ΤΕΧΝΙΚΗ ΥΔΡΟΛΟΓΙΑ

Στατιστική υδρολογία

Δρ. Βασίλης Μπέλλος

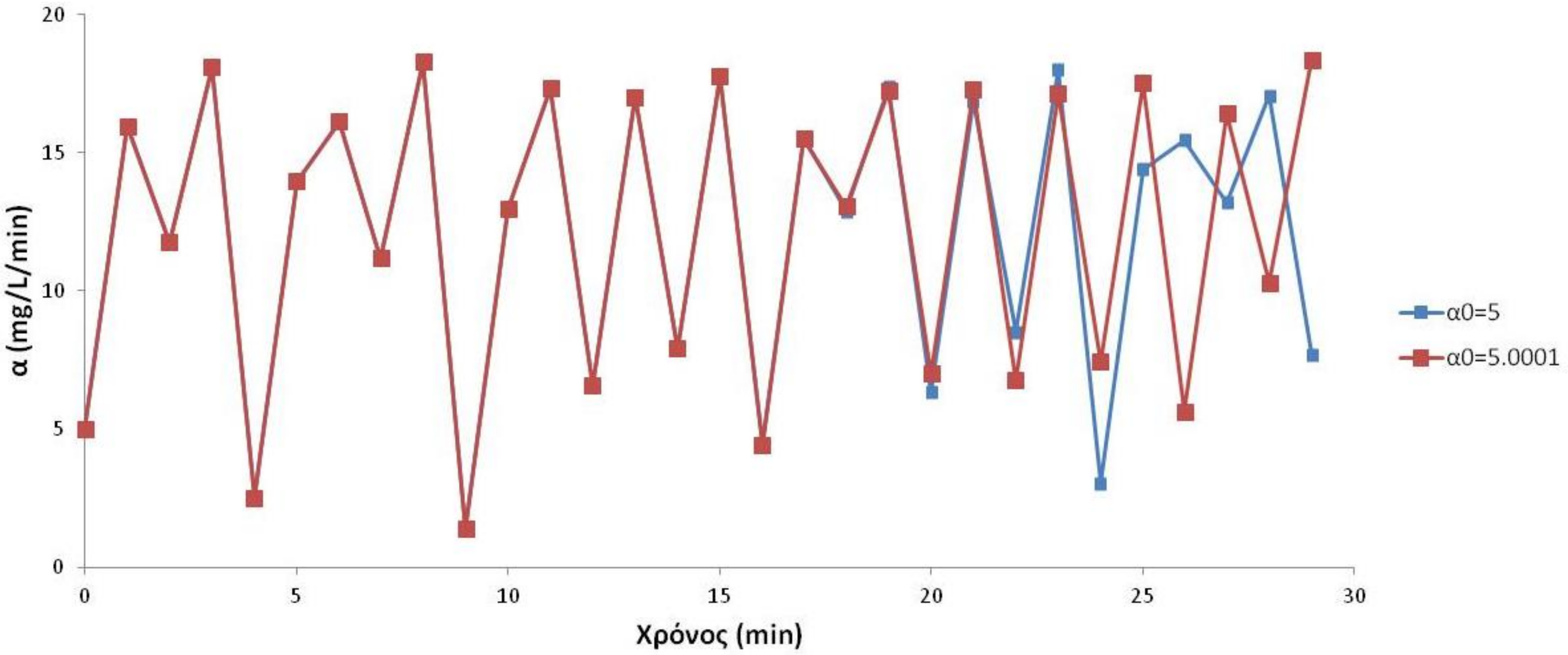
Πιθανότητες και Στατιστική

- **Τύχη → μη προβλεψιμότητα στα καιρικά φαινόμενα λόγω μη γραμμικότητας**
  - Καταιγίδα → πλημμύρα
  - Ανομβρία → ξηρασία
- **Μετρήσεις**
  - Έλεγχος σφαλμάτων
  - Συμπλήρωση ελλείψεων
- **Τεχνικοοικονομικές αποφάσεις → καθεστώς αβεβαιότητας**

Μη γραμμικότητα

- **Δεδομένα**
  - Αρχική συγκέντρωση ρύπου → **α=5 mg/L/min**
  - Σταθερή εισροή ρύπου → **I=12 mg/L/min**
  - Ρυθμός απομείωσης ρύπου → **$O=0.3e^{0.25\alpha}$ mg/L/min**
- **Αριθμητικό μοντέλο**
  - $\alpha_t=\alpha_{t-1}+12-0.3\exp(0.25\alpha_{t-1})$

Το πρόβλημα της αρχικής συνθήκης



Σχεδιασμός έργων

- **Πώς σχεδιάζουμε ένα έργο;**
    - Βρίσκουμε το κρίσιμο μέγεθος → π.χ. μέγιστη παροχή
    - Χρησιμοποιούμε τα αριθμητικά μοντέλα
    - Ποια είναι η είσοδος (βροχή);
- **Πιθανοτικός σχεδιασμός**
    - Κάθε μέγεθος συνδέεται με την αντίστοιχη επικινδυνότητα
    - Κανονισμοί – νομοθεσίες – συνήθης πρακτική
- **Δεδομένα από μετρήσεις**

Στατιστική υδρολογία

- **Πιθανολογική υδρολογία**
  - Αναλύει τα υδρολογικά γεγονότα θεωρώντας ότι το κάθε γεγονός είναι ανεξάρτητο από τα προηγούμενα
- **Στοχαστική υδρολογία**
  - Το κάθε γεγονός εξαρτάται από τα προηγούμενα γεγονότα
  - Η χρονική ακολουθία λαμβάνεται υπόψη

