1. Στοχαστικές ανελίξεις

Ορίζουμε στοχαστική ανέλιξη τη διαδικασία που περιγράφει τη μεταβολή μιάς ή περισσότερων μεταβλητών υπό καθεστώς αβεβαιότητας. Είναι φανερό ότι, η εφαρμογή τέτοιας διαδικασίας είναι χρήσιμη στη μελέτη των τιμών των περιουσιακών στοιχείων. Τέτοιες στοχαστικές ανελίξεις μπορεί να είναι χρονικά διακριτές ή συνεχείς. Αν και οι τιμές των μετοχών παρατηρούνται σε διακριτό χρόνο, θεωρούμε ότι περιγράφονται από μια συνεχή στοχαστική ανέλιξη διότι αποδεικνύεται πολύ χρήσιμο.

Ο έλεγχος της Υπόθεσης της Αποτελεσματικής Αγοράς (EMH) γίνεται, συχνά, με τη μελέτη της συμπεριφοράς στο χρόνο των τιμών των περιουσιακών στοιχείων, δηλαδή του χαρακτήρα του τυχαίου περιπάτου των τιμών σε αγορές που είναι πληροφοριακά αποτελεσματικές.

Μια **στοχαστική ανέλιξη** $\{X_t, t \in T\}$ - όπου T είναι το σύνολο των δεικτών (συνήθως, χρονικές στιγμές) το οποίο μπορεί να περιλαμβάνει συνεχείς ή διακριτές τιμές-ορίζει τη διαδρομή (ακολουθία) τυχαίων μεταβλητών στον ίδιο χώρο πιθανοτήτων, όπου κάθε αλλαγή (*innovation*) είναι ανεξάρτητη των προηγούμενων αλλαγών (<u>ανεξαρτησία, I</u>) και, κάθε μια περιγράφεται από όμοια κατανομή πιθανότητας (<u>ταυτονομία, ID</u>):

$$f(X_1, X_2, ..., X_T) = f(X_1, X_2, ..., X_T; \theta) = f_1(X_1; \theta_1) f_2(X_2; \theta_2) ...... f_T(X_T; \theta_T) \quad \text{ΑΝΕΞΑΡΤΗΣΙΑ}$$

$$f_1(X_1; \theta_1) = f_2(X_2; \theta_2) = ... = f_T(X_T; \theta_T) = f(X_t; \theta) \quad \forall\, t = 1,2,....T \quad \text{ΤΑΥΤΟΝΟΜΙΑ}$$

Η συνθήκη της ανεξαρτησίας, σημαίνει ότι, η συνδιακύμανση μεταξύ δυο διαδοχικών παρατηρήσεων είναι μηδέν. Η συνθήκη της ταυτονομίας θέτει ότι, κάθε αλλαγή έχει τον ίδιο τύπο κατανομής πιθανότητας με τις ίδιες παραμέτρους, δηλαδή ίδιους μέσους και διακυμάνσεις.

Θα λέμε ότι, ένα δείγμα- δηλαδή, ένα σύνολο τυχαίων μεταβλητών πλήθους *T*- είναι **τυχαίο δείγμα,** όταν η από κοινού κατανομή του δείγματος μπορεί να γραφεί ως γινόμενο *T* οριακών κατανομών:

$$f(X_1, X_2, ..., X_T) = f(X_1, X_2, ..., X_T; \theta) = f_1(X_1; \theta_1) f_2(X_2; \theta_2) ...... f_T(X_T; \theta_T) =$$

$$= f_1(X_1; \theta_1) = f_2(X_2; \theta_2) = ... = f_T(X_T; \theta_T) = f(X_t; \theta) = \prod_{t=1}^{T} f(X_t; \theta)$$

(1.1)

δηλαδή οι συνθήκες I και ID μας επιτρέπουν τη διάσπαση της από κοινού κατανομής του δείγματος- με άλλα λόγια, μας επιτρέπουν τη μείωση της διαστατικότητας του υποδείγματος πιθανοτήτων- από την πολυδιάστατη $f(X_1, X_2, ..., X_T; \theta)$ στη μονοδιάστατη οριακή κατανομή $f(X_t; \theta)$, με αποτέλεσμα να μειωθεί ο αριθμός των προς εκτίμηση παραμέτρων.

Σε κάθε στοχαστική ανέλιξη, αυτό που, πρώτα, ενδιαφέρει είναι η υπόθεση της ανεξαρτησίας (ή η σχέση εξάρτησης) των τυχαίων μεταβλητών X_t, $t = 1, 2, 3 \ldots$, αλλά και το πώς μεταβάλλονται στο χρόνο οι από κοινού και οριακές κατανομές των X_t (ταυτονομία ή ετερογένεια).

Εάν δεν ικανοποιείται η συνθήκη της ανεξαρτησίας, τότε ένας χρήσιμος περιορισμός εξάρτησης είναι η υπόθεση Markov τάξης *p*. Μια στοχαστική ανέλιξη θα λέγεται **Markov τάξης *p*** εάν μόνον η παρούσα κατάσταση της ανέλιξης είναι ικανή να προβλέψει το μέλλον. Η προηγούμενη ιστορία της στοχαστικής ανέλιξης και ο τρόπος με τον οποίο έφτασε στην τρέχουσα κατάστασή της δεν μπορούν να προσφέρουν σχετική πληροφορία για την πρόβλεψη στο μέλλον:

$$f(X_t / X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots\ldots; \theta) = f(X_t / X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots\ldots, X_{t-p}; \theta^*).$$

Η ιδιότητα Markov των τιμών των μετοχών αντιστοιχεί στην υπόθεση της ΕΜΗ στην ασθενή της μορφή. Εάν η ΕΜΗ στην ασθενή της μορφή δεν αληθεύει, τότε, για παράδειγμα, οι τεχνικοί αναλυτές μπορούν να έχουν αποδόσεις υψηλότερες από τη μέση απόδοση.

Οι περιορισμοί ετερογένειας αφορούν σε μη-ανεξάρτητες ανελίξεις και αναφέρονται στη στασιμότητά της. Μια ανέλιξη θα λέγεται **στάσιμη** εάν η από κοινού κατανομή ενός συνόλου τυχαίων μεταβλητών είναι όμοια με εκείνη ενός άλλου συνόλου τυχαίων μεταβλητών, το οποίο παράγεται με σταθερή χρονική μετάθεση:

$$f(X_1, X_2, X_3, \ldots, X_T; \theta) = f(X_{1+c}, X_{2+c}, X_{3+c}, \ldots X_{T+c}; \theta) \ \forall\, c \in T$$

Η **στασιμότητα 2ης τάξης** θέτει ότι, όλες οι τυχαίες μεταβλητές της ανέλιξης έχουν τον ίδιο μέσο, την ίδια και σταθερή διακύμανση και ότι, οι συνδιακυμάνσεις δυο οποιωνδήποτε τυχαίων μεταβλητών είναι συνάρτηση μόνο της χρονικής απόστασης και όχι του χρόνου:

$$E(X_t) = \mu, \forall\, t \qquad \operatorname{var}(X_t) = \sigma^2, \forall\, t \qquad \operatorname{cov}(X_t, X_s) = k(|t-s|)$$

(1.2)

<u>Χρήσιμες Ανελίξεις</u>

1. Εάν ικανοποιούνται οι παραπάνω συνθήκες (1.1), θα λέμε ότι, έχουμε μια **στοχαστική ανέλιξη IID**. Να σημειωθεί ότι, μια ανέλιξη IID είναι και λευκού θορύβου, ενώ το αντίστροφο δεν ισχύει, διότι $\operatorname{cov}(X_t, X_s) = 0$, που ισχύει στο λευκό θόρυβο, δεν συνεπάγεται και ανεξαρτησία.

