**2ο Μάθημα**

**Μερικές παράγωγοι συναρτήσεων**

Θεωρούμε μία συνάρτηση δύο ή περισσοτέρων μεταβλητών, π.χ. την w = f(x,y,z).  
Αν οι μεταβλητές y και z θεωρηθούν σταθερές, τότε η συνάρτηση αυτή γίνεται συνάρτηση μόνο του x.   
Αν υπάρχει η παράγωγος της f ως προς x, τότε αυτή λέγεται 1η μερική παράγωγος της f ως προς x και παριστάνεται με .  
π.χ.

Αν f(x,y,z) = 3x2 y3 – 5xy2 + 4y4 + z3 θα έχουμε  
 = 6xy3 – 5y2 .  
Ανάλογα, αν θεωρήσουμε τα x ,z σταθερά και παραγωγίσουμε ως προς y, θα πάρουμε την 1η μερική παράγωγο της f ως προς y, η οποία παριστάνεται με .  
Στο προηγούμενο παράδειγμα είναι  
 = 9x2y2 – 10xy + 16y3 .  
Eντελώς ανάλογα ορίζεται και η = 3z2 .

Θεωρούμε και πάλι μία συνάρτηση f(x,y).   
Η είναι και αυτή μία συνάρτηση των μεταβλητών x , y και επομένως μπορούμε να υπολογίσουμε τις μερικές παραγώγους της ως προς x και y , που συμβολίζονται αντίστοιχα και .

Δηλαδή, αν στη συνάρτηση θεωρήσουμε όλες τις μεταβλητές σταθερές εκτός από την x και παραγωγίσουμε  
αυτή ως προς x, θα πάρουμε την 2η μερική παράγωγο ως  
προς x, η οποία είναι όπως είπαμε η  ενώ αν στη συνάρτηση θεωρήσουμε όλες τις μεταβλητές σταθερές και παραγωγίσουμε ως προς y θα πάρουμε την 2η μερική παράγωγο ως προς x και y, η οποία παριστάνεται με

Στο προηγούμενο παράδειγμα είναι: = 18xy2 – 10y.

Aν τώρα παραγωγίσουμε την ως προς x θεωρώντας τις άλλες μεταβλητές σταθερές θα πάρουμε την 2η μερική παράγωγο της f ως προς y και x , η οποία παριστάνεται

με .  
Στο παράδειγμα είναι: = 18xy2 – 10y.

Ισχύει ότι**: = .**Τέλος, αν παραγωγίσουμε την ως προς y θεωρώντας τις άλλες μεταβλητές σταθερές, θα πάρουμε την 2η μερική παράγωγο της f ως προς y την οποία συμβολίζουμε με .  
Στο παράδειγμα είναι: = 18x2y – 10x + 48y2

Οι παραπάνω παράγωγοι ονομάζονται 2ης τάξης παράγωγοι

της f(x,y).

**Κανόνες μερικής παραγώγισης**

Οι μερικές παράγωγοι υπολογίζονται βάσει των κανόνων παραγώγισης συναρτήσεων μιας μεταβλητής

(f + g) = + , (a.f) = a. (a σταθερά).

(f.g) = .g + f. , ( ) = .

Παραδείγματα

Να βρεθούν οι μερικές παράγωγοι ως   
 προς x και y των συναρτήσεων:

1. f(x,y) = ) = (2x-y).

και

= . ( = -x. .

1. f(x,y) = (x-2y)2   
    Απάντηση   
   Έχουμε  
    = 2.(x – 2y). (x – 2y) = 2.(x – 2y) και  
      
    = 2.(x – 2y). (x – 2y) = 4.(x – 2y).
2. f(x,y) = e2x.συν(x-y)  
    Απάντηση

Έχουμε

= (e2x).συν(x-y) + e2x. (συν(x-y))

= e2x.(2x).συν(x-y) + [-ημ(x-y)].(x) =  
  
 = 2e2x. συν(x-y) – ημ(x-y).

= e2x.συν(x-y) + e2x.[συν(x-y)] =  
  
 = 0.συν(x-y) + e2x[-ημ(x-y)].(x-y) =  
 = -e2x.ημ(x-y).(-1)

= e2x. ημ(x-y) .  
  
ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Να βρεθεί η μερική παράγωγος της συνάρτησης

f(x,y) = 100 -x2 –y2

2) Να υπολογιστεί η μερική παράγωγος της συνάρτησης f(x,y) = , και η τιμή της στο σημείο (1,2).

3) Να δειχθεί ότι η συνάρτηση

f(x,y) = ημ(x-y) + ln(x+y), επαληθεύει την εξίσωση

- = 0 .