**Ολοκληρώματα**

Έστω f μία συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. **Αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της** f ονομάζουμε κάθε συνάρτηση F παραγωγίσιμη στο Δ για την οποία ισχύει F΄(x)=f(x).

1. Αν υπάρχει μία αρχική συνάρτηση F της f στο Δ τότε υπάρχουν άπειρες και μάλιστα είναι όλες της μορφής G(x)=F(x)+c  και μόνο αυτές.
2. Το σύνολο όλων των αρχικών συναρτήσεων μιας συνάρτησης f σ’ ένα διάστημα Δ ονομάζεται **αόριστο ολοκλήρωμα της** **f**  και συμβολίζεται με 
3. Η διαδικασία της ολοκλήρωσης είναι η αντίστροφη της παραγώγισης μαζί με την σταθερά που ονομάζεται σταθερά ολοκλήρωσης

Αν οι συναρτήσεις f και g έχουν αρχική συνάρτηση σ’ ένα διάστημα Δ τότε με την βοήθεια των κανόνων παραγώγισης ισχύουν οι εξής ιδιότητες:

1. 
2. 
3. Ως 1η μέθοδο ολοκλήρωσης πρέπει να πούμε ότι αν έχουμε πηλίκο ρητών συναρτήσεων  τότε αν ο βαθμός του αριθμητή είναι  του βαθμού του παρονομαστή τότε κάνουμε διαίρεση ενώ σε αντίθετη περίπτωση παραγοντοποιούμε τον παρονομαστή.
4. Την παράγωγο μιας συνάρτησης την συμβολίζουμε και με  και το οποίο διαβάζεται και ως ρυθμός μεταβολής της συνάρτησης.
5. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο Δ τότε Ι) έχει παράγουσα στο Δ και ΙΙ) έχει άπειρες αρχικές συναρτήσεις
6. Αν δεν έχει παράγουσα δεν είναι συνεχής ενώ αν δεν είναι συνεχής τότε δεν ξέρουμε αν έχει παράγουσα

**Ασκήσεις για λύση**

1. Να βρείτε την συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το R αν  , f΄(-2)=-2 και f΄(0)=2
2. Να υπολογίσετε τις παράγουσες : Α=ημx+xσυνx Β=2εφ2x Γ= Δ=(ex-2)(e-x+1)
3. Να βρείτε τις παράγουσες των συναρτήσεων i)f(x)= ii)f(x)= για x>0
4. α) Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης  β) Να υπολογίσετε την παράγουσα
5. Να βρείτε τις τιμές των α,β για τις οποίες η συνάρτηση F(x)=e-x(αx+β) είναι μια παράγουσα της συνάρτησης f(x)=e-x(-3x+7)
6. Δίνεται η συνάρτηση 1 αν x f(x)=