2. Μία στοχαστική ανέλιξη $\{X_t\}$ θα λέγεται ανέλιξη **λευκού θορύβου** εάν ο μέσος της είναι μηδέν, διακύμανσή της σταθερή και η συνδιακύμανση δυο διαδοχικών παρατηρήσεών της είναι, επίσης, ίση με το μηδέν. Η ανέλιξη το λευκού θορύβου είναι στάσιμη 2ης τάξης, αφού ικανοποιούνται οι συνθήκες της (1.2). Εάν $E(X_t) \sim N(0, \sigma^2)$ και $\{X_t\}$ είναι λευκός θόρυβος, τότε πρόκειται για **Gaussian λευκό θόρυβο**.

3. Έστω $\{\varepsilon_t\}$ μια ανέλιξη που είναι IID. Η ανέλιξη $\{X_t\}$ η οποία παράγεται από την $\{\varepsilon_t\}$ από τη σχέση $X_t = X_{t-1} + \varepsilon_t$ θα λέγεται **τυχαίος περίπατος**. Πολλές φορές

στον τυχαίο περίπατο προσθέτουμε και μια μετατόπιση α, η οποία αναφέρεται στη χρονική τάση: $X_t = X_{t-1} + \alpha + \varepsilon_t$.

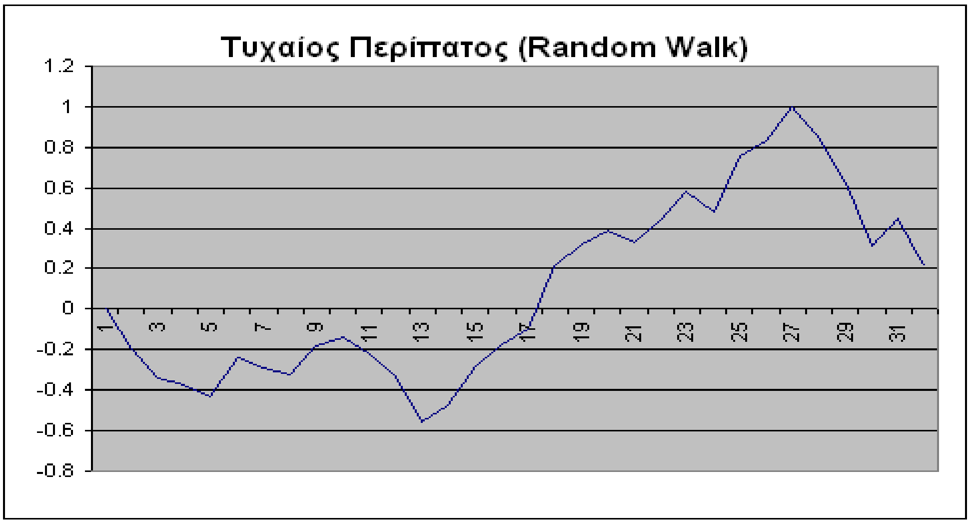
(ι). Εάν $\{X_t\}$ είναι τυχαίος περίπατος, τότε η ανέλιξη $y_t = X_t - X_{t-1}$ θα είναι IID.

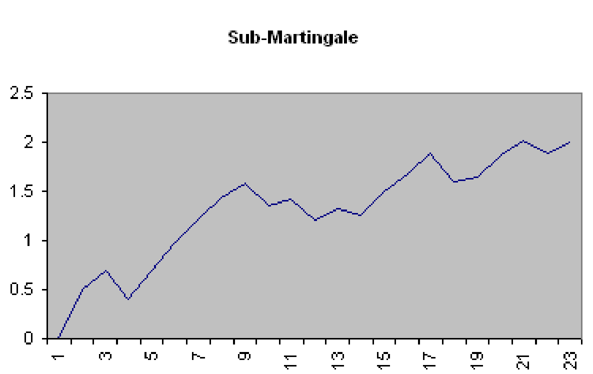
(ιι). Εάν $\{X_t\}$ είναι τυχαίος περίπατος, τότε δεν είναι στάσιμη γιατί τόσο ο μέσος όσο και η διακύμανση της αλλάζουν με το χρόνο: $E(X_t) = t.\mu$, $E(\varepsilon_t) = \mu, \forall t$ και $\mathrm{var}(X_t) = t.\sigma^2$, $\mathrm{var}(\varepsilon_t) = \sigma^2 \forall t$.

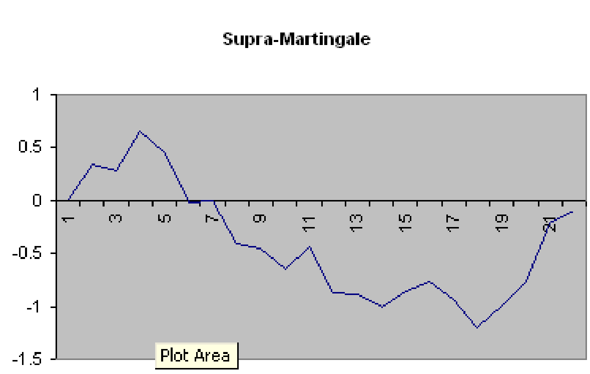
(ιιι). Η ανέλιξη του τυχαίου περιπάτου παρουσιάζει δυο ιδιότητες, ιδιαίτερα σημαντικές στην ανάλυση των χρηματοοικονομικών χρονοσειρών: την ιδιότητα Markov και την ιδιότητα Martingale.

4. Μια στοχαστική ανέλιξη θα λέγεται **Martingale** άν ο δεσμευμένος μέσος της X_t ως προς όλο το παρελθόν είναι ίσος με την τιμή της τυχαίας μεταβλητής την προηγούμενη χρονική στιγμή: $E(X_t / X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots\ldots) = X_{t-1}$.

5. Ένας τυχαίος περίπατος με θετική μετατόπιση αποτελεί παράδειγμα ανέλιξης **sub-martingale**, ενώ με αρνητική μετατόπιση είναι ανέλιξη **supra-martingale**.







6. **Wiener ανέλιξη**. Είναι ένας ιδιαίτερος τύπος της ανέλιξης Markov (δανεισμένος από τη φυσική, που περιγράφει την κίνηση των μορίων, όταν υποβάλλονται σε μεγάλο αριθμό μοριακών σόκς) και είναι γνωστή και ως **κίνηση Brown**. Χρησιμοποιείται για να περιγράψουμε την κίνηση των αποδόσεων των μετοχών, οι οποίες, υποτίθεται ότι, μεταβάλλονται τυχαία στο χρόνο εξ' αιτίας του αποτελέσματος μικρών, αλλά πολλών, ανεξάρτητων τυχαίων σόκς, που επιβάλλονται στις τιμές των μετοχών με την είσοδο κάθε πληροφορίας.