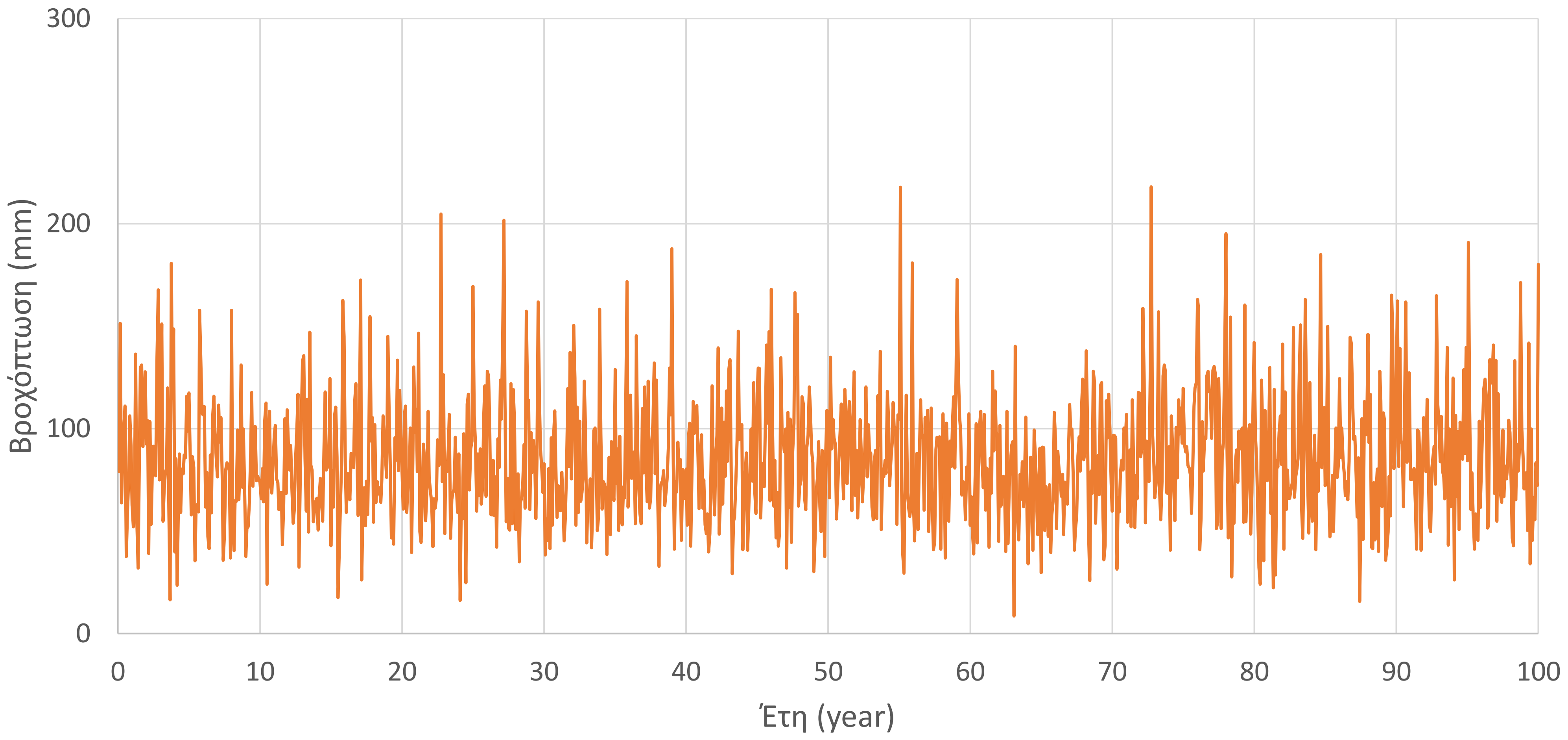
Ορισμοί

- **Μεταβλητή → μέγεθος που παρουσιάζει μεταβλητότητα**
  - Συνεχείς
  - Διακριτές
- **Πληθυσμός → σύνολο τιμών μίας μεταβλητής**
  - Πεπερασμένος
  - Άπειρος
- **Πείραμα → συνθήκες στις οποίες παρατηρούμε μία τυχαία μεταβλητή**
- **Έκβαση → το αποτέλεσμα του πειράματος**
- **Δειγματικός χώρος → όλες οι πιθανές εκβάσεις**
- **Ενδεχόμενο → οι πιθανές εκβάσεις (υποσύνολο του δειγματικού χώρου)**

