Τμήμα Επιστήμης Φυσικής Αγωγής & Αθλητισμού

Δημοκρίτειο Πανεπιστήμιο Θράκης

Στατιστική στη Φυσική Αγωγή

(Ν161)

11η Διάλεξη

Κοκκότης Χρήστος, PhD

Στόχοι Διάλεξης

Κατανόηση βασικών εννοιών:

- ✓ Ανάλυση διακύμανσης μονής κατεύθυνσης
- ✓ Μη παραμετρικοί έλεγχοι υποθέσεων

Ανάλυση διακύμανσης μονής κατεύθυνσης

- Η ανάλυση διασποράς με ένα παράγοντα χρησιμοποιείται όταν θέλουμε να συγκρίνουμε τις μέσες τιμές πολλών ομάδων (περισσότερες από δύο). Η ανάλυση καλείται με ένα παράγοντα επειδή τα δεδομένα ταξινομούνται σύμφωνα με ένα παράγοντα ή ομάδα.
- Αυτή η ανάλυση αποσκοπεί στο να διερευνήσει αν υπάρχουν διαφορές σε μια εξαρτημένη συνεχή μεταβλητή ανάμεσα σε ομάδες ατόμων που διαφέρουν μεταξύ τους ως προς μια διακριτού τύπου (ποιοτική) ανεξάρτητη μεταβλητή.

Παράδειγμα

Ένας προπονητής έχει καταγράψει το σκορ ευστοχίας των αθλητών του (n=21) σε 3 διαφορετικές ομάδες ανάλογα με τον αριθμό των ωρών εξάσκησης ανά εβδομάδα και θέλει να εξετάσει αν υπάρχουν διαφορές στο σκορ ευστοχίας μεταξύ των τριών αυτών ομάδων.

$\alpha = 0.05$

Κανονική κατανομή

Παράδειγμα

α/α	< 20 ωρών	21 έως 30 ώρες	> 40 ωρών
1	900	920	940
2	920	940	950
3	880	930	980
4	890	910	930
5	895	900	910
6	930	940	945
7	940	950	960

$$F = \frac{\text{διακύμανση μεταξύ των ομάδων}}{\text{τυχαία διακύμανση}}$$

F(2, 18) = 5.51

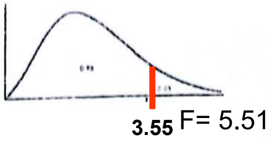
Η τιμή F= 5.51 συγκρίνεται με την τιμή της F-κατανομής με 2 και 18 Β.Ε. που είναι 3.55.

Άρα απορρίπτουμε την μηδενική υπόθεση.

Επομένως το σκορ ευστοχίας διαφέρει στις ομάδες που εξετάσαμε.

Η F κατανομή

με α=0.05



v1 / v2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	161	200	216	225	230	234	237	239	241	242	244	246	248	249	250	251	252	253	254
2	18.5	19.0	19.2	19.2	19.3	19.3	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5
3	10.1	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79	8.74	8.70	8.66	8.64	8.62	8.59	8.57	8.55	8.53
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96	5.91	5.86	5.80	5.77	5.75	5.72	5.69	5.66	5.63
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74	4.68	4.62	4.56	4.53	4.50	4.46	4.43	4.40	4.37
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06	4.00	3.94	3.87	3.84	3.81	3.77	3.74	3.70	3.67
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64	3.57	3.51	3.44	3.41	3.38	3.34	3.30	3.27	3.23
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.35	3.28	3.22	3.15	3.12	3.08	3.04	3.01	2.97	2.93
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14	3.07	3.01	2.94	2.90	2.86	2.83	2.79	2.75	2.71
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98	2.91	2.85	2.77	2.74	2.70	2.66	2.62	2.58	2.54
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90	2.85	2.79	2.72	2.65	2.61	2.57	2.53	2.49	2.45	2.40
12	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80	2.75	2.69	2.62	2.54	2.51	2.47	2.43	2.38	2.34	2.30
13	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.71	2.67	2.60	2.53	2.46	2.42	2.38	2.34	2.30	2.25	2.21
14	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70	2.65	2.60	2.53	2.46	2.39	2.35	2.31	2.27	2.22	2.18	2.13
15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59	2.54	2.48	2.40	2.33	2.29	2.25	2.20	2.16	2.11	2.07
16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54	2.49	2.42	2.35	2.28	2.24	2.19	2.15	2.11	2.06	2.01
17	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.61	2.55	2.49	2.45	2.38	2.31	2.23	2.19	2.15	2.10	2.06	2.01	1.96
18	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46	2.41	2.34	2.27	2.19	2.15	2.11	2.05	2.02	1.97	1.92
19	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.54	2.48	2.42	2.38	2.31	2.23	2.16	2.11	2.07	2.03	1.98	1.93	1.88
20	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39	2.35	2.28	2.20	2.12	2.08	2.04	1.99	1.95	1.90	1.84
21	4.32	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.49	2.42	2.37	2.32	2.25	2.18	2.10	2.05	2.01	1.96	1.92	1.87	1.81
22	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.46	2.40	2.34	2.30	2.23	2.15	2.07	2.03	1.98	1.94	1.89	1.84	1.78
23	4.28	3.42	3.03	2.80	2.64	2.53	2.44	2.37	2.32	2.27	2.20	2.13	2.05	2.01	1.96	1.91	1.86	1.81	1.76
24	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.39	2.25	2.18	2.11	2.03	1.98	1.94	1.89	1.84	1.79	1.73
25	4.24	3.39	2.99	2.76	2.60	2.49	2.40	2.34	2.28	2.24	2.16	2.09	2.01	1.96	1.92	1.87	1.82	1.77	1.71
26	4.23	3.37	2.98	2.74	2.59	2.47	2.39	2.32	2.27	2.22	2.15	2.07	1.99	1.95	1.90	1.85	1.80	1.75	1.69
27	4.21	3.35	2.96	2.73	2.57	2.46	2.37	2.31	2.25	2.20	2.13	2.06	1.97	1.93	1.88	1.84	1.79	1.73	1.67
28	4.20	3.34	2.95	2.71	2.56	2.45	2.36	2.29	2.24	2.19	2.12	2.04	1.96	1.91	1.87	1.82	1.77	1.71	1.65
29	4.18	3.33	2.93	2.70	2.55	2.43	2.35	2.28	2.22	2.18	2.10	2.03	1.94	1.90	1.85	1.81	1.75	1.70	1.64
30	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21	2.16	2.09	2.01	1.93	1.89	1.84	1.79	1.74	1.68	1.62
40	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18	2.12	2.08	2.00	1.92	1.84	1.79	1.74	1.69	1.64	1.58	1.51
60	4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.17	2.10	2.04	1.99	1.92	1.84	1.75	1.70	1.65	1.59	1.53	1.47	1.30
120	3.92	3.07	2.68	2.45	2.29	2.18	2.09	2.02	1.96	1.91	1.83	1.75	1.66	1.61	1.55	1.50	1.43	1.35	1.25
∞	3.84	3.00	2.60	2.37	2.21	2.10	2.01	1.94	1.88	1.83	1.75	1.67	1.57	1.52	1.46	1.39	1.32	1.22	1.00