Έστω S μια τυχαία μεταβλητή, και t ο χρόνος. Σε ένα μικρό χρονικό διάστημα Δt, η τυχαία μεταβλητή S μεταβάλλεται σε ΔS. Εάν η S ακολουθεί την ανέλιξη Wiener (ή κίνηση Brown), τότε η μεταβολή στην S, δηλαδή ΔS, σε ένα μικρό χρονικό διάστημα Δt, θα είναι:

$\Delta S = \epsilon \sqrt{\Delta t}$, όπου ϵ ~N(0, 1) και, οριακά όσο $\Delta t \to 0$, $dS = \epsilon \sqrt{dt}$.

Αφού ϵ είναι η τυποποιημένη κανονική μεταβλητή, οι μεταβολές ΔS θα κατανέμονται κανονικά με μέσο μηδέν και διακύμανση Δt. Μια από τις σημαντικές ιδιότητες της ανέλιξης Wiener είναι ότι οι τιμές της ΔS για δυο μικρά διαφορετικά χρονικά διαστήματα, είναι ανεξάρτητες, επειδή εξαρτάται από μια άλλη τυχαία μεταβλητή, $\epsilon \sqrt{\Delta t}$ (που μπορεί να αντικατοπτρίζει το αποτέλεσμα της εισόδου νέας πληροφορίας στο σύστημα της αγοράς) και συνεπάγεται ότι, η τυχαία μεταβλητή S ακολουθεί μια ανέλιξη Markov. Συνεπώς, για την ΔS ισχύουν:

Μέσος = 0

Διακύμανση = Δt

Τυπική απόκλιση = $\sqrt{\Delta t}$

Με βάση τα παραπάνω ΔS είναι IID [$\Delta S \sim N(0, \sqrt{\Delta t})$]. Αφού η διακύμανση κάθε μεταβολής ΔS είναι ίση με Δt, τότε η διακύμανση σε μεγάλη χρονική περίοδο, T, θα είναι ίση με $\sum_{i=1}^{N=\left(\frac{T}{\Delta t}\right)} \Delta S(T) = N\Delta t = T$ και τυπική απόκλιση $\sqrt{T}$. Η βασική ανέλιξη Wiener έχει ένα ποσοστό μετατόπισης ίσο με το 0 και ποσοστό διακύμανσης ίσο με 1. Η μηδενική μετατόπιση σημαίνει ότι, η αναμενόμενη τιμή της τυχαίας μεταβλητής σε οποιαδήποτε μελλοντική χρονική στιγμή ισούται με την τρέχουσα τιμή της. Το ποσοστό διακύμανσης ίσο με τη 1 σημαίνει ότι, η μεταβλητότητα της τυχαίας μεταβλητής σε κάποιο χρονικό διάστημα μήκους T είναι ίση με 1.0*T.

Παράδειγμα. Ας υποθέσουμε ότι μετράμε την τιμή της τυχαίας μεταβλητής X, που ακολουθεί τη διαδικασία Wiener ανά έτος. Έστω ότι, η τιμή της είναι 18. Στο τέλος του 1^{ου} έτους η τιμή της X θα κατανέμεται κανονικά με μέση τιμή 18 και τυπική απόκλιση 1. Στο τέλος του 2^{ου} έτους θα κατανέμεται κανονικά με μέση τιμή 18 και τυπική απόκλιση $\sqrt{2} = 1.414$, με άλλα λόγια, η αβεβαιότητά μας (μετρούμενη με την τυπική απόκλιση) για την τιμή της τυχαίας μεταβλητής σε κάποια μελλοντική χρονική στιγμή θα αυξάνεται με την τετραγωνική ρίζα του χρόνου.

2. Η ανέλιξη των τιμών των μετοχών

Υπάρχουν τρεις, τουλάχιστον, λόγοι για τους οποίους δεν μπορεί να εφαρμοστεί η βασική ανέλιξη Wiener, στην προηγούμενή της μορφή, για να περιγράψει τη στοχαστική ανέλιξη των τιμών των μετοχών.

(1). Η μεταβλητότητα των μετοχών είναι διαφορετική για κάθε μετοχή. Προηγούμενα υποθέσαμε ότι είναι η μονάδα.

Οι διάφορες μετοχές έχουν διαφορετικό βαθμό μεταβλητότητας και, συνεπώς, η επίδραση του ϵ θα διαφέρει μεταξύ των μετοχών, όπως αντικατοπτρίζεται στη μεταβλητότητά τους. Αυτό το πρόβλημα αντιμετωπίζεται εύκολα, εάν κανονικοποιήσουμε το ϵ με την τυπική απόκλιση της ΔS: $\sigma\epsilon$, που θα έχει μέσο μηδέν και διακύμανση $\sigma*1=\sigma$.

Συνεπώς, η αρχική εξίσωση, $\Delta S = \epsilon\sqrt{\Delta t}$ γίνεται, $\Delta S = \sigma\epsilon\sqrt{\Delta t}$ και στο όριο $dS = \sigma\epsilon\sqrt{dt}$. ΔS έχει αναμενόμενη τιμή μηδέν και τυπική απόκλιση ίση με $\sigma\sqrt{\Delta t}$.

(2). Οι μετοχές, σαν επικίνδυνα περιουσιακά στοιχεία, έχουν, συνήθως, θετική αναμενόμενη απόδοση κατά μέσο όρο. Στην προηγούμενη ανέλιξη, υποθέσαμε ότι, ΔS έχει μέσο το μηδέν. Έτσι, η μελλοντική τιμή θα είναι η τρέχουσα τιμή, δηλαδή μηδέν.

Το πρόβλημα αυτό εμφανίζεται διότι η αναμενόμενη τιμή της τυχαίας μεταβλητής ϵ είναι μηδέν και, συνεπώς, η αναμενόμενη μεταβολή στην S, η ΔS, είναι, επίσης, μηδέν. Ωστόσο, η αναμενόμενη απόδοση από τη διακράτηση της μετοχής πρέπει, κατά μέσο όρο, να είναι θετική, έτσι ώστε να ανταμείβονται οι επενδυτές που αναλαμβάνουν τον κίνδυνο της κατοχής της μετοχής.

Θα πρέπει, λοιπόν, να προσαρμόσουμε τη βασική ανέλιξη Wiener σε μια γενικευμένη Wiener ανέλιξη, ώστε να συμπεριλάβουμε τη θετική αναμενόμενη απόδοση. Η **γενικευμένη ανέλιξη Wiener** είναι η βασική Wiener με μια παράμετρο μετατόπισης, η οποία χρησιμοποιείται για να παραστήσει τη θετική (όπως στην περίπτωση της μετοχής) ή αρνητική τάση της χρονοσειράς της στοχαστικής μεταβλητής. Στην περίπτωση της μετοχής είναι κατάλληλο να υποθέσουμε θετική μετατόπιση, ώστε να λάβουμε υπόψη μας την ανταμοιβή κινδύνου των επενδυτών. Συνεπώς, η μετατόπιση είναι ανάλογη της αναμενόμενης απόδοσης.

