1250=187,5 μονάδες ή 937,5 ευρώ ανά συμβόλαιο δηλαδή 150.000 ευρώ συνολικά, όσο το κέρδος από την ανατίμηση της αξίας του χαρτοφυλακίου μας.

Συμπέρασμα: Η προστασία ενός μετοχικού χαρτοφυλακίου μπορεί να επιτευχθεί με τη βοήθεια των ΣΜΕ Ο αριθμός των συμβολαίων που πρέπει να πουλήσουμε ή να αγοράσουμε εξαρτάται από το beta του χαρτοφυλακίου μας σε σχέση με το προθεσμιακό συμβόλαιο.

Δραστηριότητα 8/Κεφάλαιο 6

Σήμερα είμαστε στον μήνα Ιούνιο και στο CBOT οι τιμές στο ασήμι είναι:

Μήνας παράδοσης Τιμή

Στην τρέχουσα αγορά (spot) $5.32

Αύγουστο $5.55

Οκτώβριο $5.80

Δεκέμβριο $6.13

Α) Να υπολογίσετε το implied repo rate.

Β) Να υπολογίσετε το implied forward repo rate για τον Αύγουστο.

Θα βρείτε τη δική μας απάντηση στο Παράρτημα, στο τέλος του κεφαλαίου.

Αντιστάθμιση αγοράς με ΣΜΕ μπορεί να χρησιμοποιηθεί, για παράδειγμα, από τον διαχειριστή ενός αμοιβαίου κεφαλαίου ή τον διαχειριστή ενός συνταξιοδοτικού ταμείου, ο οποίος αναμένει τη λήψη ενός μεγάλου χρηματικού ποσού για επένδυση. Δηλαδή, ο διαχειριστής φοβάται την πιθανή άνοδο των τιμών στην υποκείμενη αγορά (μετοχών, για παράδειγμα) για το διάστημα μεταξύ του τρέχοντος χρόνου και της ημερομηνίας που θα λάβει το νέο κεφάλαιο. Αντιστάθμιση πώλησης μπορεί να χρησιμοποιηθεί, για παράδειγμα, από έναν παραγωγό αγροτικών προϊόντων, από μία εταιρία που θα εκδώσει καινούργια χρεόγραφα (για παράδειγμα, εταιρικά ομόλογα), από μία επιχείρηση που θα αγοράσει πρώτη ύλη κ.λπ. Στην περίπτωση αυτή, καθένας από αυτούς μπορεί να πιστεύει σε μελλοντική πτώση των τιμών στην υποκείμενη αγορά.

Στην πράξη, οι περισσότερες αντισταθμίσεις είναι σταυροειδείς αντισταθμίσεις (cross hedges). Δηλαδή το ΣΜΕ για αντιστάθμιση είναι διαφορετικό από το περιουσιακό στοιχείο στην υποκείμενη αγορά. Για παράδειγμα, ο διαχειριστής χαρτοφυλακίου, που έχει αγοράσει μετοχές στο Χρηματιστήριο Αθηνών (όχι κατ' ανάγκη αυτές που συνθέτουν τον Γενικό Δείκτη Τιμών του Χ.Α.Α.) πουλάει ΣΜΕ του Γενικού Δείκτη Τιμών του Χ.Α.Α. Στην περίπτωση της σταυροειδούς αντιστάθμισης, μεγάλη σημασία έχει ο βαθμός συσχέτισης των μεταβολών των τιμών των ΣΜΕ και αυτών στην υποκείμενη αγορά, ο οποίος πρέπει να είναι ισχυρός. Αυτό αποτελεί την έννοια του κινδύνου βάσης (basis risk).

Ως **βάση**, φ, ορίζεται η διαφορά:

$$\text{Βάση = τιμή στην τρέχουσα αγορά – τιμή στη μελλοντική αγορά} \\ \text{ή} \\ \varphi_t = S_t - F_t,\ \ t = 0,1,...,T \tag{8}$$

και ο αντισταθμιστής ανταλλάσσει τον κίνδυνο τιμής με τον κίνδυνο βάσης. Εάν η τιμή στην τρέχουσα αγορά αυξάνεται περισσότερο από τη μελλοντική τιμή, τότε λέμε ότι η βάση ισχυροποιείται και, αντίθετα, ότι είναι ασθενής. Ο αγοραστής αντισταθμιστής (long hedger) εάν η βάση ισχυροποιείται απροσδόκητα, η θέση του χειροτερεύει και όταν αυτή είναι ασθενής, τότε η θέση του βελτιώνεται. Το αντίθετο ισχύει στον πωλητή αντισταθμιστή (short hedger).

Ένας από τους βασικότερους παράγοντες που επηρεάζουν τον κίνδυνο βάσης είναι η επιλογή του ΣΜΕ, επιλογή που συνίσταται (i) στην επιλογή της υποκείμενης αξίας και (ii) στην επιλογή του μήνα. Εάν το στοιχείο που επιθυμούμε να αντισταθμίσουμε ταυτίζεται με την υποκείμενη αξία του ΣΜΕ, τότε η πρώτη επιλογή είναι απλή. Σε διαφορετική περίπτωση, θα πρέπει να επιλέξουμε διαθέσιμα ΣΜΕ, των οποίων οι μελλοντικές τιμές έχουν υψηλό συντελεστή συσχέτισης με τις τιμές της υποκείμενης αξίας. Για την επιλογή του μήνα, εάν ο μήνας παράδοσης του ΣΜΕ συμπίπτει με τη λήξη της αντιστάθμισης, τότε επιλέγεται ο μήνας αυτός. Στην πράξη, επιλέγουμε μετέπειτα μήνα για τον λόγο ότι συνήθως, οι μελλοντικές τιμές χαρακτηρίζονται από υψηλή μεταβλητότητα στον μήνα παράδοσης.

<u>Η αρχή της άριστης αντιστάθμισης με το κριτήριο της ελάχιστης διακύμανσης</u>

Έστω ότι ένας επενδυτής έχει μία θέση στην τρέχουσα αγορά με αξία S_0. Το κέρδος ή η ζημία του και ο κίνδυνος της μη–αντισταθμισμένης θέσης θα είναι ίσα με $(\tilde{S}_1 - S_0) = 1\Delta\tilde{S}$ και $\mathrm{Var}(\Delta\tilde{S})$, αντίστοιχα. Εάν επιθυμεί να αντισταθμίσει τη θέση του αυτή με *k* ΣΜΕ, τότε το κέρδος ή η ζημία του και ο κίνδυνος του χαρτοφυλακίου του θα είναι ίσα με: $(1\Delta\tilde{S} - k\Delta\tilde{F})$ και $\mathrm{Var}(1\Delta\tilde{S} - k\Delta\tilde{F})$, αντίστοιχα. Για να ελαχιστοποιηθεί ο κίνδυνος (πρώτη παράγωγος της συνάρτησης του κινδύνου ως προς *k* και επίλυση εξίσωσης ως προς *k*), θα πρέπει:

$$k^* = \frac{\sigma(\Delta\tilde{S})\varrho(\Delta\tilde{S},\Delta\tilde{F})}{\sigma(\Delta\tilde{F})} = \frac{\mathrm{cov}(\Delta\tilde{S},\Delta\tilde{F})}{\sigma^2(\Delta\tilde{F})} \tag{9}$$

που είναι ο <u>λόγος αντιστάθμισης</u> (hedge ratio). Εναλλακτικά, ο λόγος αντιστάθμισης, που ελαχιστοποιεί τον κίνδυνο, μπορεί να βρεθεί και από τον γωνιακό συντελεστή (β) της παλινδρόμησης της $\Delta\tilde{S}$ στην $\Delta\tilde{F}$. Η αποτελεσματικότητα της αντιστάθμισης ερμηνεύεται από τον συντελεστή προσδιορισμού της παραπάνω παλινδρόμησης. Όταν ο εκτιμητής της παραμέτρου β τείνει στη μονάδα, τότε η βάση φ_t τείνει να ισούται με τον σταθερό όρο της παλινδρόμησης. Ακόμα, εάν το πρόσημο του εκτιμητή β είναι αρνητικό (συνήθως δεν παρατηρείται), τότε οι μεταβολές των τιμών στην τρέχουσα αγορά και στη μελλοντική αγορά κινούνται προς αντίθετη κατεύθυνση. Αντίθετα, εάν έχει θετικό πρόσημο.

Για τον υπολογισμό των ΣΜΕ πολλαπλασιάζουμε τον εκτιμηθέντα συντελεστή β με τον λόγο (αριθμός μονάδων υποκείμενης θέσης που θα αντισταθμιστεί) προς (αριθμός μονάδων που αποτελούν τη βάση του ΣΜΕ).

6.3.5 ΣΜΕ σε μετοχικούς δείκτες (stock index futures)

Τα ΣΜΕ σε μετοχικούς δείκτες ξεκίνησαν στις αρχές του 1982 από το Kansas City Board of Trade (KCBT) επί του δείκτη Value Line και, αμέσως μετά από το χρηματιστήριο του Σικάγο (CME), επί του δείκτη S&P 500. Η αντιστάθμιση με ΣΜΕ επί μετοχικών δεικτών εφαρμόζεται άμεσα στη διαχείριση χαρτοφυλακίων.

Έστω, για παράδειγμα, ένας διαχειριστής έχει διαρθρώσει ένα καλά διαφοροποιημένο χαρτοφυλάκιο για λογαριασμό του αμοιβαίου κεφαλαίου ΑΚ με σημερινή αξία ίση με 4 εκατ. € και συστηματικό κίνδυνο (μετρούμενο ως προς τις αποδόσεις του δείκτη FTSE/ASE–20) ίσο με 1.22. Ο διαχειριστής πιστεύει ότι η αγορά είναι πτωτική και, προκειμένου να έχει μειωμένες αποδόσεις, επιθυμεί να προστατευτεί από τον κίνδυνο αυτό. Μία λύση είναι να πουλήσει όλο το χαρτοφυλάκιο και να τοποθετήσει το κεφάλαιο σε βραχυχρόνιες ομολογίες. Ωστόσο, οι περιορισμοί της επενδυτικής πολιτικής του ΑΚ δεν του επιτρέπουν κάτι τέτοιο. Άλλωστε, το κόστος της ρευστοποίησης είναι πολύ υψηλό (συμπεριλαμβανομένων των φόρων) και το κεφάλαιο θεωρείται αρκετά υψηλό, που θα επηρέαζε αρνητικά ακόμα περισσότερο την αγορά.

Μία εναλλακτική λύση είναι με τη χρήση των ΣΜΕ επί του δείκτη FTSE/ASE–20 και, συγκεκριμένα, να πουλήσει ΣΜΕ επί του δείκτη, ώστε να μειώσει την έκθεσή του στον κίνδυνο της αγοράς. Ο αριθμός των ΣΜΕ που θα πουλήσει είναι:

$$N = \left(\frac{V_P}{V_F}\right)\beta_P \qquad (10)$$

όπου V_P είναι η αξία του χαρτοφυλακίου, V_F είναι η αξία των ΣΜΕ επί του δείκτη και β_P είναι ο συστηματικός κίνδυνος του χαρτοφυλακίου. Ας υποθέσουμε ότι η τιμή του ΣΜΕ επί του δείκτη FTSE/ASE–20 είναι 1400 (ο πολλαπλασιαστής είναι ίσος με 5). Συνεπώς, από την εφαρμογή της σχέσης (9) ο διαχειριστής πρέπει να προβεί σε πώληση 697.14 ΣΜΕ.

Εάν ο διαχειριστής επιθυμούσε συγκεκριμένα το χαρτοφυλάκιό του να έχει μειωμένο κίνδυνο επειδή φοβάται την πτωτική πορεία της αγοράς (π.χ., αντί $\beta=1.22$ να ήταν $\beta^1=0.8$), τότε:

$$N = \left(\frac{V_P}{V_F}\right)(\beta_P^1 - \beta_P) \qquad (11)$$

όπου β_P^1 είναι ο συστηματικός κίνδυνος–στόχος του χαρτοφυλακίου και στο παράδειγμά μας θα ήταν $N = -240$ ΣΜΕ (το πρόσημο «–» για πώληση) επί του δείκτη FTSE/ASE–20.

Τέλος, αντί του συντελεστή του συστηματικού κινδύνου του χαρτοφυλακίου, θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί ο συντελεστής που ελαχιστοποιεί τον κίνδυνο της αντιστάθμισης (risk–minimizing hedge ratio), ο οποίος βρίσκεται από την εκτίμηση του γωνιακού συντελεστή, $\beta_{.RM}$ της παλινδρόμησης των μεταβολών των αποδόσεων του χαρτοφυλακίου στην τρέχουσα αγορά επί των ποσοστιαίων μεταβολών των τιμών των ΣΜΕ. Έτσι, στη σχέση (9) αντικαθιστούμε τον συντελεστή β_P με τον $\beta_{.RM}$.

Δραστηριότητα 9/Κεφάλαιο 6

Ένας έμπορος κακάο έχει στις αποθήκες του εμπόρευμα αξίας $10εκατ. Με τρέχουσα τιμή $1.250 ανά μετρικό τόνο και κίνδυνο αποδόσεων (τυπ. απόκλ.) 0.27. Για να αντισταθμίσει τον κίνδυνο που αντιμετωπίζει, επιθυμεί να κάνει χρήση ΣΜΕ σε κακάο στο Χρηματιστήριο Coffee, Cocoa and Sugar Exchange, όπου το κάθε ΣΜΕ έχει μέγεθος 10 μ.τ. Η μεταβλητότητα των τιμών ΣΜΕ είναι 0.33 και ο συντελεστής συσχέτισης μεταξύ ΣΜΕ και τιμών spot είναι 0.85. (i) Ποιο είναι το hedge ratio; (ii) Σε πόσα συμβόλαια πρέπει να πάρει θέση; (iii) Θα πρέπει να προβεί σε αγορά ή πώληση ΣΜΕ;

Θα βρείτε τη δική μας απάντηση στο Παράρτημα, στο τέλος του κεφαλαίου.

Δραστηριότητα 10/Κεφάλαιο 6

Ένα χαρτοφυλάκιο αξίζει 100 εκ. € και έχει συντελεστή βήτα 1.08, μετρούμενο ως προς τον γενικό δείκτη στην τρέχουσα αγορά, ο οποίος είναι στις 350 μονάδες. Εάν ο διαχειριστής επιθυμεί την πλήρη αντιστάθμιση του χαρτοφυλακίου, τι θέση θα πάρει στη μελλοντική αγορά και πόσα ΣΜΕ;

Θα βρείτε τη δική μας απάντηση στο Παράρτημα, στο τέλος του κεφαλαίου.

Ενότητα 6.4

ΔΙΚΑΙΩΜΑΤΑ ΠΡΟΑΙΡΕΣΗΣ (OPTIONS CONTRACTS)

Στην ενότητα αυτή θα αναπτύξουμε τα δικαιώματα προαίρεσης. Θα χρησιμοποιήσουμε τους παρακάτω συμβολισμούς για τα διάφορα στοιχεία τους:

Σύμβολο	Σημασία
X	Τιμή εξάσκησης
S	Τιμή Τίτλου/Υποκείμενης Αξίας
S_t	Τιμή Τίτλου κατά τη χρονική στιγμή t
σ	Τυπική απόκλιση από τη μέση τιμή του τίτλου
$C(S_0,T,X)$	Αξία Call (Call Premium), όπου η τιμή του υποκείμενου τίτλου είναι S_0, λήγει τον χρόνο T και η τιμή εξάσκησης είναι X
$P(S_0,T,X)$	Αξία Put (Put Premium) όπου η τιμή του υποκείμενου τίτλου είναι S_0, λήγει τον χρόνο T και η τιμή εξάσκησης είναι X
rf	Το χωρίς κίνδυνο επιτόκιο
$T-t$	Χρόνος ως τη λήξη του option
T	Χρόνος λήξης του option[6]

Τα βασικά στοιχεία των δικαιωμάτων είναι τα παρακάτω:

Υποκείμενο Προϊόν/Αξία/Τίτλος. Το υποκείμενο προϊόν είναι ο τίτλος ή το αγαθό επί του οποίου συνάπτεται το δικαίωμα. Είναι δηλαδή το προϊόν, το οποίο ο κάτοχος του δικαιώματος αγοράς δικαιούται να αγοράσει και ο κάτοχος του δικαιώματος πώλησης δικαιούται να πουλήσει.

[6] *Για απλοποίηση θα χρησιμοποιούμε απλώς T, εκτός και εάν δηλώνεται διαφορετικά.*

Μέγεθος συμβολαίου. Τα δικαιώματα αφορούν ένα καθορισμένο μέγεθος συμβολαίου. Συγκεκριμένα το μέγεθος του συμβολαίου των δικαιωμάτων επί μετοχών δείχνει τον αριθμό των μετοχών που καλύπτει το κάθε δικαίωμα. Στο Χ.Π.Α. ένα συμβόλαιο μετοχικών δικαιωμάτων αποτελείται από 100 μετοχές το καθένα.

Διάρκεια (Maturity). Το χρονικό διάστημα μέσα στο οποίο ένα δικαίωμα μπορεί να εξασκηθεί. Στην περίπτωση των δικαιωμάτων αμερικανικού τύπου η εξάσκηση μπορεί να γίνει οποτεδήποτε μέσα στο διάστημα αυτό. Στην περίπτωση των δικαιωμάτων ευρωπαϊκού τύπου, η διάρκεια δηλώνει το χρονικό διάστημα που απομένει μέχρι την ημερομηνία εξάσκησής του. Στην ημερομηνία αυτή, ο αγοραστής του δικαιώματος χάνει το δικαίωμα που έχει και ο πωλητής απαλλάσσεται από την υποχρέωσή του, με την προϋπόθεση ότι το δικαίωμα δεν έχει εξασκηθεί.

Ο *χρόνος μέχρι τη λήξη* του δικαιώματος εκφράζεται ως δεκαδικός αριθμός. Για παράδειγμα, έστω ότι η τρέχουσα ημερομηνία είναι 9 Απριλίου και η ημερομηνία λήξης του δικαιώματος είναι 18 Ιουλίου. Τότε, απλώς, μετράμε τις ημέρες που απομένουν από σήμερα (9 Απριλίου) μέχρι τη λήξη (18 Ιουλίου), που είναι: υπόλοιπο Απριλίου 21 ημέρες, Μάιος 31 ημέρες, Ιούνιος 30 ημέρες και 18 ημέρες στον Ιούλιο, σύνολο 100 ημέρες. Έτσι, ο υπόλοιπος χρόνος μέχρι τη λήξη του δικαιώματος είναι ίσος με 100/365 = 0.274.

Τιμή εκτέλεσης/Εξάσκησης (Strike/Exercise Price). Είναι η προκαθορισμένη τιμή στην οποία ο κάτοχος ενός δικαιώματος αγοράς μπορεί να αγοράσει τον τίτλο και ο κάτοχος ενός δικαιώματος πώλησης μπορεί να πουλήσει τον τίτλο. Η τιμή αυτή δεν μεταβάλλεται κατά τη διάρκεια της ζωής του δικαιώματος,

Τιμή Δικαιώματος (Premium). Είναι το χρηματικό ποσό που πρέπει να καταβάλει ο αγοραστής του δικαιώματος στον πωλητή του δικαιώματος, ως αντάλλαγμα για την παραχώρηση του δικαιώματος να αγοράσει ή να πουλήσει την υποκείμενη αξία. Το ποσό της τιμής του δικαιώματος καθορίζεται από την προσφορά και τη ζήτηση και συνεπώς υπόκειται σε διαρκείς διακυμάνσεις. Η πληρωμή οφείλεται στον πωλητή, ανεξάρτητα από το αν το δικαίωμα εκτελεστεί ή όχι.

rf, η απόδοση της επένδυσης χωρίς κίνδυνο (risk–free rate). Για παράδειγμα, μια ομολογία που εκδίδει το κράτος και αγοράζεται από τους επενδυτές (T–bill).

Call Option

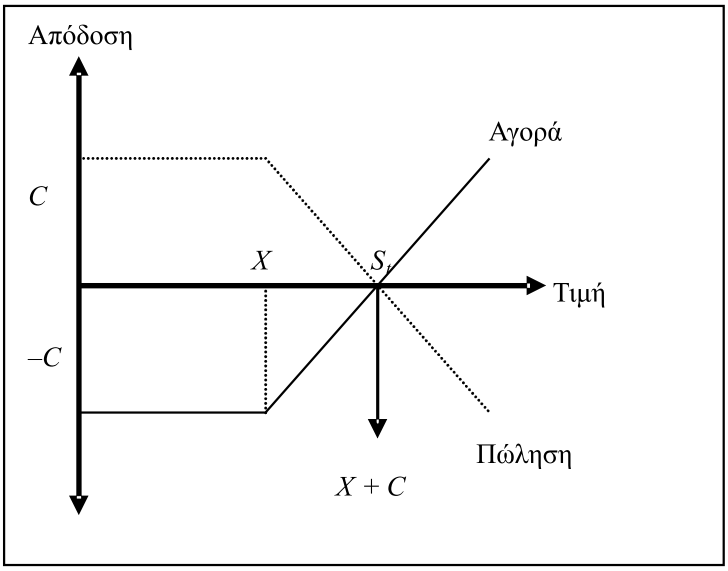
Ένα δικαίωμα προαίρεσης αγοράς (**call option**) δίνει το δικαίωμα στον κάτοχό του να αγοράσει την υποκείμενη αξία σε δεδομένη χρονική στιγμή (expiration date) σε συγκεκριμένη τιμή (strike price), πληρώνοντας την αξία του δικαιώματος (premium). Το κόστος του δικαιώματος ισούται με το γινόμενο του μεγέθους του συμβολαίου (contract size) επί το premium (call or option premium).

Είναι το δικαίωμα αγοράς μιας συγκεκριμένης ποσότητας αξίας, αγαθού ή νομίσματος, σε μια καθορισμένη τιμή εξάσκησης (X) και μετά από (ή μέσα σε) κάποιο συγκεκριμένο χρονικό διάστημα καταβάλλοντας σήμερα το premium.

Αν στη λήξη της χρονικής περιόδου η τιμή του τίτλου (S_t) είναι μεγαλύτερη από την τιμή άσκησης (X), ο αγοραστής του call option (long position) ασκεί το δικαίωμά του και αγοράζει την υποκείμενη αξία πληρώνοντας X ευρώ (strike price) και την πουλάει αμέσως για S_t ευρώ αποκομίζοντας ένα κέρδος $S_t - X$. Φυσικά, πρέπει στον παραπάνω υπολογισμό να λάβουμε υπόψη μας και το premium που έχει ήδη καταβάλει κατά την αγορά.

Από το Διάγραμμα 3 βλέπουμε πως για να αγοράσει το δικαίωμα ο επενδυτής καταβάλλει –C€ και, εάν η τιμή της μετοχής S_t (της υποκείμενης αξίας) είναι μικρότερη από $X+C$, τότε η τιμή του δικαιώματος είναι μηδέν και ο κάτοχός του δεν εξασκεί το δικαίωμα, αλλά το αφήνει να λήξει.

Διάγραμμα 3



Από την προηγούμενη συζήτηση και το Διάγραμμα 3, μπορούμε να παρατηρήσουμε:

1. Το χειρότερο που μπορεί να συμβεί στον αγοραστή του δικαιώματος κλήσης (buyer of the call option) είναι να χάσει την τιμή αγοράς του δικαιώματος.
2. Ωστόσο, μια μικρή μεταβολή στην τιμή της υποκείμενης αξίας (στο παράδειγμά μας, της μετοχής) μπορεί να είναι η αιτία για την πλήρη απώλεια της τιμής αγοράς του δικαιώματος.
3. Το δυνητικό όφελος από τη θέση αγοράς του δικαιώματος είναι, θεωρητικά, απεριόριστο.
4. Ο κάτοχος του call option θα εξασκήσει το δικαίωμα οποιαδήποτε στιγμή η τιμή της μετοχής στη λήξη του δικαιώματος να είναι υψηλότερη από την τιμή εξάσκησης του δικαιώματος.