 2 αν x>0 Να δείξετε ότι δεν έχει παράγουσα

1. Να βρείτε την συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το R αν  και η γραφική της παράσταση έχει στο σημείο της Α(-1,1) κλίση ίση με 4. (Γ-348)
2. Να βρείτε την συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο διάστημα (0 , +) αν η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο Α(1,1) και η εφαπτομένη της σε οποιοδήποτε σημείο της (x,f(x)) έχει κλίση ίση με 
3. Να βρείτε συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο R και η οποία ικανοποιεί τις συνθήκες: α)  β) f(0)=e γ) f΄(x)=f(x)
4. Δίνεται η συνάρτηση f(x)= για κάθε x στο R- 1,4 i) Να βρείτε τους Α και Β ώστε f(x)=+ ii) Να βρείτε όλες τις παράγουσες
5. Η είσπραξη μιας βιομηχανίας από την πώληση x μονάδων ενός προϊόντος με  [0,50] μεταβάλλεται με ρυθμό Ε΄(x)=100-2x σε χιλιάδες δρχ. ανά μονάδα προϊόντος, ενώ το κόστος Κ(x) μεταβάλλεται με ρυθμό Κ΄(x)=50-½ x. Να βρείτε το κέρδος της βιομηχανίας από την πώληση 50 μονάδων προϊόντος , υποθέτοντας ότι η βιομηχανία έχει ζημιά 1000 δρχ. ανά μονάδα προϊόντος όταν δεν πουλάει κανένα προϊόν. (Γ-350)
6. Μία εταιρία εισάγει ένα νέο προϊόν. Η παραγωγή αναμένεται να αυξηθεί σιγά-σιγά λόγω των δυσκολιών της αρχής. Αναμένεται ότι ο ρυθμός παραγωγής θα δίνεται από την σχέση: Ρ΄(x)=12000  όπου x είναι ο αριθμός των χρόνων μετά την εισαγωγή του προϊόντος. Α) Μπορεί η εταιρία να προμηθεύσει 20000 προϊόντα κατά την διάρκεια των πρώτων τεσσάρων χρόνων; Β) Περίπου πότε θα μπορεί να προμηθεύσει 15000 προϊόντα.
7. Μία εταιρία θέλει να χρησιμοποιήσει μία νέα μηχανή. Ο ρυθμός της οικονομίας που θα έχει η εταιρία δίνεται από την συνάρτηση  σε χιλιάδες δρχ. όπου χ ο αριθμός των ετών λειτουργίας της μηχανής. Επίσης η μηχανή απαιτεί ένα κόστος που μεταβάλλεται με ρυθμό . Α) Για πόσο χρονικό διάστημα θα συμφέρει να χρησιμοποιούν αυτή τη νέα μηχανη; Β) Ποιο είναι το κέρδος της εταιρίας κατά την διάρκεια του πρώτου χρόνου λειτουργίας της μηχανής; Γ) Ποιο είναι το άθροισμα των κερδών κατά την διάρκεια όλης της περιόδου της πιθανής ζωής της μηχανής;
8. Από το 1995 μέχρι το 2010 τα περισσότερα από τα αρπακτικά σε ένα οροπέδιο θα σκοτωθούν από τους κυνηγούς. Αυτό επιτρέπει στον πληθυσμό των ελαφιών να αυξηθεί γρήγορα , μέχρι να λιγοστέψουν οι πηγές της τροφής τους , πράγμα το οποίο θα επιφέρει μία γρήγορη μείωση του πληθυσμού τους. Ο ρυθμός μεταβολής του πληθυσμού των ελαφιών κατά την διάρκεια αυτού του διαστήματος δίνεται από την συνάρτηση   [0,25] όπου t ο χρόνος σε έτη. Α) Βρείτε την συνάρτηση του πληθυσμού των ελαφιών , αν υπάρχουν 4000 ελάφια το 1995. (t=0) Β) Ποιος θα είναι ο πληθυσμός των ελαφιών το 2010; Γ) Πότε ο πληθυσμός των ελαφιών είναι μέγιστος και ποιος είναι αυτός ο μέγιστος πληθυσμός;
9. Η αξία μιας μηχανής που εκτυπώνει βιβλία μειώνεται με το χρόνο σύμφωνα με την συνάρτηση   όπου Α ένας θετικός αριθμός. Ο ρυθμός μεταβολής του κέρδους Κ(t) , από την πώληση των βιβλίων που εκτυπώνει η συγκεκριμένη μηχανή δίνεται από την συνάρτηση  και υποθέτουμε ότι Κ(0)=0. Να βρεθεί η χρονική στιγμή κατά την οποία πρέπει να πουληθεί η μηχανή , έτσι ώστε το συνολικό κέρδος από τα βιβλία που πουλήθηκαν συν την αξία της μηχανής να γίνεται μέγιστο. Ποιο είναι το κέρδος αυτό;
10. Έστω συνάρτηση f:R🡢R η οποία είναι συνεχής και F μια παράγουσα της f στο R τέτοια ώστε F(0)=F(1)=0. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση f(x)=F(x) έχει μια τουλάχιστον πραγματική ρίζα
11. Έστω συνάρτηση f:R🡢R η οποία είναι συνεχής και F μια παράγουσα της στο R τέτοια ώστε F(0)=0 , f(x)>-F(x) για κάθε x στο R i) Να βρείτε το πρόσημο της F ii)Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση F είναι γνησίως αύξουσα για x<0 και φθίνουσα για x>0