Η παράμετρος μετατόπισης a, παριστάνει τη μεταβολή στην S, dS, σε μικρή μονάδα του χρόνου, dt, έτσι: $\frac{dS}{dt} = a$ και, σε ένα χρονικό διάστημα μήκους T, η S αυξάνεται κατά aT. Εάν υπήρχε μόνο αυτή η μετατόπιση, τότε η μεταβολή dS, η προερχόμενη από την αναμενόμενη απόδοση a για μικρή χρονική μεταβολή, θα ισούται με adt. Σύμφωνα με τη γενικευμένη Wiener ανέλιξη, η στοχαστική ανέλιξη μιας τυχαίας μεταβλητής έχει ένα ποσοστό μετατόπισης και τη βασική ανέλιξη Wiener. Έτσι, αυτή η τυχαία μεταβλητή έχει, τώρα, μια αναμενόμενη μεταβολή προερχόμενη από δύο παράγοντες:

(ι). Ο πρώτος είναι η αναμενόμενη απόδοση της μετοχής για ένα μικρό διάστημα χρόνου, adt.

(ιι). Ο δεύτερος είναι η τυχαία μεταβολή $\sigma\epsilon\sqrt{\Delta t}$, η βασική ανέλιξη Wiener.

Έτσι, μια μικρή μεταβολή στην τιμή της μετοχής σε ένα πολύ μικρό χρονικό διάστημα, μπορεί να περιγραφεί από μια στοχαστική διαφορική εξίσωση:

$$dS = adt + \sigma \epsilon \sqrt{dt}$$

Το στοιχείο της μετατόπισης, adt είναι το προσδιοριστικό στοιχείο (δηλαδή, όχι τυχαίο) και η βασική Wiener ανέλιξη είναι η στοχαστική συνιστώσα.

(3). Η ανέλιξη Wiener υποθέτει ότι, οι απόλυτες μεταβολές της τιμής της τυχαίας μεταβλητής S, ΔS, είναι ανεξάρτητες του μεγέθους της S. Στην πραγματικότητα, όμως, δεν συμβαίνει αυτό. Στην πραγματικότητα, αναμένουμε, οι απόλυτες μεταβολές των τιμών των μετοχών που έχουν υψηλή τιμή να είναι μεγαλύτερες από ότι οι απόλυτες μεταβολές των τιμών των μετοχών που έχουν χαμηλή τιμή. Με άλλα λόγια, η σχετική μεταβολή των τιμών $\frac{\Delta S}{S}$ αναμένουμε να είναι ανεξάρτητη της S και όχι η ΔS της S.

Αυτό σημαίνει ότι, το μέγεθος της μεταβολής των τιμών των μετοχών πρέπει να είναι ανεξάρτητο του μεγέθους της τιμής των μετοχών. Σύμφωνα με τα παραπάνω στο σημείο (2), τη γενικευμένη ανέλιξη Wiener, η τιμή της μετοχής έχει μια σταθερή αναμενόμενη απόδοση και σταθερή διακύμανση. α είναι η απόλυτη απόδοση ανά μονάδα του χρόνου, αλλά δεν είναι ανεξάρτητη της τιμής της μετοχής. Ωστόσο, η απαιτούμενη από τους επενδυτές απόδοση, για να αναλάβουν τον κίνδυνο της διακράτησης της μετοχής, είναι ανεξάρτητη της τιμής της μετοχής. Εάν, για παράδειγμα, η απαιτούμενη απόδοση ετησίως είναι 10% για την ανάληψη του κινδύνου της διακράτησης της μετοχής, θα είναι 10% ανεξάρτητα εάν η μετοχή έχει τιμή 6.25€ είτε 32.19€.

Με άλλα λόγια, η επιθυμητή στοχαστική ανέλιξη των τιμών των μετοχών, θα πρέπει να ενσωματώνει μια απόλυτη απόδοση που είναι συνάρτηση της τιμής της μετοχής, αλλά μια απόδοση που είναι ανεξάρτητη της τιμής της μετοχής.

Μια άλλη γενίκευση της ανέλιξης Wiener είναι η **ανέλιξη Ito**, όπου οι παράμετροι α και σ είναι συναρτήσεις της υποκείμενης μεταβλητής S και του χρόνου t, που σημαίνει μεταβάλλονται στο χρόνο. Δηλαδή:

$$dS = a(S,t)dt + \sigma (S,t)\epsilon \sqrt{dt}$$

που σημαίνει ότι, όσο η υποκείμενη μεταβλητή S αλλάζει τόσο θα μεταβάλλεται η απόλυτη μετατόπιση. Δηλαδή, όσο η S αυξάνεται τόσο αυξάνεται η α και όσο μεγαλώνει ο χρόνος t τόσο αυξάνονται τα α και σ.

i. Εξειδίκευση της απόδοσης

Με άλλα λόγια, η υπόθεση της σταθερής απόλυτης απόδοσης, πρέπει να αντικατασταθεί από την υπόθεση ότι, «η αναμενόμενη μετατόπιση, σαν ποσοστό της τιμής της μετοχής, είναι σταθερή». Αυτό σημαίνει ότι, εάν S είναι η τιμή της μετοχής, η αναμενόμενη ποσοστιαία μετατόπιση της S είναι μS, για κάποια σταθερή παράμετρο μ.

Η παράμετρος μ, παριστάνει την αναμενόμενη απόδοση της μετοχής (εκφρασμένη σε δεκαδική μορφή) και μS είναι η απόλυτη απόδοση. Έτσι, για μια πολύ μικρή χρονική περίοδο Δt, η αναμενόμενη απόλυτη απόδοση θα είναι ίση με $\Delta S = \mu S \Delta t$ και, οριακά $dS = \mu S dt$.

Ας πάρουμε τον τύπο της απόδοσης: $R_{t+1} = \dfrac{S_{t+1} - S_t}{S_t} = \mu \Delta t \Leftrightarrow S_{t+1} = S_t(1+ \mu \Delta t)$. Για διάφορες τιμές του t θα έχουμε:

Στην αρχή, για $t = 0$, η τιμή της μετοχής είναι S_0 και ύστερα από μια χρονική μετακίνηση $t = \delta t$, θα είναι: $S_1 = S_0(1+ \mu \Delta t)$
Μετά δυο χρονικές στιγμές, $t = 2\delta t$: $S_2 = S_1(1+ \mu \Delta t) = S_0(1+ \mu \Delta t)^2$
. . .
. . .
. . .
. . .
Και, τέλος, μετά n χρονικές στιγμές, $t = n\Delta t = T$: $S_n = S_0(1+ \mu \Delta t)^n = S_0 e^{n \log(1+ \mu \Delta t)} \approx S_0 e^{\mu n \Delta t} = S_0 e^{\mu T}$

Εάν το ποσοστό της διακύμανσης είναι πάντα ίσο με το μηδέν, θα είναι, λοιπόν:

$$dS = \mu S dt \Rightarrow (\div S) \quad \frac{dS}{S} = \mu\, dt \Rightarrow S = S_0 e^{\mu t}$$

όπου S_0 είναι η τιμή της μετοχής τη χρονική στιγμή 0. Έτσι, έχουμε μια απόλυτη μεταβολή στην τιμή της μετοχής, ΔS, που είναι συνάρτηση της τιμής της μετοχής, δηλαδή $\mu S \Delta t$ και, μια ποσοστιαία απόδοση, dS/S, που είναι ανεξάρτητη της τιμής της μετοχής, δηλαδή $\mu\, dt$.