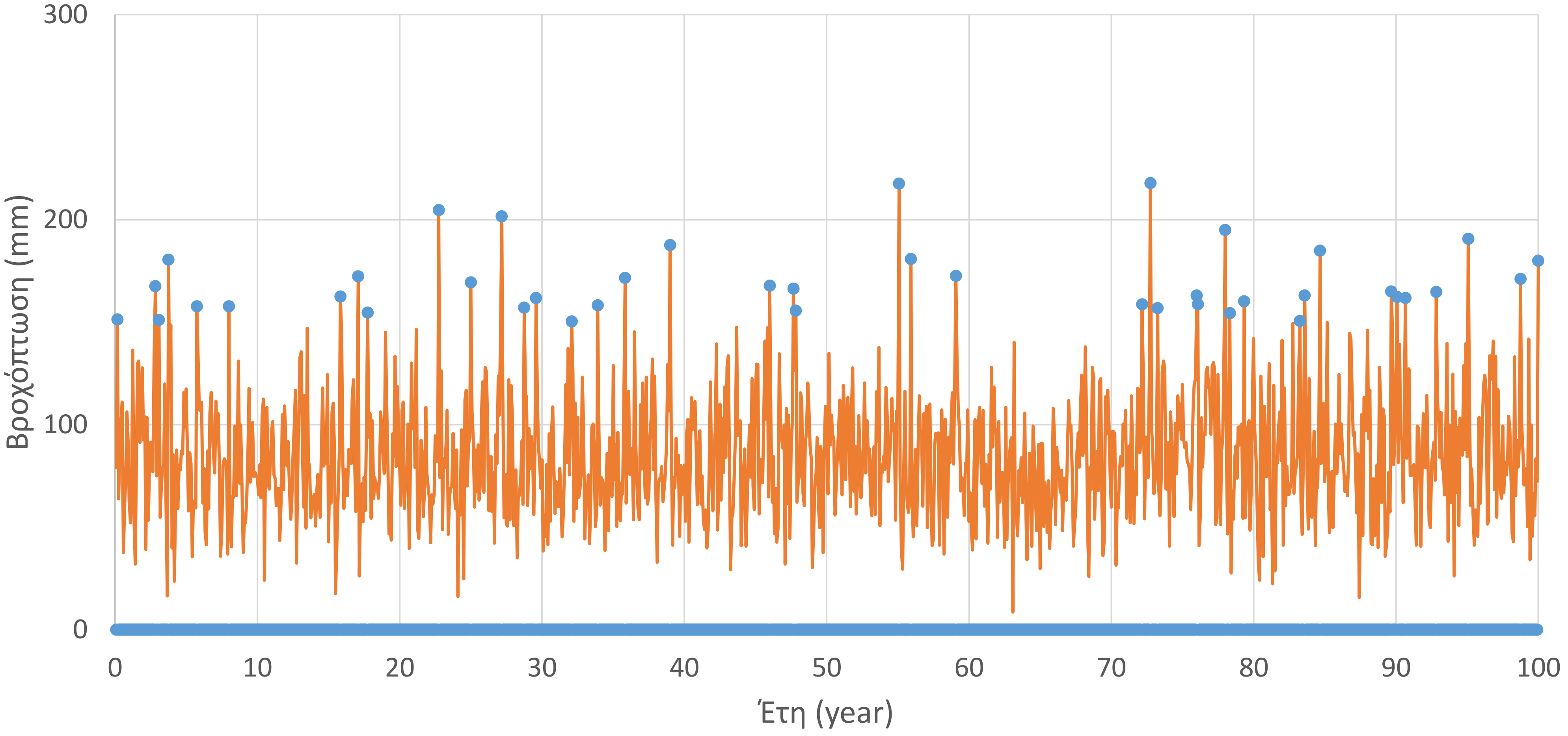
Χρονοσειρά

- Οι μετρήσεις μιας μεταβλητής διατεταγμένες σε χρονολογική σειρά
- Πλήρεις χρονοσειρές → παρατηρήσεις συνεχούς διάρκειας
- Μερικές χρονοσειρές → τιμές της μεταβλητής που υπερβαίνουν κάποιο κατώφλι ή δεν το υπερβαίνουν
- Ετήσιες χρονοσειρές → ετήσιοι μέγιστοι όροι / μέγιστα / ελάχιστα