Αν όμως η τιμή της υποκείμενης αξίας είναι μικρότερη από X, τότε ο αγοραστής δεν προβαίνει σε καμία ενέργεια, αφήνει αναξιοποίητο το δικαίωμά του και χάνει το premium που έχει καταβάλει (αφήνει το δικαίωμα να εκπνεύσει). Δηλαδή:

$$C_T = \max\{0,\ S_T - X\} \tag{12}$$

Με ανάλογο τρόπο ο πωλητής του call option (short position) λαμβάνει από τον κάτοχο το premium και στην πρώτη περίπτωση έχει ζημιά ίση με $S_t - X$, ενώ στη δεύτερη περίπτωση το μοναδικό του κέρδος είναι το premium (διακεκομμένη γραμμή στο διάγραμμα 3).Το μέγιστο όφελος που μπορεί να έχει ο πωλητής του δικαιώματος κλήσης είναι η τιμή του δικαιώματος που του πλήρωσε ο αγοραστής (δηλαδή $+C$€, στο διάγραμμα 3), το οποίο επιτυγχάνει όταν ο κάτοχος του δικαιώματος (δηλαδή ο αγοραστής) δεν μπορεί να εξασκήσει το δικαίωμα. Με άλλα λόγια, το κέρδος του πωλητή είναι $+C$€, όταν η τιμή της μετοχής στην τρέχουσα αγορά είναι μικρότερη ή ίση S_t (δες στο διάγραμμα 3). Η μέγιστη ζημία του πωλητή, θεωρητικά, είναι απεριόριστη.

Με άλλα λόγια, ο αγοραστής του call στο τέλος της συμφωνημένης περιόδου λαμβάνει το max[0, $S_t - X$] ενώ αντίθετη είναι η απόδοση για τον πωλητή του Call. Για τον αγοραστή του call, το κέρδος από την εξάσκηση του δικαιώματος είναι απεριόριστο ενώ η μέγιστη ζημιά του περιορίζεται στο ποσό του premium ($-C$). Το νεκρό σημείο είναι η τιμή εξάσκησης X συν το premium ($X+C$) και η μέγιστη ζημιά το ύψος του premium. Αντίθετα, ο πωλητής μπορεί να υποστεί απεριόριστη ζημιά ενώ το ανώτατο κέρδος του περιορίζεται στο premium.

Για παράδειγμα, έστω ότι κάποιος αγοράζει ένα call option που δίνει το δικαίωμα να αποκτήσει μια μετοχή της εταιρείας ΑΒΓ πληρώνοντας 10 ευρώ (δηλαδή η τιμή εξάσκησης είναι 10 ευρώ) σε ένα μήνα από σήμερα. Για το δικαίωμα αυτό πληρώνει ένα premium 1,2 ευρώ. Αν σε ένα μήνα η τιμή της μετοχής στην αγορά γίνει 13 ευρώ, τότε το άμεσο κέρδος του είναι 3 ευρώ και υπολογίζοντας το premium που έχει πληρώσει το καθαρό του κέρδος είναι 1,8 ευρώ[7].

Αν, αντίθετα, η τιμή της μετοχής πέσει στα 8 ευρώ, τότε το δικαίωμα δεν εξασκείται και ο επενδυτής χάνει το premium των 1,2 ευρώ που κατέβαλε.

Δραστηριότητα 11/Κεφάλαιο 6

Να υπολογίσετε το άθροισμα των κερδών από τη θέση αγοράς (long call option) και τη θέση πώλησης (short call option). Πρόκειται για ένα παίγνιο μηδενικού αθροίσματος;

Θα βρείτε τη δική μας απάντηση στο Παράρτημα, στο τέλος του κεφαλαίου.

[7] *Ένας πιο ακριβής υπολογισμός θα λάμβανε υπόψη του και το ποσό των τόκων που απωλέστηκαν από την καταβολή του premium και κατά την εξαγωγή των κερδών/ ζημιών θα προσαύξανε το premium κατά το βραχυπρόθεσμο επιτόκιο r στη λήξη του δικαιώματος. Πάντως αυτό δεν θα άλλαζε τα συμπεράσματά μας.*

Put Option

Είναι το δικαίωμα πώλησης μιας συγκεκριμένης ποσότητας αξίας, αγαθού ή νομίσματος, σε μια καθορισμένη τιμή εξάσκησης (X) και μετά από (ή μέσα σε) κάποιο συγκεκριμένο χρονικό διάστημα καταβάλλοντας σήμερα το premium.

Ο αγοραστής ενός put εξασκεί το δικαίωμά του εφόσον η τιμή του αγαθού, της αξίας ή του νομίσματος κατά την ημερομηνία εξάσκησης του δικαιώματος είναι μικρότερη από την τιμή εξάσκησης. Στην περίπτωση αυτή, το άμεσο κέρδος είναι $X - S_t$ και, αν λάβουμε υπόψη μας και το premium, το καθαρό κέρδος είναι $X - S_t - P$. Σε διαφορετική περίπτωση (όταν δηλαδή $S_t > X$) αφήνει το δικαίωμα να εκπνεύσει (δεν το εξασκεί) και υφίσταται κόστος ίσο με το premium που έχει καταβάλει. Για τον πωλητή του δικαιώματος οι ζημιές και τα κέρδη είναι ακριβώς τα αντίθετα. Δηλαδή, η αξία ενός δικαιώματος επίδοσης (πώλησης) είναι:

$$P_T = \max\{0,\ X - S_T\} \tag{13}$$

Μερικές παρατηρήσεις:

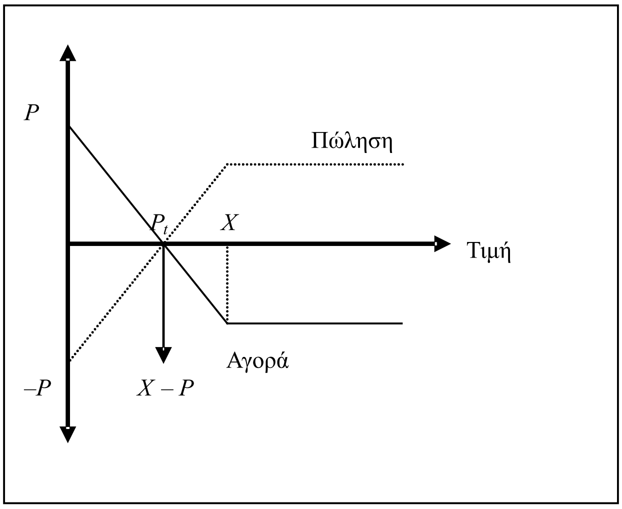
1. Όπως και στο call, ο αγοραστής του put μπορεί να έχει απεριόριστο κέρδος[8] εφόσον η τιμή της υποκείμενης αξίας βρίσκεται κάτω από την τιμή εξάσκησης.
2. Η μέγιστη ζημιά του είναι το καταβληθέν premium.
3. Τα αντίθετα ακριβώς ισχύουν για τον πωλητή, ο οποίος μπορεί να καταγράψει απεριόριστη ζημία, ενώ το μέγιστο κέρδος του περιορίζεται στο premium που εισέπραξε από την πώληση του δικαιώματος.

Τα διαγράμματα απόδοσης ενός put εμφανίζονται στο διάγραμμα 4. Για παράδειγμα, έστω ότι κάποιος αγοράζει ένα put επί πετρελαίου brent, το οποίο του δίνει δικαίωμα να πουλήσει 1.000 βαρέλια μετά από 3 μήνες στην τιμή των \$31,00 ανά βαρέλι. Έστω ακόμα ότι για την αγορά του δικαιώματος αυτού πληρώνει \$3 ανά βαρέλι. Αν η τιμή του προϊόντος κατά τη λήξη πέσει κάτω από την τιμή εξάσκησης, έστω στα \$25 ανά βαρέλι, το κέρδος του θα είναι $1000 \times (31 - 25) =$ \$6.000. Αν λάβουμε υπόψη το premium που κατέβαλε ($=1000 \times 3 =$ \$3.000), τότε το κέρδος του περιορίζεται στα \$3.000. Αν αντίθετα η τιμή ανέβει στα \$36, τότε δεν εξασκεί το δικαίωμα και η ζημιά του είναι το ποσό των \$3.000 που κατέβαλε.

---

8 *Επειδή η τιμή του υποκείμενου δεν μπορεί να πέσει κάτω από το 0, το μέγιστο κέρδος του αγοραστή επιτυγχάνεται όταν $S_t = 0$ και είναι ίσο με $X - P$. Το ίδιο ποσό και στην ίδια περίπτωση αποτελεί τη μέγιστη ζημιά του πωλητή.*

Διάγραμμα 4



Παράδειγμα 7

Τρέχουσα τιμή της υποκείμενης αξίας (π.χ. μετοχής) $S_t = €78$

Μέγεθος call option contract = 100 μετοχές

Τιμή εξάσκησης δικαιώματος (exercise or strike price) $X = €80$

Τιμή δικαιώματος (call premium) $C_t = €3$

Συνολικό κόστος (premium paid) = 100*3 = €300

Έστω ότι μετά 3 μήνες, χρονική στιγμή $T=t+3$ είναι: $S_T = €88$

Κέρδος από την εξάσκηση του δικαιώματος $(S_T - X) * 100 = (88 - 80) * 100 = €800$

Καθαρό κέρδος του call premium $(S_T - X - C_t) * 100 = (8 - 3) * 100 = €500$

Γίνεται φανερό ότι γενικά, υπάρχει κέρδος όταν $S_T > X$.

Δραστηριότητα 12/Κεφάλαιο 6

Με τα παραπάνω δεδομένα να υπολογιστεί το κέρδος/ζημία του κατόχου του δικαιώματος όταν $S_T = €82$.

Θα βρείτε τη δική μας απάντηση στο Παράρτημα, στο τέλος του κεφαλαίου.

Παράδειγμα 8

Τρέχουσα τιμή της υποκείμενης αξίας (π.χ. μετοχής) S_t = €78

Μέγεθος call option contract = 100 μετοχές

Τιμή εξάσκησης δικαιώματος (exercise or strike price) X = €70

Τιμή δικαιώματος (put premium) P_t = €2

Συνολικό κόστος (premium paid) = 100*2 = €200

Έστω ότι μετά 3 μήνες, χρονική στιγμή $T=t+3$ είναι: S_T = €65

Κέρδος από την εξάσκηση του δικαιώματος $(S_T - X)*100 = (70-65)*100 =$ €500

Καθαρό κέρδος του call premium $(S_T - X - P_t)*100 = (5-2)*100 =$ €300

Γίνεται φανερό ότι γενικά, υπάρχει κέρδος όταν $S_T < X$.

Υπάρχουν 4 διαφορετικές θέσεις:

ΘΕΣΗ	ΚΕΡΔΟΣ/ΖΗΜΙΑ
1. Long in a call option	$\max(S_T - X, 0)$
2. Long in a put option	$\max(X - S_T, 0)$
3. Short in a call option	$\min(X - S_T, 0)$
4. Short in a put option	$\min(S_T - X, 0)$

Στην πρώτη περίπτωση ο αγοραστής του δικαιώματος αγοράς προβαίνει σε αυτή την επιλογή διότι προσδοκά σε αύξηση της τιμής της υποκείμενης αξίας και ο πωλητής το αντίθετο. Το πιθανό κέρδος του αγοραστή είναι απεριόριστο, ενώ η ζημία του περιορίζεται στην τιμή του δικαιώματος που πληρώνει και συμβαίνει στη μέγιστη τιμή της, όταν η τιμή της υποκείμενης αξίας κινηθεί σε χαμηλότερα επίπεδα από την τιμή εξάσκησης μέχρι την ημερομηνία λήξης. Αντίστοιχα και οι άλλες περιπτώσεις.

Η τιμή ενός δικαιώματος (ασφάλιστρο, premium) αποτελείται από την **εσωτερική αξία** (intrinsic value ή parity value) και την **αξία του χρόνου** (time value ή speculative value).

(α) Ένα δικαίωμα έχει **εσωτερική αξία** όταν η εξάσκησή του αποδίδει κέρδος για τον αγοραστή. Συνεπώς, ένα δικαίωμα αγοράς (πώλησης) έχει εσωτερική αξία όταν η τιμή του υποκειμένου είναι μεγαλύτερη (μικρότερη) από την τιμή εξάσκησης, δηλαδή όταν το δικαίωμα είναι in–the–money.

Σε μια τέτοια περίπτωση, ο αγοραστής του δικαιώματος αγοράς (πώλησης) μπορεί να αγοράσει (πουλήσει) την υποκείμενη αξία σε τιμή πιο ευνοϊκή από αυτή της αγοράς και αμέσως μετά να την πουλήσει (αγοράσει) στην τρέχουσα αγορά, αποκομίζοντας ένα κέρδος. Το κέρδος αυτό ισούται με τη διαφορά μεταξύ της τρέχουσας αξίας και της τιμής εξάσκησης και αποτελεί την εσωτερική αξία. Ταυτόχρονα, η εσωτερική αξία είναι και η κατώτατη τιμή που μπορεί να έχει ένα δικαίωμα. Γιατί αν η τιμή του δικαιώματος ήταν κάτω από την εσωτερική του αξία, θα μπορούσαμε να αποκομίσουμε κέρδος χωρίς κίνδυνο αγοράζοντας δικαίωμα, εξασκώντας το αμέσως και πραγματοποιώντας κέρδος ίσο με τη διαφορά μεταξύ της τιμής του υποκειμένου και της εσωτερικής αξίας.

Όταν η τιμή του υποκείμενου είναι γύρω ή κάτω από την τιμή εξάσκησης, ένα δικαίωμα αγοράς δεν έχει εσωτερική αξία. Κι αυτό γιατί είναι φτηνότερο για τον επενδυτή να αγοράσει την υποκείμενη αξία στην τρέχουσα αγορά. Για τον ίδιο λόγο, ένα δικαίωμα πώλησης δεν θα έχει εσωτερική αξία όταν η τιμή του υποκείμενου τίτλου είναι γύρω ή πάνω από την τιμή εξάσκησης. Έτσι, η εσωτερική αξία ισούται με τη διαφορά της τιμής της υποκείμενης αξίας και της τιμής εξάσκησης του δικαιώματος, $S_T - X$.

Παράδειγμα 9

Έστω το δικαίωμα επί της μετοχής *M*: $C(S_0,T,X) \equiv$ C(130,Ιούνιος,120), δηλαδή η τιμή ενός δικαιώματος επί της μετοχής *M*, της οποίας η τιμή είναι 130€, το οποίο λήγει τον Ιούνιο και η τιμή εξάσκησης είναι 120€. Η αξία του δικαιώματος είναι:

$$C_T = \max\{0,\ S_T - X\} = \max\{0,130-120\} = 10.$$

Τι θα συμβεί εάν το call έχει τιμή μικρότερη των 10€; Ας υποθέσουμε ότι έχει τιμή 5€. Τότε, θα μπορούσαμε να αγοράσουμε ένα call για 5€, να το εξασκήσουμε – δηλαδή να αγοράσουμε τη μετοχή *M* στα 120€– και, στη συνέχεια, να πουλήσουμε τη μετοχή στην τιμή των 130€. Αυτή η συναλλαγή εξισορροπητικής κερδοσκοπίας θα μας απέδιδε ένα άμεσο κέρδος (χωρίς κίνδυνο) ίσο με 5€ ανά μετοχή. Όλοι οι επενδυτές θα ήθελαν να ακολουθήσουν την ίδια στρατηγική, με αποτέλεσμα η τιμή του δικαιώματος να ανέβει στα 10€, όπου αυτή η συναλλαγή δεν θα απέφερε πλέον κέρδος. Έτσι, η τιμή των 10€ είναι η ελάχιστη τιμή για το call.

Παράδειγμα 10 (εσωτερική αξία ενός δικαιώματος αγοράς):

Έστω ένα δικαίωμα αγοράς στη μετοχή της ΕΤΕ με τιμή εξάσκησης τα 20 ευρώ. Ο πίνακας που ακολουθεί δείχνει πόσο κέρδος μπορεί να αποκομίσει ο αγοραστής σε διάφορες τιμές της μετοχής με το να εξασκήσει το δικαίωμά του αγοράζοντας τη μετοχή στην τιμή εξάσκησης και μεταπουλώντας την αμέσως στην τρέχουσα αγορά. Η διαφορά, εκτός και αν είναι αρνητική, ισούται με την εσωτερική αξία.

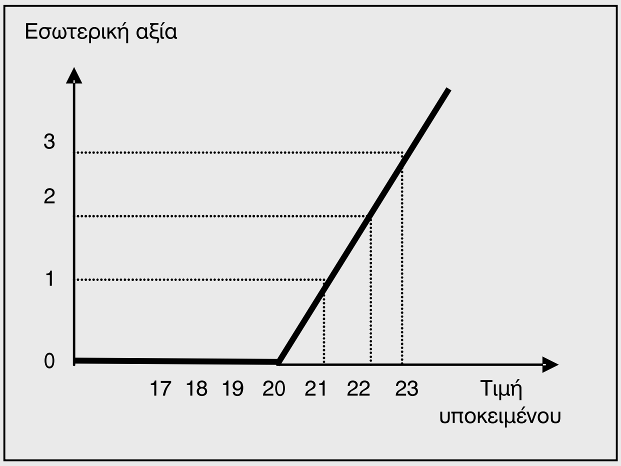
Εσωτερική αξία δικαιώματος αγοράς

Τιμή υποκείμενης αξίας	Τιμή εξάσκησης	Εσωτερική αξία
23,00	20,00	3,00
22,00	20,00	2,00
21,00	20,00	1,00
20,00	20,00	0,00
19,00	20,00	0,00
18,00	20,00	0,00
17,00	20,00	0,00

Το Διάγραμμα 5 παρουσιάζει την εσωτερική αξία του δικαιώματος αγοράς. Η έντονη γραμμή καταγράφει τόσο την εσωτερική αξία του δικαιώματος, όσο και την κατώτερη τιμή του.

Όταν η τιμή εξάσκησης (*X*) είναι μικρότερη από την τρέχουσα τιμή της υποκείμενης αξίας (*S*), τότε η αξία του δικαιώματος είναι ίση με τη διαφορά μεταξύ αυτών των δύο μεγεθών (*S* – *X*).

Διάγραμμα 5



Όταν όμως η τιμή εξάσκησης είναι πάνω από την τιμή του υποκειμένου ή αν οι δύο τιμές είναι ίσες, τότε το δικαίωμα δεν έχει καθόλου εσωτερική αξία επειδή ο αγοραστής του, στην περίπτωση αυτή, δεν θα το εξασκήσει.

Παράδειγμα 11 (εσωτερική αξία ενός δικαιώματος πώλησης):

Έστω ένα δικαίωμα πώλησης στη μετοχή της ΕΤΕ με τιμή εξάσκησης τα 20 ευρώ. Ο παρακάτω πίνακας δείχνει πόσο κέρδος μπορεί να αποκομίσει ο αγοραστής σε διάφορες τιμές της μετοχής με το να εξασκήσει το δικαίωμά του πουλώντας τη μετοχή στην τιμή εξάσκησης και επαναγοράζοντάς την αμέσως στην τρέχουσα αγορά. Η διαφορά, εκτός κι αν είναι αρνητική, ισούται με την εσωτερική αξία του δικαιώματος.

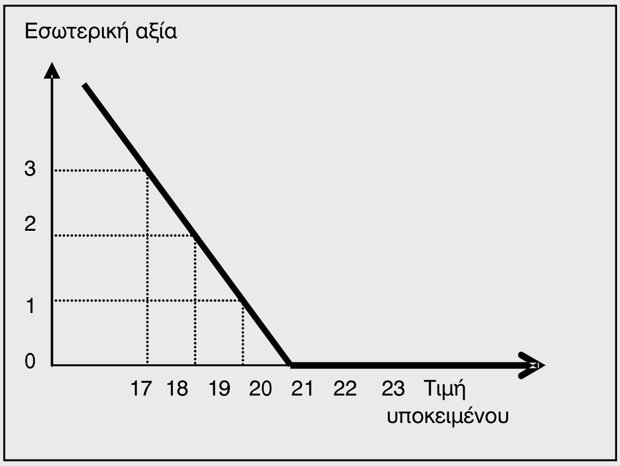
Εσωτερική αξία δικαιώματος πώλησης

Τιμή υποκείμενης αξίας	Τιμή εξάσκησης	Εσωτερική αξία
23,00	20,00	0,00
22,00	20,00	0,00
21,00	20,00	0,00
20,00	20,00	0,00
19,00	20,00	1,00
18,00	20,00	2,00
17,00	20,00	3,00

Το Διάγραμμα 6 μας παρουσιάζει την εσωτερική αξία του δικαιώματος πώλησης. Η έντονη γραμμή καταγράφει τόσο την εσωτερική αξία του δικαιώματος, όσο και την κατώτερη τιμή του.

Όταν η τιμή εξάσκησης (*X*) είναι μεγαλύτερη από την τρέχουσα τιμή της υποκείμενης αξίας (*S*), τότε η αξία του δικαιώματος είναι ίση με τη διαφορά μεταξύ αυτών των δύο μεγεθών ($X - S$).

Διάγραμμα 6



Όταν όμως η τιμή εξάσκησης είναι κάτω από την τιμή του υποκειμένου ή αν οι δύο τιμές είναι ίσες, τότε το δικαίωμα δεν έχει καθόλου εσωτερική αξία επειδή ο αγοραστής του, στην περίπτωση αυτή, δεν θα το εξασκήσει.

Δραστηριότητα 13/Κεφάλαιο 6

Τι θα συμβεί εάν η τιμή εξάσκησης είναι μεγαλύτερη από την τιμή της μετοχής *Μ*, για παράδειγμα εάν *Χ*=140€;

Θα βρείτε τη δική μας απάντηση στο Παράρτημα, στο τέλος του κεφαλαίου.

Δραστηριότητα 14/Κεφάλαιο 6

Δίδονται οι τιμές εξάσκησης (σε €) {120, 125, 130}, όταν η τρέχουσα τιμή της μετοχής είναι 125.9375€. Να υπολογίσετε την εσωτερική αξία του δικαιώματος κλήσης (call).

Θα βρείτε τη δική μας απάντηση στο Παράρτημα, στο τέλος του κεφαλαίου.

Παράδειγμα 12

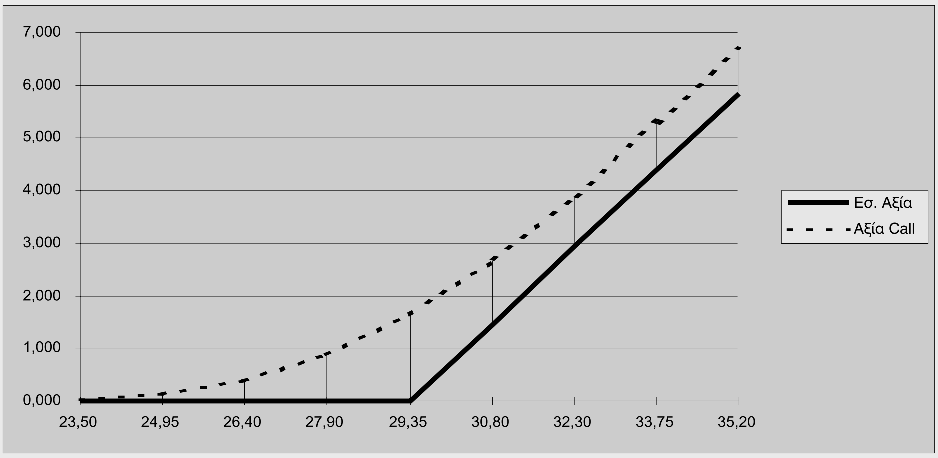
Ο Πίνακας που ακολουθεί δείχνει πώς θα εξελισσόταν η τιμή ενός δικαιώματος αγοράς με τιμή εξάσκησης 29,35 ευρώ στη μετοχή της εταιρείας ΑΒΓ σε διάφορες τιμές της μετοχής. Η τιμή δικαιώματος στην αγορά αντιπαραβάλλεται με την αντίστοιχη εσωτερική αξία του ίδιου δικαιώματος. Γίνεται φανερό ότι η πραγματική τιμή του δικαιώματος αγοράς είναι σε γενικές γραμμές μεγαλύτερη από την εσωτερική αξία του. Η διαφορά μεταξύ της πραγματικής τιμής δικαιώματος και της εσωτερικής αξίας είναι η αξία του χρόνου ή υπεραξία.