Η παραπάνω εξίσωση δείχνει ότι, όταν το ποσοστό της διακύμανσης είναι μηδέν, η τιμή της μετοχής αυξάνει με συνεχώς ανατοκιζόμενο ποσοστό μ ανά μονάδα του χρόνου.

ii. Εξειδίκευση της μεταβλητότητας

Στην πράξη, βέβαια, οι τιμές των μετοχών εμφανίζουν μεταβλητότητα, η οποία εκφράζει το βαθμό αβεβαιότητας της αναμενόμενης απόδοσης. Μια λογική υπόθεση είναι ότι, σε μια μικρή χρονική περίοδο, η μεταβλητότητα είναι ανεξάρτητη της τιμής της μετοχής. Αυτό σημαίνει ότι, οι επενδυτές αισθάνονται το ίδιο αβέβαιοι σχετικά με τη μελλοντική απόδοση, ανεξάρτητα εάν η τιμή της μετοχής είναι 2€ ή 28.5€. Με άλλα λόγια, η διακύμανση σ^2 της ποσοστιαίας απόδοσης της μετοχής σε ένα πολύ μικρό χρονικό διάστημα, Δt, είναι η ίδια ανεξάρτητη της τιμής της μετοχής. Συνεπώς, $\dfrac{dS}{S}$ είναι συνάρτηση της $\mu\, dt$ και της $\sigma \in \sqrt{\Delta t}$. Θα έχουμε, λοιπόν:

$$\frac{dS}{S} = \mu\, dt + \sigma \in \sqrt{dt} \Leftrightarrow dS = \mu S dt + \sigma S \in \sqrt{dt}$$

η οποία είναι μια Ito ανέλιξη (ή γεωμετρική κίνηση Brown, GBM). Η εξίσωση αυτή χρησιμοποιείται για την υποδειγματοποίηση των τιμών των μετοχών και σ είναι η μεταβλητότητα της τιμής της μετοχής, ενώ μ είναι η αναμενόμενη απόδοση της μετοχής.

Παράδειγμα. Μια μετοχή εμφανίζει ετήσια μεταβλητότητα 30% και ετήσια απόδοση 15%. Η μεταβολή της τιμής αυτής της μετοχής σε διάστημα 1 εβδομάδας (= 0.0192 έτη) είναι:

$\Delta S = 100*[0.15*0.0192 + 0.3*\sqrt{0.0192}\,\epsilon\,] = 100*[0.00288 + 0.0416\epsilon\,]$, που σημαίνει ότι, η αύξηση της τιμής είναι ένα τυχαίο δείγμα από μια κανονική κατανομή με μέσο 0.288€ και τυπική απόκλιση (κίνδυνο) 4.16€.

Παράδειγμα. Υπολογισμός της χρονοσειράς των τιμών μετοχής με σταθερή αναμενόμενη απόδοση.

<u>Βήμα 1º</u>. Θέτουμε τις παραμέτρους:

αρχική τιμή μετοχής S_0 = 100€ (στήλη B, κελί 2)

αναμενόμενη απόδοση μ = 8% ή 0.08

μεταβλητότητα σ = 0.21

βήμα χρόνου, Δt = 0.01 του έτους, που είναι περίπου 3.65 ημέρες και αριθμός χρονικών περιόδων = 100 (στήλη A)

<u>Βήμα 2º</u>. Υπολογίζουμε 100 τυχαίες τιμές (ϵ) από την τυποποιημένη κανονική κατανομή. Στο **excel**: Tools → Data Analysis → Random Number Generation και επιλέγουμε την κανονική κατανομή με μέσο 0 και διακύμανση 1 (στήλη C).

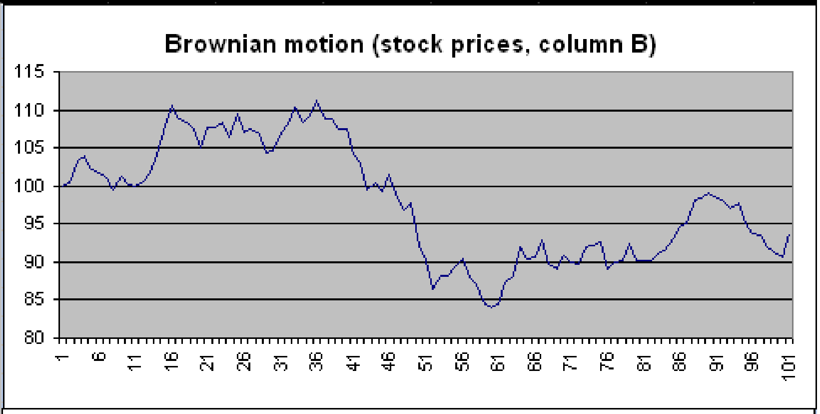
<u>Βήμα 3º</u>. Υπολογίζουμε τις τιμές S της μετοχής από τη σχέση:

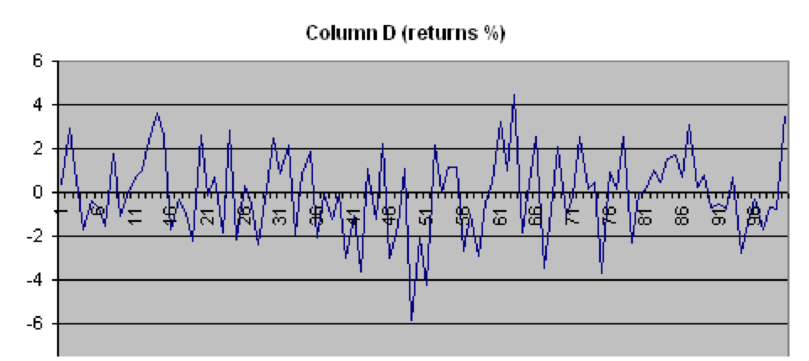
$S_{t+1} = S_t[1+ \mu\Delta t + \sigma\, \epsilon\, \sqrt{\Delta t}]$ (στήλη B κελί 2 και αντιγράφουμε μέχρι τέλους).

Υπολογίζουμε, εάν θέλουμε και, την ποσοστιαία απόδοση (στήλη D) από τη σχέση: $\left(\dfrac{B(t)}{B(t-1)} - 1\right)*100$, που είναι τυχαία, κανονικά κατανεμημένη μεταβλητή με μέσο μ και τυπική απόκλιση σ.