**Ορισμένο Ολοκλήρωμα**

Έστω μία συνάρτηση f συνεχής στο [α,β] με f(x) κάθε  [α,β] και Ω το χωρίο που ορίζεται από τον άξονα χ΄χ και τις ευθείες χ=α και χ=β. Χωρίζουμε το [α,β] σε ν ισομήκη διαστήματα μήκους  . Επιλέγουμε ένα τυχαίο σημείο ξκ σε κάθε διάστημα της μορφής [χκ-1,χκ]. Τότε το άθροισμα Sν= υπάρχει και είναι ένας πραγματικός αριθμός ανεξάρτητος από τα σημεία ξκ . Το  ονομάζεται ολοκλήρωμα της συνεχούς συνάρτησης από τα α ως το β. Συμβολίζεται ως εξής : 

1. Τα α και β λέγονται όρια της ολοκλήρωσης
2. Το ορισμένο ολοκλήρωμα  είναι αριθμός πραγματικός και εξαρτάται μόνο από την συνάρτηση και τα άκρα.
3. Το  με τον τρόπο που ορίστηκε προϋποθέτει α<β . Για περιπτώσεις α>β ή α=β έχουμε ότι = και =0
4. Έστω f , g συνεχείς συναρτήσεις στο [α,β] τότε ισχύουν:
5. λ=
6. +
7. λ+μ
8. Επίσης αν η f είναι συνεχής στο Δ και α,β,γ  τότε ισχύει

 =+

**Θεώρημα** : Έστω f μία συνάρτηση συνεχής σ’ ένα διάστημα Δ και α ένα σημείο αυτού. Η συνάρτηση F(x)=   Δ είναι παραγωγίσιμη στο Δ και ισχύει : F΄(x)=f(x) δηλαδή 

**Θεμελιώδες θεώρημα του ολοκληρωτικού Λογισμού** : Έστω f μία συνάρτηση συνεχής στο [α,β]. Αν G είναι μία αρχική συνάρτηση της f στο [α,β] τότε : = G(β)- G(α)

1. Η διαφορά G(β)- G(α) για πρακτικούς λόγους συμβολίζεται με 
2. Η μέθοδος ολοκλήρωσης με αλλαγή μεταβλητής για το ορισμένο ολοκλήρωμα παίρνει την μορφή 
3. Η μέθοδος ολοκλήρωσης κατά παράγοντες για το ορισμένο ολοκλήρωμα παίρνει την μορφή : 

**Παρατηρήσεις**

1. Όταν χρησιμοποιούμε τον τύπο της αλλαγής μεταβλητής τότε θα πρέπει η g΄ να διατηρεί το ίδιο πρόσημο στο [α,β]
2. Όταν η συνάρτηση δεν είναι συνεχής αλλά είναι από δεξιά ή αριστερά συνεχής τότε ‘σπάμε’ το ολοκλήρωμα σε δύο άλλα στο σημείο όπου η συνάρτηση δεν είναι συνεχής.

Θα παρουσιάσουμε παρακάτω δύο μεθόδους για τον υπολογισμό των ολοκληρωμάτων:

1. **Με αντικατάσταση** : Στην μέθοδο αυτή υπολογίζουμε ολοκληρώματα που έχουν ή μπορούν να πάρουν την μορφή . Στην περίπτωση αυτή αντικαθιστούμε το u=g(x) και επομένως το ολοκλήρωμα παίρνει την μορφή .
2. **Κατά παράγοντες** : Η μέθοδος αυτή εκφράζεται με τον τύπο:

**Μέθοδοι Ολοκλήρωσης**

1. Όταν έχουμε πηλίκο ρητών συναρτήσεων  τότε αν ο βαθμός του αριθμητή του παρανομαστή τότε κάνουμε διαίρεση πολυωνύμων, ενώ αν ο βαθμός του παρονομαστή > του αριθμητή γράφουμε τον παρανομαστή ως γινόμενο παραγόντων και χωρίζουμε προσδιορίζοντας τα Α , Β π.χ.  Επειδή ο βαθμός του αριθμητή 0<2 που είναι ο βαθμός του παρανομαστή το κλάσμα γράφεται :  με απαλοιφή παρενθέσεων παίρνουμε ότι  και -Α=1 από όπου έχουμε Α=-1 , Β=1. Πρέπει να τονίσουμε εδώ ότι αν έχουμε ρίζα ρ1 πολλαπλότητας κ εκτός των άλλων κλασμάτων θα έχουμε και κλάσματα με παρανομαστές (χ-ρ1)κ , (χ-ρ1)κ-1 , ..., (χ-ρ1). Αν ο παρανομαστής έχει και μιγαδικές ρίζες τότε το κλάσμα που έχει τον παράγοντα με τις μιγαδικές ρίζες θα είναι πολυώνυμο με βαθμό κατά μια μονάδα μικρότερο από το βαθμό του αντίστοιχου παράγοντα. Π.χ.  τότε 
2. Ολοκληρώματα της μορφής  τότε αυτό μας δίνει αμέσως 