Πίνακας
Αξία χρόνου δικαιώματος αγοράς

Τιμή Υποκείμενου	Τιμή Εξάσκησης	Αξία Call	Εσωτερική Αξία	Αξία Χρόνου
23,50	29,35	0,03	0,00	0,03
24,95	29,35	0,12	0,00	0,12
26,40	29,35	0,38	0,00	0,38
27,90	29,35	0,88	0,00	0,88
29,35	29,35	1,64	0,00	1,64
30,80	29,35	2,67	1,45	1,22
32,30	29,35	3,90	2,95	0,95
33,75	29,35	5,28	4,40	0,88
35,20	29,35	6,66	5,85	0,81

Το Διάγραμμα 7 παρουσιάζει την τιμή του δικαιώματος και τη συνολική του αξία για τις διάφορες τιμές του υποκειμένου. Παρατηρούμε ότι η αξία του χρόνου ενός δικαιώματος αγοράς παίρνει τη μέγιστη τιμή της όταν η τιμή εξάσκησης του δικαιώματος είναι σχεδόν ίση με την τιμή της μετοχής ή αλλιώς όταν το δικαίωμα είναι in-the-money. Το δικαίωμα δεν έχει εσωτερική αξία αλλά η τιμή της μετοχής χρειάζεται να μεταβληθεί μόνο οριακά για να είναι επικερδής η εξάσκηση του δικαιώματος.

Διάγραμμα 7



Αξία του χρόνου ενός δικαιώματος πώλησης

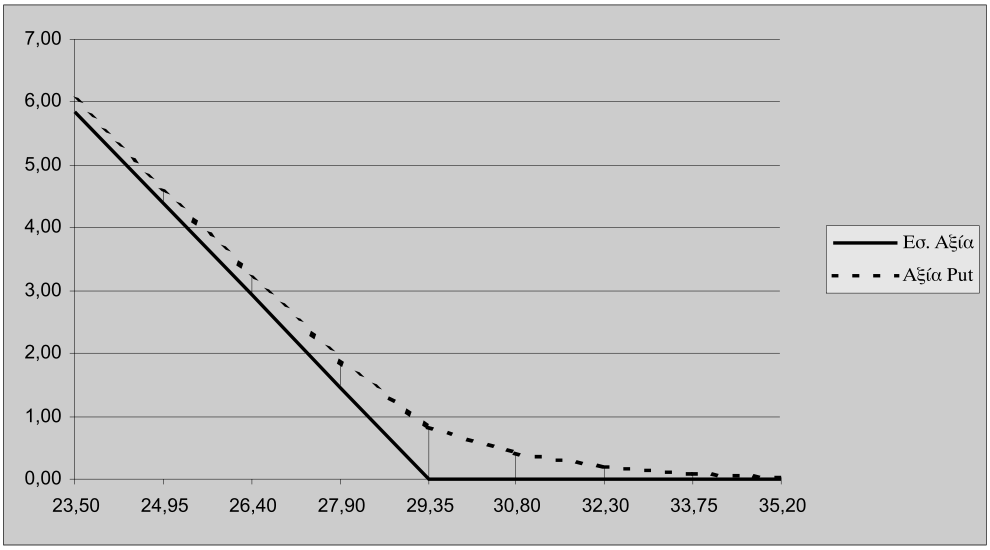
Ο πίνακας που ακολουθεί δείχνει πώς θα εξελισσόταν η τιμή ενός δικαιώματος πώλησης με τιμή εξάσκησης 29,35 ευρώ στη μετοχή της εταιρείας ΑΒΓ σε διάφορες τιμές της μετοχής. Η τιμή δικαιώματος στην αγορά αντιπαραβάλλεται με την αντίστοιχη εσωτερική αξία του ίδιου δικαιώματος. Γίνεται φανερό ότι η πραγματική τιμή του δικαιώματος αγοράς είναι σε γενικές γραμμές μεγαλύτερη από την εσωτερική αξία του. Η διαφορά μεταξύ της πραγματικής τιμής δικαιώματος και της εσωτερικής αξίας είναι η αξία του χρόνου ή υπεραξία.

Αξία χρόνου δικαιώματος πώλησης

Τιμή Υποκειμένου	Τιμή Εξάσκησης	Αξία Put	Εσωτερική Αξία	Αξία Χρόνου
23,50	29,35	6,00	5,85	0,15
24,95	29,35	4,60	4,40	0,20
26,40	29,35	3,25	2,95	0,30
27,90	29,35	1,90	1,45	0,45
29,35	29,35	0,83	0,00	0,83
30,80	29,35	0,40	0,00	0,40
32,30	29,35	0,20	0,00	0,20
33,75	29,35	0,09	0,00	0,09
35,20	29,35	0,03	0,00	0,03

Το Διάγραμμα 8 παρουσιάζει την τιμή του δικαιώματος και τη συνολική του αξία για τις διάφορες τιμές του υποκειμένου. Παρατηρούμε ότι και η αξία του χρόνου ενός δικαιώματος πώλησης παίρνει τη μέγιστη τιμή της όταν η τιμή εξάσκησης του δικαιώματος είναι σχεδόν ίση με την τιμή της μετοχής ή αλλιώς όταν το δικαίωμα είναι in-the-money. Το δικαίωμα δεν έχει εσωτερική αξία αλλά η τιμή της μετοχής χρειάζεται να μεταβληθεί μόνο οριακά για να εξασκηθεί το δικαίωμα με κέρδος.

Διάγραμμα 8



Παράγοντες που επηρεάζουν την τιμή του δικαιώματος

Οι παράγοντες που επηρεάζουν την τιμή του δικαιώματος προαίρεσης είναι η τρέχουσα τιμή της υποκείμενης αξίας (έστω, μετοχή), η τιμή εξάσκησης, ο χρόνος μέχρι τη λήξη του δικαιώματος, η μεταβλητότητα της τιμής της υποκείμενης αξίας και η απόδοση χωρίς κίνδυνο (risk-free rate). Δηλαδή, με τους αντίστοιχους συμβολισμούς:

$$C_t \text{ or } P_t = f(S, X, T, \sigma, rf)$$

Οι σχέσεις μεταξύ αυτών των μεγεθών εμφανίζονται στον παρακάτω πίνακα.

Παράγοντες που επηρεάζουν τα στοιχεία των δικαιωμάτων

Μεταβλητή	European Call	European Put	American Call	American Put
S	+	–	+	–
X	–	+	–	+
T	?	?	+	+
σ	+	+	+	+
rf	+	–	+	–

Όπου **+** σημαίνει ότι μία αύξηση στην τιμή της μεταβλητής οδηγεί σε αύξηση την τιμή του δικαιώματος. Το σημείο **–** δηλώνει ότι μία αύξηση της τιμής της μεταβλητής οδηγεί σε μείωση της τιμής του δικαιώματος και το **?** δηλώνει αβέβαιη σχέση.

Ισοδύναμη χρηματικής αξίας δικαιώματος

Θα λέμε ότι ένα *δικαίωμα αγοράς* είναι εντός της ισοδύναμης χρηματικής αξίας (**in-the-money**), όταν η τιμή εξάσκησης είναι μικρότερη από την τρέχουσα αξία του υποκείμενου τίτλου. Στην περίπτωση αυτή, το δικαίωμα έχει εσωτερική αξία και μπορεί να εξασκηθεί. Θα λέμε ότι ένα δικαίωμα αγοράς βρίσκεται στην ισοδύναμη χρηματική αξία (**at-the-money**), όταν η τιμή εξάσκησης του δικαιώματος ισούται με την τρέχουσα τιμή της υποκείμενης αξίας. Τέλος, θα λέμε ότι βρίσκεται εκτός της ισοδύναμης χρηματικής αξίας (**out-of-the-money**) όταν η τιμή εξάσκησης είναι υψηλότερη από την τρέχουσα τιμή της υποκείμενης αξίας.

Θα λέμε ότι ένα *δικαίωμα πώλησης* είναι εντός της ισοδύναμης χρηματικής αξίας (**in-the-money**) όταν η τιμή εξάσκησης είναι υψηλότερη από την τρέχουσα αξία του υποκείμενου τίτλου. Στην περίπτωση αυτή το δικαίωμα έχει εσωτερική αξία και μπορεί να εξασκηθεί. Θα λέμε ότι ένα δικαίωμα πώλησης βρίσκεται στην ισοδύναμη χρηματική αξία (**at-the-money**), όταν η τιμή εξάσκησης του δικαιώματος ισούται με την τρέχουσα τιμή της υποκείμενης αξίας. Τέλος, θα λέμε ότι βρίσκεται εκτός της ισοδύναμης χρηματικής αξίας (**out-of the-money**) όταν η τιμή εξάσκησης είναι χαμηλότερη από την τρέχουσα τιμή της υποκείμενης αξίας.

Ισοδύναμη χρηματικής αξίας δικαιώματος

	Call options	**Put options**
In-the-money	$S_t > X$	$S_t < X$
At-the-money	$S_t = X$	$S_t = X$
Out-of-the-money	$S_t < X$	$S_t > X$
Near-the-money	$S_t \approx X$	$S_t \approx X$
Deep-in-the-money	$S_t >> X$	$S_t << X$

6.4.1 Ισοδυναμία δικαιωμάτων κλήσης και επίδοσης (put-call parity)

Ας θεωρήσουμε δύο χαρτοφυλάκια με δικαιώματα ευρωπαϊκού τύπου: το χαρτοφυλάκιο Α, που αποτελείται από ένα put με τιμή εξάσκησης X και μια μετοχή και το χαρτοφυλάκιο Β, που αποτελείται από ένα call με ίδια τιμή εξάσκησης X και ένα ομόλογο που αποδίδει ποσό ίσο με την τιμή εξάσκησης του call/put κατά στη λήξη του. Έτσι, το χαρτοφυλάκιο Α απαιτεί μια επένδυση $S_0 + P(S_0, T, X)$ και το χαρτοφυλάκιο Β μια επένδυση $C(S_0, T, X) + Xe^{-r(T-t)}$.

Κατά την ημερομηνία λήξης των δικαιωμάτων τα χαρτοφυλάκια έχουν τις εξής αποδόσεις:

<u>Χαρτοφυλάκιο Α:</u>

$$\max(X - S_T, 0)\ \{\text{από το put}\} + S_T\ \{\text{από τη μετοχή}\} = \max(X, S_T)$$

<u>Χαρτοφυλάκιο Β:</u>

$$\max(S_T - X, 0)\ \{\text{από το call}\} + X\ \{\text{από το ομόλογο}\} = \max(S_T, X)$$

Παρατηρούμε ότι οι αποδόσεις των δύο χαρτοφυλακίων είναι ίδιες στη λήξη, άρα πρέπει να είναι ισοδύναμα. Δηλαδή:

$$S_0 + P(S_0, T, X) = C(S_0, T, X) + Xe^{-r(T-t)}$$
$$\text{ή} \qquad (14)$$
$$P(S_0, T, X) = C(S_0, T, X) + Xe^{-r(T-t)} - S_0$$

Όπου P η τιμή ενός δικαιώματος πώλησης
C η τιμή ενός δικαιώματος αγοράς

S η τιμή της υποκείμενης αξίας
X η τιμή εξάσκησης των δικαιωμάτων
e ο νεπέρειος λογάριθμος
$-r(T-t)$ ο συντελεστής προεξόφλησης της ομολογίας

Η παραπάνω σχέση είναι γνωστή ως ισοδυναμία δικαιώματος αγοράς – δικαιώματος πώλησης (put-call parity) και η ισχύς της εγγυάται τη σωστή τιμολόγηση των call και put ταυτόχρονα. Με τη βοήθειά της μπορούμε να υπολογίσουμε την τιμή ενός δικαιώματος πώλησης (αγοράς), αν γνωρίζουμε την τιμή της υποκείμενης αξίας, και την τιμή του δικαιώματος αγοράς (πώλησης). Η ανατροπή αυτής της ισότητας προσφέρει ευκαιρία για εξισορροπητική κερδοσκοπία (arbitrage).

6.4.2 Συνδυασμοί δικαιωμάτων

Οι επενδυτές μπορούν να χρησιμοποιήσουν πολλούς συνδυασμούς δικαιωμάτων προκειμένου να ικανοποιήσουν τα χαρακτηριστικά κινδύνου–απόδοσης των θέσεών τους και να εφαρμόσουν αποτελεσματικότερες κερδοσκοπικές στρατηγικές. Οι σημαντικότερες από αυτές είναι παρακάτω.

Στις στρατηγικές αυτού του είδους περιλαμβάνονται συνδυασμοί δικαιωμάτων αγοράς και πώλησης. Οι πιο συνηθισμένες είναι οι εξής:

- Straddles – Strangles
- Ανοίγματα (Spreads)

Straddles και Strangles

Ορισμοί: Το άνοιγμα θέσεων τύπου Straddle ή Strangle γίνεται με την αγορά ή την πώληση ίσου αριθμού δικαιωμάτων αγοράς και δικαιωμάτων πώλησης τα οποία έχουν ίδια διάρκεια. Ειδικότερα όταν οι τιμές εξάσκησης των δικαιωμάτων είναι ίδιες, τότε αναφερόμαστε στα **straddle,** ενώ όταν οι τιμές εξάσκησης είναι διαφορετικές, αναφερόμαστε στα **strangle.**

Τι προσφέρουν: Οι θέσεις αυτές προσφέρουν στον επενδυτή τη δυνατότητα να επωφεληθεί από τις προσδοκίες του σχετικά με τη μεταβλητότητα της αγοράς. Σε αντίθεση με τις βασικές στρατηγικές που βασίζονται σε προσδοκίες σχετικά με την κατεύθυνση της τιμής της υποκείμενης αξίας, τα straddles και strangles βασίζονται σε προσδοκίες σχετικά με τη μεταβλητότητα της υποκείμενης αξίας.

Αγορά straddle (Long Straddle)

Δημιουργία: Η θέση δημιουργείται με την αγορά ίσου αριθμού δικαιωμάτων αγοράς και πώλησης τα οποία έχουν ίδια τιμή εξάσκησης και ίδια διάρκεια. Τα δικαιώματα πρέπει να είναι στην ισοδύναμη χρηματική τους αξία (at-the-money). Τούτο διότι η χρήση δικαιωμάτων εκτός της ισοδύναμης χρηματικής (out-of-the-money) τους αξίας ή εντός της ισοδύναμης χρηματικής τους αξίας (in-the-money), θα απαιτούσε από εμάς κάποια συγκεκριμένη προσδοκία σχετικά με την τιμή της υποκείμενης αξίας. Στην περίπτωση όμως αυτή υπάρχουν άλλες πιο κατάλληλες στρατηγικές.

Προσδοκία: Ο πωλητής προσδοκά ότι η τιμή της μετοχής δεν θα διαφέρει κατά πολύ από την τιμή εξάσκησης, ενώ ο αγοραστής προσδοκά ότι η τιμή της μετοχής δεν θα έχει ιδιαίτερα υψηλή μεταβλητότητα.

Μέγιστο Κέρδος: Απεριόριστο

Μέγιστη Ζημιά: Το κόστος, δηλαδή το άθροισμα των premium των δικαιωμάτων που αγοράζουμε ($C + P$).

Αξία: Συνεπώς, για τον αγοραστή (long position), η αξία του straddle στη λήξη θα είναι:

$$C_T + P_T = \max\left(0, S_T - X\right) + \max\left(0, X - S_T\right)$$

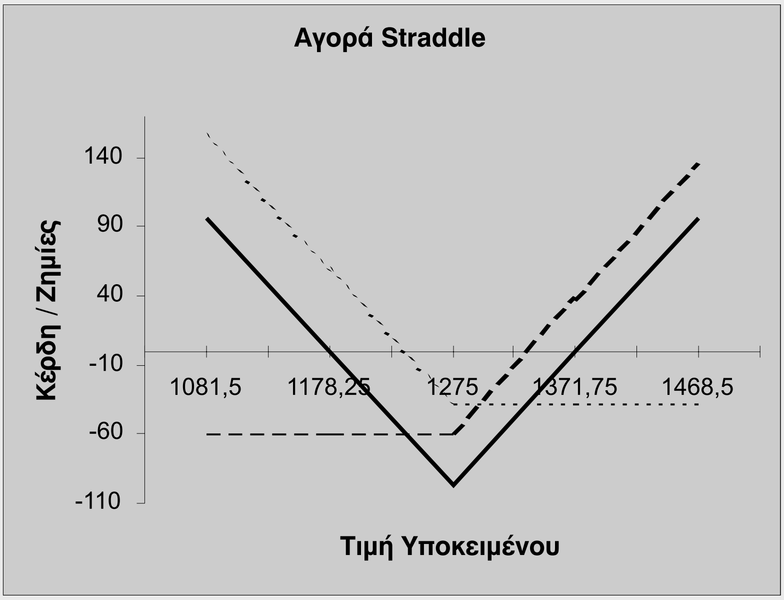
Νεκρά σημεία: Στην περίπτωση των straddle υπάρχουν δύο νεκρά σημεία:

<u>Χαμηλό νεκρό σημείο:</u> Η τιμή εξάσκησης μείον το κόστος [$BE_X = X - (C+P)$].

<u>Υψηλό νεκρό σημείο:</u> Η τιμή εξάσκησης συν το κόστος [$BE_Y = X + (C+P)$].

Παράδειγμα 13

Διάγραμμα 9



Στο Διάγραμμα 9 φαίνεται η δημιουργία της θέσης αγοράς straddle στον δείκτη FTSE/ASE–20 που στηρίχθηκε σε δικαιώματα δίμηνης διάρκειας επί του δείκτη FTSE/ASE–20 με τιμή εξάσκησης τις 1275 μονάδες. Το δικαίωμα αγοράς έχει τιμή 59 μονάδες και το δικαίωμα πώλησης 37,75 μονάδες.

Η συγκεκριμένη θέση μας εξασφαλίζει απεριόριστο κέρδος, έχει νεκρά σημεία τα 1178,25 και 1371,75, μέγιστη ζημιά τις 96,75 μονάδες. Πρέπει να υπενθυμίζουμε ότι η ζημιά εκφράζεται σε μονάδες δείκτη και επομένως το χρηματικό ισοδύναμό της είναι 483,75 ευρώ (πολλαπλασιαστής 5). Στον παρακάτω πίνακα φαίνεται η αξία της θέσης (σε μονάδες) στη λήξη για διάφορες τιμές του δείκτη.

Τιμή Δείκτη	Αξία Call	Αξία Put	Αξία Straddle
1.000	–59	237,25	178,25
1.080	–59	157,25	98,25
1.178,25	–59	59	0
1.275	–59	–37,75	–96,75
1.371,75	37,75	–37,75	0
1.470	136	–37,75	98,25
1.500	166	–37,75	128,25

Πώληση Straddle (Short Straddle)

Δημιουργία: Για τη δημιουργία αυτής της θέσης πωλούνται ταυτόχρονα ίσος αριθμός δικαιωμάτων αγοράς και πώλησης τα οποία έχουν ίδια τιμή εξάσκησης και ίδια διάρκεια. Τα δικαιώματα πρέπει να είναι στην ισοδύναμη χρηματική τους αξία (at-the-money) για τον ίδιο λόγο που αναφέρθηκε και στη θέση αγοράς straddle.

Προσδοκία: Εφαρμόζουμε αυτή τη στρατηγική όταν δεν αναμένουμε σημαντική μεταβολή της τιμής της υποκείμενης αξίας (προσδοκία χαμηλής ή φθίνουσας μεταβλητότητας).

Μέγιστη Ζημιά: Απεριόριστη

Μέγιστο Κέρδος: Το άθροισμα των premium των δικαιωμάτων που αγοράζουμε ($C + P$).

Νεκρά σημεία: Και σε αυτή την περίπτωση υπάρχουν δύο νεκρά σημεία:

Χαμηλό νεκρό σημείο: Η τιμή εξάσκησης μείον το κόστος [BE_X=X–(C+P)].

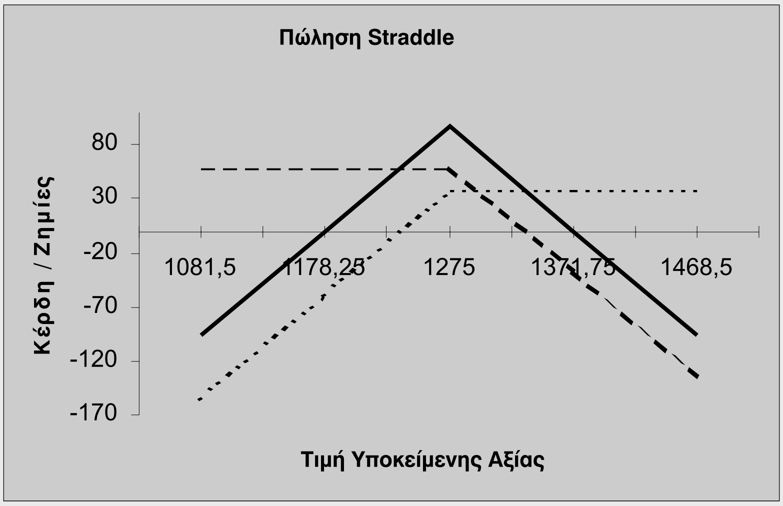
Υψηλό νεκρό σημείο: Η τιμή εξάσκησης συν το κόστος [BE_Y=X–(C+P)].

Αξία: Συνεπώς, για τον πωλητή (short position), η αξία του δικαιώματος στη λήξη είναι:

$$-C_T - P_T = -\max\left(0, S_T - X\right) - \max\left(0, X - S_T\right)$$

Παράδειγμα 14

Διάγραμμα 10



Στο Διάγραμμα 10 φαίνεται η δημιουργία της θέσης πώλησης straddle στον δείκτη FTSE/ASE–20 που στηρίχθηκε σε δικαιώματα δίμηνης διάρκειας επί του δείκτη FTSE/ASE–20 με τιμή εξάσκησης τις 1275 μονάδες. Το δικαίωμα αγοράς έχει τιμή 59 μονάδες και το δικαίωμα πώλησης 37,75 μονάδες.

Η συγκεκριμένη θέση μας εξασφαλίζει κέρδος ίσο με 96,75 μονάδες, έχει νεκρά σημεία τα 1178,25 και 1371,75, απεριόριστη ζημιά. Πρέπει να υπενθυμίζουμε ότι το κέρδος εκφράζεται σε μονάδες δείκτη και επομένως το χρηματικό ισοδύναμό του είναι 483,75 ευρώ (πολλαπλασιαστής 5). Στον πίνακα που ακολουθεί φαίνεται η αξία της θέσης (σε μονάδες) στη λήξη για διάφορες τιμές του δείκτη.

Πίνακας

Τιμή Δείκτη	Αξία Call	Αξία Put	Αξία Straddle
1.000	59	–237,25	–178,25
1.080	59	–157,25	–98,25
1.178,25	59	–59	0
1.275	59	37,75	96,75
1.371,75	–37,75	37,75	0
1.470	–136	37,75	–98,25
1.500	–166	37,75	–128,25

Strangle

Τα strangles είναι μια κερδοσκοπική στρατηγική που δημιουργείται με τρόπο όμοιο με τα straddles. Η διαφορά είναι ότι τα δικαιώματα που χρησιμοποιούνται έχουν διαφορετικές τιμές εξάσκησης. Όταν εφαρμόζουμε αυτού του είδους τις στρατηγικές, περιμένουμε ότι η μεταβλητότητα της υποκείμενης αξίας θα μεταβληθεί, αλλά δεν έχουμε άποψη για την κατεύθυνση που θα κινηθεί η τιμή της.

Αγορά strangle (Long Strangle)

Δημιουργία: Η αγορά ενός strangle σημαίνει ότι ο επενδυτής αγοράζει ένα δικαίωμα αγοράς και ένα δικαίωμα πώλησης με την ίδια διάρκεια αλλά διαφορετικές τιμές εξάσκησης. Τα δύο δικαιώματα πρέπει να είναι εκτός της ισοδύναμης χρηματικής τους αξίας (out-of-the-money). Το γεγονός αυτό καθιστά τα δικαιώματα φτηνά, με αποτέλεσμα η δημιουργία της θέσης να μη χρειάζεται δέσμευση μεγάλων κεφαλαίων.

Προσδοκία: Το άνοιγμα μιας τέτοιας θέσης σημαίνει ότι περιμένουμε να αυξηθεί η μεταβλητότητα της υποκείμενης αξίας, αλλά δεν γνωρίζουμε την κατεύθυνση που θα ακολουθήσει η τιμή της.

Μέγιστη Ζημιά: Η μέγιστη ζημιά μας είναι το άθροισμα των καταβληθέντων premium για την αγορά των δικαιωμάτων ($C + P$) και επειδή αυτά είναι out-of-the-money η ζημιά αυτή είναι σχετικά περιορισμένη. Πρέπει όμως να τονιστεί ότι δεν επέρχεται σε κάποια συγκεκριμένη τιμή της υποκείμενης αξίας, αλλά σε ένα εύρος τιμών στο διάστημα ανάμεσα στις δύο τιμές εξάσκησης.

Μέγιστο κέρδος: Η στρατηγική αυτή μας δίνει τη δυνατότητα για απεριόριστο κέρδος στην περίπτωση που η τιμή της υποκείμενης αξίας μεταβληθεί σημαντικά.