β

A	B	C	D
time	asset	random(ε)	% return
0	100		
0.01	100.3929	0.148995	0.392889
0.02	103.365	1.371654	2.960474
0.03	103.9356	0.224757	0.551989
0.04	102.1702	-0.84691	-1.69851
0.05	101.7626	-0.22805	-0.39891
0.06	101.0239	-0.38379	-0.72597
0.07	99.4672	-0.77186	-1.5409
0.08	101.2273	0.804523	1.769499
0.09	100.1147	-0.56147	-1.09908
0.1	99.96831	-0.10773	-0.14623
0.11	100.6641	0.293358	0.696051
0.12	101.6402	0.423631	0.969626
0.13	104.0945	1.111755	2.414685
0.14	107.8468	1.678422	3.604687
0.15	110.6449	1.197409	2.594559
0.16	108.7352	-0.86001	-1.72602
0.17	108.3983	-0.18561	-0.30979
0.18	107.4261	-0.46518	-0.89687
0.19	105.0499	-1.09141	-2.21196
0.2	107.789	1.203543	2.607441
0.21	107.5974	-0.12274	-0.17776
0.22	108.3382	0.289765	0.688507
0.23	106.3545	-0.91004	-1.83108
0.24	109.4141	1.331796	2.876771
0.25	107.0948	-1.0475	-2.11975





3. Το λήμμα του Ito

Είδαμε παραπάνω, πώς οι τιμές των μετοχών ακολουθούν μια ανέλιξη Ito: $dS = \mu S dt + \sigma S \epsilon \sqrt{dt}$.

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την ανέλιξη του Ito στην τιμολόγηση των παράγωγων προϊόντων (προθεσμιακά συμβόλαια, ΣΜΕ και δικαιώματα). Ο Ito, το 1951 απέδειξε ότι, κάθε τυχαία μεταβλητή που είναι συνάρτηση μιας άλλης μεταβλητής, η οποία ακολουθεί την ανέλιξη του Ito, θα ακολουθεί και αυτή μια Ito ανέλιξη. Έστω, W (παράγωγο) μια συνάρτηση της X (η υποκείμενη αξία του παραγώγου, π.χ. μετοχή, δείκτης, επιτόκιο, συναλλαγματική ισοτιμία, γεωργικό προϊόν κλπ.), όπου η X ακολουθεί μια ανέλιξη Ito, δηλαδή: $dX = adt + \sigma \epsilon \sqrt{dt}$. Τότε η W θα ακολουθεί μια ανέλιξη Ito της μορφής:

$$dW = \left(\frac{dW}{dX} a + \frac{dW}{dt} + \frac{1}{2} \frac{d^2W}{dX^2} \sigma^2 \right) dt + \frac{dW}{dX} \sigma \epsilon \sqrt{dt} .$$

Η παράμετρος a είναι το ποσοστό της μετατόπισης (αναμενόμενη απόδοση), σ^2 είναι η διακύμανση και σ είναι η τυπική απόκλιση (μεταβλητότητα) της αρχικής μεταβλητής X, που ακολουθεί μια ανέλιξη Ito. Παρατηρούμε ότι, σε κάθε μια ανέλιξη Ito, από τις παραπάνω, υπάρχει μια βασική ανέλιξη Wiener, $\epsilon \sqrt{dt}$.

Η τιμή του παράγωγου προϊόντος W είναι συνάρτηση της τιμής της υποκείμενης αξίας X και του χρόνου, t. Η μεταβλητή W θα έχει ποσοστό μετατόπισης:

$\frac{\delta W}{\delta X}a+\frac{\delta W}{\delta t}+\frac{1}{2}\frac{\delta^2 W}{\delta X^2}\sigma^2$ και ποσοστό μεταβλητότητας: $\frac{dW}{dX}\sigma$.

Εφαρμόζοντας το λήμμα του Ito στα παράγωγα προϊόντα, όπου *S* είναι η τιμή της υποκείμενης αξίας, μS είναι η αναμενόμενη απόδοση, $\sigma^2 S^2$ είναι η διακύμανση των τιμών της υποκείμενης αξίας και σS είναι η τυπική τους απόκλιση:

$$dW=\left(\frac{\delta W}{\delta S}\mu S+\frac{\delta W}{\delta t}+\frac{1}{2}\frac{\delta^2 W}{\delta S^2}\sigma^2 S^2\right)dt+\frac{\delta W}{\delta S}\sigma S\epsilon\sqrt{\delta t}\ .$$

Παράδειγμα. Έστω η τιμή *F* του προθεσμιακού συμβολαίου $F=Se^{r(T-t)}$, όπου *S* είναι η τιμή στην τρέχουσα αγορά της υποκείμενης αξίας. Ας υποθέσουμε ότι η απόδοση της επένδυσης χωρίς κίνδυνο είναι σταθερή και ίση με *r* για όλες τις λήξεις του συμβολαίου. Τότε θα είναι:

$$\frac{\delta F}{\delta S}=e^{r(T-t)}$$

$$\frac{\delta^2 F}{\delta S^2}=0$$

$$\frac{\delta F}{\delta t}=-rSe^{t(T-t)}$$

Ας υποθέσουμε, ακόμα ότι, η *S* ακολουθεί μια GBM: $dS=\mu Sdt+\sigma S\epsilon\sqrt{dt}$. Τότε, η ανέλιξη για την *F*, σύμφωνα με το λήμμα του Ito, θα είναι:

$$dF=\left[e^{r(T-t)}\mu S-rSe^{r(T-t)}\right]dt+e^{r(T-t)}\sigma Sdz\ \ \kappa\alpha\iota\ \ dF=(\mu-r)Fdt+\sigma Fdz$$

εάν αντικαταστήσουμε με $F=Se^{r(T-t)}$. Έτσι, η *F* ακολουθεί μια κίνηση Brown και έχει την ίδια μεταβλητότητα με την *S* και αναμενόμενη απόδοση ίση με *μ-r*.

4. Αποδόσεις μετοχών

Η έρευνα στις χρηματοοικονομικές χρονολογικές σειρές συνεπάγεται τη μελέτη της στατιστικής συμπεριφοράς των τιμών των περιουσιακών στοιχείων. Οι έλεγχοι της υπόθεσης της αποτελεσματικής αγοράς , πολύ συχνά, αναφέρονται στη μελέτη του χαρακτήρα του τυχαίου περιπάτου των τιμών, σε αγορές που είναι πληροφοριακά αποτελεσματικές. Γενικά, ο τυχαίος περίπατος των τιμών περιγράφεται:

$$P_t=P_{t-1}+\varepsilon_t,\quad \varepsilon_t\approx \text{iid white noise}$$
(2.1)

ή καλύτερα:

$$p_t=p_{t-1}+\varepsilon_t,\ o\pi o\upsilon\ \ p_t=\ln(P_t),\ \varepsilon_t\approx iid\ \ white\ noise$$
(2.1Α)

για να αποφύγουμε το πρόβλημα των αρνητικών τιμών των περιουσιακών στοιχείων.