Μη παραμετρικοί έλεγχοι υποθέσεων

Όταν δεν υπάρχουν διαθέσιμες πληροφορίες για την κατανομή των πληθυσμών, από τους οποίους προέρχονται τα προς έλεγχο δείγματα, δεν μπορούν να εφαρμοστούν τα παραμετρικά τεστ

Τα μη παραμετρικά τεστ χρησιμοποιούνται

- όταν ο πληθυσμός ΔΕΝ ακολουθεί κανονική κατανομή
- σε δεδομένα κατάταξης (π.χ. η κατάταξη ενός ατόμου στο δείγμα)

Η έννοια της κατάταξης

1. Ιεραρχούμε τις τιμές κατ' αύξουσα σειρά.

Π.χ. οι τιμές 2, 4, 3, 5, 3, 4, 8 και 6 ιεραρχούνται κατά αύξουσα σειρά ως 2, 3, 3, 4, 4, 5, 6, 8.

Αριθμοί (κατά αύξουσα Σειρά)	2	3	3	4	4	5	6	8

2. Καταγράφουμε την «κατάταξη» αυτών των αριθμών.

Π.χ. 1η, 2η, 3η, 4η, 5η, 6η, 7η, 8η σειρά «κατάταξης».

Αριθμοί (κατά αύξουσα Σειρά)	2	3	3	4	4	5	6	8
Κατάταξη	1	2	3	4	5	6	7	8

3. Ο αριθμός της «κατάταξης» του κάθε στοιχείου (αριθμού) δηλώνει την «τάξη» του κάθε ατόμου.

Προσοχή όμως στην περίπτωση **ίδιων μετρήσεων** (επιδόσεων).

τα άτομα που έχουν την ίδια επίδοση (μέτρηση)

θα έχουν ως «τάξη» την μέση τιμή της «κατάταξής» τους.

Αριθμοί (κατά αύξουσα Σειρά)	2	3	3	4	4	5	6	8
Κατάταξη	1	2	3	4	5	6	7	8
Τάξη	1	(2+3)/2= 2.5	(2+3)/2= 2.5	(4+5)/2= 4.5	(4+5)/2= 4.5	6	7	8

Έλεγχος ύπαρξης στατιστικά σημαντικών διαφορών μεταξύ **δύο ανεξάρτητων** μετρήσεων μέσω μη παραμετρικού ελέγχου - **U test των Mann - Whitney**

Όταν τα δύο δείγματα

- προέρχονται από πληθυσμούς που δεν ακολουθούν την κανονική κατανομή ή
- δεν είναι γνωστή η κατανομή των πληθυσμών,

δεν μπορεί να εφαρμοστεί το παραμετρικό t – τεστ

Θα πρέπει να χρησιμοποιηθεί το μη παραμετρικό U test των Mann - Whitney.

