**Συνέχεια Συνάρτησης**

Έστω μία συνάρτηση ορισμένη στο διάστημα Δ και xo ένα σημείο του Δ. Θα λέμε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο xo όταν : f(x) =f(x0)

Μία συνάρτηση λοιπόν δεν είναι συνεχής όταν :

1. Δεν υπάρχει το όριο της f στο xo
2. Το αριστερά όριο διαφορετικό από το δεξιά
3. Υπάρχει το όριο της f στο xo αλλά είναι διαφορετικό από την τιμή της συνάρτησης f(xo)

Από τον παραπάνω ορισμό καταλαβαίνουμε ότι η συνέχεια είναι μια τοπική ιδιότητα δηλαδή κάθε φορά αποδεικνύουμε για ένα μόνο σημείο έτσι αν θέλουμε να δούμε αν μία συνάρτηση είναι συνεχής σ’ ένα σύνολο Β θεωρητικά πρέπει να ψάξουμε σε κάθε σημείο της κάτι που όμως είναι αδύνατο.

Έτσι για ορισμένες συναρτήσεις ξέρουμε εκ των προτέρων αν είναι συνεχής

1. Όλες οι πολυωνυμικές συναρτήσεις είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού τους
2. Οι ρητές συναρτήσεις είναι συνεχής
3. Οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις είναι συνεχής ημx , συνx , εφx σφx
4. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι συνεχής τότε και fg, cf, f+g, , |f|, είναι συνεχής
5. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι συνεχής τότε και η σύνθεση τους είναι συνεχής

**Ιδιότητες Βασικών Συναρτήσεων**

1. **Θεώρημα Bolzano**

 Αν μία συνάρτηση είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα [α , β] και επιπλέον ισχύει ότι f(α)f(β)<0 τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον χ0 που ανήκει στο [α , β] ώστε f(x0)=0

 α β

Γραφικά σημαίνει ότι αν η συνάρτηση είναι συνεχής και οι τιμές του γινομένου των εικόνων είναι αρνητικές τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο στο οποίο η συνάρτηση μηδενίζεται

2. **Θεώρημα ενδιαμέσων τιμών**

 Αν μία συνάρτηση είναι συνεχής στο [α , β] και f(α)f(β) τότε για κάθε αριθμό η μεταξύ των f(α) και f(β) υπάρχει τουλάχιστον ένα x0 ώστε να ισχύει f(x0)=η

3. **Θεώρημα μέγιστης και ελάχιστης τιμής**

 Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής στο **κλειστό διάστημα [α , β]** τότε η f παίρνει μία ελάχιστη τιμή m και μία μέγιστη τιμή M

**Παρατηρήσεις**

1. Για την συνέχεια της συνάρτησης απαραίτητο είναι το σημείο x0 να ανήκει στο πεδίο ορισμού της
2. Γενικά όταν μας ζητάνε να δείξουμε ότι μία συνάρτηση είναι συνεχής τότε εμείς δικαιολογούμε ότι είναι συνεχής σε όλα τα σημεία εκτός από αυτά που αλλάζει τύπο που τα εξετάζουμε χωριστά.
3. Αν ένα σημείο είναι εκτός πεδίου ορισμού τότε σε αυτό το σημείο ούτε είναι συνεχής ούτε δεν είναι , απλώς δεν εξετάζουμε σε αυτό το σημείο.
4. Η έκφραση «Όταν η συνάρτηση είναι συνεχής η γραφική παράσταση είναι μια συνεχής γραμμή» δεν είναι σωστή , γιατί πρέπει να γίνει διάκριση αν το Π.Ο είναι διάστημα ή ένωση διαστημάτων ,π.χ η f(x)= είναι συνεχής στο R\* αλλά η γραφική παράσταση είναι υπερβολή
5. Η έκφραση ‘τουλάχιστον ένα σημείο’ μας δίνει την υποψία ότι πρέπει να χρησιμοποιήσουμε το Θ. Bolzano
6. Η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο R και συνεχής στο 4. Αν =2 . Να βρείτε το f(4)
7. Δίνεται η συνάρτηση 1 αν x=1

 (x)=  αν x Να βρείτε τα α,β,γ αν είναι συνεχής

1. Έστω f μία συνάρτηση με πεδίο ορισμού το R και f (0)=3 και . Ι) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση είναι συνεχής στο 3 και ΙΙ) Να βρείτε τα παρακάτω όρια:  και 
2. Δίνεται η περιττή συνάρτηση f που είναι ορισμένη στο R και συνεχής στο 1 με όριο στο 1 της Να βρείτε Ι) Την τιμή f(1) ΙΙ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση είναι συνεχής στο 1 ΙΙΙ) Να βρείτε το 
3. Για την συνάρτηση f ισχύει f (χ+ψ)= f (χ)+ f (ψ) για κάθε χ,ψ. Να αποδείξετε ότι αν η f είναι συνεχής στο 0 τότε είναι συνεχής σ’ όλο το R
4. Για την συνάρτηση f ισχύει f (χψ)= f (χ)+ f (ψ) για κάθε χ,ψ. Να αποδείξετε ότι αν η f είναι συνεχής στο 1 τότε είναι συνεχής σ’ όλο το R
5. Αν

 f(x)= αν x<2

 x2+βx+α αν x>2 Να βρείτε τα α, β αν γνωρίζετε ότι είναι συνεχής στο Π.Ο

1. Να προσδιορίσετε τα α,β,γ ώστε η συνάρτηση f με τύπο  αν x1 f(χ)=

 7 αν x=1

1. Δίνεται η συνάρτηση  α>0. Να βρεθεί ο τύπος της και να μελετηθεί ως προς την συνέχεια
2. Αν για την συνεχή συνάρτηση f: R🡢R είναι xf(x) για κάθε x πραγματικό . Να βρείτε το f(0)
3. Αν η συνάρτηση είναι συνεχής στο 1 και =7 να υπολογίσετε το
4. Αν για την συνάρτηση f : R🡢R ισχύει f2019(x)+f(x)=x να δείξετε ότι η συνάρτηση είναι συνεχής στο 0 (Υπ: Πάρτε για το όριο κριτήριο παρεμβολής)
5. Έστω η συνεχής συνάρτηση f: [0,4]🡢R με  και η συνάρτηση . i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της h

ii) Να αποδείξετε ότι η  είναι συνεχής συνάρτηση.

iii) Η εξίσωση  έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο [0,2]

1. Δίνεται συνάρτηση f : R🡢 R η οποία είναι συνεχής και ικανοποιεί τη σχέση  για κάθε x στο R.

i) Να αποδειχθεί ότι για κάθε x στο R

ii) Να βρεθεί το 

iii) Να αποδειχθεί ότι  για κάθε x στο R

1. Δίνεται συνάρτηση f : R🡢 R\* η οποία είναι συνεχής και ικανοποιεί τη σχέση  για κάθε x στο R.

i) Να αποδειχθεί ότι για κάθε x στο R

ii) Να βρεθεί το 

iii) Να αποδειχθεί ότι  για κάθε x στο R