Στη χρηματοοικονομική οικονομετρία ασχολούμαστε περισσότερο με τη μελέτη της χρονοσειράς των αποδόσεων ενός περιουσιακού στοιχείου παρά με τη χρονοσειρά των τιμών των ίδιων:

$$R_t = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}} = \frac{P_t}{P_{t-1}} - 1 \tag{2.2}$$

Εάν $(1+R_t)$ είναι η <u>απλή συνολική απόδοση</u> (simple gross return) τότε η σχέση (2.2) μπορεί να επεκταθεί στις αποδόσεις περισσοτέρων περιόδων, R_t^k :

<u>*k-period Compound Net Return*</u>: $R_t^k = \dfrac{P_t - P_{t-k}}{P_{t-k}}$

(2.3)

R_t^k είναι η ανατοκιζόμενη απόδοση γιατί μπορεί να εκφραστεί σαν το γινόμενο των k 1-περιόδου απλών αποδόσεων:

$$\left(1+R_t^k\right) = \frac{P_t}{P_{t-k}} = \frac{P_t}{P_{t-1}}\frac{P_{t-1}}{P_{t-2}}\cdots\frac{P_{t-k-1}}{P_{t-k}} = \left(1+R_t\right)\left(1+R_{t-1}\right)\ldots\left(1+R_{t-k-1}\right)$$

(2.4)

Η ανατοκιζόμενη απόδοση k-περιόδων είναι ο γεωμετρικός μέσος όρος των απλών αποδόσεων 1-περιόδου, που εισάγει μια δυσκολία στη διαχείριση των χρησιμοποιούμενων υποδειγμάτων. Εναλλακτικά, λοιπόν, θα θεωρούμε η λογαριθμική απόδοση ή συνεχώς ανατοκιζόμενη απόδοση. Έτσι, η συνεχώς ανατοκιζόμενη απόδοση ή log(απόδοσης) 1-περόδου και k-περιόδων, θα είναι, αντίστοιχα:

$$r_t = \ln(1+R_t) = \ln\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right) = \ln(P_t) - \ln(P_{t-1}) = p_t - p_{t-1}$$

(2.5)

<u>*k-period log return*</u>: $r_t^k = \ln\left(\frac{P_t}{P_{t-k}}\right) = p_t - p_{t-k}$

(2.6)

Η σχέση (2.6) μπορεί να αναπτυχθεί ως:

$$r_t^k = \ln\left(1+R_t^k\right) = \ln\left[(1+R_t)(1+R_{t-1})\ldots(1+R_{t-k-1})\right] = r_t + r_{t-1} + \ldots + r_{t-k+1}$$

(2.7)

Έτσι, το πλεονέκτημα από τη χρήση των λογαρίθμων των αποδόσεων είναι ότι, η απόδοση k-περιόδων είναι το άθροισμα των λογαρίθμων των αποδόσεων κάθε 1-περιόδου. Ένα μειονέκτημα υπάρχει, βέβαια, στους υπολογισμούς στο πλαίσιο ενός χαρτοφυλακίου. Ας υποθέσουμε ένα χαρτοφυλάκιο, που αποτελείται από 3 μετοχές {A,B,C} με σταθμίσεις w_i, $i=A,B,C$. Τότε, θα είναι:

Portfolio Simple Return, $R_t^P = w_A R_t^A + w_B R_t^B + w_C R_t^C = \sum_{i=A}^{C} w_i R_t^i$

(2.8)

Portfolio Log Return, $r_t^P = \ln\left[w_A e^{r_t^A} + w_B e^{r_t^B} + w_C e^{r_t^C}\right] = \ln\left[\sum_{i=A}^{C} w_i e^{r_t^i}\right]$

(2.9)

έκφραση, η οποία είναι, σχετικά, δύσκολη στη διαχείρισή της. Έτσι, κανονικά, χρησιμοποιούμε το λογάριθμο των αποδόσεων, λόγω των πλεονεκτικών ιδιοτήτων τους και, προσεγγίζουμε την απόδοση χαρτοφυλακίου με την έκφραση:

Approximate Portfolio Log Return, $r_t^P \cong \sum_{i=1}^{n} w_i r_t^i$

(2.9A)

Υπερβάλλουσα Απόδοση (excess return)

Ορίζουμε την υπερβάλλουσα απόδοση από τη διαφορά μεταξύ των αποδόσεων του περιουσιακού στοιχείου και της απόδοσης χωρίς κίνδυνο (risk-free rate):

Απλή υπερβάλλουσα απόδοση $\qquad Z_t^i = R_t^i - R_t^0 \qquad$ (2.10)

Λογαριθμική υπερβάλλουσα απόδοση $\qquad z_t^i = r_t^i - r_t^0 \qquad$ (2.11)

5. <u>Αποτελεσματική αγορά</u>

"A capital market is said to be efficient if it fully and correctly reflects all relevant information in determining security prices. Formally, the market is said to be efficient with respect to some information set…if security prices would be unaffected by revealing that information to all participants. Moreover, efficiency with respect to an information set…implies that it is impossible to make economic profits by trading on the basis of that information set" Malkiel (1992)

Η ιδέα ότι η αγορά των μετοχών είναι «αποτελεσματική» βρίσκεται στους Bachelier (1900) και Cowles (1933). Σε μια πληροφοριακά αποτελεσματική αγορά (informationally efficient market):

1. Οι μεταβολές των τιμών ή αποδόσεων πρέπει να είναι απρόβλεπτες, εάν είχαν προεξοφληθεί σωστά. Αυτό δηλώνεται με την έκφραση: «οι τιμές αντικατοπτρίζουν κάθε διαθέσιμη πληροφορία» (prices reflect all available information).
2. Η αποκάλυψη της σχετικής πληροφόρησης στην αγορά σε όλους τους συμμετέχοντες δεν οδηγεί σε μεταβολή των τιμών ή αποδόσεων των περιουσιακών στοιχείων.
3. Οι επενδυτές που βασίζουν τις αποφάσεις αγοράς και πώλησης στην πληροφόρηση δεν μπορούν να επιτύχουν υπερβάλλοντα κέρδη.

Στον παραπάνω ορισμό κεντρική θέση έχει ο όρος «πληροφορία». Πρακτικά, διαχωρίζουμε το σύνολο της πληροφορίας σύμφωνα με την ακόλουθη κατηγοριοποίηση:

I. <u>Ασθενής αποτελεσματικότητα (Weak-Form Efficiency)</u>: το σύνολο πληροφορίας περιλαμβάνει μόνο τις ιστορικές τιμές και αποδόσεις της αγοράς.
II. <u>Ημι-ισχυρή μορφή αποτελεσματικότητα (Semistrong-Form Efficiency)</u>: το σύνολο πληροφορίας περιλαμβάνει κάθε γνωστοποιημένη πληροφορία σε όλους τους επενδυτές (all publicly available information).
III. <u>Strong-Form Efficiency</u>: το σύνολο πληροφορίας περιλαμβάνει κάθε πληροφορία γνωστή σε κάθε συμμετέχοντα στην αγορά (all publicly and privately available information).

Προσδοκίες και σύνολο πληροφορίας

Σύμφωνα με την υπόθεση της αποτελεσματικής αγοράς, οι συμμετέχοντες στην αγορά διαμορφώνουν τις προσδοκίες τους για τη μελλοντική τιμή των σχετικών μεταβλητών ορθολογικά και με αποτελεσματικό τρόπο. Οι προσδοκίες θεωρούνται ως προς το σχετικό σύνολο πληροφορίας. Για παράδειγμα, εάν κοιτάμε τις αποδόσεις μιας εταιρίας κάτω από την Ασθενή μορφή Αποτελεσματικής αγοράς, θα σημειώνουμε το διαθέσιμο σύνολο πληροφορίας το χρόνο t, προκειμένου να προβλέψουμε την απόδοση της επόμενης χρονικής περιόδου, I_t^{WF}, το οποίο αποτελείται από όλες τις ιστορικές αποδόσεις, καθώς και την «κανονική απόδοση» (normal return), η οποία προσδιορίζεται από ένα υπόδειγμα ισορροπίας. Το σύνολο πληροφορίας το χρόνο t περιγράφεται σαν: $I_t^{WF} = \left\{ \left[r_{t-\tau} \right]_{\tau=0}^{\infty}, r^0 \right\}$.