Ελέγχει:

αν υπάρχει διαφορά στις κατανομές των δύο δειγμάτων

(όχι αν υπάρχει διαφορά στις μέσες τιμές των δύο δειγμάτων)

Πολύ μικρά δείγματα (N < 8)

Παράδειγμα:

Οι επιδόσεις μιας ομάδας Α (N1= 4) σε ένα τεστ ευστοχίας και οι επιδόσεις μιας άλλης ομάδας Β (N2= 6) στο ίδιο τεστ ευστοχίας παρουσιάζονται στον παρακάτω πίνακα.

Ομάδα Α	3	6	7	12			N_1=4
Ομάδα Β	2	4	5	9	9	10	N_2=6

ενδιαφερόμαστε να μάθουμε αν

τα δύο δείγματα προέρχονται από την ίδια κατανομή ή όχι,

σε επίπεδο σημαντικότητας $\alpha = 0.05$

Ομάδα Α	3	6	7	12			N_1=4
Ομάδα Β	2	4	5	9	9	10	N_2=6

1. **Ενώνουμε τα δύο δείγματα Α και Β σε ένα ενιαίο δείγμα (Α+Β)** και σε αυτό το νέο δείγμα κάνουμε την κατάταξη των επιδόσεων όλων των ατόμων κατά αύξουσα σειρά.

Τιμή	2	3	4	5	6	7	9	9	10	12
Δείγμα	Β	Α	Β	Β	Α	Α	Β	Β	Β	Α

2. Με βάση την κατάταξη των επιδόσεων,
προσδιορίζουμε την τάξη της κάθε τιμής στο συνολικό δείγμα (A+B)

Τιμή	2	3	4	5	6	7	9	9	10	12
Δείγμα	B	A	B	B	A	A	B	B	B	A

2. Με βάση την κατάταξη των επιδόσεων, προσδιορίζουμε την τάξη της κάθε τιμής στο συνολικό δείγμα (A+B)

Τιμή	2	3	4	5	6	7	9	9	10	12
Δείγμα	B	A	B	B	A	A	B	B	B	A
Κατάταξη	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

2. Με βάση την κατάταξη των επιδόσεων, προσδιορίζουμε την τάξη της κάθε τιμής στο συνολικό δείγμα (A+B)

Τιμή	2	3	4	5	6	7	9	9	10	12
Δείγμα	B	A	B	B	A	A	B	B	B	A
Κατάταξη	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Τάξη	1	2	3	4	5	6				

2. Με βάση την κατάταξη των επιδόσεων, προσδιορίζουμε την τάξη της κάθε τιμής στο συνολικό δείγμα (Α+Β)

Τιμή	2	3	4	5	6	7	9	9	10	12
Δείγμα	Β	Α	Β	Β	Α	Α	Β	Β	Β	Α
Κατάταξη	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Τάξη	1	2	3	4	5	6	(7+8)/2=7.5	(7+8)/2=7.5	9	10

3. Υπολογίζουμε το άθροισμα της τάξης των ατόμων του δείγματος Α, (Τ1), όπως έχουν καταταγεί στο ενιαίο δείγμα (Α+Β)

- Τ1= 2+5+6+10= 23

και το άθροισμα της τάξης των ατόμων του δείγματος Β, (Τ2), όπως έχουν καταταγεί στο ενιαίο δείγμα (Α+Β)

- Τ2= 1+3+4+7.5+7.5+9= 32

Υπολογίζουμε τις ποσότητες για $N_1 = 4, N_2 = 6, T_1 = 23$ και $T_2 = 32$

$$U_A = N_1 \cdot N_2 + \frac{N_1 \cdot (N_1+1)}{2} - T_1 = 4 \cdot 6 + \frac{4 \cdot (4+1)}{2} - 23 = 24 + 10 - 23 = 11$$

$$U_B = N_1 \cdot N_2 + \frac{N_2 \cdot (N_2+1)}{2} - T_2 = 4 \cdot 6 + \frac{6 \cdot (6+1)}{2} - 32 = 24 + 21 - 32 = 13$$

Η τιμή U που είναι η μικρότερη μεταξύ U_A και U_B,{U=min (U_A,U_B)}, δηλαδή U= min (11,13) = 11

συγκρίνεται με την κρίσιμη τιμή U, η οποία εντοπίζεται στους αντίστοιχους πίνακες.

Το μέγεθος του μεγαλύτερου δείγματος είναι N2= 6

Στον συγκεκριμένο υπο πίνακα

στην διασταύρωση της στήλης N_1= 4 και U= 11,

εντοπίζεται η πιθανότητα p= 0.457,

που είναι μεγαλύτερη από α= 0.05 (p > α).

Συνεπώς, γίνεται αποδεκτή η μηδενική υπόθεση,

σύμφωνα με την οποία τα δύο ανεξάρτητα δείγματα προέρχονται από την ίδια κατανομή,

Δηλαδή δεν υπάρχουν διαφορές στις κατανομές των δύο δειγμάτων.