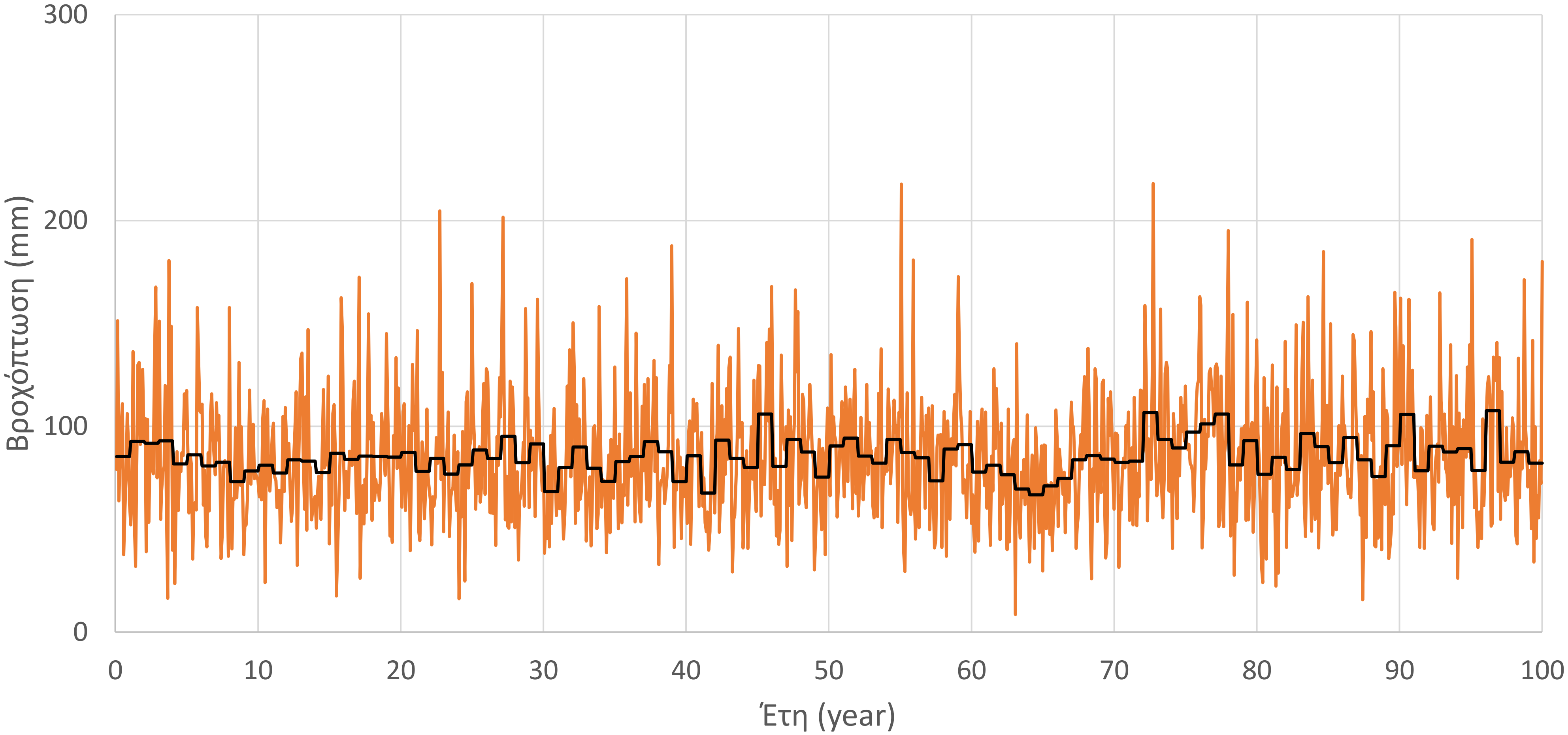
Πλήρης χρονοσειρά



Μερική χρονοσειρά



Ετήσια χρονοσειρά



Συνάρτηση πιθανότητας

- Συνάρτηση που δίνει τιμή στο ενδεχόμενο A

  $$0 \leq P(A) \leq 1$$

- Η πιθανότητα να μη συμβεί το A

  $$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

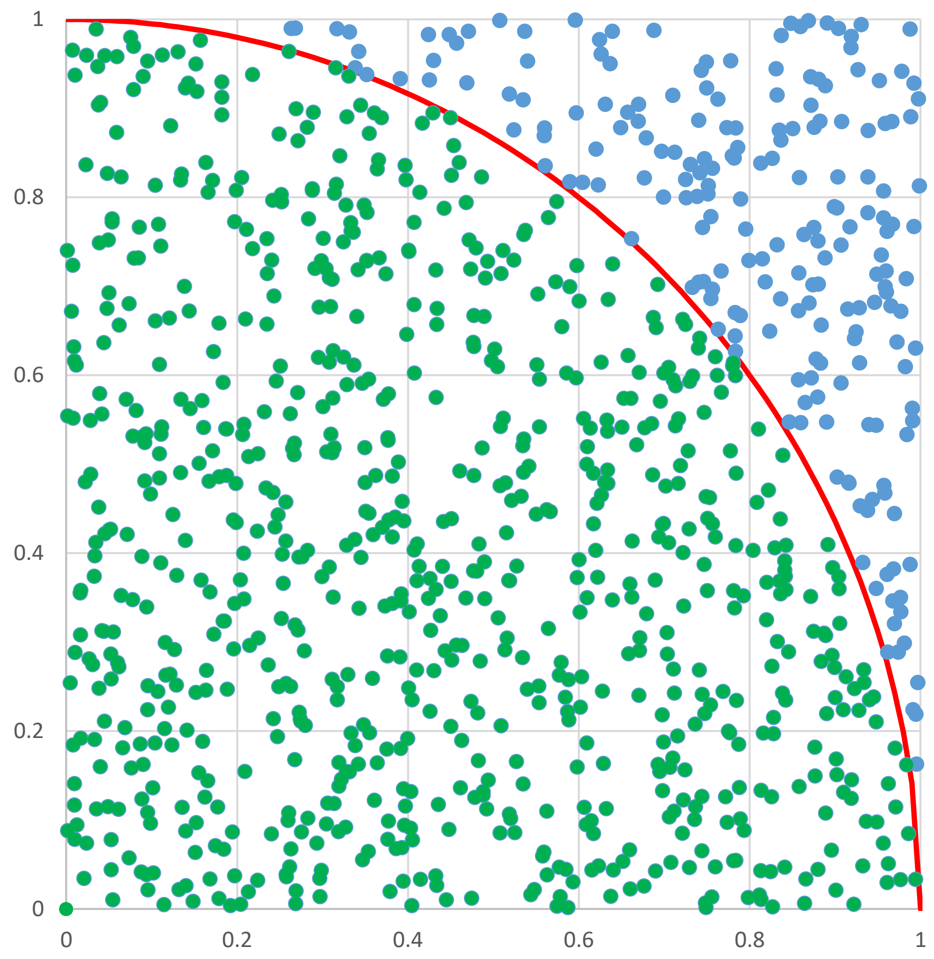
- Η πιθανότητα να συμβούν τα ενδεχόμενα A και B

  $$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

- Η πιθανότητα να συμβεί το ενδεχόμενο A εφόσον έχει συμβεί το ενδεχόμενο B

  $$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Εκτίμηση π πιθανοτικά



Πιθανότητα υπέρβασης

- Ετήσια σειρά μεγίστων X μεγέθους N
- Κατάταξη κατά φθίνουσα σειρά
- Κατώφλι υπέρβασης x
- Σειρά όπου γίνεται η υπέρβαση m

$$P(X \geq x) = \frac{m}{N}$$ *κλειστές σειρές*

$$P(X \geq x) = \frac{m}{N+1}$$ *ανοιχτές σειρές*

$$P(X \geq x) = \frac{2m-1}{2N}$$ *Hazen (1930)*

…

Περίοδος επαναφοράς

- **Μέσο** χρονικό διάστημα Τ (έτη) στο οποίο η υπό μελέτη μεταβλητή θα εμφανιστεί μία μόνο φορά με τιμή ίση η μεγαλύτερη από ένα κατώφλι που έχει οριστεί εκ των προτέρων
- Αν η περίοδος επαναφοράς είναι 10 έτη σημαίνει ότι τα επόμενα 10 χρόνια θα γίνει η υπέρβαση; → **ΟΧΙ!**
- Τα επόμενα 1000 χρόνια θα γίνουν περίπου 100 υπερβάσεις

$$P(X \geq x) = \frac{1}{T} \qquad T = \frac{1}{P(X \geq x)}$$

Κατανομές

- **Διακριτές** → τα δεδομένα έχουν μόνο συγκεκριμένες τιμές εντός του διαστήματος ορισμού
  - Ζάρι ή νόμισμα
  - Ναι/Όχι
- **Συνεχείς** → τα δεδομένα μπορούν να πάρουν οποιαδήποτε τιμή εντός του διαστήματος ορισμού

Διακριτές κατανομές

- Ομοιόμορφη
- Κατανομή Bernoulli
- Διωνυμική
- Γεωμετρική
- Poisson
- …

Ομοιόμορφη διακριτή κατανομή

- Ζάρι ή νόμισμα

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{N} \text{ για } x = 1,2,\ldots N \\ 0 \text{ διαφορετικα} \end{cases}$$

Κατανομή Bernoulli

- Πιθανότητα επισύμβασης ενός γεγονότος

$$x = \begin{cases} 1 \text{ για πιθανότητα } p \\ 0 \text{ για πιθανότητα } 1-p \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} p^x(1-p)^x \text{ για } x = 0{,}1 \\ 0 \text{ διαφορετικα} \end{cases}$$

Διωνυμική κατανομή

- Για N Bernoulli μεταβλητές $[x_1, x_2, \dots, x_N]$, ανεξάρτητες μεταξύ τους, ενώ $x = x_1 + x_2 + \dots x_N$
- Συντελεστής διωνυμικής κατανομής (αριθμός πιθανών συνδυασμών χωρίς να μας ενδιαφέρει η σειρά τους)

$$\binom{N}{x} = \frac{N!}{x!\,(N-x)!}$$

$$f(x) = \begin{cases} \binom{N}{x} p^x (1-p)^{N-x} \text{ για } x = 0,1 \dots N \\ 0 \text{ διαφορετικα} \end{cases}$$