Σύμφωνα με την ασθενή μορφή της αποτελεσματικής αγοράς, οι υπερβάλλουσες αποδόσεις δεν είναι προβλέψιμες δοθέντος του συνόλου των ιστορικών αποδόσεων. Γράφουμε αυτή την θέση σαν τη δεσμευμένη αναμενόμενη τιμή: $E\left[r_{t+1} - r^0 \middle| I_t^{WF}\right]$ (conditional expectation). Φανταστείτε ότι, παλινδρομούμε- σε ένα υπόδειγμα ισορροπίας- τη μεταβλητή που μας ενδιαφέρει, σε κάθε και όλες τις μεταβλητές και συναρτήσεις των μεταβλητών που υπάρχουν στο σύνολο πληροφορίας. Η δεσμευμένη αναμενόμενη τιμή είναι το αποτέλεσμα αυτής της (πραγματικής) παλινδρόμησης.

<u>Παράδειγμα 1</u>: Οι υπερβάλλουσες αποδόσεις είναι απρόβλεπτες, σύμφωνα με την ασθενή υπόθεση της αποτελεσματικής αγοράς. Η «κανονική απόδοση» είναι αυτή που προκύπτει από το υπόδειγμα ισορροπίας και, είναι μια σταθερά r^0. Το σύνολο πληροφορίας είναι: $I_t^{WF} = \left\{\left[r_{t-\tau}\right]_{\tau=0}^{\infty}, r^0\right\}$.

Στην περίπτωση αυτή, η παλινδρόμηση της r_{t+1} σε κάθε στοιχείο του συνόλου I_t^{WF} θα ήταν:

$$r_{t+1} = \alpha + \beta_0 r^o + \delta_0 r_t + \delta_1 r_{t-1} + \delta_2 r_{t-2} + \ldots$$

Η πραγματική παλινδρόμηση των r_{t+1}, κάτω από το υπόδειγμα ισορροπίας, θα είχε όλους τους συντελεστές ίσους με το μηδέν, εκτός από τον συντελεστή της r^0, ο οποίος θα ήταν ίσος με τη μονάδα. Έτσι:

$$E\left[r_{t+1} - r^0 \middle| I_t^{WF}\right] = E\left[r_{t+1} \middle| I_t^{WF}\right] - r^0 = r^0 - r^0 = 0$$

<u>Παράδειγμα 2</u>: Οι μεταβολές των τιμών είναι απρόβλεπτες, σύμφωνα με την υπόθεση της ασθενούς αποτελεσματικότητας. Το υπόδειγμα ισορροπίας είναι ότι, οι τιμές των μετοχών ακολουθούν το υπόδειγμα του τυχαίου περιπάτου:

$$P_{t+1} = P_t + \varepsilon_{t+1},\ \varepsilon_t \approx \mathrm{E}(\varepsilon_t) = 0, E(\varepsilon_t^2) = \sigma^2 .$$

Το σύνολο πληροφορίας είναι: $I_t^{WF} = \left\{\left[P_{t-\tau}\right]_{\tau=0}^{\infty}, \left[\varepsilon_{t-\tau}\right]_{\tau=0}^{\infty}\right\}$. Στην περίπτωση αυτή η παλινδρόμηση της P_{t+1} σε όλα τα στοιχεία του συνόλου πληροφορίας I_t^{WF} θα είναι:

$$P_{t+1} = \alpha + \beta_0 P_t + \beta_1 P_{t-1} + \beta_2 P_{t-2} + \ldots + \delta_0 \varepsilon_t + \delta_1 \varepsilon_{t-1} + \delta_2 \varepsilon_{t-2} +$$

Η πραγματική παλινδρόμηση της P_{t+1}, κάτω από το υπόδειγμα ισορροπίας, θα είχε όλους τους συντελεστές ίσους με το μηδέν, εκτός από τον συντελεστή της P_t, ο οποίος θα ήταν ίσος με τη μονάδα. Έτσι:

$$E\left[\varepsilon_{t+1} \middle| I_t^{WF}\right] = E\left[P_{t+1} - P_t \middle| I_t^{WF}\right] = E\left[P_{t+1} \middle| I_t^{WF}\right] - P_t = P_t - P_t = 0.$$

Από αυτή την εξάρτηση των προσδοκιών από το σύνολο δεδομένων (πληροφοριών) μας οδηγεί στην ανάγκη της κατανόησης του Νόμου των Επαναλαμβανόμενων Προσδοκιών (Law of Iterated Expectations).

Ας δούμε το παράδειγμα της τιμολόγησης μιας μετοχής. Η αξία της σήμερα, P_t, ισούται με την παρούσα αξία των αναμενόμενων χρηματοροών)δοθείσης της πληροφορίας μέχρι το χρόνο t). Για το επόμενο έτος αυτή ισούται με το μέρισμα, D_t, (που καταβάλλεται στο τέλος του έτους) συν την τιμή στην οποία θα ρευστοποιηθεί η μετοχή στο τέλος του έτους, P_{t+1}. Έτσι:

$$P_t = E\left[\frac{D_t + P_{t+1}}{(1+r)} \middle| I_t\right] = \frac{1}{(1+r)}\left\{E\left[D_t \middle| I_t\right] + E\left[P_{t+1} \middle| I_t\right]\right\}$$

(3.1)

Ίδια για την P_{t+1}

$$P_{t+1} = E\left[\frac{D_{t+1} + P_{t+2}}{(1+r)} \middle| I_{t+1}\right] = \frac{1}{(1+r)}\left\{E\left[D_{t+1} \middle| I_{t+1}\right] + E\left[P_{t+2} \middle| I_{t+1}\right]\right\} \tag{3.2}$$

Αντικαθιστώντας την (3.1) στην (3.2) δίνει:

$$P_t = \frac{1}{(1+r)} E\left[D_t \middle| I_t\right] + \frac{1}{(1+r)} E\left[E\left[D_{t+1} \middle| I_{t+1}\right] \middle| I_t\right] + \frac{1}{(1+r)} E\left[E\left[P_{t+2} \middle| I_{t+1}\right] \middle| I_t\right] \tag{3.3}$$

Παρατηρείστε τη δομή των δυο τελευταίων όρων στη σχέση (3.3): είναι οι προσδοκίες χρησιμοποιώντας τη διαθέσιμη πληροφορία στο χρόνο t των προσδοκιών χρησιμοποιώντας τη διαθέσιμη πληροφορία που θα υπήρχε στο χρόνο t+1. Με άλλα λόγια, είναι σαν να ρωτάμε: «για μια μεταβλητή που μας ενδιαφέρει, ποιά είναι η καλύτερη πρόβλεψη σήμερα, για το ποιά θα είναι η καλύτερη πρόβλεψη αύριο;». Η απάντηση είναι απλή: «είναι η καλύτερη πρόβλεψη σήμερα για τη μελλοντική αξία της μεταβλητής».