$n_2=6$						
n_1 / U	1	2	3	4	5	6
0	.143	.036	0.12	.005	.002	.001
1	.286	.071	.024	.010	.004	.002
2	.428	.143	.048	.019	.009	.004
3	.571	.214	.083	.033	.015	.008
4		.321	.131	.057	.026	.013
5		.429	.190	.086	.041	.021
6		.571	.274	.129	.063	.032
7			.357	.176	.089	.047
8			.452	.238	.123	.068
9			.548	.305	.165	.090
10				.381	.214	.120
11				.457	.268	.153
12				.545	.331	.197
13					.396	.242
14					.465	.294
15					.535	.350
16						.409
17						.469
18						.531

Δείγματα μεταξύ 9 και 20

Παράδειγμα:

Δύο ομάδες αθλητών μαθαίνουν μια κινητική δεξιότητα με δύο διαφορετικούς τρόπους. Οι επιδόσεις της πρώτης ομάδας Α (N_1= 12) σε ένα τεστ ευστοχίας και οι επιδόσεις της άλλης ομάδας Β (N_2= 9) στο ίδιο τεστ ευστοχίας παρουσιάζονται στον παρακάτω πίνακα.

Ομάδα Α	2	5	6	8	9	11	12	15	16	19	20	21	N_1= 12
Ομάδα Β	2	3	6	10	12	13	17	18	20				N_2= 9

ενδιαφερόμαστε να μάθουμε αν

τα δύο ανεξάρτητα δείγματα προέρχονται από την ίδια κατανομή ή όχι, σε επίπεδο σημαντικότητας α = 0.05

Ομάδα Α	2	5	6	8	9	11	12	15	16	19	20	21	N_1= 12
Ομάδα Β	2	3	6	10	12	13	17	18	20				N_2= 9

1. Ενώνουμε τα δύο δείγματα Α και Β σε ένα ενιαίο δείγμα (Α+Β) και σε αυτό το νέο δείγμα κάνουμε την κατάταξη των επιδόσεων όλων των ατόμων κατά αύξουσα σειρά.

Τιμή	2	2	3	5	6	6	8	9	10	11	12	12	13	15	16	17	18	19	20	20	21
Δείγμα	Α	Β	Β	Α	Α	Β	Α	Α	Β	Α	Α	Β	Β	Α	Α	Β	Β	Α	Α	Β	Α

2. Με βάση την κατάταξη των επιδόσεων, προσδιορίζουμε την τάξη της κάθε τιμής στο συνολικό δείγμα (A+B)

Τιμή	2	2	3	5	6	6	8	9	10	11	12	12	13	15	16	17	18	19	20	20	21
Δείγμα	A	B	B	A	A	B	A	A	B	A	A	B	B	A	A	B	B	A	A	B	A

2. Με βάση την κατάταξη των επιδόσεων, προσδιορίζουμε την τάξη της κάθε τιμής στο συνολικό δείγμα (A+B)

Τιμή	2	2	3	5	6	6	8	9	10	11	12	12	13	15	16	17	18	19	20	20	21
Δείγμα	A	B	B	A	A	B	A	A	B	A	A	B	B	A	A	B	B	A	A	B	A
Κατάταξη	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21

2. Με βάση την κατάταξη των επιδόσεων, προσδιορίζουμε την τάξη της κάθε τιμής στο συνολικό δείγμα (Α+Β)

Τιμή	2	2	3	5	6	6	8	9	10	11	12	12	13	15	16	17	18	19	20	20	21
Δείγμα	Α	Β	Β	Α	Α	Β	Α	Α	Β	Α	Α	Β	Β	Α	Α	Β	Β	Α	Α	Β	Α
Κατάταξη	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
Τάξη	1.5	1.5	3	4																	

2. Με βάση την κατάταξη των επιδόσεων, προσδιορίζουμε την τάξη της κάθε τιμής στο συνολικό δείγμα (A+B)

Τιμή	2	2	3	5	6	6	8	9	10	11	12	12	13	15	16	17	18	19	20	20	21
Δείγμα	A	B	B	A	A	B	A	A	B	A	A	B	B	A	A	B	B	A	A	B	A
Κατάταξη	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
Τάξη	1.5	1.5	3	4	5.5	5.5	7	8	9	10	11.5	11.5	13	14	15	16	17	18	19.5	19.5	21

2. Με βάση την κατάταξη των επιδόσεων, προσδιορίζουμε την τάξη της κάθε τιμής στο συνολικό δείγμα (A+B)

Τιμή	2	2	3	5	6	6	8	9	10	11	12	12	13	15	16	17	18	19	20	20	21
Δείγμα	A	B	B	A	A	B	A	A	B	A	A	B	B	A	A	B	B	A	A	B	A
Κατάταξη	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
Τάξη	1.5	1.5	3	4	5.5	5.5	7	8	9	10	11.5	11.5	13	14	15	16	17	18	19.5	19.5	21