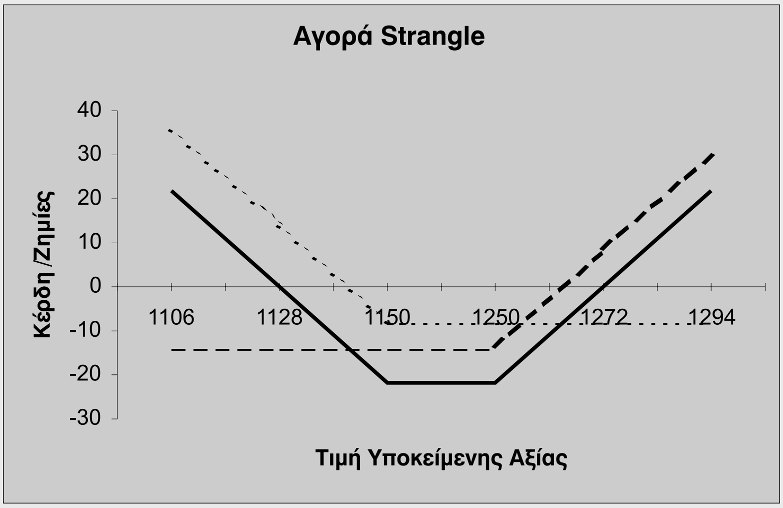
Αξία: Η αξία του δικαιώματος στη λήξη είναι για διαφορετικές τιμές εξάσκησης η X_1 και X_2 με $X_1 > X_2$:

$$C_T\left(S_T, X_1, T\right) + P_T\left(S_T, X_2, T\right) = \max\left(0, S_T - X_1\right) + \max\left(0, X_2 - S_T\right)$$

Νεκρά σημεία: Έχουμε δύο νεκρά σημεία:
Υψηλό νεκρό σημείο: Υψηλή τιμή εξάσκησης συν το κόστος
Χαμηλό νεκρό σημείο: Χαμηλή τιμή εξάσκησης μείον το κόστος

Παράδειγμα 15

Διάγραμμα 11



Στο Διάγραμμα 11 φαίνεται η δημιουργία μιας θέσης αγοράς strangle στον δείκτη FTSE/ASE–20 (του οποίου η τιμή ήταν στις 1200 μονάδες) που στηρίχθηκε σε δικαιώματα δίμηνης διάρκειας επί του δείκτη FTSE/ASE–20. Το δικαίωμα αγοράς έχει τιμή εξάσκησης τις 1250 μονάδες και η τιμή του είναι 14 μονάδες ενώ το δικαίωμα πώλησης έχει τιμή εξάσκησης τις 1150 μονάδες και η τιμή του είναι 8 μονάδες.

Το κόστος για τη δημιουργία του strangle είναι 22 μονάδες (δηλ. 110 ευρώ ανά συμβόλαιο) και ισούται με τη μέγιστη ζημιά που μπορεί να επέλθει όταν η τιμή της υποκείμενης αξίας βρίσκεται κατά την ημερομηνία λήξης ανάμεσα στις 1150 και τις 1250 μονάδες. Το μέγιστο κέρδος είναι απεριόριστο και τα νεκρά σημεία είναι οι 1128 και 1272 μονάδες. Στον πίνακα που ακολουθεί φαίνεται η αξία της θέσης για διάφορες τιμές του δείκτη.

Τιμή Δείκτη	Αξία Call	Αξία Put	Αξία Strangle
1000	–14	142	128
1100	–14	42	28
1150	–14	–8	–22
1200	–14	–8	–22
1250	–14	–8	–22

Τιμή Δείκτη	Αξία Call	Αξία Put	Αξία Strangle
1300	36	–8	28
1400	136	–8	128

Πώληση Strangle (Short Strangle)

Δημιουργία: Η θέση πώλησης strangle σημαίνει ότι ο επενδυτής πουλάει ένα δικαίωμα αγοράς και ένα δικαίωμα πώλησης με την ίδια διάρκεια αλλά διαφορετικές τιμές εξάσκησης. Τα δύο δικαιώματα πρέπει να είναι εκτός της ισοδύναμης χρηματικής τους αξίας (out–of–the–money). Το γεγονός αυτό καθιστά τα δικαιώματα φτηνά, με αποτέλεσμα η δημιουργία της θέσης να μην αποφέρει μεγάλο έσοδο.

Προσδοκία: Το άνοιγμα μιας τέτοιας θέσης σημαίνει ότι περιμένουμε ότι η τιμή της υποκείμενης αξίας θα παραμείνει σταθερή ή θα κινηθεί πολύ λίγο (προσδοκία μείωσης της μεταβλητότητας).

Μέγιστο Κέρδος: Είναι το άθροισμα των εισπραχθέντων premium από την πώληση των δικαιωμάτων ($C + P$). Επειδή τα δικαιώματα είναι out–of–the–money το έσοδο αυτό είναι σχετικά περιορισμένο. Πρέπει όμως να τονιστεί ότι δεν επέρχεται σε κάποια συγκεκριμένη τιμή της υποκείμενης αξίας, αλλά σε ένα εύρος τιμών και συγκεκριμένα στο διάστημα ανάμεσα στις δύο τιμές εξάσκησης.

Μέγιστη Ζημία: Με τη στρατηγική αυτή η ζημία μας μπορεί να είναι απεριόριστη στην περίπτωση που η τιμή της υποκείμενης αξίας μεταβληθεί σημαντικά.

Αξία: Η αξία του δικαιώματος στη λήξη για τον πωλητή είναι, για διαφορετικές τιμές εξάσκησης η X_1 και X_2 με $X_1 > X_2$:

$$-C_T\left(S_T, X_1, T\right) - P_T\left(S_T, X_2, T\right) = -\max\left(0, S_T - X_1\right) - \max\left(0, X_2 - S_T\right)$$

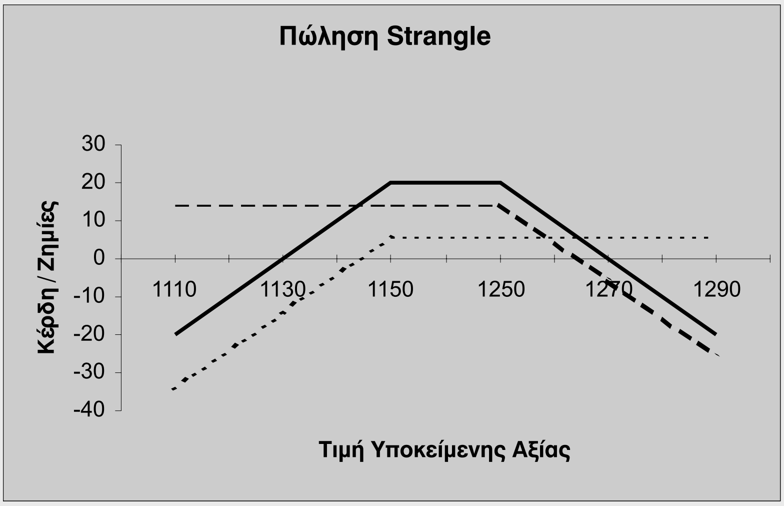
Νεκρά σημεία: ´Εχουμε δύο νεκρά σημεία:

<u>Υψηλό νεκρό σημείο</u>: Υψηλή τιμή εξάσκησης συν το κόστος

<u>Χαμηλό νεκρό σημείο</u>: Χαμηλή τιμή εξάσκησης μείον το κόστος

Παράδειγμα 16

Διάγραμμα 12



Στο Διάγραμμα 12 φαίνεται η δημιουργία μιας θέσης πώλησης strangle στον δείκτη FTSE/ASE–20 (του οποίου η τιμή ήταν στις 1200 μονάδες) που στηρίχθηκε σε δικαιώματα δίμηνης διάρκειας επί του δείκτη FTSE/ASE–20. Το δικαίωμα αγοράς έχει τιμή εξάσκησης τις 1250 μονάδες και η τιμή του είναι 14 μονάδες ενώ το δικαίωμα πώλησης έχει τιμή εξάσκησης τις 1150 μονάδες και η τιμή του είναι 8 μονάδες.

Η πρόσοδος από τη δημιουργία του strangle είναι 22 μονάδες (δηλ. 110 ευρώ ανά συμβόλαιο) και ισούται με το μέγιστο κέρδος που μπορεί να επέλθει όταν η τιμή τη υποκείμενης αξίας βρίσκεται κατά την ημερομηνία λήξης ανάμεσα στις 1150 και τις 1250 μονάδες. Η μέγιστη ζημία είναι απεριόριστη και τα νεκρά σημεία είναι οι 1128 και 1272 μονάδες. Στον παρακάτω πίνακα φαίνεται η αξία της θέσης για διάφορες τιμές του δείκτη.

Τιμή Δείκτη	Αξία Call	Αξία Put	Αξία Strangle
1000	14	–142	–128
1100	14	–42	–28
1150	14	8	22
1200	14	8	22
1250	14	8	22
1300	–36	8	–28
1400	–136	8	–128

Διαφορές ανάμεσα στα Straddles και τα Strangles

- Επειδή τα straddles δημιουργούνται από at-the-money δικαιώματα, τα έσοδα ή έξοδα κατά τη δημιουργία της θέσης είναι μεγαλύτερα από τα Strangles όπου τα δικαιώματα είναι out-of-the-money. Έτσι τα straddles μας αποφέρουν μεγαλύτερα κέρδη ενώ τα strangles μικρότερες ζημίες.
- Για να αποβεί κερδοφόρο ένα strangle πρέπει η μεταβολή στην τιμή της υποκείμενης αξίας να είναι μεγαλύτερη από ό,τι στην περίπτωση των straddles. Για τον ίδιο λόγο, ένα strangle επιτρέπει μεγαλύτερη διακύμανση της τιμής πριν αποβεί ζημιογόνο.

Ανοίγματα (Spreads)

Τα ανοίγματα δημιουργούνται από την ταυτόχρονη αγορά ενός δικαιώματος και την πώληση ενός άλλου που διαφέρει από το πρώτο σε ένα μόνο στοιχείο.

- Κάθετα ή χρηματικά ανοίγματα (vertical spreads) είναι τα ανοίγματα των οποίων τα δικαιώματα έχουν ίδια λήξη και διαφορετική τιμή εξάσκησης.
- Οριζόντια ή χρονικά ανοίγματα (horizontal ή time spreads) είναι τα ανοίγματα των οποίων τα δικαιώματα έχουν ίδια τιμή εξάσκησης και διαφέρουν ως προς τη λήξη τους. Τα χρονικά ανοίγματα κερδίζουν και από την άνοδο και από την πτώση της μεταβλητότητας.
- Τέλος, τα διαγώνια ανοίγματα (diagonal spreads) συνδυάζουν οριζόντια και κάθετα ανοίγματα.
-

	Κάθετα Ανοίγματα	Οριζόντια Ανοίγματα	Διαγώνια Ανοίγματα
Τιμή Εξάσκησης	Διαφορετική	Ίδια	Διαφορετική
Ημερομηνία Εξάσκησης	Ίδια	Διαφορετική	Διαφορετική

Ο επενδυτής που παίρνει κάποια θέση ανοίγματος γίνεται ταυτόχρονα αγοραστής και πωλητής δικαιωμάτων. Η ονομασία αυτού του είδους στρατηγικής προέρχεται από το γεγονός ότι τα αποτελέσματα της θέσης εξαρτώνται από την εξέλιξη του ανοίγματος μεταξύ των δύο τιμών. Χαρακτηριστικό των ανοιγμάτων είναι ότι τα πιθανά κέρδη και οι πιθανές ζημίες είναι περιορισμένα σε κάποιο συγκεκριμένο ποσό. Ωστόσο μετριάζουν τον κίνδυνο του επενδυτή. Η μείωση του κινδύνου επιτυγχάνεται διότι συνδυάζονται μια θέση αγοράς και μια θέση πώλησης του δικαιώματος. Εάν η τιμή της μετοχής μειωθεί, τότε η ζημιά από το long call δικαίωμα θα αντισταθμιστεί εν μέρει από το όφελος της θέσης short call. Έτσι, η επιτυχία της στρατηγικής εξαρτάται από την επαλήθευση των προσδοκιών. Κατά πόσο το κέρδος είναι μεγαλύτερο της ζημίας, εξαρτάται από τη μεταβλητότητα του κάθε δικαιώματος κλήσης (call).

Ένα δεύτερο χαρακτηριστικό τους είναι ότι η μεταβλητότητα της υποκείμενης αξίας (της μετοχής) δεν επηρεάζει σημαντικά το άνοιγμα. Έχουμε αναφέρει ότι η αύξηση της μεταβλητότητας επηρεάζει θετικά τις θέσεις αγοράς και αρνητικά τις θέσεις πώλησης. Επειδή τα ανοίγματα αποτελούνται από μια θέση αγοράς και μια πώλησης, οι αντίθετες επιδράσεις αλληλοεξουδετερώνονται σε αρκετό βαθμό.

Κάθετα (χρονικά) ανοίγματα (Vertical Spreads)

Υπάρχουν δύο είδη κάθετων ανοιγμάτων. Το κάθετο ανοδικό άνοιγμα (Vertical Bull Spread) και το κάθετο καθοδικό άνοιγμα (Vertical Bear Spread). Και τα δύο είδη μπορούν να δημιουργηθούν τόσο με τη χρήση δικαιωμάτων αγοράς, όσο και με τη χρήση δικαιωμάτων πώλησης.

Η λήψη κάποιας θέσης είναι αποτέλεσμα των προσδοκιών του επενδυτή για την κατεύθυνση της τιμής της υποκείμενης αξίας. Όταν αναμένεται άνοδος τότε προτιμάται το ανοδικό άνοιγμα. Στην αντίθετη περίπτωση προτιμάται το καθοδικό.

Κάθετο ανοδικό άνοιγμα (Vertical Bull Spread)

Στην περίπτωση του κάθετου ανοδικού ανοίγματος προσδοκάμε μια ανοδική κίνηση της τιμής της υποκείμενης αξίας. Η κίνηση αυτή δεν περιμένουμε να είναι σημαντική αλλά μικρή. Για τον λόγο αυτό δεν ακολουθούμε τη στρατηγική της αγοράς δικαιώματος αγοράς (το οποίο στην περίπτωση μεγάλης ανόδου θα μας απέφερε σημαντικά κέρδη) αλλά πουλάμε ταυτόχρονα και ένα δικαίωμα, ώστε να μειώσουμε το κόστος του πρώτου call με την πώληση του δεύτερου.

Κάθετο ανοδικό άνοιγμα με δικαιώματα αγοράς (Vertical Bull Spread with Calls)

Δημιουργία: Η δημιουργία αυτού του ανοίγματος περιλαμβάνει την αγορά ενός δικαιώματος αγοράς (C_1) και την πώληση ενός άλλου δικαιώματος αγοράς (C_2) με υψηλότερη τιμή εξάσκησης από το πρώτο ($X_1 < X_2$). Είναι αντιληπτό ότι για το άνοιγμα της θέσης απαιτείται κάποια επένδυση επειδή το δικαίωμα που αγοράζουμε είναι ακριβότερο από το δικαίωμα που πουλάμε (όσο μικρότερη είναι η τιμή εξάσκησής του, τόσο μεγαλύτερη είναι η απαιτούμενη επένδυση). Παρόλα αυτά το έσοδο μειώνει το κόστος της δημιουργίας της θέσης σε σχέση με μια απλή αγορά δικαιώματος αγοράς (long call), μειώνοντας έτσι την πιθανότητα ζημιάς, αλλά ταυτόχρονα περιορίζει και το δυνητικό κέρδος σε περίπτωση μεγάλης ανόδου της τιμής της υποκείμενης αξίας.

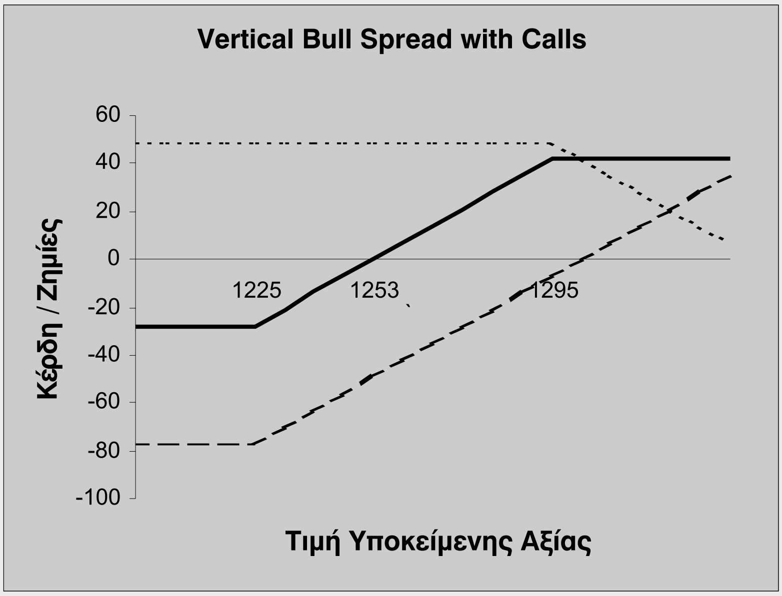
Μέγιστη Ζημία: Η μέγιστη ζημία συντελείται όταν στη λήξη κανένα από τα δύο δικαιώματα δεν έχει αξία. Αυτό συμβαίνει όταν η τιμή της υποκείμενης αξίας είναι μικρότερη ή ίση από τη χαμηλότερη τιμή εξάσκησης. Η δε ζημία θα ισούται με το καθαρό καταβληθέν premium. Δηλαδή είναι: Μέγιστη Ζημία = $C_1 - C_2$.

Μέγιστο Κέρδος: Το μέγιστο κέρδος σημειώνεται όταν και τα δύο δικαιώματα έχουν στη λήξη τους εσωτερική αξία, δηλαδή όταν η τιμή της υποκείμενης αξίας είναι μεγαλύτερη ή ίση από την υψηλή τιμή εξάσκησης. Το κέρδος αυτό είναι ίσο με την υψηλή τιμή εξάσκησης μείον τη χαμηλή τιμή εξάσκησης, μείον το καθαρό καταβληθέν premium. Δηλαδή, είναι: Μέγιστο Κέρδος = $(X_2 - X_1) - (C_1 - C_2)$.

Νεκρό σημείο: Το νεκρό σημείο είναι ίσο με τη χαμηλότερη τιμή εξάσκησης συν το καθαρό καταβληθέν premium. Δηλαδή, $BE = X_1 + (C_1 - C_2)$.

Παράδειγμα 17

Διάγραμμα 13



Στο Διάγραμμα 13 φαίνεται η δημιουργία μιας θέσης κάθετου ανοδικού ανοίγματος με δικαιώματα αγοράς επί του δείκτη FTSE/ASE–20. Το δικαίωμα που αγοράζεται έχει τιμή εξάσκησης τις 1225 μονάδες και κοστίζει 77 μονάδες και αυτό που πωλείται έχει τιμή εξάσκησης τις 1295 μονάδες και κοστίζει 49 μονάδες. Η δημιουργία της θέσης κοστίζει 28 μονάδες (= 77 – 49, δηλαδή 140 ευρώ), ποσό που συμπίπτει με τη μέγιστη ζημιά. Το μέγιστο κέρδος είναι 42 μονάδες (= 1295 – 1225 – 28, δηλαδή 210 ευρώ) και το νεκρό σημείο είναι οι 1253 μονάδες (= 1225 + 28).

Παρακάτω εμφανίζεται η αξία της θέσης για διάφορες τιμές του δείκτη.

Τιμή Δείκτη	Αξία Long Call	Αξία Short Call	Αξία Ανοίγματος
1197	–77	49	–28
1218	–77	49	–28
1225	–77	49	–28
1239	–63	49	–14
1246	–56	49	–7
1253	–49	49	0
1260	–42	49	7
1281	–21	49	28
1295	–7	49	42
1309	7	35	42
1330	28	14	42
1337	35	7	42

Κάθετο ανοδικό άνοιγμα με δικαιώματα πώλησης (Vertical Bull Spread with Puts)

Δημιουργία: Το κάθετο ανοδικό άνοιγμα μπορεί να δημιουργηθεί και με δικαιώματα πώλησης. Στην περίπτωση αυτή ο επενδυτής αγοράζει ένα δικαίωμα με τιμή εξάσκησης X_1 και κόστος P_1 και πουλάει ένα άλλο δικαίωμα με τιμή εξάσκησης X_2 μεγαλύτερη από του πρώτου ($X_1 < X_2$) με τιμή P_2. Επειδή το δικαίωμα που πουλάει έχει υψηλότερη τιμή εξάσκησης από αυτό που αγοράζει, έπεται ότι $P_1 < P_2$. Δηλαδή με το άνοιγμα της θέσης αυτής υπάρχει ένα καθαρό έσοδο για τον επενδυτή, γεγονός που αποτελεί και τη βασική διαφορά ανάμεσα σε ένα ανοδικό άνοιγμα με puts και ένα με calls.

Προσδοκία: Η προσδοκία είναι ίδια με αυτή του ανοίγματος με δικαιώματα αγοράς (μικρή ανοδική κίνηση της τιμής της υποκείμενης αξίας).

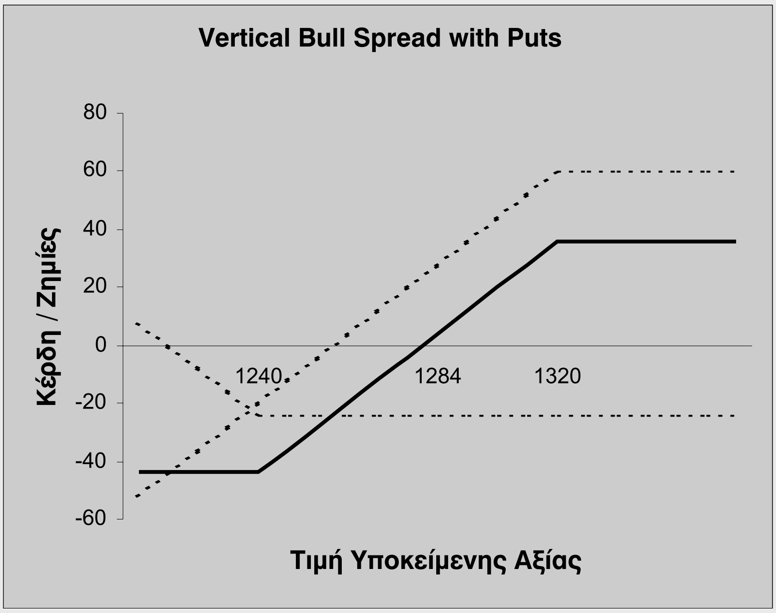
Μέγιστο Κέρδος: Συμπίπτει με το καθαρό έσοδο (P_2 – P_1). Επιτυγχάνεται όταν στη λήξη η τιμή της υποκείμενης αξίας βρίσκεται πάνω από την υψηλή τιμή εξάσκησης.

Μέγιστη Ζημία: Είναι η διαφορά μεταξύ των τιμών εξάσκησης μείον το καθαρό έσοδο (premium). Είναι δηλαδή $X_2 - X_1 - (P_2 - P_1)$

Νεκρό σημείο: Είναι η υψηλότερη τιμή εξάσκησης μείον το καθαρό έσοδο $[X_2 - (C_2 - C_1)]$

Παράδειγμα 18

Διάγραμμα 14



Στο Διάγραμμα 14 φαίνεται η δημιουργία ενός κάθετου ανοδικού ανοίγματος με δικαιώματα πώλησης επί του δείκτη FTSE/ASE–20. Το δικαίωμα που αγοράζεται έχει τιμή εξάσκησης τις 1240 μονάδες και κοστίζει 24 μονάδες, και αυτό που πωλείται έχει τιμή εξάσκησης τις 1320 μονάδες και κοστίζει 60 μονάδες. Η δημιουργία της θέσης κοστίζει 28 μονάδες (= 77 – 49, δηλαδή 140 ευρώ), ποσό που συμπίπτει με τη μέγιστη ζημιά. Το μέγιστο κέρδος είναι 42 μονάδες (= 1295 – 1225 – 28, δηλαδή 210 ευρώ) και το νεκρό σημείο είναι οι 1253 μονάδες (= 1225 + 28).

Ο πίνακας παρακάτω εμφανίζει την αξία της θέσης για διάφορες τιμές του δείκτη.