Υπέρβαση

Πιθανότητα
υπέρβασης

$$\frac{1}{T}$$

Υπέρβαση

Πιθανότητα υπέρβασης

$$\frac{1}{T}$$

Πιθανότητα μη υπέρβασης

$$1-\frac{1}{T}$$

Υπέρβαση

Πιθανότητα
υπέρβασης

$$\frac{1}{T}$$

Πιθανότητα
μη υπέρβασης

$$1 - \frac{1}{T}$$

Πιθανότητα
μη υπέρβασης
σε N χρόνια (x=0)

$$\left(1 - \frac{1}{T}\right)^N$$

Υπέρβαση

Πιθανότητα
υπέρβασης

$$\frac{1}{T}$$

Πιθανότητα
μη υπέρβασης

$$1-\frac{1}{T}$$

Πιθανότητα
μη υπέρβασης
σε N χρόνια (x=0)

$$\left(1-\frac{1}{T}\right)^N$$

Πιθανότητα
υπέρβασης
σε N χρόνια (x=0)

$$1-\left(1-\frac{1}{T}\right)^N$$

Συνεχείς κατανομές

- Αθροιστική συνάρτηση κατανομής CDF

$F_x(x) = 1 - P(X \geq x)$ ή $F_x(x) = P(X \leq x)$

- Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας PDF

$$f_x(x) = \frac{dF_x(x)}{dx}$$

Θεωρητικές κατανομές

- **Οι τιμές του φαινομένου είναι τυχαίες και ανεξάρτητες**
  - Ισχύει στη φύση; → εμμονή
- **Σχεδιασμός έργων → ακραίες τιμές**
- **Ασυμπτωματικές κατανομές**
  - Τύπος Ι → Αρχική κατανομή χωρίς όριο προς την κατεύθυνση της ακραίας τιμής
  - Τύπος ΙΙ → Αρχική κατανομή χωρίς όριο προς τις δύο κατευθύνσεις
  - Τύπος ΙΙΙ → Αρχική κατανομή με όριο προς την κατεύθυνση της ακραίας τιμής

Παράμετροι κατανομής

- Μέσος όρος $\bar{x} = \sum_{i=1}^{N} \frac{x_i}{N}$

- Διάμεσος $x_{(N+1)/2}\ (N\ \pi\varepsilon\rho\iota\tau\tau o\varsigma), \frac{1}{2}\left(x_{(N/2)} + x_{(N/2+1)}\right)\ (N\ \alpha\rho\tau\iota o\varsigma)$

- Διασπορά $\widehat{\mu_2} = \sum_{i=1}^{N} \frac{(x_i - \bar{x})^2}{N-1}$

- Τυπική απόκλιση $\hat{\sigma} = (\widehat{\mu_2})^{1/2} = \left[\sum_{i=1}^{N} \frac{(x_i - \bar{x})^2}{N-1}\right]^{1/2}$

Παράμετροι κατανομής

- Συντελεστής διακύμανσης $c_V = \frac{\hat{\sigma}}{\bar{x}}$

- Συντελεστής ασυμμετρίας $\hat{g} = \frac{\widehat{\mu_3}}{\hat{\sigma}^3} = \frac{N}{(N-1)(N-2)} \sum_{i=1}^{N} \frac{(x_i - \bar{x})^3}{\widehat{\mu_2}^{3/2}}$

- Συντελεστής κύρτωσης $\widehat{q_4} = \frac{\widehat{\mu_4}}{\hat{\sigma}^4}$

Ομοιόμορφη κατανομή

- PDF

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} \text{ για } a \leq x \leq b \\ 0 \text{ για } x < a \text{ και } x > b \end{cases}$$

- CDF

$$F(x) = \begin{cases} 0 \text{ για } x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a} \text{ για } a \leq x \leq b \\ 1 \text{ για } x > b \end{cases}$$

Κανονική κατανομή

- PDF

$$p(z) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} exp\left(-\frac{z^2}{2}\right)$$

ανηγμένη μεταβλητή

$$z = \frac{x-\mu}{\sigma}$$

- CDF

$$P(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{2\pi} exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz$$

Τιμές ανηγμένης μεταβλητής z

$$\mu = 0, \sigma = 1$$

P(z)	z	P(z)	z	P(z)	z	P(z)	z	P(z)	z
0.01	-2.326	0.21	-0.806	0.41	-0.228	0.61	0.279	0.81	0.878
0.02	-2.054	0.22	-0.772	0.42	-0.202	0.62	0.305	0.82	0.915
0.03	-1.881	0.23	-0.739	0.43	-0.176	0.63	0.332	0.83	0.954
0.04	-1.751	0.24	-0.706	0.44	-0.151	0.64	0.358	0.84	0.994
0.05	-1.645	0.25	-0.674	0.45	-0.126	0.65	0.385	0.85	1.036
0.06	-1.555	0.26	-0.643	0.46	-0.100	0.66	0.412	0.86	1.080
0.07	-1.476	0.27	-0.613	0.47	-0.075	0.67	0.440	0.87	1.126
0.08	-1.405	0.28	-0.583	0.48	-0.050	0.68	0.468	0.88	1.175
0.09	-1.341	0.29	-0.553	0.49	-0.025	0.69	0.496	0.89	1.227
0.10	-1.282	0.30	-0.524	0.50	0.000	0.70	0.524	0.90	1.282
0.11	-1.227	0.31	-0.496	0.51	0.025	0.71	0.553	0.91	1.341
0.12	-1.175	0.32	-0.468	0.52	0.050	0.72	0.583	0.92	1.405
0.13	-1.126	0.33	-0.440	0.53	0.075	0.73	0.613	0.93	1.476
0.14	-1.080	0.34	-0.412	0.54	0.100	0.74	0.643	0.94	1.555
0.15	-1.036	0.35	-0.385	0.55	0.126	0.75	0.674	0.95	1.645
0.16	-0.994	0.36	-0.358	0.56	0.151	0.76	0.706	0.96	1.751
0.17	-0.954	0.37	-0.332	0.57	0.176	0.77	0.739	0.97	1.881
0.18	-0.915	0.38	-0.305	0.58	0.202	0.78	0.772	0.98	2.054
0.19	-0.878	0.39	-0.279	0.59	0.228	0.79	0.806	0.99	2.326
0.20	-0.842	0.40	-0.253	0.60	0.253	0.80	0.842		

Κατανομή Gumbel

Ακραίων τιμών τύπου I

- PDF

$$p(y) = exp[\mp y - exp(\mp y)]dy$$

$(+)\ \mu\varepsilon\gamma\iota\sigma\tau\alpha, (-)\ \varepsilon\lambda\alpha\chi\iota\sigma\tau\alpha$