3. Υπολογίζουμε το άθροισμα της τάξης των ατόμων του δείγματος A, (T1), όπως έχουν καταταγεί στο ενιαίο δείγμα (A+B)

2. Με βάση την κατάταξη των επιδόσεων, προσδιορίζουμε την τάξη της κάθε τιμής στο συνολικό δείγμα (A+B)

Τιμή	2	2	3	5	6	6	8	9	10	11	12	12	13	15	16	17	18	19	20	20	21
Δείγμα	A	B	B	A	A	B	A	A	B	A	A	B	B	A	A	B	B	A	A	B	A
Κατάταξη	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
Τάξη	1.5	1.5	3	4	5.5	5.5	7	8	9	10	11.5	11.5	13	14	15	16	17	18	19.5	19.5	21

3. Υπολογίζουμε το άθροισμα της τάξης των ατόμων του δείγματος A, (T1), όπως έχουν καταταγεί στο ενιαίο δείγμα (A+B)

3. Υπολογίζουμε το άθροισμα της τάξης των ατόμων του δείγματος A, (T1), όπως έχουν καταταγεί στο ενιαίο δείγμα (A+B)

$$T1= 1.5+4+5.5+7+8+10+11.5+14+15+18+19.5+21= 135$$

και το άθροισμα της τάξης των ατόμων του δείγματος B, (T2), όπως έχουν καταταγεί στο ενιαίο δείγμα (A+B)

$$T2= 1.5+3+5.5+9+11.5+13+16+17+19.5= 96$$

Υπολογίζουμε τις ποσότητες $N_1 = 12, N_2 = 9, T_1 = 135$ και $T_2 = 96$

$$U_A = N_1 \cdot N_2 + \frac{N_1 \cdot (N_1 + 1)}{2} - T_1 = 12 \cdot 9 + \frac{12 \cdot (12 + 1)}{2} - 135 = 108 + 78 - 135 = 51$$

$$U_B = N_1 \cdot N_2 + \frac{N_2 \cdot (N_2 + 1)}{2} - T_2 = 12 \cdot 9 + \frac{9 \cdot (9 + 1)}{2} - 96 = 108 + 45 - 96 = 57$$

Η τιμή U που είναι η μικρότερη μεταξύ UA και UB,{U=min (U_A,U_B)}, δηλαδή U= min (51,57) = 51 συγκρίνεται με την κρίσιμη τιμή U, η οποία εντοπίζεται στους αντίστοιχους πίνακες.

Από τον πίνακα για N_1=12 και N_2=9, προκύπτει ότι για επίπεδο σημαντικότητας α= 0.05 η κρίσιμη τιμή είναι Uo= 26.

Εφόσον Uo= 26 < U=51 αποδεχόμαστε τη μηδενική υπόθεση, σύμφωνα με την οποία τα δύο δείγματα προέρχονται από την ίδια κατανομή και κατά συνέπεια η μέθοδος εξάσκησης της δεξιότητας δεν έχει σημασία.

Κρίσιμες τιμές του U στο test Mann-Whitney
Για μονόπλευρο test a=0.025
Για δίπλευρο test a=0.05

n2 / n1	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1												
2	0	0	0	1	1	1	1	1	2	2	2	2
3	2	3	3	4	4	5	5	6	6	7	7	8
4	4	5	6	7	8	9	10	11	11	12	13	13
5	7	8	9	11	12	13	14	15	17	18	19	20
6	10	11	13	14	16	17	19	21	22	24	25	27
7	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32	34
8	15	17	19	22	24	26	29	31	34	36	38	41
9	17	20	23	26	28	31	34	37	39	42	45	48
10	20	23	26	29	33	36	39	42	45	48	52	55
11	23	26	30	33	37	40	44	47	51	55	58	62
12	26	29	33	37	41	45	49	53	57	61	65	69
13	28	33	37	41	45	50	54	59	63	67	72	76
14	31	36	40	45	50	55	59	64	67	74	78	83
15	34	39	44	49	54	59	64	70	75	80	85	90
16	37	42	47	53	59	64	70	75	81	86	92	98
17	39	45	51	57	63	67	75	81	87	93	99	105
18	42	48	55	61	67	74	80	86	93	99	106	112
19	45	52	58	65	72	78	85	92	99	106	113	119
20	48	55	62	69	76	83	90	98	105	112	119	127

Για μεγάλα δείγματα (N>20)

Όταν ένα τουλάχιστον από τα δύο δείγματα (N1 και N2) είναι μεγάλο (>20) τότε η τιμή U, η οποία υπολογίζεται όπως προηγουμένως, μετασχηματίζεται σε

$$z = \frac{U - \frac{N_1 \cdot N_2}{2}}{\sqrt{\frac{N_1 \cdot N_2 \cdot (N_1 + N_2 + 1)}{12}}}$$

και ο έλεγχος γίνεται με την τυπική κανονική κατανομή

Παράδειγμα:

Έχουμε δύο ανεξάρτητα δείγματα μεγέθους $N_1 = 35$ και $N_2= 42$ και μετά από τα βήματα 1, 2 και 3 βρήκαμε ότι έχουν T1= 1615 και T2= 1501.