 ημx

 συνx

 lnx

1. Ολοκληρώματα της μορφής :  dx στην περίπτωση αυτή εφαρμόζουμε ολοκλήρωση κατά παράγοντες

**Τριγωνομετρικά Ολοκληρώματα**

1. Όταν έχουμε ολοκληρώματα της μορφής  ή  δηλαδή να υπάρχει περιττή δύναμη τότε αναλύουμε σε γινόμενο σε άρτια δύναμη και εφαρμόζουμε την μέθοδο της αντικατάστασης. Ειδικότερα για την περίπτωση του ημιτόνου θέτουμε συνχ=t για την περίπτωση συνχ=t. Π.χ. στο == ΄=
2. Για τα ολοκληρώματα της μορφής  ή  ή  τότε εφαρμόζουμε τους τύπους  και  π.χ.  τότε το συν4x=
3. Αν έχουμε  Αν κ=περιττός θέτω συνχ=t λ=περιττός θέτω ημχ=t κ , λ άρτιοι θέτω συνχ=t ή αντικαθιστώ το ημ2χ=1-συν2χ
4. Ολοκλήρωμα της μορφής  Αν ν=2ρ+1 καλούμε εφχ=t Αν ν=2ρ αναλύω το εφ2χ= Γενικά τα ολοκληρώματα της εφαπτομένης λύνονται και με αναγωγικούς τύπους

 ημκx συνλx

 ημκx ημλx

 συνκx συνλx

1. Για τον υπολογισμό των ολοκληρωμάτων της μορφής  dx χρησιμοποιούμε τους τύπους μετατροπής σε άθροισμα. Δηλαδή τους τύπους : 2ημΑσυνΒ=ημ(Α+Β)+ημ(Α-Β) 2ημΑημΒ=συν(Α-Β)-συν(Α+Β)
2. Ολοκληρώματα της μορφής  κάνουμε την αντικατάσταση  π.χ.
3. Ολοκληρώματα της μορφής  λύνονται με αντικατάσταση  π.χ.  τότε θέτω  οπότε γίνεται  ...
4. α) Αν το ολοκλήρωμα είναι της μορφής  τότε εφαρμόζουμε παραγοντική ολοκλήρωση

β) Αν το ολοκλήρωμα είναι της μορφής  dx τότε εφαρμόζουμε παραγοντική ολοκλήρωση ως προς ημ ή και ex

ημ(αχ+β)

συν(αχ+β)

1. Αν το ολοκλήρωμα περιέχει την παράσταση  τότε κάνουμε την αντικατάσταση |α| ημθ ή x=|α| συνθ π.χ.  θέτω x=|α| ημθ
2. Αν το ολοκλήρωμα περιέχει την παράσταση  τότε κάνουμε την αντικατάσταση 
3. Αν το ολοκλήρωμα περιέχει την παράσταση  τότε θέτω =t . Αν μάλιστα το ολοκλήρωμα είναι της μορφής  ... ) τότε κάνουμε την αντικατάσταση  όπου ν το ελάχιστο πολ/σιο του λ1,λ2...λν
4. Ο υπολογισμός του ολοκληρώματος που είναι υψωμένο σε μία δύναμη μπορεί να οδηγήσει στο ίδιο ολοκλήρωμα αλλά σε μικρότερη δύναμη. Έτσι έχουμε τους αναγωγικούς τύπους όπου εφαρμόζουμε παραγοντική ολοκλήρωση.