ανηγμένη μεταβλητή

$$y = \frac{x - \beta}{\alpha}$$

- CDF

$$P(y) = exp\big(-exp(-y)\big) \qquad \mu\varepsilon\gamma\iota\sigma\tau\alpha$$

$$P(y) = 1 - exp\big(-exp(y)\big) \qquad \varepsilon\lambda\alpha\chi\iota\sigma\tau\alpha$$

Κατανομή Weibull

- PDF

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\alpha}{\beta}\left(\dfrac{x}{\beta}\right)^{\alpha-1} e^{-\left({x}/{\beta}\right)^{\alpha}} \text{ για } x \geq 0 \\ 0 \text{ για } x < 0 \end{cases}$$

- CDF

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\left({x}/{\beta}\right)^{\alpha}} \text{ για } x \geq 0 \\ 0 \text{ για } x < 0 \end{cases}$$

Κατανομή Weibull

- PDF

παράμετρος κλίμακας

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\alpha}{\beta}\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha-1} e^{-\left(x/\beta\right)^{\alpha}} \text{ για } x \geq 0 \\ 0 \text{ για } x < 0 \end{cases}$$

παράμετρος θέσης

- CDF

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\left(x/\beta\right)^{\alpha}} \text{ για } x \geq 0 \\ 0 \text{ για } x < 0 \end{cases}$$

Κατανομή ΓΑΤ

- PDF

$$f(x) = \frac{1}{\alpha} t(x)^{\gamma+1} e^{-t(x)} \text{ όπου } t(x) = \begin{cases} 1 + \gamma\left(\dfrac{x-\beta}{\alpha}\right) \text{ για } \gamma \neq 0 \\ e^{-\frac{x-\beta}{\alpha}} \text{ για } \gamma = 0 \end{cases}$$

- CDF

$$F(x) = e^{-t(x)}$$

Κατανομή ΓΑΤ

- PDF

παράμετρος θέσης

$$f(x) = \frac{1}{\alpha} t(x)^{\gamma+1} e^{-t(x)} \text{ όπου } t(x) = \begin{cases} \left(1 + \gamma \left(\frac{x-\beta}{\alpha}\right)\right) & \text{για } \gamma \neq 0 \\ e^{-\frac{x-\beta}{\alpha}} & \text{για } \gamma = 0 \end{cases}$$

παράμετρος κλίμακας

παράμετρος σχήματος

- CDF

$$F(x) = e^{-t(x)}$$

Προσαρμογή θεωρητικής κατανομής

- **Μπορούμε να προσαρμόσουμε μία θεωρητική κατανομή σε μία εμπειρική;**
  - Μέθοδος ροπών
  - Μέθοδος μέγιστης πιθανοφάνειας
  - Μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων
  - Μέθοδος ελαχίστου x^2
  - Μέθοδος των έξι διαιρέσεων
  - Μέθοδος παράγοντα συχνότητας
  - …

Μέθοδος ροπών

- **Κανονική κατανομή → θεωρούμε ότι οι παράμετροι της εμπειρικής κατανομής είναι ίσες με τις παραμέτρους της θεωρητικής κατανομής**
  - Μέσος όρος $\mu = \bar{x}$
  - Τυπική απόκλιση $\sigma = \hat{\sigma}$
- **Κατανομή Gumbel**

$$\hat{a} = \frac{\hat{\sigma}}{1.283} \qquad \hat{\beta} = \bar{x} \mp 0.45\hat{\sigma} \qquad (-)\ \mu\varepsilon\gamma\iota\sigma\tau\alpha, (+)\ \varepsilon\lambda\alpha\chi\iota\sigma\tau\alpha$$

Μέθοδος παράγοντα συχνότητας

- Το μέγεθος του γεγονότος περιόδου επαναφοράς T είναι συνάρτηση του μέσου όρου, του συντελεστή διακύμανσης και του παράγοντα συχνότητας

$$x_T = \bar{x}(1 + c_V k_T)$$

- Κανονική κατανομή $k_T = z$
- Κατανομή Gumbel (N>100) $k_T = \mp 0.7797\left[0.5772 + ln\left(ln\frac{T}{T-1}\right)\right]$
- Κατανομή Gumbel (N<100) $k_T = \dfrac{\mp\left[ln\left(ln\frac{T}{T-1}\right) + \overline{y_N}\right]}{\sigma_N}$

$(-)\ \mu\varepsilon\gamma\iota\sigma\tau\alpha, (+)\ \varepsilon\lambda\alpha\chi\iota\sigma\tau\alpha$