Για να ελεγχθεί η μηδενική υπόθεση, σε επίπεδο σημαντικότητας α= 0.05, σύμφωνα με την οποία τα δύο δείγματα προέρχονται από την ίδια κατανομή, υπολογίζουμε τις ποσότητες

Για $N_1 = 35$, $N_2 = 42, T_1 = 1615$ και $T_2 = 1501$

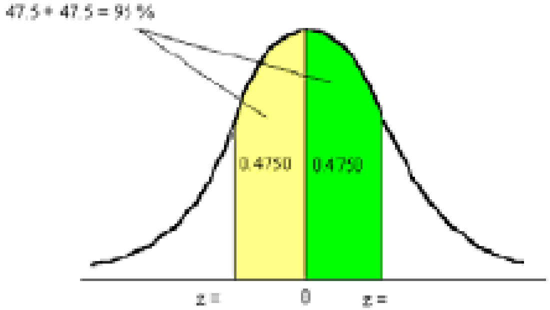
$$U_A = N_1 \cdot N_2 + \frac{N_1 \cdot (N_1+1)}{2} - T_1 = 35 \cdot 42 + \frac{35 \cdot (35+1)}{2} - 1615$$
$$= 1470 + 630 - 1615 = 485$$
$$U_B = N_1 \cdot N_2 + \frac{N_2 \cdot (N_2+1)}{2} - T_2 = 35 \cdot 42 + \frac{42 \cdot (42+1)}{2} - 1501$$
$$= 1470 + 903 - 1501 = 872$$

χρησιμοποιώντας την μικρότερη U τιμή, προκύπτει

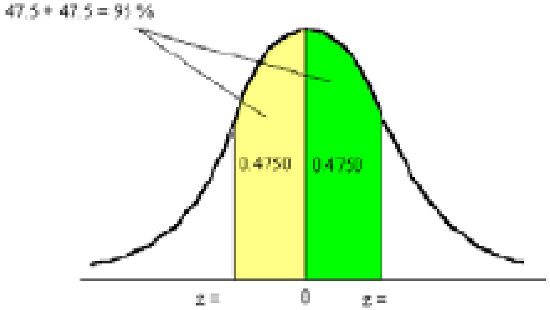
$$z = \frac{U - \frac{N_1 \cdot N_2}{2}}{\sqrt{\frac{N_1 \cdot N_2 \cdot (N_1 + N_2 + 1)}{12}}} = \frac{485 - \frac{35 \cdot 42}{2}}{\sqrt{\frac{35 \cdot 42 \cdot (35 + 42 + 1)}{12}}} = \frac{485 - 735}{\sqrt{9555}} = \frac{-250}{97.75} = -2.55$$

Εφόσον, πρόκειται για **δίπλευρο έλεγχο** , το εμβαδόν κάτω από την καμπύλη της z – τυπικής κατανομής

θα είναι: 0.5 – (0.05/2) = 0.5 – 0.025 = 0.475

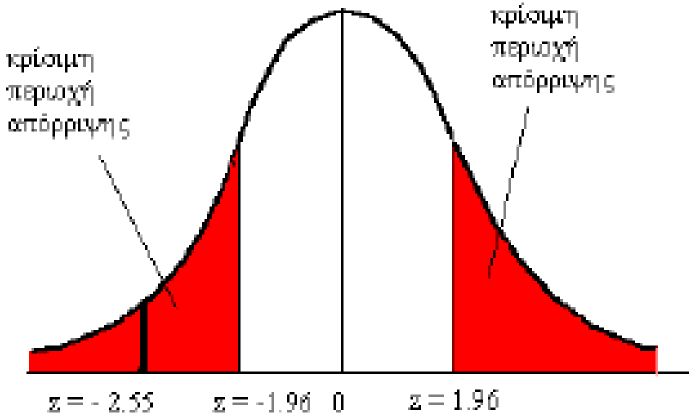


Η τιμή 0.4750 βρίσκεται στην διασταύρωση της γραμμής που αντιστοιχεί στην τιμή 1.9 και της στήλης που αντιστοιχεί στην τιμή 6.



Το 95% του πληθυσμού βρίσκεται μεταξύ των τιμών z = 1.96 και z = - 1.96.

Z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.4953	0.4955	0.4956	0.4957	0.4959	0.4960	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964
2.7	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4970	0.4971	0.4972	0.4973	0.4974
2.8	0.4974	0.4975	0.4976	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4979	0.4980	0.4981
2.9	0.4981	0.4982	0.4982	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4986	0.4986
3.0	0.4987	0.4987	0.4987	0.4988	0.4988	0.4989	0.4989	0.4989	0.4990	0.4990
3.1	0.4990	0.4991	0.4991	0.4991	0.4992	0.4992	0.4992	0.4992	0.4993	0.4993
3.2	0.4993	0.4993	0.4994	0.4994	0.4994	0.4994	0.4994	0.4995	0.4995	0.4995
3.3	0.4995	0.4995	0.4995	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996	0.4997
3.4	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4998
3.5	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998
3.6	0.4998	0.4998	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999
3.7	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999
3.8	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999
3.9	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000



- η υπολογιζόμενη z – τιμή βρίσκεται στην κρίσιμη περιοχή απόρριψης
- κατά συνέπεια απορρίπτεται η μηδενική υπόθεση σύμφωνα με την οποία δεν δύο δείγματα προέρχονται από την ίδια κατανομή.