**Ασκήσεις για λύση**

1. Αν για μία συνεχή συνάρτηση στο R ισχύουν :  , ,  , . Να βρεθούν τα ολοκληρώματα : ,  και 
2. Να προσδιορίσετε τον πραγματικό α ώστε να ισχύει η σχέση
3. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα : Α= Β= Γ=
4. Να βρείτε τα ολοκληρώματα : Α= Β=
5. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα Α= B= Γ=
6. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα : i) και ii)
7. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα : Α= και Β=
8. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα : Α= B=
9. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα : Α= Β=
10. Να υπολογιστούν : Α= Β= Γ=
11. Να βρεθούν τα ολοκληρώματα : Α= Β=
12. Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα :i) ii) iii) iv) v) vi) vii)
13. Μπορούμε να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα Α=  χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση t=g(x)=(x-1)2 (Παρατήρηση 1)
14. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα: A= B= Γ=
15. Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα : Α= B= dx
16. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα :  (Υπ: Αντικατάσταση ex=t)
17. Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα Α= Β= Γ=
18. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα Α= Β=
19. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα : Α= B= Γ= Δ= Ε=
20. Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα : Α= Β=
21. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα : Α= Β= Γ= Δ=
22. α) Να υπολογιστούν οι πραγματικοί αριθμοί Α,Β,Γ έτσι ώστε :  β) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα :  (**ΠΡΟΣΟΧΗ!!** Όταν ο παρ/μαστης είναι δευτ/μιος όρος τότε στον αρ/τη μπαίνει και πρωτ/μιος παράγοντας)
23. Έστω μία συνάρτηση f ορισμένη στο R η οποία έχει συνεχή  στο R οι εφαπτόμενες της στα σημεία της Α(1,2) και Β(2,1) έχουν αντίστοιχα κλίσεις -1 και 3. Να βρείτε την τιμή του ολοκληρώματος Ι=
24. Έστω μία συνάρτηση f ορισμένη στο R , η οποία είναι συνεχής στο [-α,α] α>0 και περιττή. Να αποδειχθεί ότι : Α==0
25. Έστω δύο συναρτήσεις f,g :[α,β]🡢R οι οποίες είναι συνεχείς. Αν ισχύει η σχέση g(x)=g(α+β-x) για κάθε x στο [α,β] να αποδείξετε ότι i) ii)
26. Αν Ιν= να δείξετε ότι Ιν=e-vIν-1 για ν στο Ν με ν>1
27. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα :Α= B= και να δείξετε ότι αν Γ= ν στο Ν\* , τότε Γν=-Γν-2 Να γίνει εφαρμογή για το Γ4
28. Δίνεται η συνάρτηση f(x)=ex+x-1 i) Να δείξετε ότι ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση και να βρείτε το πεδίο ορισμού της ii)Να υπολογίσετε το
29. Αν f είναι μία συνάρτηση ορισμένη και συνεχής στο R να υπολογιστεί συναρτήσει της f η παράγωγος της συνάρτησης F(x)=
30. Να βρεθούν τα σημεία που τέμνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων :  και  Έστω μία συνάρτηση f ορισμένη στο R η οποία έχει συνεχή  στο R , παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο χ0=2 και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο Α(0,1). Αν ισχύει  να υπολογίσετε το f(2)
31. Να βρεθούν τα ακρότατα της συνάρτησης : 
32. Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης : 
33. Έστω μία συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο R , η οποία έχει κρίσιμο σημείο το χ0=0. Αν  να αποδειχθεί ότι 
34. Έστω μία συνάρτηση f συνεχής στο (0,), η οποία για κάθε χ>0 πληροί τη σχέση : . Να υπολογιστεί το f(1).
35. Να βρεθούν τα σημεία καμπής της συνάρτησης : 
36. Αν  να βρείτε τα τοπικά ακρότατα της f καθώς και τα σημεία καμπής της cf
37. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  είναι σταθερή και στην συνέχεια να βρείτε τον τύπο του  (Υπ: για τον τύπο της  βάλτε όπου χ=0) Αν f(t)=3|t2-1| να υπολογιστεί η συνάρτηση  με  [-100,300]
38. Να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτομένων του διαγράμματος της συνάρτησης f με τύπο 
39. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη και ισχύουν f(0)=f΄(0)=0 και  . Να βρείτε τα όρια : α)  β) 
40. Να βρείτε την συνάρτηση ορισμένη στο [0,] αν για κάθε  ισχύει 
41. Αν  και  να βρείτε τα : α)  β) 
42. Έστω μία συνάρτηση  η οποία είναι συνεχής στο [0,1] . Να αποδειχθεί ότι : α) Για την συνάρτηση  εφαρμόζεται το Θ. Rolle στο [0,1]. β) Υπάρχει  στο (0,1) τέτοιο ώστε =