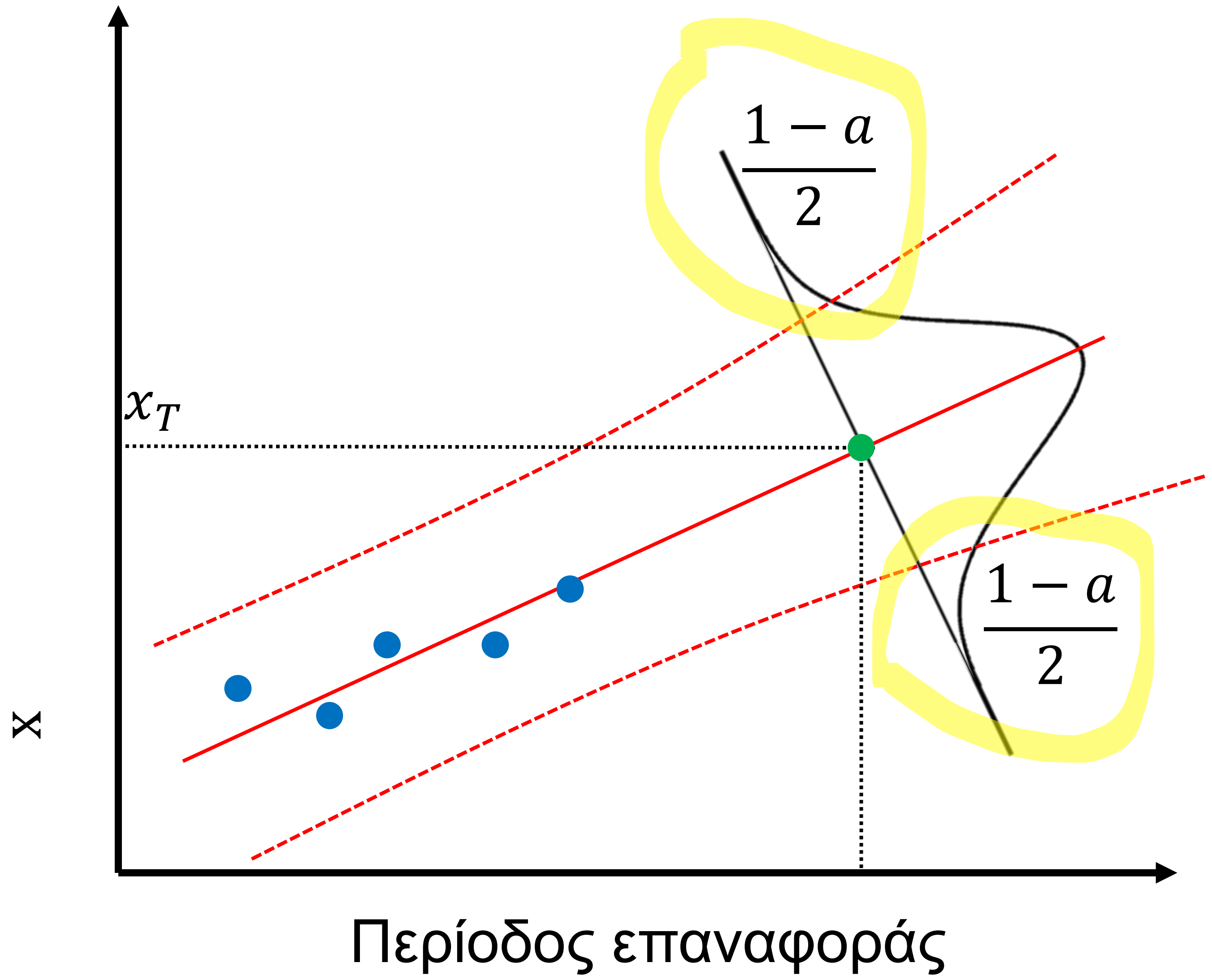
Παράμετροι y_N σ_N

n	$\bar{y}_n$	σ_n	n	$\bar{y}_n$	σ_n	n	$\bar{y}_n$	σ_n
8	0.4843	0.9043	35	0.5403	1.1285	64	0.5533	1.1793
9	0.4902	0.9288	36	0.5410	1.1313	66	0.5538	1.1814
10	0.4952	0.9497	37	0.5418	1.1339	68	0.5543	1.1834
11	0.4996	0.9676	38	0.5424	1.1363	70	0.5548	1.1854
12	0.5035	0.9833	39	0.5430	1.1388	72	0.5552	1.1873
13	0.5070	0.9972	40	0.5436	1.1413	74	0.5557	1.1890
14	0.5100	1.0095	41	0.5442	1.1436	76	0.5561	1.1906
15	0.5128	1.0206	42	0.5448	1.1458	78	0.5565	1.1923
16	0.5157	1.0316	43	0.5453	1.1480	80	0.5569	1.1938
17	0.5181	1.0411	44	0.5458	1.1499	82	0.5572	1.1953
18	0.5202	1.0493	45	0.5463	1.1519	84	0.5576	1.1967
19	0.5220	1.0566	46	0.5468	1.1538	86	0.5580	1.1980
20	0.5236	1.0628	47	0.5473	1.1557	88	0.5583	1.1994
21	0.5252	1.0696	48	0.5477	1.1574	90	0.5586	1.2007
22	0.5268	1.0754	49	0.5481	1.1590	92	0.5589	1.2020
23	0.5283	1.0811	50	0.5485	1.1607	94	0.5592	1.2032
24	0.5296	1.0864	51	0.5489	1.1623	96	0.5595	1.2044
25	0.5309	1.0915	52	0.5493	1.1638	98	0.5598	1.2055
26	0.5320	1.0961	53	0.5497	1.1653	100	0.5600	1.2065
27	0.5332	1.1004	54	0.5501	1.1667	150	0.5646	1.2253
28	0.5343	1.1047	55	0.5504	1.1681	200	0.5672	1.2360
29	0.5353	1.1086	56	0.5508	1.1696	250	0.5688	1.2429
30	0.5362	1.1124	57	0.5511	1.1708	300	0.5699	1.2479
31	0.5371	1.1159	58	0.5515	1.1721	400	0.5714	1.2545
32	0.5380	1.1193	59	0.5518	1.1734	500	0.5724	1.2588
33	0.5388	1.1226	60	0.5521	1.1747	750	0.5738	1.2651
34	0.5396	1.1255	62	0.5527	1.1770	1000	0.5745	1.2685

Όρια εμπιστοσύνης

- Οι κατανομές προσαρμόζονται με πεπερασμένο αριθμό μετρήσεων → π.χ. N=100
- Τί γίνεται όταν υπολογίζουμε μία περίοδο επαναφοράς T=1000 έτη;