Αντίθετα γίνεται αποδεκτή η εναλλακτική υπόθεση, σύμφωνα με την οποία τα δύο δείγματα προέρχονται από διαφορετικές κατανομές.

Έλεγχος ύπαρξης στατιστικά σημαντικών διαφορών μεταξύ **δύο εξαρτημένων** μετρήσεων μέσω μη παραμετρικού ελέγχου - **Wilcoxon test**

Εξαρτημένες μετρήσεις:

το κάθε άτομο (μέλος του δείγματος), μετριέται δύο φορές, δηλαδή

- κάτω από δύο διαφορετικές συνθήκες μέτρησης ή
- σε δύο διαφορετικές χρονικές στιγμές,

προκύπτει ένα ζεύγος παρατηρήσεων (μετρήσεων).

Παράδειγμα 1:

Σε μια ομάδα αθλητών μπορεί να μετρηθούν οι επιδόσεις τους στην σκόπευση «παρουσία θεατών» και «χωρίς παρουσία θεατών».

Σε μια τέτοια περίπτωση, το κάθε άτομο (μέλος τους δείγματος) αξιολογείται σε δύο διαφορετικές πειραματικές συνθήκες .

Παράδειγμα 2:

Ένας προπονητής, επιθυμώντας να αξιολογήσει την επίδραση μιας μεθόδου προπόνησης για την βελτίωση της ευστοχίας των αθλητών του, μετράει την ευστοχία τους μέσω ενός τεστ ευστοχίας «πριν » και «μετά » την εφαρμογή της μεθόδου προπόνησης.

Σε μια τέτοια περίπτωση, το κάθε άτομο (μέλος τους δείγματος) αξιολογείται στην ίδια εξαρτημένη μεταβλητή (τεστ ευστοχίας) σε δύο διαφορετικές χρονικές στιγμές.

Όταν τα δύο δείγματα

- προέρχονται από πληθυσμούς που δεν ακολουθούν την κανονική κατανομή ή
- δεν είναι γνωστή η κατανομή των πληθυσμών,

δεν μπορεί να εφαρμοστεί το παραμετρικό t – τεστ

Θα πρέπει να χρησιμοποιηθεί το **μη παραμετρικό Wilcoxon test.**

Παράδειγμα:

Οι επιδόσεις 12 αθλητών μετρήθηκαν «πριν» και «μετά» την εφαρμογή μιας μεθόδου σκόπευσης.

α/α αθλητή	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Πριν	35	36	37	40	35	36	34	32	32	37	35	40
Μετά	36	38	40	39	39	36	32	37	38	37	36	38

Δεν γνωρίζουμε την κατανομή του πληθυσμού
(ή ο πληθυσμός δεν ακολουθεί την κανονική κατανομή).
Να ελεγχθεί, σε επίπεδο σημαντικότητας $a = 0.05$, αν υπάρχει στατιστικά σημαντική διαφορά μεταξύ των ζευγαρωτών επιδόσεων.

α/α αθλητή	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Πριν	35	36	37	40	35	36	34	32	32	37	35	40
Μετά	36	38	40	39	39	36	32	37	38	37	36	38

1. Σχηματίζουμε τη διαφορά των ζευγαρωτών παρατηρήσεων με το πρόσημο της.

1. Σχηματίζουμε τη διαφορά των ζευγαρωτών παρατηρήσεων με το πρόσημο της.

α/α αθλητή	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Πριν	35	36	37	40	35	36	34	32	32	37	35	40
Μετά	36	38	40	39	39	36	32	37	38	37	36	38
Διαφορά	-1											

1. Σχηματίζουμε τη διαφορά των ζευγαρωτών παρατηρήσεων με το πρόσημο της.

α/α αθλητή	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Πριν	35	36	37	40	35	36	34	32	32	37	35	40
Μετά	36	38	40	39	39	36	32	37	38	37	36	38
Διαφορά	-1	-2	-3	+1	-4	0	+2	-5	-6	0	-1	+2

2. Κατατάσσουμε τις απόλυτες τιμές των διαφορών (όχι τις μηδενικές διαφορές) κατά αύξουσα σειρά και προσδιορίζουμε την τάξη τους

3. Μετά την κατάταξη επαναφέρουμε στην τάξη το πρόσημο που υπήρχε στις τιμές της διαφοράς

4. Υπολογίζουμε το άθροισμα των θετικών τιμών τάξης (T+) και το άθροισμα των αρνητικών τιμών τάξης (T-)