**Ανισοτικές σχέσεις**

* Έστω συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα [α,β]. Αν f(x) για κάθε x τότε ενώ αν η συνάρτηση δεν είναι παντού 0 τότε
* Το αντίστροφο του θεωρήματος δεν ισχύει
1. Έστω μια συνάρτηση f συνεχής στο Δ και κάποια α,β στο Δ i)Αν f(x) με όχι παντού 0 και να δείξετε ότι f(x)=0 για κάθε x στο [α,β] ii) ενώ αν f(x)>0 και τότε α=β
2. Έστω μια συνάρτηση f:R🡢R συνεχής και τέτοια ώστε , f(x) να δείξετε ότι f(x)<0
3. Να δείξετε ότι :
4. Έστω μια συνάρτηση f: R🡢R η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη κοίλη και τέτοια ώστε f(0)=0 και f(1)=1. i) Να δείξετε ότι για κάθε x>0 (Υπ Θ.Μ.Τ στο (0,x)) ii)
5. Έστω συνάρτηση f: R🡢R η οποία είναι παραγωγίσιμη , γνησίως αύξουσα κυρτή και τέτοια ώστε f΄(1)=f(1)=1 i) Να βρείτε την εξίσωση εφαπτομένης στο 1 ii) Να δείξετε ότι iii)Υπάρχει ξ στο (0,2) ώστε (Υπ: Έστω F μία παράγουσα της f εφαρμόστε Θ.Μ.Τ στο (0,2))
6. Να δείξετε i) ex ii)
7. Έστω μια συνάρτηση f: [1,3]🡢R η οποία είναι παραγωγίσιμη κοίλη και ισχύει i)Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης στο Μ(2,f(2)) ii)4x-5-f(x) για κάθε x στο [1,3] iii) Να δείξετε ότι
8. Να βρείτε τη συνάρτηση f(x)=x2+
9. Να βρείτε την συνάρτηση f(x) όταν f(x)=ex+
10. Δίνεται f: [1,3]🡢R μία συνάρτηση η οποία είναι συνεχής έχει ελάχιστη τιμή -1 και μέγιστη 2. Αν να δείξετε i) (Υπ : Πάρτε την f μεταξύ -1 και 3 φτιάξτε τις ανισότητες και πάρτε το γινόμενο) ii)(Υπ: Πάρτε x-1>0 και f(x)-2<0)
11. Έστω f: [0,1]🡢R μια συνάρτηση με f(0)=0 η οποία είναι παραγωγίσιμη και ικανοποιεί την σχέση f΄(x)+f(x)>2xe-x για κάθε x στο [0,1]. Να δείξετε ότι 3 (Yπ: Από την δοθείσα σχέση βρείτε την παράγουσα και θεωρήστε νεα συνάρτηση)

**Εμβαδό χωρίου που ορίζεται από συνάρτηση**

Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα Δ=[α,β] τότε το εμβαδό του χωρίου που ορίζεται από την γραφική παράσταση της f τον άξονα χ΄χ και τις ευθείες χ=α και χ=β είναι : Ε(Ω)=

Για να βρούμε το εμβαδό που ορίζει μία συνάρτηση κάνουμε τα εξής :

1. Αν η συνάρτηση δεν έχει ρίζες στο (α,β) τότε η f(x) έχει σταθερό πρόσημο στο [α,β] οπότε:

Αν f(x),  [α,β] τότε Ε(Ω)= =

 Ενώ αν   [α,β] τότε Ε(Ω)= =-

1. Αν η συνάρτηση f(x) έχει ρίζες στο διάστημα (α,β) τότε η συνάρτηση δεν έχει σταθερό πρόσημο στο [α,β]. Αν ρ1<ρ2<...<ρν οι ρίζες τότε κατασκευάζουμε τον πίνακα προσήμου της f(x) και ανάλογα αφού ‘σπάσουμε’ το ολοκλήρωμα στα σημεία που αλλάζει πρόσημο τοποθετούμε το κατάλληλο πρόσημο ώστε να είναι θετικό .