Τιμή Δείκτη	Αξία Long Put	Αξία Short Put	Αξία Ανοίγματος
1208	8	–52	–44
1224	–8	–36	–44

Τιμή Δείκτη	Αξία Long Put	Αξία Short Put	Αξία Ανοίγματος
1240	–24	–20	–44
1256	–24	–4	–28
1272	–24	12	–12
1284	–24	24	0
1296	–24	36	12
1312	–24	52	28
1320	–24	60	36
1336	–24	60	36
1352	–24	60	36
1368	–24	60	36

Κάθετο καθοδικό άνοιγμα (Vertical Bear Spread)

Στην στρατηγική αυτή οι προσδοκίες για την πορεία της τιμής της υποκείμενης αξίας είναι καθοδικές. Ωστόσο, δεν αναμένεται σημαντική πτώση αλλά μια μικρή υποχώρηση. Για τον λόγο αυτό δεν επιλέγεται η στρατηγική αγοράς δικαιώματος πώλησης (long put) η οποία αποφέρει σημαντικά κέρδη στη μεγάλη πτώση αλλά έχει υψηλό τίμημα. Ένα κάθετο καθοδικό άνοιγμα μπορεί να δημιουργηθεί είτε με δικαιώματα πώλησης είτε με δικαιώματα αγοράς.

Κάθετο καθοδικό άνοιγμα με δικαιώματα αγοράς (Vertical Bear Spread with Calls)

Δημιουργία: Η δημιουργία της στρατηγικής προϋποθέτει την πώληση ενός δικαιώματος αγοράς με τιμή εξάσκησης X_1 και κόστος C_1 και την ταυτόχρονη αγορά ενός άλλου δικαιώματος αγοράς με τιμή εξάσκησης X_2 τέτοια ώστε $X_2 > X_1$ και κόστος C_2. Τα δύο δικαιώματα έχουν την ίδια διάρκεια.

Είναι εύκολα αντιληπτό ότι αφού το δικαίωμα που αγοράζεται έχει μεγαλύτερη τιμή εξάσκησης από αυτό που πωλείται, θα είναι φθηνότερο, με αποτέλεσμα η συγκεκριμένη στρατηγική να αποφέρει ένα καθαρό έσοδο. Ταυτόχρονα όμως επειδή το δικαίωμα που πουλήθηκε είναι ακριβότερο από αυτό που αγοράστηκε, είναι απαραίτητη η καταβολή ενός margin.

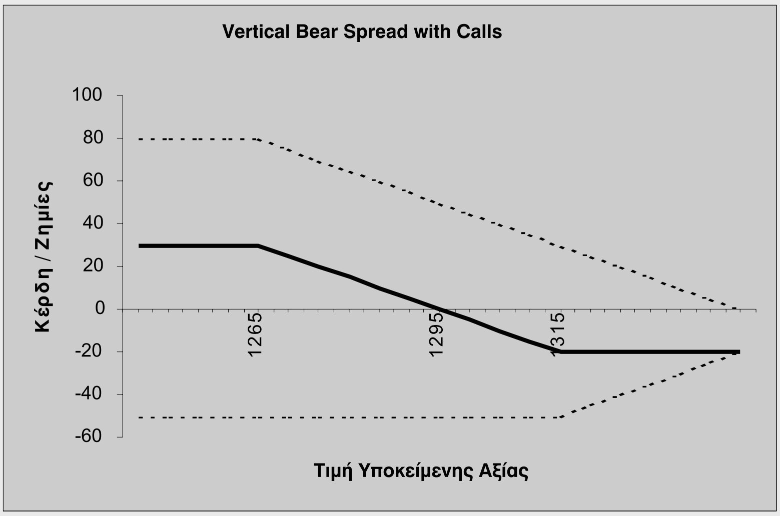
Μέγιστο Κέρδος: Συμπίπτει με το καθαρό premium που έχει εισπραχθεί ($C_1 - C_2$). Αυτό θα συμβεί όταν και τα δύο δικαιώματα λήξουν χωρίς καμία αξία, δηλαδή για τιμές της υποκείμενης αξίας μικρότερες από τη χαμηλή τιμή εξάσκησης.

Μέγιστη Ζημία: Είναι η διαφορά των τιμών εξάσκησης μείον το καθαρό έσοδο [$X_2 - X_1 - (C_1 - C_2)$]. Αυτό θα συμβεί όταν και τα δύο δικαιώματα είναι εντός της ισοδύναμης χρηματικής τους αξίας (in-the-money) κατά τη λήξη, δηλαδή όταν η τιμή της υποκείμενης αξίας θα είναι μεγαλύτερη από την υψηλότερη τιμή εξάσκησης.

Νεκρό σημείο: Είναι η χαμηλότερη τιμή εξάσκησης συν το καθαρό έσοδο [$X_1 + (C_1 – C_2)$].

Παράδειγμα 19

Διάγραμμα 15



Στο Διάγραμμα 15 φαίνεται ένα κάθετο καθοδικό άνοιγμα με δικαιώματα αγοράς επί του δείκτη FTSE/ASE–20. Το δικαίωμα που πουλήθηκε έχει τιμή εξάσκησης τις 1265 μονάδες και κόστος 80 μονάδες και το δικαίωμα που αγοράστηκε έχει τιμή εξάσκησης τις 1315 μονάδες και κόστος 50 μονάδες. Η συγκεκριμένη θέση κατά τη δημιουργία της αποφέρει έσοδο 30 μονάδων (δηλαδή 150 ευρώ) το οποίο συμπίπτει με το μέγιστο κέρδος, εφόσον κατά τη λήξη ο δείκτης κινείται σε τιμές μικρότερες από τις 1265 μονάδες. Η μέγιστη ζημιά από τη θέση είναι 20 μονάδες (δηλαδή 100 ευρώ) και πληρώνεται εφόσον στη λήξη η τιμή του δείκτη είναι μεγαλύτερη από τις 1315 μονάδες. Τέλος, το νεκρό σημείο είναι οι 1295 μονάδες. Στον παρακάτω πίνακα φαίνεται η αξία της θέσης για διάφορες τιμές του δείκτη.

Vertical Bear Spread with Calls			
Τιμή Δείκτη	**Αξία Long Call**	**Αξία Short Call**	**Αξία Spread**
1.245	–50	80	30
1.255	–50	80	30
1.265	–50	80	30
1.280	–50	65	15
1.290	–50	55	5
1.295	–50	50	0
1.300	–50	45	–5
1.310	–50	35	–15
1.315	–50	30	–20
1.335	–30	10	–20
1.345	–20	0	–20

Κάθετο καθοδικό άνοιγμα με δικαιώματα πώλησης (Vertical Bear Spread with Puts)

Δημιουργία: Η στρατηγική αυτή προϋποθέτει την πώληση ενός δικαιώματος πώλησης με τιμή εξάσκησης X_1 και κόστος P_1 και την ταυτόχρονη αγορά ενός άλλου δικαιώματος πώλησης με τιμή εξάσκησης X_2 τέτοια ώστε $X_1 < X_2$ και κόστος P_2. Τα δύο δικαιώματα έχουν την ίδια λήξη.

Γίνεται αντιληπτό ότι αφού το δικαίωμα που αγοράζεται έχει τιμή μεγαλύτερη είναι ακριβότερο και επομένως η στρατηγική αυτή χρειάζεται κάποια επένδυση.

Αν συγκρίνουμε αυτό το άνοιγμα με τη θέση αγοράς ενός δικαιώματος πώλησης (long put) όπου η προσδοκία είναι ίδια, παρατηρούμε ότι το άνοιγμα έχει υψηλότερο νεκρό σημείο και επομένως έχει μικρότερη πιθανότητα να αποβεί ζημιογόνο. Σε αντιστάθμιση αυτού, ο επενδυτής παραιτείται από τα υψηλά κέρδη που θα αποκόμιζε σε περίπτωση μεγάλης πτώσης της υποκείμενης αξίας.

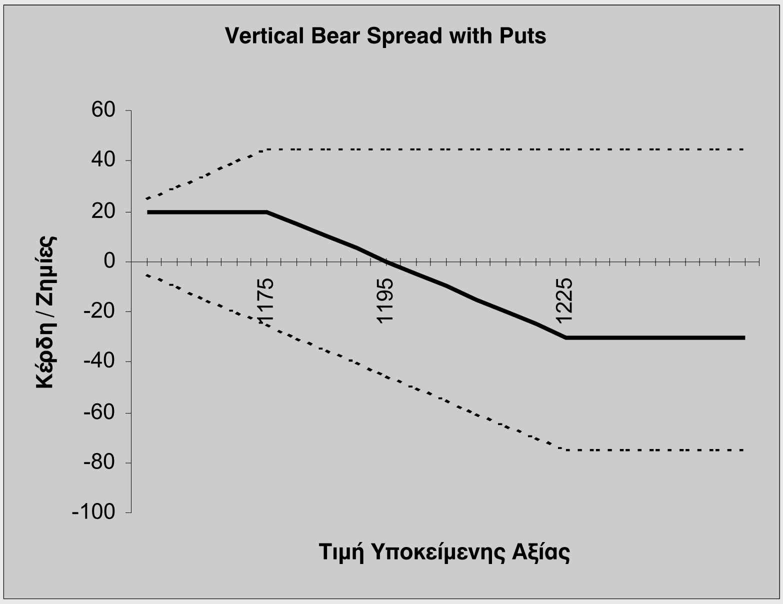
Μέγιστο Κέρδος: Είναι η διαφορά μεταξύ των τιμών εξάσκησης μείον την καθαρή επένδυση $[X_1 - X_2 - (P_2 - P_1)]$ το μέγιστο κέρδος αποκομίζεται όταν στη λήξη τα δικαιώματα δεν έχουν αξία. Αυτό συμβαίνει όταν η τιμή της υποκείμενης αξίας είναι μικρότερη από τη χαμηλή τιμή εξάσκησης.

Μέγιστη Ζημία: Συμπίπτει με την καθαρή επένδυση ($P_2 - P_1$). Συμβαίνει όταν στη λήξη η τιμή της υποκείμενης αξίας βρίσκεται πάνω από την υψηλή τιμή εξάσκησης.

Νεκρό σημείο: Είναι η υψηλή τιμή εξάσκησης μείον την καθαρή επένδυση [X_2–(P_2–P_1)].

Παράδειγμα 20

Διάγραμμα 16



Στο Διάγραμμα 16 φαίνεται ένα κάθετο καθοδικό άνοιγμα με δικαιώματα πώλησης επί του δείκτη FTSE/ASE–20. Το δικαίωμα που πουλήθηκε έχει τιμή εξάσκησης τις 1175 μονάδες και κόστος 45 μονάδες και το δικαίωμα που αγοράστηκε έχει τιμή εξάσκησης τις 1225 μονάδες και κόστος 75 μονάδες. Η συγκεκριμένη θέση κατά τη δημιουργία της χρειάζεται μια επένδυση 30 μονάδων (δηλαδή 150 ευρώ) το οποίο συμπίπτει με τη μέγιστη ζημία, εφόσον κατά τη λήξη ο δείκτης κινείται σε τιμές μεγαλύτερες από τις 1225 μονάδες. Το μέγιστο κέρδος από τη θέση είναι 20 μονάδες (δηλαδή 100 ευρώ) και πληρώνεται εφόσον στη λήξη η τιμή του δείκτη είναι μικρότερη από τις 1175 μονάδες. Τέλος, το νεκρό σημείο είναι οι 1195 μονάδες. Στον παρακάτω πίνακα φαίνεται η αξία της θέσης για διάφορες τιμές του δείκτη.

Vertical Bear Spread with Puts			
Τιμή Δείκτη	**Αξία Long Put**	**Αξία Short Put**	**Αξία Spread**
1.155	–5	25	20
1.170	–20	40	20
1.175	–25	45	20
1.185	–35	45	10
1.190	–40	45	5
1.195	–45	45	0
1.210	–60	45	–15
1.220	–70	45	–25
1.225	–75	45	–30
1.230	–75	45	–30
1.245	–75	45	–30
1.255	–75	45	–30

Ενότητα 6.5

ΤΟ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ BLACK – SCHOLES

Οι Fisher Black και Myron Scholes (BS, για συντομία) πρότειναν έναν τύπο συνεχούς μορφής για τον υπολογισμό των δικαιωμάτων. Το μοντέλο τους στηρίζεται σε μερικά βασικά αξιώματα, τα οποία παρουσιάζονται παρακάτω:

1. Η υποκείμενη αξία S μπορεί να αγοραστεί ή να πουληθεί σε οποιεσδήποτε ποσότητες και δεν παρέχει έσοδα με μορφή μερισμάτων ή άλλων χρηματικών καταβολών κατά τη διάρκεια ζωής του δικαιώματος.
2. Η τιμή της υποκείμενης αξίας είναι τυχαία μεταβλητή.
3. Οι αποδόσεις των τιμών της υποκείμενης αξίας κατανέμονται σύμφωνα με τη λογαριθμο–κανονική κατανομή.
4. Η εκτιμημένη μεταβλητότητα της υποκείμενης αξίας καθορίζεται ως η τυπική απόκλιση και παραμένει σταθερή κατά τη διάρκεια της ζωής του δικαιώματος.
5. Μπορούμε να δανειστούμε και να δανείσουμε με ένα συγκεκριμένο σταθερό επιτόκιο r για όλη τη ζωή του δικαιώματος. Με συνεχή ανατοκισμό το επιτόκιο αυτό γίνεται $R=e^{r(T-t)}$.
6. Τα δικαιώματα είναι ευρωπαϊκού τύπου.
7. Οι αγορές είναι πλήρως ανταγωνιστικές. Δεν υπάρχουν εξωτερικοί παράγοντες για να επηρεάζουν τις αποδόσεις, όπως φόροι, έξοδα συναλλαγών κ.λπ. και η πληροφόρηση είναι πλήρης.
8. Οι συναλλαγές είναι συνεχείς.
9. Δεν υπάρχουν περιορισμοί στη λήψη θέσεων αγοράς ή πώλησης στην αγορά (επιτρέπεται το short selling).
10. Οι επενδυτές είναι ουδέτεροι απέναντι στον κίνδυνο.

Το θεωρητικό αυτό υπόδειγμα αποτελεί το πιο αποδεκτό ανάμεσα στους επαγγελματίες διαπραγματευτές παραγώγων προϊόντων.

Σύμφωνα με το υπόδειγμα αυτό, η τιμή ενός δικαιώματος κλήσης (call option) δίδεται από τη σχέση:

$$C = S_0 N(d_1) - X e^{-r_c (T-t)} N(d_2),$$

όπου: (15)

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{X}\right) + \left(r_c + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \quad \mathrm{d}_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

με $N(d_1),\ N(d_2)$: αθροιστικές συναρτήσεις πιθανότητας ότι μια τυποποιημένη, κανονικά κατανεμημένη τυχαία μεταβλητή θα είναι μικρότερη ή ίση της ποσότητας d_i. Με άλλα λόγια, οι όροι $N(d_1),\ N(d_2)$ εκφράζουν παράγοντες κινδύνου με τους οποίους σταθμίζονται η τιμή της μετοχής S και $Xe^{-r_c(T-t)}$, αντίστοιχα. Ο όρος $N(d_2)$ είναι η πιθανότητα για τον ουδέτερο απέναντι στον κίνδυνο επενδυτή ότι η τιμή εξάσκησης X θα πληρωθεί στη λήξη του δικαιώματος. Οι αντίστοιχοι παράγοντες κινδύνου στο διωνυμικό υπόδειγμα τιμολόγησης δικαιωμάτων ήταν οι πιθανότητες p και $(1–p)$, αντίστοιχα.

σ: η ετησιοποιημένη μεταβλητότητα των συνεχώς ανατοκιζόμενων (λογαριθμικών) αποδόσεων της μετοχής.

r_c: το συνεχώς ανατοκιζόμενο επιτόκιο χωρίς κίνδυνο, το οποίο θεωρείται σταθερό μέχρι τη λήξη του δικαιώματος. Να σημειώσουμε τώρα ότι η σχέση της τιμής του δικαιώματος και του επιτοκίου χωρίς κίνδυνο είναι γραμμική. Δηλαδή, η τιμή του δικαιώματος δεν μεταβάλλεται πολύ με τις μεταβολές του επιτοκίου χωρίς κίνδυνο.

$Xe^{-r_cT} = \dfrac{X}{e^{r_cT}}$: Ο όρος e^{r_cT} είναι ο συντελεστής προεξόφλησης, με τον οποίο προεξοφλείται την τιμή εξάσκησης σε παρούσα αξία χρησιμοποιώντας συνεχή ανατοκισμό (T αντί του $T–t$, για συντομία).

Δραστηριότητα 15/Κεφάλαιο 6

(α) Ποιες μεταβλητές εμφανίζονται στο υπόδειγμα των BS; Πώς συνδέονται με τις προτιμήσεις των επενδυτών; (β) Σε ποια μεταβλητή συνεπάγεται η εμπλοκή των προτιμήσεων των επενδυτών για κίνδυνο;

Θα βρείτε τη δική μας απάντηση στο Παράρτημα, στο τέλος του κεφαλαίου.

Ο υπολογισμός της αξίας του δικαιώματος με τη φόρμουλα των BS είναι μια διαδικασία σε 3 βήματα:

Βήμα 1^{ο}: Υπολογισμός των d_1 και d_2.

Βήμα 2^{ο}: Υπολογισμός $N(d_1)$, $N(d_2)$.

Βήμα 3^{ο}: Υπολογισμός της αξίας του δικαιώματος.

Το αμέσως επόμενο παράδειγμα παρουσιάζει αναλυτικά τα βήματα αυτά σε μια υποθετική περίπτωση, που εξετάσαμε και στα προηγούμενα παραδείγματα.

Παράδειγμα 21

Μια απλή εφαρμογή των δεδομένων:

Χρόνος μέχρι τη λήξη του δικαιώματος κλήσης 6 μήνες (άρα $T–t$ = 0.5 έτη), S_0 = 100€, X = 100, σ = 50%, rf = 10%, οδηγεί στις παρακάτω αριθμητικές πράξεις του υποδείγματος BS:

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{100}{100}\right) + \left[0.10 + \frac{(0.50)^2}{2}\right](0.5)}{0.50\sqrt{0.50}} = 0.31819 \text{ και } N(d_1) = 0.624833$$

$d_2 = 0.318 - 0.50 * 0.707 = -0.03536$ και $N(d_2) = 0.485898$

[$N(d)$ από πίνακες τυποποιημένης κανονικής κατανομής ή στο excel με τη συνάρτηση normsdist(d)].

Τέλος, η τιμή του δικαιώματος είναι:

$$C = 100 \cdot 0.624833 - \frac{100}{e^{0.1*0.5}} \cdot 0.485898 = 16.2632\text{ €}$$

Παράδειγμα 22

Έστω ότι η τιμή της υποκείμενης αξίας (μετοχής) είναι $S_0 = 125.9375$€ με μεταβλητότητα αποδόσεων $\sigma = 0.83$. Η τιμή εξάσκησης του δικαιώματος, το οποίο λήγει σε 35 ημέρες, είναι $X = 125$. Το επιτόκιο χωρίς κίνδυνο είναι 4.56%. Θα εφαρμόσουμε τη σχέση των Black and Scholes και θα συγκρίνουμε το αποτέλεσμα με αυτό που πήραμε από την εφαρμογή του διωνυμικού υποδείγματος.

Βήμα 1ο. Υπολογισμός των d_1 και d_2.

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{125.9375}{125}\right) + \left[\left(e^{0.0456} - 1\right) + \frac{(0.83)^2}{2}\right]\left(\frac{35}{365}\right)}{0.83\sqrt{\frac{35}{365}}} = 0.1742$$

$$d_2 = 0.1742 - 0.83\sqrt{\frac{35}{365}} = -0.0828$$

Βήμα 2ο. Υπολογισμός $N(d_1)$, $N(d_2)$.

Με τη βοήθεια του Excel μπορούμε να υπολογίσουμε τις τιμές των $N(0.1742)$ και N(–0.00828) χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση normsdist(). Θα είναι, λοιπόν:

normsdist(0.1742) = 0.5691 και normsdist(–0.0828) = 0.4670.

[Θυμηθείτε ότι $N(-0.0828) = 1 - N(0.0828) = 1 - 0.5319 = 0.4681$, που είναι κοντά στην τιμή που υπολογίσαμε παραπάνω].

Βήμα 3ο. Υπολογισμός της αξίας του δικαιώματος.

$$C = S_0 N(d_1) - Xe^{-r_c T} N(d_2) = 125.9375(0.5675) - 125e^{-0.0446(35/365)}(0.4681) = 13.21\text{ €}.$$

Δραστηριότητα 16/Κεφάλαιο 6

Έστω ότι η τιμή της μετοχής είναι S_0 = 100€ και ένα call option επί αυτής έχει τιμή εξάσκησης 100€. Το δικαίωμα λήγει σε ένα έτος (1 περίοδος). Το επιτόκιο χωρίς κίνδυνο είναι 6%. Η μεταβλητότητα των αποδόσεων της μετοχής (τυπική απόκλιση των αποδόσεων) είναι 0.10. (α) Ποια είναι η τιμή του δικαιώματος με τη φόρμουλα των Black and Scholes; (β) Να υπολογίσετε την αξία του δικαιώματος επίδοσης (put option) με τη βοήθεια της ισοδυναμίας put–call parity.

Θα βρείτε τη δική μας απάντηση στο Παράρτημα, στο τέλος του κεφαλαίου.

Παράδειγμα 23

Οι Black & Scholes ανάπτυξαν το υπόδειγμά τους για τα δικαιώματα κλήσης μόνο (call options). Να αναπτύξετε το υπόδειγμα Black & Scholes και για τα δικαιώματα κλήσης επίδοσης (put options). [Ισχύει μόνο για ευρωπαϊκά δικαιώματα επίδοσης].

Λύση

Χρησιμοποιώντας την ισοδυναμία put-call έχουμε:

$$P(S_0,T,X) = C(S_0,T,X) + Xe^{-r(T-t)} - S_0$$

Αντικαθιστώντας το υπόδειγμα των B and S έχουμε:

$$C = S_0N(d_1) - Xe^{-r_cT}N(d_2)$$

$$P(S_0,T,X) = S_0N(d_1) - Xe^{-r(T-t)}N(d_2) + Xe^{-r(T-t)} - S_0$$

ή

$$P(S_0,T,X) = Xe^{-r(T-t)}\left[1 - N(d_2)\right] - S_0\left[1 - N(d_1)\right]$$

6.5.1 Οι μεταβλητές του υποδείγματος Black & Scholes: Συντελεστές ευαισθησίας

Η τιμή ενός δικαιώματος μεταβάλλεται ως αποτέλεσμα μεταβολών στις τιμές των μεταβλητών από τις οποίες εξαρτάται. Οι μεταβλητές από τις οποίες επηρεάζεται η τιμή του δικαιώματος είναι:

(i) Η τιμή εξάσκησης (X)
(ii) Το επιτόκιο χωρίς κίνδυνο (rf)
(iii) Ο χρόνος μέχρι τη λήξη του δικαιώματος (T)
(iv) Η μεταβλητότητα ή τυπική απόκλιση των αποδόσεων της μετοχής (σ).

Τα εργαλεία που μας δίνουν τη δυνατότητα να μετρήσουμε τη μεταβολή των τιμών των δικαιωμάτων ως αποτέλεσμα των μεταβολών στις τιμές των μεταβλητών, είναι οι συντελεστές ευαισθησίας. Οι συντελεστές ευαισθησίας συμβολίζονται με ελληνικά σύμβολα και, πριν από αρκετά χρόνια οι Βρετανοί διαπραγματευτές τους έδωσαν την ονομασία «The Greeks». Οι συντελεστές ευαισθησίας είναι:

- Ο Δέλτα (delta)
- Ο Γάμα (gamma)
- Ο Θήτα (theta)
- Ο Βέγκα (Vega –γνωστός και ως Lamda ή Kappa)
- Ο Ρο (rho)

Οι συντελεστές αυτοί δίνουν τη δυνατότητα:

1. Να προβλέψουμε τη μεταβολή της τιμής ενός δικαιώματος δεδομένης μιας μεταβολής σε μια μεταβλητή.
2. Να υπολογίσουμε τον αριθμό των δικαιωμάτων που απαιτούνται για να γίνει αντιστάθμιση κινδύνου σε μια θέση.