4. Υπολογίζουμε το άθροισμα των θετικών τιμών τάξης (T+) και το άθροισμα των αρνητικών τιμών τάξης (T-)

α/α αθλητή	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Πριν	35	36	37	40	35	36	34	32	32	37	35	40
Μετά	36	38	40	39	39	36	32	37	38	37	36	38
Διαφορά	-1	-2	-3	+1	-4	0	+2	-5	-6	0	-1	+2
Τάξη διαφοράς	-2	-5	-7	+2	-8	-	+5	-9	-10	-	-2	+5

- T+= 2+5+5=12
- T- = 2+5+7+8+9+10+2= 43

5. Η μικρότερη τιμή μεταξύ του αθροίσματος των θετικών τάξεων (Τ+) και του αθροίσματος των αρνητικών τάξεων (Τ-), δηλ. T=min (T+, T-), χρησιμοποιείται για να γίνει ο έλεγχος

T=min (T+, T-)= min (43,12)=12

Επιλέγουμε την **στήλη** που αντιστοιχεί στο προεπιλεγμένο επίπεδο σημαντικότητας (α= 0.05) και την **γραμμή** που αντιστοιχεί στον αριθμό των ατόμων μείον τον αριθμό των μηδενικών διαφορών

N είναι ο αριθμός ατόμων μείον τον αριθμό αυτών που έχουν μηδενική διαφορά.

N=12-2=10

$T_{κρίσιμο}$= 8.47

Εφόσον $T = 12 > T_{κρίσιμο}$= 8.47

Αποδεχόμαστε τη μηδενική υπόθεση, άρα δεν υπάρχει σημαντική διαφορά στις επιδόσεις.

Test των προσημασμένων τάξεων του Wilcoxon
n= αριθμός ζευγαριών
Κρίσιμες τιμές

n	α≤0.10	α≤0.05	α≤0.02	α≤0.01
1				
2				
3				
4				
5	0.15			
6	2.19	0.21		
7	3.25	2.26	0.28	
8	5.31	3.33	1.35	0.36
9	8.37	5.40	3.42	1.44
10	10.45	8.47	5.50	3.52
11	13.53	10.56	7.58	5.61
12	17.61	13.65	9.68	7.71
13	21.70	17.74	12.79	9.82
14	25.80	21.84	15.90	12.93
15	30.90	25.95	19.101	15.105
16	35.101	29.107	23.113	19.117
17	41.112	34.119	28.125	23.130
18	47.124	40.131	32.139	27.144
19	53.137	46.144	37.153	33.158
20	60.150	52.158	43.167	37.173
21	67.164	58.173	49.182	42.189
22	75.178	65.187	55.198	48.205
23	83.193	73.203	62.214	54.222
24	91.209	81.210	69.231	61.239
25	100.225	89.236	76.249	68.257

Συντελεστής Spearman

Όταν τα ίδια άτομα μετριούνται σε δύο μεταβλητές X και Y και οι επιδόσεις τους

- Δεν ακολουθούν την κανονική κατανομή ή
- δείχνουν την τάξη της τιμής της μεταβλητής μέσα στο δείγμα.

Συντελεστής Spearman

Ο συντελεστής Spearman δίνεται από τον τύπο:

$$r_s = 1 - \frac{6 \cdot \sum d_i^2}{N\,(N^2 - 1)}$$

Παράδειγμα

Οι επιδόσεις μια ομάδας αθλητών (N= 8) σε ένα τεστ αυτοσυγκέντρωσης X και σε ένα τεστ ευστοχίας Y, παρουσιάζονται στον παρακάτω πίνακα και προέρχονται από πληθυσμούς που δεν ακολουθούν κανονική κατανομή.

α/α αθλητή	1	2	3	4	5	6	7	8
X	5	7	9	9	10	12	12	12
Y	12	14	12	10	15	17	12	20

Το ερώτημα που τίθεται είναι κατά πόσο οι δύο μεταβλητές είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους ή όχι σε επίπεδο σημαντικότητας α=0.05

X	1	2	3.5	3.5	5	7	7	7	
Y	3	5	3	1	6	7	3	8	
d_i	-2	-3	+0.5	+2.5	+1	0	+4	-1	
d_i^2	4	9	0.25	6.25	1	0	16	1	$\sum d_i^2 =$ 37.5

Υπολογίζουμε το συντελεστή συσχέτισης Spearman

$$r_s = 1 - \frac{6 \cdot \sum d_i^2}{N\,(N^2-1)} = 1 - \frac{6 \cdot 37.5}{8 \cdot (8^2-1)} = 1 - \frac{225}{504} = 0.554$$

Από τον πίνακα των κρίσιμων τιμών του Spearman για α=0.05 και N=8 προσδιορίζουμε την r_o = 0.738. Εφόσον $r_s = 0.554 < r_o$ = 0.738, αποδεχόμαστε την μηδενική υπόθεση ότι οι δύο μεταβλητές είναι ανεξάρτητες.

Ερωτήσεις & Συζήτηση