**Εμβαδό χωρίου που ορίζεται από δύο συναρτήσεις**

Για να βρούμε το εμβαδό του χωρίου που ορίζεται Ω το οποίο περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των f , g και τις ευθείες χ=α , χ=β είναι : Ε(Ω)=

1. Να υπολογιστεί το εμβαδό του χωρίου Ω το οποίο περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης  τον άξονα χ΄χ και τις ευθείες χ=0 και χ=1
2. Να υπολογιστεί το εμβαδό του χωρίου Ω που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης  τον άξονα χ΄χ και τις ευθείες χ= και χ=
3. Να βρεθεί το εμβαδό της επιφάνειας που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης  με  τον άξονα χ΄χ και την ευθεία χ=3
4. Να υπολογιστεί το εμβαδό Ελ της επιφάνειας που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης  με  τον άξονα χ΄χ και τις ευθείες χ=1, χ=λ. Στην συνέχεια να υπολογιστούν τα όρια : α)  β)  γ)  (Υπ: Δύο περιπτώσεις για το λ : λ<1 , λ>1)
5. α) Να βρεθεί το εμβαδό του χωρίου Ω που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων  και  και β) Να βρείτε την ευθεία χ=α η οποία χωρίζει το Ω σε δύο ισεμβαδικά χωρία.
6. Δίνεται η συνάρτηση  και το σημείο της Α(α,α3+2) με α>0 ι) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της  στο σημείο Α. ιι) Να βρείτε το α>0 έτσι ώστε η (ε) να διέρχεται από την αρχή των αξόνων και έπειτα να βρείτε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από την  και την (ε)

1. Δίνεται η συνάρτηση +1    Να υπολογιστεί το εμβαδό της επιφάνειας που ορίζεται από την γραφική παράσταση της f τον άξονα χ΄χ και τις ευθείες χ=-1 , χ=2

f(x)=

1. α)Να βρεθεί το εμβαδό Ε(t) του χωρίου Ω το οποίο περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης  την ημιευθεία ψ=t  (0,4) και τις ευθείες  , χ=16. β) Για ποια τιμή του  το εμβαδό του χωρίου Ω γίνεται ελάχιστο και ποια η ελάχιστη τιμή του. (Υπ: Η ευθεία τέμνει την f στο σημείο () )
2. Δίνεται η συνάρτηση . α) Να βρεθεί το εμβαδό του χωρίου Ω το οποίο περικλείεται από την  , τον άξονα χ΄χ και τις ευθείες χ=1 και χ=t>1 β) Να βρείτε τα όρια : α)  και β) 
3. Δίνεται η συνάρτηση -α   >2 α) Για ποια τιμή του α  η  είναι συνεχής; β) Για την τιμή του α που βρήκατε να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της  , τον άξονα χ΄χ και την ευθεία χ=4

f(x)=

1. Δίνεται η συνάρτηση  και το σημείο της Μ(α,α2+1) με α>0. ι) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης στο σημείο Μ . ιι) Για ποια τιμή του α>0 η παραπάνω εφαπτομένη διέρχεται από το (0,-3) . ιιι) Για την τιμή του α που βρήκατε να βρείτε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση την εφαπτομένη και τον άξονα των ψ
2. Δίνεται η συνάρτηση f(x)=x-2+ i) Να δείξετε ότι η ευθεία ε: y=x-2 είναι ασύμπτωτη της Cf στο + ii) Να βρείτε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τη Cf την ε και τις ευθείες x=1 ,x=e
3. Δίνονται οι συναρτήσεις f(x)=ln(1+x) και g(x)=. Να βρείτε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των f , g τον άξονα y΄y και την x=1
4. Να βρείτε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις τω συναρτήσεων f(x)= g(x)=x και την ευθεία y=2
5. Δίνεται η συνάρτηση f(x)=x-1+lnx i)Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται ii)Να βρείτε το εμβαδό του χωρίου Ω που περικλείεται από την γραφική παράσταση f-1 τον άξονα χ΄χ και τις ευθείες x=0 , x=e
6. Έστω f:R🡢R μια συνάρτηση η οποία είναι παραγωγίσιμη και ικανοποιεί την σχέση f3(x)+f(x)=2x i)Να δείξετε ότι αντιστρέφεται ii)Να βρείτε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από την τους άξονες χ΄χ και y΄y και την x=1