Η τιμή της υποκείμενης μετοχής: Οι συντελεστές Δέλτα και Γάμα

Ο συντελεστής **Δέλτα** ($\mathit{\Delta}$) είναι ένα προσεγγιστικό μέγεθος μέτρησης της μεταβολής της τιμής ενός δικαιώματος που οφείλεται σε μια δεδομένη (πολύ μικρή) μεταβολή της τιμής της υποκείμενης αξίας. Ο συντελεστής δέλτα ορίζεται ως η παράγωγος του δικαιώματος ως προς την τιμή της υποκείμενης αξίας:

$$\mathit{\Delta} = \frac{\partial C}{\partial S} = \mathrm{N}(\mathrm{d}_1) \qquad (16)$$

Ο Δέλτα για τα δικαιώματα αγοράς είναι πάντα θετικός και μικρότερος της μονάδας και, για τα δικαιώματα πώλησης είναι αρνητικός. Αυτό μπορεί να αποδειχτεί τόσο θεωρητικά όσο και αλγεβρικά.

Θεωρητικά: Γνωρίζουμε ότι όταν η τιμή της υποκείμενης αξίας αυξάνεται, τότε αυξάνεται και η τιμή του δικαιώματος αγοράς, ενώ μειώνεται η τιμή του δικαιώματος πώλησης. Από την παρατήρηση αυτή μπορούμε να συμπεράνουμε ότι ένα δικαίωμα αγοράς έχει θετικό delta και ένα δικαίωμα πώλησης αρνητικό.

Αλγεβρικά: Από τον τύπο των Black & Scholes και τον ορισμό του Δέλτα, έχουμε ότι:

$\mathit{\Delta} = \dfrac{\partial C}{\partial S} = N(d_1)$, για ευρωπαϊκού τύπου δικαιώματα κλήσης (call option)

$\mathit{\Delta} = \dfrac{\partial P}{\partial S} = N(d_1) - 1$, για ευρωπαϊκού τύπου δικαιώματα επίδοσης (put option)

Το $N(d)$ είναι η αθροιστική συνάρτηση της κανονικής κατανομής και επομένως είναι πάντα θετικός αριθμός και μικρότερος ή ίσος του 1. Άρα για το Call ο Δέλτα είναι θετικός αριθμός ή μηδέν. Αντίθετα η ποσότητα $N(d)$–1 είναι πάντα αρνητικός αριθμός ή μηδέν.

Τα at-the-money δικαιώματα κλήσης έχουν Δέλτα περίπου 0,5 ενώ τα δικαιώματα επίδοσης –0,5. Ο Δέλτα μιας θέσης αγοράς υποκείμενου τίτλου είναι πάντα

1, ενώ μιας θέσης πώλησης είναι –1. Το εάν ο Δέλτα του δικαιώματος επίδοσης θα τείνει προς το 0 ή το 1, εξαρτάται από το πόσο εκτός ή εντός της ισοδύναμης χρηματικής αξίας βρίσκεται. Ένα δικαίωμα αγοράς που είναι πολύ εκτός της ισοδύναμης χρηματικής του αξίας (deep out–of–the–money) έχει Δέλτα που πλησιάζει προς το 0, ενώ αν είναι πολύ εντός της ισοδύναμης χρηματικής του αξίας (deep in-the-money) έχει Δέλτα που πλησιάζει το 1.

Στον Πίνακα 5 παρουσιάζονται οι διάφορες τιμές του Δέλτα ανάλογα με το είδος του δικαιώματος.

Πίνακας 5

Τιμές Δέλτα ανάλογα με το είδος του δικαιώματος

	In-the-money	**At-the-money**	**Out-of the-money**
Δικαίωμα αγοράς	0 έως 0,5	0,5	0,5 έως 1
Δικαίωμα πώλησης	0 έως –0,5	–0,5	–0,5 έως –1

Μια πολύ σημαντική επισήμανση που πρέπει να γίνει είναι ότι ο Δέλτα δεν είναι σταθερός, αλλά μεταβάλλεται τόσο με τις αλλαγές της τιμής της υποκείμενης αξίας όσο και με το πέρασμα του χρόνου.

Ο Δέλτα, επίσης, είναι χρήσιμος στον υπολογισμό του δείκτη αντιστάθμισης (hedge ratio). Ο δείκτης αντιστάθμισης δείχνει τον αριθμό των μετοχών προς τα δικαιώματα κλήσης ή επίδοσης που πρέπει να διατηρούνται στο χαρτοφυλάκιο προκειμένου η αξία του να μένει ανέπαφη ανεξάρτητα από τις μεταβολές της τιμής. Πιο συγκεκριμένα, σε ένα χαρτοφυλάκιο ο επενδυτής πρέπει να διατηρεί τόσα συμβόλαια δικαιωμάτων για τις μετοχές που κατέχει, όσα προσδιορίζονται από τον τύπο:

$$\text{Δείκτης Αντιστάθμισης} = \frac{\text{Αριθμός Μετοχών}}{\text{Μέγεθος Συμβολαίου}} \times \frac{1}{-\Delta\ \text{δικαιώματος}} \qquad (17)$$

το $-\Delta$ σημαίνει ότι όταν θέλουμε να αντισταθμίσουμε το χαρτοφυλάκιο με δικαιώματα κλήσης, που έχουν θετικό Δ, τότε το αποτέλεσμα θα είναι αρνητικός αριθμός που σημαίνει ότι θα πρέπει να πουλήσουμε τον συγκεκριμένο αριθμό συμβολαίων. Στην περίπτωση των δικαιωμάτων επίδοσης το αποτέλεσμα είναι θετικός αριθμός, που σημαίνει ότι πρέπει να αγοράσουμε τα αντίστοιχα συμβόλαια.

Παράδειγμα 24

Πρόβλεψη της μεταβολής της τιμής ενός δικαιώματος

Έστω ότι ένα δικαίωμα αγοράς βρίσκεται εντός της ισοδύναμης χρηματικής του αξίας (in-the-money), έχει τιμή 12 ευρώ και $\Delta=0,80$. Αν η τιμή της υποκείμενης αξίας μεταβληθεί κατά 4 ευρώ, η τιμή του δικαιώματος θα μεταβληθεί κατά $4\times0,80=3,2$ ευρώ.

Παράδειγμα 25

Υπολογισμός δικαιωμάτων που απαιτούνται για αντιστάθμιση του κινδύνου θέσης

Έστω ότι ο Δέλτα ενός δικαιώματος αγοράς στη μετοχή της Εθνικής Τράπεζας Ελλάδος (ΕΤΕ) είναι 0,7 (το δικαίωμα αφορά σε 100 μετοχές της ΕΤΕ). Έστω, ακόμα ότι η τιμή του δικαιώματος είναι 5 ευρώ και ότι κατέχουμε 280 μετοχές της Εθνικής οι οποίες έχουν τιμή 25 ευρώ. Για να κάνουμε το χαρτοφυλάκιό μας ουδέτερο (δηλαδή αμετάβλητο σε μικρές αλλαγές της τιμής της μετοχής), πρέπει να πουλήσουμε βάσει της σχέσης (3):

$$280/(100 \times 0,7) = 4 \text{ συμβόλαια.}$$

Αν η τιμή της μετοχής μεταβληθεί στα 27 ευρώ, τότε από τη θέση μας σε μετοχές θα έχουμε αποκομίσει $280 \times 2 = 560$ ευρώ. Ταυτόχρονα, όμως, λόγω της ανοδικής κίνησης της μετοχής και του γεγονότος ότι ο Δέλτα είναι 0,70, η τιμή του δικαιώματος έχει ανέβει κατά 1,4 ευρώ ($2 \times 0,70 = 1,4$ ευρώ) από τα 5 στα 6,4 ευρώ. Αυτό σημαίνει ότι από την πώληση των 4 συμβολαίων έχουμε μια ζημία $4 \times 100 \times 1,4 =560$ ευρώ. Δηλαδή το κέρδος από την άνοδο των μετοχών αντισταθμίστηκε τελείως από τη ζημία των δικαιωμάτων.

Αν η τιμή της μετοχής κινηθεί στα 22 ευρώ, τότε από τη θέση μας σε μετοχές θα έχουμε μια ζημία $280 \times 3 = 840$ ευρώ. Ταυτόχρονα όμως η τιμή του δικαιώματος θα έχει αναπροσαρμοστεί κατά 2,1 ευρώ ($3 \times 0,70 = 2,1$) από τα 5 στα 2,9 ευρώ, δηλαδή από τα συμβόλαια η θέση μας παρουσιάζει κέρδη $4 \times 100 \times 2,1 = 840$ ευρώ. Δηλαδή και σε αυτή την περίπτωση έχουμε πλήρη αντιστάθμιση.

Στο παραπάνω παράδειγμα αυτό πρέπει να επισημάνουμε την κινητικότητα του Δέλτα. Η αντιστάθμιση με Δέλτα είναι εφικτή μόνο για ένα μικρό χρονικό διάστημα, τόσο λόγω μεταβολής της τιμής της μετοχής όσο και λόγω του χρόνου. Για τον λόγο αυτό και εφόσον επιθυμούμε να κάνουμε αντιστάθμιση με Δέλτα, πρέπει να παρακολουθούμε το χαρτοφυλάκιό μας συνεχώς, να εκτιμάμε κάθε στιγμή το νέο Δέλτα και να αναπροσαρμόζουμε τον αριθμό των δικαιωμάτων που αγοράζουμε ή πουλάμε. Βέβαια, κάτι τέτοιο δεν είναι εφικτό είτε λόγω των συνεχών υπολογισμών που απαιτούνται είτε λόγω του απαγορευτικού κόστους των συναλλαγών που χρειάζεται να γίνουν. Συνήθως, λοιπόν, επιλέγεται ένα σταθερό χρονικό διάστημα (μια ημέρα, μια εβδομάδα, ένας μήνας κ.λπ.) και διαμορφώνεται το χαρτοφυλάκιο ανάλογα με το νέο Δέλτα. Όσο πιο μικρό είναι το διάστημα, τόσο αποτελεσματικότερη είναι η ουδετερότητα του χαρτοφυλακίου αλλά και τόσο μεγαλύτερο το κόστος.

Δραστηριότητα 17/Κεφάλαιο 6

Πόσο και πώς θα μεταβληθεί η τιμή του δικαιώματος, που έχει συντελεστή Δέλτα ίσο με 0.5572: (α) εάν η τιμή της υποκείμενης μετοχής αυξηθεί 5€; (β) εάν η τιμή της υποκείμενης μετοχής μειωθεί κατά 0.01€ και κατέχουμε 1,000 δικαιώματα κλήσης;

Θα βρείτε τη δική μας απάντηση στο Παράρτημα, στο τέλος του κεφαλαίου.

Ο Δέλτα μεταβάλλεται και με τη μεταβολή του χρόνου μέχρι τη λήξη του δικαιώματος, ακόμα και εάν η τιμή της μετοχής δεν μεταβάλλεται. Όσο μειώνεται ο χρόνος που απομένει μέχρι τη λήξη του δικαιώματος, για τα δικαιώματα κλήσης στο χρηματικό ισοδύναμο, ο Δέλτα τείνει στη μονάδα, ενώ για τα δικαιώματα κλήσης εκτός του χρηματικού ισοδύναμου, ο Δέλτα τείνει στο μηδέν.

Παράδειγμα 26

Δέλτα μιας ολόκληρης θέσης

Για τον Δέλτα ισχύει η γραμμικότητα. Δηλαδή ο Δέλτα ενός χαρτοφυλακίου είναι ίσος με το άθροισμα των Δέλτα των στοιχείων που το απαρτίζουν. Έστω ότι έχουμε ένα χαρτοφυλάκιο με τα παρακάτω στοιχεία:

- 4 αγορές δικαιωμάτων αγοράς επί της μετοχής της Εθνικής με $\Delta_1 = 0.75$ (για 100 μετοχές).
- 4 αγορές δικαιωμάτων πώλησης επί της μετοχής της Εθνικής με $\Delta_2 = -0.5$.
- 100 μετοχές της Εθνικής Τράπεζας.

Ο Δέλτα του χαρτοφυλακίου είναι:

$$\Delta_{PFL} = \sum_{i=1}^{n} w_i \Delta_i = 4(100)(0.75) + 4(100)(-0.5) + 100(1) = 200\,€$$

όπου Δ_{PFL} είναι το Δέλτα του χαρτοφυλακίου (PFL) και w_i η ποσότητα των στοιχείων του χαρτοφυλακίου. Το αποτέλεσμα του παραδείγματος σημαίνει ότι το χαρτοφυλάκιο θα μεταβάλλεται κατά 200 ευρώ σε κάθε μεταβολή της τιμής της μετοχής της Εθνικής κατά 1 ευρώ.

Όπως είδαμε, ο Δέλτα δεν μεταβάλλεται απλά με τη μεταβολή της τιμής της υποκείμενης αξίας αλλά μεταβάλλεται και σε διαφορετικό βαθμό κάθε φορά ανάλογα με το αν το δικαίωμα είναι εντός, επί ή εκτός της ισοδύναμης χρηματικής του αξίας. Ο συντελεστής **Γάμα** μετρά τον ρυθμό με τον οποίο μεταβάλλεται ο Δέλτα δεδομένης μιας πολύ μικρής μεταβολής στην τιμή της υποκείμενης αξίας. Δίνεται από τον τύπο:

$$\Gamma = \frac{e^{-d_1^2/2}}{S_0 \sigma \sqrt{2\pi T}} \tag{18}$$

Ο συντελεστής Γ είναι η παράγωγος του Δέλτα ως προς την τιμή της υποκείμενης αξίας ή η δεύτερη παράγωγος της τιμής του δικαιώματος σε σχέση με την υποκείμενη αξία. Δηλαδή $\Gamma = \frac{\partial \Delta}{\partial S} = \frac{\partial^2 C}{\partial S^2}$ ή $= \frac{\partial^2 P}{\partial S^2}$ ανάλογα αν πρόκειται για call (C) ή put (P). Με άλλα λόγια, ο Γάμα εκφράζει την αβεβαιότητα του Δέλτα.

Έτσι, είτε πρόκειται για call είτε για put ισούται και στις δύο περιπτώσεις με την παράγωγο του $N(d)$ ως προς S. Αυτό σημαίνει ότι τα δικαιώματα αγοράς και πώλησης έχουν το ίδιο Γάμα, το οποίο από τον ορισμό του είναι πάντα θετικό.

Αν ο Γάμα είναι μικρός, τότε το Δέλτα αλλάζει με σχετικά μικρούς ρυθμούς σε δεδομένη αλλαγή της υποκείμενης αξίας. Ένα χαρτοφυλάκιο, για παράδειγμα, με σχεδόν μηδενικό Γάμα, είναι αρκετά εξασφαλισμένο και δεν χρειάζεται συχνές αναπροσαρμογές. Αντίθετα, μια υψηλή τιμή του συντελεστή Γάμα συνεπάγεται πιο συχνές αλλαγές στη σύνθεση του χαρτοφυλακίου.

Η τιμή του Γάμα είναι υψηλότερη για δικαιώματα που βρίσκονται στην ισοδύναμη χρηματική τους αξία (at-the-money) και κοντά στη λήξη τους. Αντίθετα, μειώνεται στο μηδέν για δικαιώματα που βρίσκονται βαθιά εντός ή εκτός της ισοδύναμης χρηματικής τους αξίας (deep in-the-money και deep out-of-the-money). Όπως και ο Δέλτα, έτσι και ο Γάμα δεν είναι ένα μέγεθος στατικό αλλά μεταβάλλεται όταν μεταβάλλεται η τιμή της υποκείμενης αξίας.

Παράδειγμα 27

Έστω η τιμή της υποκείμενης μετοχής 55€ με διακύμανση 0.6879. Έστω, επίσης, ότι έχουμε υπολογίσει $d_1 = 0.1426$, συντελεστής Δέλτα ίσος με 0.3692 και ο χρόνος μέχρι τη λήξη του δικαιώματος είναι 76 ημέρες. Να υπολογιστεί ο συντελεστής Γ.

Εφαρμόζοντας την παραπάνω σχέση, θα είναι:

$$\Gamma = \frac{e^{-d_1^2/2}}{S_0 \sigma \sqrt{2\pi T}} = \frac{e^{-(0.1426)^2/2}}{(55)\left(\sqrt{0.6879}\right)\sqrt{2(3.1416)(0.208219)}} = 0.018972\,.$$

Αυτό σημαίνει ότι εάν η τιμή της υποκείμενης μετοχής αυξηθεί από τα 55€ στα 60€, τότε ο συντελεστής Δέλτα θα πρέπει να μεταβληθεί από 0.3692 σε:

$$0.3692 + (60 - 55) * 0.018972 = 0.46406.$$

Δραστηριότητα 18/Κεφάλαιο 6

Έστω η τιμή της υποκείμενης μετοχής 55€ με διακύμανση 0.6879. Έστω, επίσης, ότι έχουμε υπολογίσει $d_1 = 0.1426$, συντελεστής Δέλτα ίσος με 0.3692 και ο χρόνος μέχρι τη λήξη του δικαιώματος είναι 2 ημέρες. (α) Να υπολογιστεί ο συντελεστής Γ και (β) να τον συγκρίνετε με το αποτέλεσμα του προηγούμενου παραδείγματος. Τι παρατηρείτε; (γ) Τι θα σχολιάζατε εάν η τιμή εξάσκησης του δικαιώματος κλήσης, για το οποίο γίνεται λόγος, ισούται με $X = 54.75$€;

Θα βρείτε τη δική μας απάντηση στο Παράρτημα, στο τέλος του κεφαλαίου.

Ο χρόνος μέχρι τη λήξη: Ο συντελεστής Θήτα (Theta)

Για τα δικαιώματα (κλήσης) ότι όσο ο χρόνος πλησιάζει στη λήξη του δικαιώματος κλήσης, η τιμή του δικαιώματος μειώνεται και η αξία του χρόνου προσεγγίζει την εσωτερική του αξία. Η διαδικασία αυτή ονομάζεται «φθορά χρόνου» (time value decay). Ο **Θήτα** αποτελεί ένα μέσο μέτρησης της μεταβολής της αξίας σε σύγκριση με τον χρόνο, αλλά και με την προϋπόθεση ότι όλοι οι υπόλοιποι παράγοντες (τιμή υποκείμενης αξίας και μεταβλητότητα) παραμένουν σταθεροί. Υπολογίζεται από την αρνητική πρώτη παράγωγο της τιμής του δικαιώματος σε σχέση με τον χρόνο. Δηλαδή:

$$\Theta = -\frac{\text{Μεταβολή στην τιμή του δικαιώματος}}{\text{Μεταβολή στην τιμή του χρόνου}} = -\frac{\partial C}{\partial t} \text{ ή } -\frac{\partial P}{\partial t}$$

ή

$$\Theta = -\frac{S_0 \sigma\, e^{-\frac{d_1^2}{2}}}{2\sqrt{2\pi T}} - r_c X e^{-r_c T} N(d_2) \text{ για το δικαίωμα κλήσης (call)} \qquad (19)$$

και

$$\Theta = -\frac{S_0 \sigma\, e^{-\frac{d_1^2}{2}}}{2\sqrt{2\pi T}} - r_c X e^{-r_c T} N(-d_2) \text{ για το δικαίωμα επίδοσης (put)}$$

Καθώς τα δικαιώματα είναι τίτλοι που φθείρονται με το πέρασμα του χρόνου, ο Θήτα είναι πάντοτε αρνητικός και είναι μεγαλύτερος (σε απόλυτες τιμές) για τα δικαιώματα που βρίσκονται στην ισοδύναμη χρηματική τους αξία, σε σχέση με αυτά που βρίσκονται είτε εντός είτε εκτός της ισοδύναμης χρηματικής τους αξίας. Μάλιστα, η φθορά των δικαιωμάτων επιταχύνεται όσο πλησιάζουμε προς τη λήξη επειδή ο Θήτα αυξάνεται με επιταχυνόμενο ρυθμό. Ο συντελεστής Θ εκφράζεται σε χρονικές μονάδες και είναι περισσότερο ακριβής για πολύ μικρές χρονικές μεταβολές.

Παράδειγμα 28

Έστω ένα δικαίωμα κλήσης με τιμή υποκείμενης μετοχής 125.9375€ με ετήσια μεταβλητότητα (τυπική απόκλιση) 0.83, X=125€, d_1 = 0.1742, $N(d_2)$ = 0.4670, χρόνο μέχρι τη λήξη 35 ημέρες και επιτόκιο χωρίς κίνδυνο 4.46%. Τότε, ο συντελεστής Θ θα είναι:

$$\Theta = \frac{-125.9375(0.83)e^{-(0.1742)^2/2}}{2\sqrt{2(3.14159)(0.0959)}} - (0.0446)125e^{-(0.0446)(0.0959)}(0.4670) = -68.91$$

Ας υποθέσουμε μια μεταβολή του χρόνου. Για παράδειγμα, σε μια εβδομάδα ο χρόνος μέχρι τη λήξη είναι (35–7)/365 = 0.0767. Τότε, η προβλεπόμενη τιμή του δικαιώματος κλήσης θα είναι: (0.0959 – 0.0767)(–68.91) = –1.32€.

Δραστηριότητα 19/Κεφάλαιο 6

$S = 100€, \; X = 100€, \; \sigma = 0.30, \; rf = 8\%, \; T - t = 180$ ημέρες.

(α) Να υπολογίσετε την τιμή του δικαιώματος κλήσης και του δικαιώματος επίδοσης.

(β) Να υπολογίσετε τις τιμές των συντελεστών Θ(κλήσης) και Θ(επίδοσης).

(γ) Θεωρήστε μια μεταβολή του χρόνου κατά 0.1 έτη. Ποιες είναι οι εκτιμήσεις σας για τις τιμές των δικαιωμάτων κλήσης (call) και επίδοσης (put);

Θα βρείτε τη δική μας απάντηση στο Παράρτημα, στο τέλος του κεφαλαίου.

Η μεταβλητότητα: Ο συντελεστής Vega

Ο Vega (Λ) ο οποίος συναντάται στη βιβλιογραφία και ως «Κάπα» (kappa) και «Λάμδα» (Lamda), δείχνει τη μεταβολή της θεωρητικής τιμής ενός δικαιώματος σε απόλυτους όρους, λόγω μιας μεταβολής κατά 1% στη μεταβλητότητα (τυπική απόκλιση) των αποδόσεων της υποκείμενης μετοχής. Είναι η πρώτη παράγωγος της τιμής του δικαιώματος ως προς την τυπική απόκλιση (σ).

$$\Lambda = \frac{\text{Μεταβολή στην τιμή του δικαιώματος}}{\text{Μεταβολή στη μεταβλητότητα}} = \frac{\partial C}{\partial \sigma} \text{ ή } \frac{\partial P}{\partial \sigma}$$

ή (20)

$$\Lambda = \frac{S_0 \sqrt{T} e^{-\frac{d_1^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}$$

Σε αντίθεση με τον Δέλτα, τον Γάμα και τον Θήτα, στην περίπτωση του Vega γίνεται η υπόθεση ότι ακόμα και η μεταβλητότητα της υποκείμενης αξίας αλλάζει συνεχώς, με αποτέλεσμα δραματική μεταβολή στην τιμή του δικαιώματος. Μεγάλος Vega σημαίνει ότι για μικρή αλλαγή της μεταβλητότητας έχουμε μεγάλη αλλαγή στην τιμή του δικαιώματος.

Ο Vega ενός δικαιώματος είναι πάντα θετικός αριθμός, διότι όταν η μεταβλητότητα της υποκείμενης αξίας αυξάνεται τότε αυξάνεται και η τιμή του δικαιώματος. Συνέπεια αυτού είναι ότι θέσεις αγοράς (long positions) σε δικαιώματα ανταποκρίνονται θετικά στις αυξήσεις της μεταβλητότητας. Αντίθετα, μειώνεται η τιμή τους όσο μειώνεται η μεταβλητότητα. Δικαιώματα που είναι στο χρηματικό ισοδύναμο (at-the-money) είναι περισσότερο ευαίσθητα στη μεταβλητότητα.

Παράδειγμα 29

Έστω ένα δικαίωμα κλήσης με τιμή υποκείμενης μετοχής 125.9375€ με ετήσια μεταβλητότητα (τυπική απόκλιση) 0.83, $X=125€$, $d_1 = 0.1742$, χρόνο μέχρι τη λήξη 35 ημέρες και επιτόκιο χωρίς κίνδυνο 4.46%. Τότε, ο συντελεστής Λ θα είναι:

$$\Lambda = \frac{S_0\sqrt{T}e^{-\frac{d_1^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} = \frac{125.9375\sqrt{0.0959}e^{-\frac{(0.1742)^2}{2}}}{\sqrt{2(3.14159)}} = 15.32\,.$$

Το αποτέλεσμα αυτό σημαίνει ότι εάν η μεταβλητότητα αλλάξει κατά ένα πολύ μικρό ποσό, για παράδειγμα 0.01, η τιμή του δικαιώματος κλήσης θα μεταβληθεί κατά 15.32(0.01) = 0.15€. Εάν η μεταβλητότητα των αποδόσεων της μετοχής είναι 0.95 (αντί για 0.83), τότε η μεταβολή στην τιμή του δικαιώματος κλήσης θα είναι 1.84€.

Δραστηριότητα 20/Κεφάλαιο 6

Έστω ένα δικαίωμα κλήσης με τιμή υποκείμενης μετοχής 125.9375€ με ετήσια μεταβλητότητα (τυπική απόκλιση) 0.83, $X=125€$, $d_1 = 0.1742$, χρόνο μέχρι τη λήξη 35 ημέρες και επιτόκιο χωρίς κίνδυνο 4.46%. (α) Να υπολογίσετε τον συντελεστή Λ. (β) Ποια θα είναι η τιμή του Λ εάν $\sigma = 1.03$ και ποια η μεταβολή των τιμών των δικαιωμάτων κλήσης και επίδοσης;

Θα βρείτε τη δική μας απάντηση στο Παράρτημα, στο τέλος του κεφαλαίου.

Το επιτόκιο χωρίς κίνδυνο: Ο συντελεστής Ρο (Rho)

Τέλος, ο συντελεστής Ρο δείχνει κατά πόσες μονάδες μεταβάλλεται η τιμή ενός δικαιώματος όταν μεταβάλλεται το (εγχώριο) επιτόκιο χωρίς κίνδυνο κατά 1%. Είναι η παράγωγος της τιμής του δικαιώματος ως προς το επιτόκιο.

$$\varrho = \frac{\text{Μεταβολή στην τιμή του δικαιώματος}}{\text{Μεταβολή στο επιτόκιο χωρίς κίνδυνο}} = \frac{\partial C}{\partial Rf} \text{ ή } \frac{\partial P}{\partial Rf}$$

δηλαδή: (21)

$\varrho = TXe^{-r_c T} N(d_2)$ για δικαιώματα κλήσης και
$\varrho = TXe^{-r_c T} N(-d_2)$ για δικαιώματα πώλησης

Αυτή η επίδραση είναι σχετικά μικρή και σε καμία περίπτωση δεν μπορεί να συγκριθεί με την επίδραση των προαναφερθέντων συντελεστών ευαισθησίας. Ο Ρο είναι θετικός για τα δικαιώματα αγοράς και αρνητικός για τα δικαιώματα πώλησης.

Μια αύξηση του επιτοκίου οδηγεί σε αύξηση την τιμή του δικαιώματος αγοράς, αφού η υποκείμενη αξία αυξάνει με υψηλό ρυθμό, με αποτέλεσμα την αύξηση της πιθανότητας εξάσκησης του δικαιώματος.

Δραστηριότητα 21/Κεφάλαιο 6

Εάν το επιτόκιο χωρίς κίνδυνο είναι r_c = 4.46%, ο υπολοιπόμενος χρόνος μέχρι τη λήξη του δικαιώματος κλήσης είναι 35 ημέρες, η τιμή εξάσκησης είναι 125€ και d_2 = –0.08, να υπολογιστεί το Ρο. Εάν το r_c μεταβληθεί σε 12%, να επαναϋπολογιστεί το Ρο. Ποια θα είναι η μεταβολή στην τιμή του εν λόγω δικαιώματος κλήσης;

Θα βρείτε τη δική μας απάντηση στο Παράρτημα, στο τέλος του κεφαλαίου.

Δραστηριότητα 22/Κεφάλαιο 6

Γιατί πιστεύετε ότι ο Ρο είναι ένα ακριβές μέγεθος μέτρησης της ευαισθησίας της τιμής του δικαιώματος στις αλλαγές του επιτοκίου χωρίς κίνδυνο;

Θα βρείτε τη δική μας απάντηση στο Παράρτημα, στο τέλος του κεφαλαίου.

Όπως μπορούμε να διαπιστώσουμε, οι συντελεστές ευαισθησίας αποτελούν περισσότερο εξειδικευμένες τεχνικές διαπραγμάτευσης στις αγορές παραγώγων, προκειμένου, ανάλογα με τον τύπο του χαρτοφυλακίου, τη χρηματιστηριακή συγκυρία αλλά και τους στόχους των συμμετεχόντων, να επιτυγχάνονται τα επιθυμητά αποτελέσματα. Θα πρέπει όμως να τονίσουμε ότι οι τεχνικές αυτές τείνουν να είναι αρκετά πολύπλοκες κατά τη χρήση τους, με αποτέλεσμα η προστασία μιας θέσης να υλοποιείται βάσει κάποιων συγκεκριμένων προτεραιοτήτων που θέτει ο οργανισμός.

Τέλος, πρέπει να κάνουμε την επισήμανση ότι δεν πρέπει να συγχέουμε το πρόσημο του κάθε συντελεστή ευαισθησίας ενός δικαιώματος με το πρόσημο της θέσης που έχουμε στο συγκεκριμένο δικαίωμα. Για παράδειγμα, έχουμε αναφέρει ότι ο Δέλτα των δικαιωμάτων αγοράς είναι θετικός. Αυτό σημαίνει ότι αν η θέση μας περιλαμβάνει μόνο θέση αγοράς δικαιωμάτων αγοράς (long call), τότε ο Δέλτα της θέσης μας είναι θετικός, ενώ αν περιλαμβάνει μόνο θέση πώλησης δικαιωμάτων αγοράς, τότε είναι αρνητικός.

Συνοψίζουμε τα παραπάνω στον Πίνακα 6, που περιλαμβάνει τους συντελεστές ευαισθησίας για όλες τις θέσεις που έχουμε αναφέρει.

Πίνακας 6

Πρόσημο συντελεστών ευαισθησίας ανάλογα με τη θέση

Θέση	Delta	Gamma	Theta	Vega
Θέση αγοράς μετοχής/ΣΜΕ (long stock/future)	1	0	0	0
Θέση πώλησης μετοχής/ΣΜΕ (short stock/future)	–1	0	0	0
Αγορά δικαιώματος αγοράς (Long call)	+	+	–	+
Πώληση δικαιώματος αγοράς (Short call)	–	–	+	–
Αγορά δικαιώματος πώλησης (Long Put)	–	+	–	+
Πώληση δικαιώματος πώλησης (Short Put)	+	–	+	–
Κάθετο ανοδικό άνοιγμα με δικαιώματα αγοράς	+	**	**	**
Κάθετο ανοδικό άνοιγμα με δικαιώματα πώλησης	+	**	**	**
Κάθετο καθοδικό άνοιγμα με δικαιώματα αγοράς	–	**	**	**
Κάθετο καθοδικό άνοιγμα με δικαιώματα πώλησης	–	**	**	**
Αγορά Straddle (Long Straddle)	**	+	–	+
Πώληση Straddle (Short Straddle)	**	–	+	–
Αγορά Strangle (Long Strangle)	**	+	–	+
Πώληση Strangle (Short Strangle)	**	–	+	–

** Εξαρτάται από την τιμή της υποκείμενης αξίας.

Δραστηριότητα 23/Κεφάλαιο 6

Να υπολογίσετε τους συντελεστές ευαισθησίας των δικαιωμάτων επίδοσης στο υπόδειγμα των BS.

Θα βρείτε τη δική μας απάντηση στο Παράρτημα, στο τέλος του κεφαλαίου.

6.5.2 Υπολογισμός της VaR χαρτοφυλακίου με δικαιώματα προαίρεσης: γραμμική προσέγγιση

Η απλούστερη εφαρμογή του γραμμικού είναι σε ένα χαρτοφυλάκιο (χ/φ) που δεν περιλαμβάνει παράγωγα. Στην περίπτωση αυτή, όπως γνωρίζουμε, η αξία του χ/φ εξαρτάται γραμμικά από τις ποσοστιαίες μεταβολές των περιουσιακών στοιχείων που το αποτελούν.

Ας θεωρήσουμε τώρα ένα χ/φ που περιέχει δικαιώματα προαίρεσης σε μια μετοχή με τρέχουσα τιμή S. Έστω ακόμα ότι ο συντελεστής Δέλτα ισούται με $\varDelta$. Ο $\varDelta$ μετράει τη μεταβολή στην αξία του χ/φ, PF, στις μεταβολές της τιμής της μετοχής. Θα είναι, λοιπόν:

$$\varDelta = \frac{\delta PF}{\delta S} \Leftrightarrow \delta PF = \varDelta \delta S$$

όπου δX η μεταβολή σε ευρώ της ποσότητας X σε μια ημέρα. Έστω $\delta x = \delta S/S$ η ποσοστιαία μεταβολή της τιμής της μετοχής σε μια ημέρα. Τότε, μπορούμε να γράψουμε:

$$\delta PF = \varDelta \delta S \Leftrightarrow \delta PF = S\varDelta \delta x$$

Όταν έχουμε ένα χ/φ με δικαιώματα προαίρεσης μπορούμε να έχουμε μια προσεγγιστική γραμμική σχέση μεταξύ της μεταβολής του χ/φ και της ποσοστιαίας μεταβολής της τιμής της μετοχής:

$$\delta PF = \sum_{i=1}^{n} S_i \varDelta_i \delta x_i \Rightarrow \delta PF = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \delta x_i$$

όπου $\alpha_i = S_i \varDelta_i$. Για τον υπολογισμό της τυπικής απόκλισης του δPF θα χρησιμοποιήσουμε τη σχέση:

$$\sigma_{PF} = \left[\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \sigma_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n} \sum_{j<i} \varrho_{ij} \alpha_i \alpha_j \sigma_i \sigma_j \right]^{1/2} \tag{22}$$

Η τυπική απόκλιση της μεταβολής σε n ημέρες είναι $\sigma_{PF}\sqrt{n}$ και η 99% αξία σε κίνδυνο, VaR, για χρονικό ορίζοντα n ημερών ισούται με:

$$VaR(99\%) = 2.33 \cdot \sigma_{PF} \cdot \sqrt{n} \tag{23}$$

ενώ η 95% αξία σε κίνδυνο για χρονικό ορίζοντα n ημερών ισούται με:

$$VaR(95\%) = 1.65 \cdot \sigma_{PF} \cdot \sqrt{n} \tag{24}$$

Παράδειγμα 30

Ένα χ/φ αποτελείται από δικαιώματα των μετοχών X και Y αξίας, αντίστοιχα €100,000 και €500,000. Το δικαίωμα της μετοχής X έχει τιμή €60 και συντελεστή δέλτα €1,000, ενώ της Y έχει τιμή €20 και δέλτα €10,000. Αν υποθέσουμε ότι η ημερήσια μεταβλητότητα της μετοχής X είναι 4% και της Y είναι 2%, ενώ η συσχέτισή τους ισούται με 0.6, να υπολογιστεί η αξία σε κίνδυνο 5 ημερών του χ/φ, σε επίπεδο σημαντικότητας 5%.

Λύση

$$\delta PF = \sum_{i=1}^{2} S_i \Delta_i \delta x_i \Rightarrow \delta PF = \left(60 * 1{,}000 * \delta x_1 + 20 * 10{,}000 * \delta x_2\right) \Rightarrow$$

$$\delta PF = 60{,}000 * \delta x_1 + 200{,}000 * \delta x_2$$

όπου δx είναι οι αποδόσεις των μετοχών σε μια ημέρα.

$$\sigma_{PF} = \left[\sum_{i=1}^{2} \alpha_i^2 \sigma_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{2} \sum_{j<i} \rho_{ij} \alpha_i \alpha_j \sigma_i \sigma_j \right]^{1/2} = 12.80625.$$

Σε επίπεδο σημαντικότητα 5% είναι 1.65 και, συνεπώς, η ζητούμενη αξία σε κίνδυνο είναι:

$$VaR(95\%) = 1.65 * 12.80625 * \sqrt{5} = €47.25\ .$$

Δραστηριότητα 24/Κεφάλαιο 6

Μια τράπεζα έχει ένα χ/φ δικαιωμάτων στη συναλλαγματική ισοτιμία δολάριο ΗΠΑ/στερλίνα Αγγλίας. Το δέλτα του χ/φ είναι 45 και η τρέχουσα ισοτιμία είναι 1.50. Να βρείτε μια προσεγγιστική γραμμική σχέση μεταξύ της ποσοστιαίας μεταβολής της συναλλαγματικής ισοτιμίας και της μεταβολής του χ/φ. Εάν η ημερήσια μεταβλητότητα της ισοτιμίας είναι 0.8% να υπολογίσετε της VaR(95%)–10 ημερών.
Θα βρείτε τη δική μας απάντηση στο Παράρτημα, στο τέλος του κεφαλαίου.

6.5.3 Ιστορική (historical) και τεκμαρτή (implied) μεταβλητότητα (volatility)

Η μεταβλητότητα μιας μετοχής μετράται από την τυπική απόκλιση (σ) των αποδόσεων, όπως έχουμε δει στο πρώτο κεφάλαιο, και s αποτελεί μια εκτίμηση της $\dfrac{\sigma}{\sqrt{\tau}}$, όπου τ είναι το μήκος της χρονικής περιόδου (σε έτη) και η σ μπορεί να εκτιμηθεί από την $\hat{\sigma} = \dfrac{s}{\sqrt{\tau}}$ με τυπικό σφάλμα εκτίμησης $\dfrac{\hat{\sigma}}{\sqrt{2n}}$.

Μια από τις παραμέτρους του υποδείγματος BS, που δεν είναι άμεσα παρατηρήσιμη είναι η μεταβλητότητα των τιμών της υποκείμενης μετοχής. Στο προηγούμενο παράδειγμα είδαμε πώς εκτιμάται η ιστορική μεταβλητότητα. Στην πράξη, οι traders χρησιμοποιούν την τεκμαρτή μεταβλητότητα που παρατηρείται στην αγορά δικαιωμάτων, κάτω από την υπόθεση ότι η αγορά δικαιωμάτων αντικατοπτρίζει την τρέχουσα μεταβλητότητα της μετοχής. Η τεκμαρτή μεταβλητότητα είναι η τυπική απόκλιση που εξισώνει την τιμή του δικαιώματος του υποδείγματος BS με την πραγματική τιμή του στην αγορά δικαιωμάτων. Με άλλα λόγια, μπορεί να προκύψει εάν επιλύσουμε το υπόδειγμα BS ως προς την τυπική απόκλιση και, επειδή αυτό δεν μπορεί να επιτευχθεί, η διαδικασία που ακολουθείται είναι η δοκιμή–και–πλάνη. Μπορούμε να πούμε ότι η τεκμαρτή μεταβλητότητα χρησιμοποιείται για την «παρακολούθηση» της γνώμης των συναλλασσομένων αναφορικά με τη μεταβλητότητα μιας συγκεκριμένης μετοχής και υποτίθεται ότι παριστάνει τη μεταβλητότητα της υποκείμενης μετοχής για τις διαφορετικές ληκτότητες του δικαιώματος.

Ωστόσο, μια άλλη προσέγγιση δόθηκε από τους Manaster & Koehler (1982)[9]. Έστω ότι για δεδομένη τυπική απόκλιση, σ^*, το υπόδειγμα BS δίνει τιμή δικαιώματος κλήσης $C(\sigma^*)$. Έστω, όμως, ότι η πραγματική τιμή στην αγορά δικαιωμάτων είναι $C(\sigma)$, όπου σ είναι η πραγματική μεταβλητότητα. Οι Manaster & Koehler προτείνουν μια αρχική τιμή εκκίνησης της μεταβλητότητας από τη σχέση:

$$\sigma_1^* = \sqrt{\left|\ln\left(\frac{S_0}{X} + r_c T\right)\right|\left(\frac{2}{T}\right)} \tag{25}$$

Η τιμή του υποδείγματος BS είναι $C(\sigma_1^*)$, η οποία συγκρίνεται με την τιμή στην αγορά δικαιωμάτων $C(\sigma)$. Ο χρόνος T υπολογίζεται σε ημέρες συναλλαγών που απομένουν μέχρι τη λήξη του δικαιώματος, δηλαδή $\left(\frac{t}{365}\right)$, εκτός και εάν οριστεί άλλος αριθμός ημερών, εκτός των 365. Συνήθως, ορίζουμε αριθμό ημερών συναλλαγών στο έτος 252 ημέρες, διότι η επικρατούσα άποψη για τις αιτίες της μεταβλητότητας είναι ότι δημιουργείται τις ημέρες συναλλαγών (και όχι από την τυχαία εισροή νέας πληροφορίας στην αγορά)[10]. Ωστόσο, είναι μικρές οι διαφορές όταν χρησιμοποιούμε τις ημέρες του ημερολογιακού έτους, εκτός και εάν η ζωή του δικαιώματος είναι πολύ μικρή[11].

---

9 *Manaster, S. and G.Koehler (1982), "The calculation of implied variances from the BS model: A note",* Journal of Finance*, 37, pp. 227-230.*

10 *Δες σχετικά, μεταξύ άλλων, French, K.R. and R.Roll (1986), Stock return variances: The arrival of information and reaction of traders*. Journal of Financial Economics*, 17, pp. 5-26.*

11 *French, D.W. (1984), The effect on the distribution of stock prices: Implications for options pricing.* Journal of Financial Economics*, 13, pp. 547-559.*

Γενικά, δοθείσης της i-οστής εκτίμησης της τεκμαρτής μεταβλητότητας, η επόμενη εκτίμηση $(i+1)$ θα είναι:

$$\sigma_{i+1}^{*} = \sigma_i - \frac{\left[C\left(\sigma_i^{*}\right) - C\left(\sigma\right)\right] e^{\frac{d_1^2}{2}} \sqrt{2\pi}}{S_0 \sqrt{T}} \tag{26}$$

όπου d_1 υπολογίζεται χρησιμοποιώντας την εκτίμηση σ_1^{*}.

Δραστηριότητα 25/Κεφάλαιο 6

Να υπολογίσετε την εκτίμηση της τεκμαρτής μεταβλητότητας για $i = 2$ σύμφωνα με την τεχνική των Manaster & Koehler (1982).

Θα βρείτε τη δική μας απάντηση στο Παράρτημα, στο τέλος του κεφαλαίου.

Παράδειγμα 31

Έστω η τιμή της υποκείμενης μετοχής 100€ με μεταβλητότητα 20%. Ο χρόνος μέχρι τη λήξη του δικαιώματος είναι 100 ημέρες και το δικαίωμα έχει τιμή εξάσκησης 100€. Το επιτόκιο χωρίς κίνδυνο είναι 5% και η τιμή του δικαιώματος είναι 4.86€. Η αρχική εκτίμηση της τεκμαρτής μεταβλητότητα θα είναι:

$$\sigma_1^{*} = \sqrt{\left|\ln\left(\frac{S_0}{X} + r_c T\right)\right| \left(\frac{2}{T}\right)} = \sqrt{\left|\ln\left(\frac{100}{100} + (0.05)(0.2739)\right)\right| \left(\frac{2}{0.2739}\right)} = 0.3162 .$$

Η τιμή του δικαιώματος των BS με μεταβλητότητα ίση με 0.3162 είναι 7.25. Η επόμενη εκτίμηση σύμφωνα με τους Manaster & Koehler (1982) είναι:

$$\sigma_2^{*} = \sigma_1^{*} - \frac{\left[C\left(\sigma_1^{*}\right) - C\left(\sigma\right)\right] e^{\frac{d_1^2}{2}} \sqrt{2\pi}}{S_0 \sqrt{T}}$$

ή

$$\sigma_2^{*} = 0.3162 - \frac{\left[7.25 - 4.86\right] e^{\frac{(0.1655)^2}{2}} \sqrt{2.5066}}{100\sqrt{0.2739}} = 0.200224$$

Η τιμή του δικαιώματος με το υπόδειγμα των BS για τιμή μεταβλητότητας ίση με $\sigma_2^{*} = 0.200224$ είναι ίση με $C = 4.866$€. Παρατηρούμε ότι η τιμή αυτή είναι σχεδόν η ίδια (πάντως, είναι πολύ κοντά) στην αρχική 4.86€ Ακόμα, παρατηρούμε ότι και η μεταβλητότητα 0.200224 είναι πολύ κοντά στην αρχική 0.20. Στον παρακάτω πίνακα εμφανίζονται αναλυτικά οι πράξεις στο excel.

	A	B	C
1	S(0)	100	
2	X	100	
3	r	0.05	
4	T	0.273973	=100/365
5	σ	0.2	
6	C	4.86	
7	d1	0.183198	=(LN(B1/B2)+(B3+(B5^2)/2)*B4)/(B5*SQRT(B4))
8	d1*	0.165521	=(LN(B1/B2)+(B3+(B9^2)/2)*B4)/(B9*SQRT(B4))
9	σ(1)*	0.316228	=SQRT(ABS(LN(B1/B2)+B3*B4)*(2/B4))
10	σ(2)*	0.200224	=B9-((7.25-B6)*EXP((B8^2)/2)*SQRT(2*3.14))/(B1*SQRT(B4))

Δραστηριότητα 26/Κεφάλαιο 6

Έστω η τιμή της υποκείμενης μετοχής 125.9375€ με μεταβλητότητα 83%. Ο χρόνος μέχρι τη λήξη του δικαιώματος είναι 35 ημέρες και το δικαίωμα έχει τιμή εξάσκησης 125€. Το επιτόκιο χωρίς κίνδυνο είναι 4.46% και η τιμή του δικαιώματος είναι 13.50€. Να υπολογιστεί η τεκμαρτή μεταβλητότητα με τη μέθοδο των Manaster & Koehler (1982).

Θα βρείτε τη δική μας απάντηση στο Παράρτημα, στο τέλος του κεφαλαίου.

Ερμηνείες της τεκμαρτής μεταβλητότητας

1) Όλα τα δικαιώματα επί δεδομένης υποκείμενης μετοχής με την ίδια ληκτότητα πρέπει να έχουν την ίδια τεκμαρτή μεταβλητότητα. Ωστόσο, δεν συμβαίνει κάτι τέτοιο, με αποτέλεσμα διαφορετικά δικαιώματα επί της ίδιας μετοχής να παράγουν διαφορετικές τεκμαρτές μεταβλητότητες. Ένας τρόπος να εξομαλύνουμε το πρόβλημα αυτό είναι να θεωρήσουμε τη μέση αριθμητική (ή σταθμική) τιμή των διάφορων τεκμαρτών μεταβλητοτήτων. Για την περίπτωση των δικαιωμάτων κλήσης, που είναι στο χρηματικό ισοδύναμο (at-the-money), οι Brenner & Subrahmanyam (1988) έδειξαν ότι η αξία ενός δικαιώματος κλήσης στο χρηματικό ισοδύναμο προσεγγίζεται από[12]:

$$C = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} S_0 \sigma \sqrt{T} \tag{27}$$

και όρισαν το χρηματικό ισοδύναμο ως την τιμή της μετοχής που ισούται με την παρούσα αξία της τιμής εξάσκησης:

$$S_0 = X e^{-r_c T} \tag{28}$$

[12] *Brenner, M. and M.G. Subrahmanyam (1988), A simple formula to compute the implied volatility.* Financial Analyst Journal*, 45, pp. 80-83.*

Τότε, η τεκμαρτή μεταβλητότητα του δικαιώματος κλήσης που είναι στο χρηματικό ισοδύναμο είναι:

$$\hat{\sigma} \approx \frac{C}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} S_0 \sqrt{T}}$$

Δραστηριότητα 27/Κεφάλαιο 6

Η μεταβλητότητα μιας υποκείμενης μετοχής είναι μοναδική. Μπορεί, όμως, η τεκμαρτή μεταβλητότητα να είναι ίδια σε κάθε χρονικό ορίζοντα;

Θα βρείτε τη δική μας απάντηση στο Παράρτημα, στο τέλος του κεφαλαίου.

2) Συνήθως, οι συναλλασσόμενοι στην αγορά δικαιωμάτων αναφέρονται στη σχέση της τεκμαρτής μεταβλητότητας και της τιμής εξάσκησης του δικαιώματος και στη σχέση μεταξύ της τεκμαρτής μεταβλητότητας και της ληκτότητας του δικαιώματος. Προκύπτει από την ισοδυναμία put–call ότι οι σχέσεις αυτές είναι ίδιες για τα δικαιώματα κλήσης (call options) και τα δικαιώματα επίδοσης (put options).
   Θα ονομάζουμε δομή της τεκμαρτής μεταβλητότητας (term structure of implied volatility) τη σχέση μεταξύ της τεκμαρτής μεταβλητότητας και της τιμής του δικαιώματος, για δεδομένη τιμή εξάσκησης. Η μεταβλητότητα είναι, συνήθως, χαμηλότερη για τα δικαιώματα στο χρηματικό ισοδύναμο και υψηλότερη για τα δικαιώματα που είναι deep in και deep out του χρηματικού τους ισοδύναμου. Θα ονομάζουμε χαμόγελο μεταβλητότητας (volatility smile) το διάγραμμα της τεκμαρτής μεταβλητότητας έναντι της τιμής εξάσκησης του δικαιώματος, που έχει τη μορφή U. Το διάγραμμα αυτό χρησιμοποιείται από τους συναλλασσόμενους για την τιμολόγηση δικαιωμάτων και ονομάζεται και *ασυμμετρία μεταβλητότητας* (volatility skew): η μεταβλητότητα μειώνεται όσο η τιμή εξάσκησης αυξάνεται. Δικαιώματα με υψηλότερες τεκμαρτές μεταβλητότητες είναι ακριβότερα από εκείνα τα δικαιώματα που έχουν χαμηλότερες τεκμαρτές μεταβλητότητες. Η πηγή των διαφοροποιήσεων των τιμών των τεκμαρτών μεταβλητοτήτων είναι και το κόστος των δικαιωμάτων: μερικά δικαιώματα είναι ακριβότερα από άλλα.

Δραστηριότητα 28/Κεφάλαιο 6

«Το χαμόγελο μεταβλητότητας δείχνει ότι το υπόδειγμα BS δεν είναι τέλειο». Να δικαιολογήσετε τη δήλωση αυτή.

Θα βρείτε τη δική μας απάντηση στο Παράρτημα, στο τέλος του κεφαλαίου.

Δραστηριότητα 29/Κεφάλαιο 6

Στον παρακάτω πίνακα δίδονται οι τιμές εξάσκησης και οι τιμές δικαιώματος σε τρεις διαφορετικές λήξεις. Επίσης, η τεκμαρτή μεταβλητότητα είναι ίση με 0.70 για την πρώτη σειρά (τιμή εξάσκησης 110€) και 0.85 για τις άλλες γραμμές:

Τιμή Εξάσκησης	Μάιος	Ιούνιος	Ιούλιος
100	7.55	14.11	21.97
110	4.75	12.40	19.55
120	3.34	10.30	17.75

Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να αγοράσουμε ένα δικαίωμα Ιουνίου. Ποιο είναι ακριβότερο; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Θα βρείτε τη δική μας απάντηση στο Παράρτημα, στο τέλος του κεφαλαίου.

Σύνοψη

Στο κεφάλαιο αυτό αναφερθήκαμε στην ανάπτυξη και τη χρήση της αγοράς παράγωγων προϊόντων στη διαχείριση του κινδύνου.

Η ραγδαία ανάπτυξη της αγοράς αυτής, από τις αρχές του 1970 μέχρι σήμερα, οφείλεται σε μια σειρά από λόγους με σημαντικότερους:

1. **την αυξανόμενη μεταβλητότητα των βασικών μεγεθών της παγκόσμιας οικονομίας,**
2. **την απελευθέρωση στην κίνηση των κεφαλαίων,**
3. **την τεχνολογική εξέλιξη,**
4. **την ανάπτυξη και βελτίωση των στατιστικών, μαθηματικών και υπολογιστικών τεχνικών και μεθόδων,**
5. **τις πολιτικές εξελίξεις.**

΄Ετσι, το ενδιαφέρον από πλευράς των χρηματοπιστωτικών ιδρυμάτων και οργανισμών είναι μεγάλο και αποδεικνύεται από τα αποτελέσματα μελετών στις διεθνείς αγορές.

Τα σημαντικότερα παράγωγα προϊόντα, τα οποία εξετάσαμε στο κεφάλαιο αυτό, είναι τα συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης και τα χρηματοοικονομικά δικαιώματα προαίρεσης.

Βέβαια, τα νέα αυτά εργαλεία διαχείρισης του κινδύνου εμπεριέχουν τους δικούς τους κινδύνους και πολλοί είναι αυτοί που πιστεύουν ότι οι νέοι αυτοί κίνδυνοι είναι μεγάλοι και σημαντικοί. Ωστόσο, υπάρχει και η τεκμηριωμένη άποψη ότι οι κίνδυνοι από τα παράγωγα προϊόντα δεν πρέπει να υπερτιμώνται και η αποτίμηση των ζημιών στις αγορές των παραγώγων επιβεβαιώνει ότι οι κίνδυνοι τους δεν διαφέρουν από τους κινδύνους των άλλων χρηματοοικονομικών προϊόντων.

Στη συνέχεια, παρουσιάσαμε τα υποδείγματα τιμολόγησης των παράγωγων προϊόντων και δώσαμε ορισμένα παραδείγματα. Βέβαια, δεν θα πρέπει να ξεχνάμε ότι οι τιμές των προϊόντων αυτών δεν παραμένουν σταθερές, αλλά μεταβάλλονται επηρεαζόμενες από διάφορους παράγοντες, όπως:

1. **από τις μεταβολές των βασικών μακροοικονομικών μεγεθών,**
2. **από τις μεταβολές των επιτοκίων,**
3. **από τις επιχειρηματικές συνθήκες που ισχύουν σε δεδομένη στιγμή στην οικονομία,**
4. **από φημολογίες,**
5. **από την ίδια την ψυχολογία των επενδυτών, κερδοσκόπων και επιχειρηματιών ή διαχειριστών, που επιθυμούν αντιστάθμιση του κινδύνου που διατρέχουν στην τρέχουσα αγορά,**
6. **από τις μεταβολές των επιπέδων των τιμών των υποκείμενων προϊόντων,**
7. **από τη χρονική τους διάρκεια.**

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ
Απαντήσεις στις Δραστηριότητες

Δραστηριότητα 6

Με εφαρμογή της σχέσης (3) και (4) η τιμή $F_{0,t}$ =\$388.89

Δραστηριότητα 7

Η θέση είναι long στο ομόλογο σε λίρα Αγγλίας και short στο ομόλογο δολαρίου. Η αξία του ομολόγου στερλίνας ισούται με $S \cdot e^{-r \cdot T/360} = 1.53 \cdot e^{-0.05 \cdot 0.5} =$ \$1.492 εκατ. Η αξία του ομολόγου δολαρίου ισούται με $1.5 \cdot e^{-0.05 \cdot 0.5} =$ \$1.463 εκατ. Συνεπώς, η διακύμανση των μεταβολών του συμβολαίου θα είναι:

$$1.492^2 \cdot 0.0006^2 + 1.463^2 \cdot 0.0005^2 - 2 \cdot 0.8 \cdot 1.492 \cdot 0.0006 \cdot 1.463 \cdot 0.0005$$
$$= 0.000000288$$

Η τυπική απόκλιση είναι ίση με 0.000537 εκατ. Δολ. ΗΠΑ. Η VaR 10 ημερών σε επίπεδο εμπιστοσύνης 99% είναι ίση με:

$$0.000537 \cdot 2.33 \cdot \sqrt{10} = 0.00396 \text{ εκατ. Δολ. ΗΠΑ.}$$

Δραστηριότητα 8

Α). Εφαρμογή σχέσης (6), δίνει αντίστοιχα (εντός της παρένθεσης τα ετησιοποιημένα ποσοστά): Αύγουστος: 4.32% (25.9%), Οκτώβριος: 9.02% (27.1%),

Δεκέμβριος: 15.23% (30.5%)

Β). Εφαρμογή της (6):

Οκτώβριος: 4.5% (27.1%)

Δεκέμβριος: 10.5% (31.4%)

Δραστηριότητα 9

Από τη σχέση (8) έχουμε: $k^* = 0.6955$. Ο έμπορος έχει \$10 εκ./\$1,250=8,000 μ.τ. Η θέση στα ΣΜΕ είναι 8,000*0.6955=5,563.64 μ.τ./10 μ.τ. ανά ΣΜΕ. Δηλαδή, θα πρέπει να πουλήσει 56 συμβόλαια.

Δραστηριότητα 10

Από τη σχέση (9) προκύπτει ότι πρέπει να πουλήσει 617 ΣΜΕ.

Δραστηριότητα 11

Long Call Profits + Short Call Profits =

$$(C_T - C_t) + (C_t - C_T) = \{\max(0, S_T - X) - C_t\} + \{C_t - \max(0, S_T - X)\} = 0$$

Δραστηριότητα 12

[–€100].

Δραστηριότητα 13

Θα είναι: $C_T = \max\{0,\ S_T - X\} = \max\{0, 130 - 140\} = 0$.

Δραστηριότητα 14

Τιμή εξάσκησης	Εσωτερική αξία
120	$\max\{0, 125.9375 - 120\} = 5.9375$
125	$\max\{0, 125.9375 - 125\} = 0.9375$
130	$\max\{0, 125.9375 - 130\} = 0$

Όλα τα δικαιώματα έχουν μη-αρνητικές τιμές.

(β) Η αξία του χρόνου του δικαιώματος κλήσης (call) ορίζεται από τη διαφορά μεταξύ της τιμής του δικαιώματος και της εσωτερικής του αξίας:

$$C(S_0, T, X) - \max(0, S_0 - X) \tag{11}$$

και αντικατοπτρίζει το κόστος του επενδυτή, που πληρώνει για την αβεβαιότητα της υποκείμενης μετοχής. Η χρονική αξία αυξάνεται με το πέρασμα του χρόνου. Όσο ο χρόνος πλησιάζει στη λήξη του δικαιώματος, η τιμή του δικαιώματος κλήσης (call option) μειώνεται και η αξία του χρόνου του δικαιώματος κινείται προς την εσωτερική του αξία (time value decay).

Όμοια, η αξία του χρόνου του δικαιώματος επίδοσης (put) ορίζεται από τη διαφορά:

$$P(S_0, T, X) - \max(0, X - S_0) \tag{12}$$

και αντικατοπτρίζει το κόστος του επενδυτή που πληρώνει για την αβεβαιότητα της υποκείμενης μετοχής.

Δραστηριότητα 15

(α) Η τρέχουσα τιμή της υποκείμενης μετοχής, ο χρόνος μέχρι τη λήξη, η μεταβλητότητα της τιμής της μετοχής και το επιτόκιο χωρίς κίνδυνο, οι οποίες είναι ανεξάρτητες της αντιμετώπισης του κινδύνου από τους επενδυτές. (β) Στην αναμενόμενη απόδοση, μ, η οποία όμως δεν υπάρχει στο υπόδειγμα των BS. Συνεπώς, το υπόδειγμα αυτό υποθέτει την ουδετερότητα απέναντι στον κίνδυνο των επενδυτών, με αποτέλεσμα η αναμενόμενη απόδοση όλων των περιουσιακών στοιχείων να ισούται με το επιτόκιο χωρίς κίνδυνο (δηλαδή $\mu = rf$).

Δραστηριότητα 16

(α)

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{100}{100}\right) + \left[0.06 + \frac{0.1^2}{2}\right]1}{0.1\sqrt{1}} = 0.65, \quad d_2 = 0.65 - 0.1 * 1 = 0.55$$

$$N(0.65) = 0.7422, \quad N(0.55) = 0.7088$$

$$C = 100 * 0.7422 - 100 * 0.9419 * 0.7088 = 7.46$$

Σύμφωνα με το υπόδειγμα των Black & Scholes η τιμή του δικαιώματος κλήσης (call option) είναι 7.46€.

(β) Από την ισοδυναμία put–call γνωρίζουμε ότι

$$P(S_0, T, X) = C(S_0, T, X) + Xe^{-r(T-t)} - S_0$$

Με αντικατάσταση βρίσκουμε:

$$P(S_0, T, X) = C(S_0, T, X) + Xe^{-r(T-t)} - S_0 = 7.46€ + 100 * (0.941765) - 100 = 1.6365€.$$

Δραστηριότητα 17

(α) Αν η τιμή της υποκείμενης μετοχής αυξηθεί κατά €1, τότε η τιμή του δικαιώματος θα αυξηθεί περίπου κατά $0.5572€ \cdot 5€ = 2.786€$. (β) Η τιμή του δικαιώματος θα μειωθεί κατά $0.5572 \cdot 0.01 = 0.005572$. Αφού έχουμε 1,000 δικαιώματα κλήσης, θα χάσουμε $1{,}000 \cdot 0.005572 = 5.57€$.

Δραστηριότητα 18

(α) Επαναλαμβάνοντας τις πράξεις βρίσκουμε $\Gamma = 0.116944$. (β) Παρατηρήσεις: (1) η τιμή του είναι μεγαλύτερη από αυτή του προηγούμενου παραδείγματος και, συνεπώς,

(2) ο Δέλτα θα μεταβληθεί περισσότερο στη μεταβολή της τιμής της υποκείμενης μετοχής. (γ) Το δικαίωμα είναι near-the-money και πολύ κοντά στη λήξη του. Συνεπώς, η μεγάλη αύξηση της τιμής του συντελεστή Γάμα σε σχέση με εκείνη που υπολογίστηκε στο προηγούμενο παράδειγμα ήταν αναμενόμενη.

Δραστηριότητα 19

Είναι (α) $C = 10.30$€, $P = 6.44$€, (β) Θ(κλήσης) $= -12.2607$ και Θ(επίδοσης) $= -4.5701$ και (γ) $C = 10.30 + 0.1(-12.2607) = 9.07$€ και $P = 6.44 + 0.1(-4.5701) = 5.98$€.

Δραστηριότητα 20

(α) $\Lambda = 15.32$, $C = 13.55$, $P = 12.08$, (β) $\Lambda = 15.26$, $C = 16.26$ και $P = 15.14$.

Δραστηριότητα 21

Με $r_c = 4.46\%$, το Ρο γίνεται:

$$\left(\frac{35}{365}\right)125\exp\left\{-(0.0446)\left(\frac{35}{365}\right)\right\}(0.4681) = 5.3758\ .$$

Με $r_c = 12\%$, το Ρο γίνεται:

$$\left(\frac{35}{365}\right)125\exp\left\{-(0.12)\left(\frac{35}{365}\right)\right\}(0.4681) = 5.000866\ .$$

Ο Ρο προβλέπει μια μεταβολή στην τιμή του δικαιώματος κλήσης ίση με:

$(0.12 - 0.0446) * (5.3758) = 0.40533$€.

Δραστηριότητα 22

Ο λόγος είναι ότι η σχέση της τιμής του δικαιώματος με τις μεταβολές του επιτοκίου χωρίς κίνδυνο είναι γραμμική (δες την ενότητα όπου παρουσιάσαμε το υπόδειγμα των BS).

Δραστηριότητα 23

$$\Delta = \frac{\partial P}{\partial S} = N(d_1) - 1,$$

$$\Theta = -\frac{\partial P}{\partial (T-t)} = \frac{S\sigma}{2\sqrt{\pi (T-t)}} + r_c X e^{-r(T-t)} N(-d_2)$$

$$Po = \frac{\partial P}{\partial r} = -X(T-t)e^{-r(T-t)}N(-d_2),$$

$$Vega = \frac{\partial P}{\partial \sigma} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{d_1^2}{2}} S\sqrt{T-t}$$

$$\Gamma = \frac{\partial \Delta}{\partial S} = \frac{\partial^2 P}{\partial S^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-\frac{d_1^2}{2}}}{S\sigma\sqrt{T-t}}$$

Δραστηριότητα 24

Η προσεγγιστική γραμμική σχέση μεταξύ της ποσοστιαίας μεταβολής της συναλλαγματικής ισοτιμίας και της μεταβολής του χ/φ είναι:

$$\delta PF = 45\delta S \Rightarrow \delta PF = 45 \cdot 1.50\delta x \Rightarrow \delta PF = 67.5\delta x$$

όπου $\delta x = \frac{\delta S}{1.5}$

Η τυπική απόκλιση του δx ισούται με την ημερήσια μεταβλητότητα της συναλλαγματικής ισοτιμίας, που είναι ίση με 0.8%. Συνεπώς, η τυπική απόκλιση του δPF ισούται με $67.5 \cdot 0.008 = 0.54$. Άρα, η VaR(95%)–10 ημερών είναι ίση με:

$$\text{VaR(95\%)–10 ημερών} = 0.54 \cdot 1.65 \cdot \sqrt{10} = 2.81$$

Δραστηριότητα 25

$\sigma_3^* = \sigma_2^* - \dfrac{\left[C\left(\sigma_2^*\right) - C(\sigma)\right] e^{\frac{d_1^2}{2}} \sqrt{2\pi}}{S_0\sqrt{T}}$ με το d_1 υπολογισμένο χρησιμοποιώντας σ_2^*.

Δραστηριότητα 26

	A	B	C
1	S(0)	125.9375	
2	X	125	
3	r	0.0446	
4	T	0.0959	=35/365
5	σ	0.83	
6	C	13.5	
7	d1	0.174227	=(LN(B1/B2)+(B3+(B5^2)/2)*B4)/(B5*SQRT(B4))
8	d1*	0.153292	=(LN(B1/B2)+(B3+(B9^2)/2)*B4)/(B9*SQRT(B4))
9	σ(1)*	0.495004	=SQRT(ABS(LN(B1/B2)+B3*B4)*(2/B4))
10	σ(2)*	0.825934	=B9-((7.25-B6)*EXP((B8^2)/2)*SQRT(2*3.14))/(B1*SQRT(B4))

Δραστηριότητα 27

Αφού η τυπική απόκλιση υποτίθεται ότι μετράει τη μεταβλητότητα της μετοχής ως προς τον χρόνο λήξης του δικαιώματος, είναι λογικό οι τυπικές αποκλίσεις να είναι διαφορετικές για διαφορετικό χρονικό ορίζοντα. Γενικά, μάλιστα, αναμένουμε να είναι μεγαλύτερη η τιμή της τυπικής απόκλισης όσο μεγαλύτερος είναι χρόνος μέχρι τη λήξη του δικαιώματος.

Δραστηριότητα 28

Το χαμόγελο μεταβλητότητας δείχνει ότι το υπόδειγμα BS δεν είναι τέλειο, κάτω από την υπόθεση εργασίας ότι όλοι οι συναλλασσόμενοι στην αγορά τιμολογούν τα δικαιώματα με βάση το υπόδειγμα αυτό ή ένα πολύ κοντινό του. Αυτό διότι δικαιώματα με υψηλότερες τεκμαρτές μεταβλητότητες είναι ακριβότερα από εκείνα τα δικαιώματα που έχουν χαμηλότερες τεκμαρτές μεταβλητότητες. Η πηγή των διαφοροποιήσεων των τιμών των τεκμαρτών μεταβλητοτήτων είναι και το κόστος των δικαιωμάτων: μερικά δικαιώματα είναι ακριβότερα από άλλα.

Δραστηριότητα 29

Από τον πίνακα φαίνεται ότι το δικαίωμα Ιουνίου με τιμή εξάσκησης 100€ είναι ακριβότερο. Ωστόσο, ένας λόγος που συμβαίνει αυτό είναι ότι έχει τη χαμηλότερη τιμή εξάσκησης. Λαμβάνοντας υπόψη τις τεκμαρτές μεταβλητότητες και κάτω από την υπόθεση εργασίας ότι η αγορά τιμολογεί τα δικαιώματα με το υπόδειγμα BS, τα δικαιώματα Ιουνίου με τιμή εξάσκησης 110€ και 120€ είναι ακριβότερα.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

ΞΕΝΟΓΛΩΣΣΗ

Altman E.I., Saunders A., «Credit risk measurement: Developments over the last 20 years», *Journal of Banking and Finance,* τεύχος 21, σ. 1.721–1.742, 1998.

Hull J., *Options, futures, and other derivatives,* Prentice–Hall, N.Y. 1997.

Kolb R.W., *Financial Derivatives,* Blackwell, N.Y. 1996.

Chance, D.M., *An introduction to derivatives and Risk management*, Thomson, 2004.

ΟΔΗΓΟΣ ΓΙΑ ΠΕΡΑΙΤΕΡΩ ΜΕΛΕΤΗ

1. **Hull J., *Options, Futures and other Derivatives*, Prentice Hall, N.Y. 1997.**

Το βιβλίο αυτό απευθύνεται κυρίως σε μεταπτυχιακούς φοιτητές και απαιτεί σχετική γνώση μαθηματικών και στατιστικής. Ωστόσο, συμβάλλει στην κατανόηση του γνωστικού αντικειμένου αυτού του κεφαλαίου, επειδή παρουσιάζει μια ενοποιημένη θεώρηση των παράγωγων προϊόντων και των υποδειγμάτων τιμολόγησης τους.

2. **Kolb R.W., *Financial Derivatives*, Blackwell, N.Y. 1996.**

Το βιβλίο αυτό είναι εισαγωγικό και προσφέρει γενικές γνώσεις. Καλύπτει θέματα των options, futures και swaps, καθώς επίσης και θέματα της χρηματοοικονομικής μηχανικής.

ΕΠΙΛΟΓΟΣ

Στον τόμο αυτό παρουσιάστηκαν οι μέθοδοι και οι τεχνικές της διαχείρισης χρηματοοικονομικού κινδύνου από τη σκοπιά των τραπεζικών ιδρυμάτων. Ένας μεγάλος αριθμός παραγόντων έχει οδηγήσει στην εξέλιξη των συστημάτων διαχείρισης χρηματοοικονομικού κινδύνου:

- Η αυξημένη μεταβλητότητα που χαρακτηρίζει το σύγχρονο οικονομικό περιβάλλον: τις συναλλαγματικές ισοτιμίες, τα επιτόκια, τους χρηματιστηριακούς δείκτες και τις μετοχές.
- Οι μεταβολές στο κανονιστικό–ρυθμιστικό περιβάλλον των αγορών και των οργανισμών, η παγκοσμιοποίηση των αγορών και η διεθνοποίηση των συναλλαγών, που εντείνουν την αβεβαιότητα και τη μεταβλητότητα των χρηματοοικονομικών εργαλείων και προϊόντων.
- Η ραγδαία ανάπτυξη της τεχνολογίας των πληροφοριακών συστημάτων, η οποία επιτρέπει σήμερα τη διαχείριση πλήθους στατιστικών δεδομένων και ποιοτικών πληροφοριών. Επίσης, η ανάπτυξη των πληροφοριακών συστημάτων διευκόλυνε τη μετάδοση δεδομένων ανά τον κόσμο, με χαμηλό κόστος πρόσβασης.
- Η μεγάλη ανάπτυξη των συναλλαγών, η οποία υποβοηθήθηκε από τους παραπάνω παράγοντες. Ακόμα, η αύξηση του αριθμού των επενδυτικών επιλογών ανάμεσα σε περισσότερα χρηματοοικονομικά εργαλεία και προϊόντα.
- Τέλος, η τεράστια ανάπτυξη των αγορών παράγωγων προϊόντων.

Αυτοί είναι οι βασικότεροι λόγοι που οδήγησαν στην ανάπτυξη των συστημάτων διαχείρισης, τους οποίους παρουσιάσαμε στον τόμο αυτό. Όμως, οι λόγοι αυτοί, όσο πραγματικοί και αν είναι, από μόνοι τους δεν μπορούν να βοηθήσουν στην ποσοτική αποτίμηση και μέτρηση του κινδύνου, που καθημερινά αντιμετωπίζουν οι χρηματοοικονομικοί οργανισμοί και τα πιστωτικά ιδρύματα. Έτσι, η παράλληλη ανάπτυξη των στατιστικών μεθόδων και των τεχνικών μέτρησης του κινδύνου συνέβαλε στην εφαρμογή των συστημάτων διαχείρισης. Το μέγεθος μέτρησης κινδύνου που έδωσε τη νεότερη ώθηση στην ανάπτυξη των συστημάτων διαχείρισης των τραπεζικών χαρτοφυλακίων είναι η VaR, την οποία αναπτύξαμε σε αρκετό βάθος στον τόμο αυτό.

Όμως, ακόμη και αυτή η μέθοδος δεν είναι πανάκεια. Μάλιστα, δεν υπάρχει ένας και μοναδικός τρόπος που να είναι κοινά αποδεκτός για τη μέτρηση της VaR. Για παράδειγμα, η VaR εξαρτάται και από τον κίνδυνο γεγονότων (event risk), συνεπώς πρέπει να συμπληρώνεται από stress testing ή, ακόμα, και από υποκειμενικές εκτιμήσεις για την εξέλιξη και την προοπτική του οικονομικού περιβάλλοντος. Πρέπει πάντοτε να έχουμε υπόψη μας ότι, ακόμα και με πιθανότητα 99%, μπορεί να συμβούν γεγονότα που θα αντιστρέψουν τα αναμενόμενα, υπό κανονικές οικονομικές συνθήκες, αποτελέσματα.