Διάστημα εμπιστοσύνης



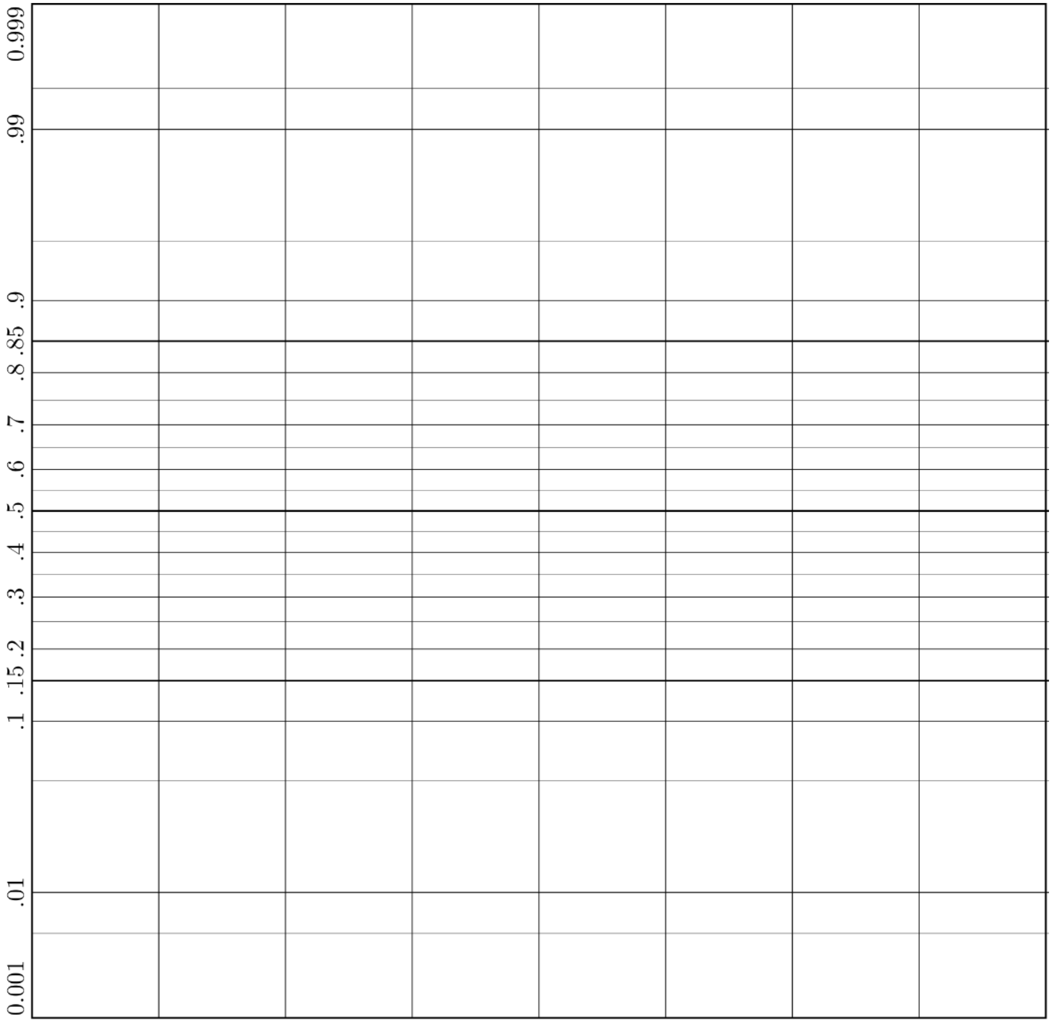
Παράμετροι

- Εκτίμηση ορίων $x_{T,max} = x_T + z_{1-a/2}\delta\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{N}}$ $x_{T,min} = x_T - z_{1-a/2}\delta\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{N}}$
- Κανονική κατανομή $\delta = \left(1 + \frac{k_T^2}{2}\right)^{1/2}$
- Κατανομή Gumbel $\delta = \sqrt{1 + 1.3k_T + 1.1k_T^2}$
- Επίπεδο εμπιστοσύνης 1-α (%)
  - 99 $z_{1-a/2} = 2.576$
  - 95 $z_{1-a/2} = 1.960$
  - 90 $z_{1-a/2} = 1.645$

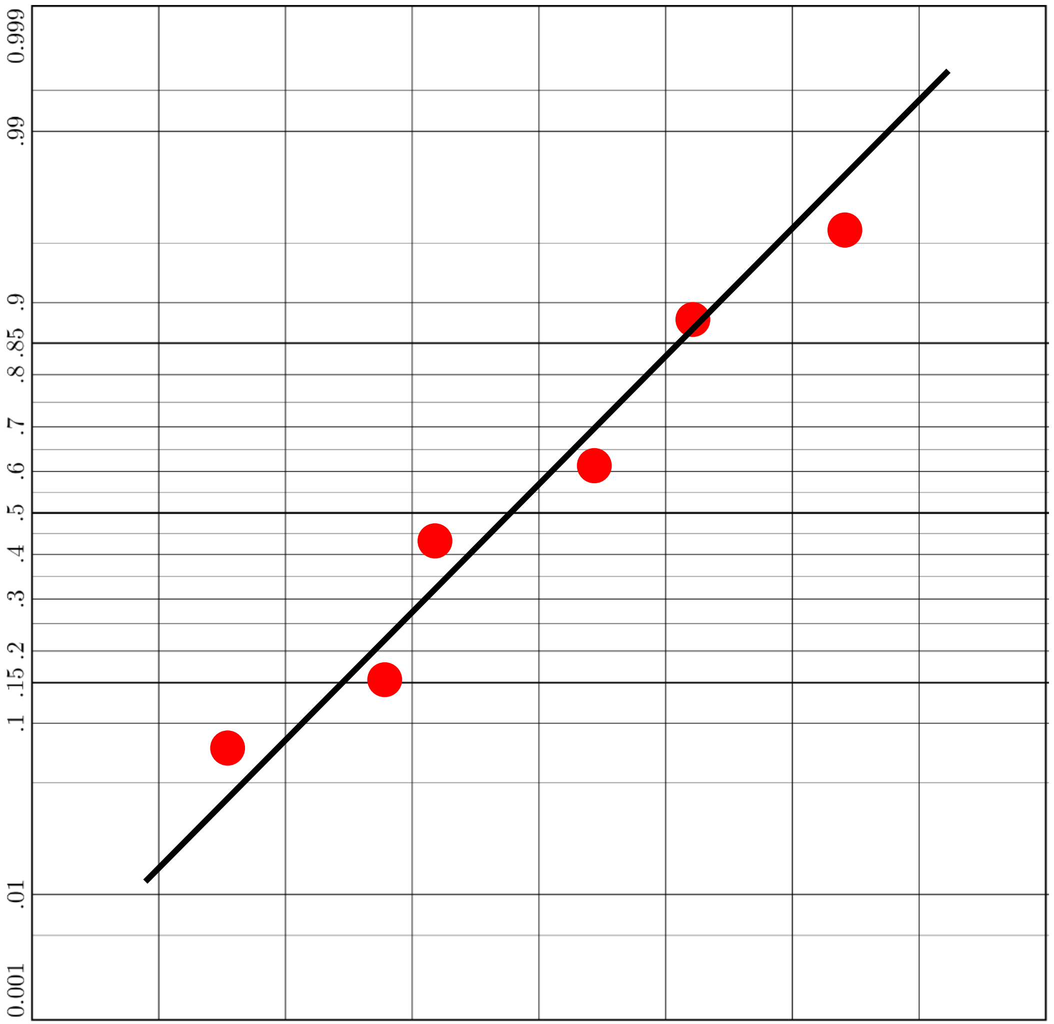
Έλεγχος καταλληλότητας

- **Εμπειρικές μέθοδοι**
  - Χαρτί πιθανότητας της θεωρητικής κατανομής
  - Οπτική σύγκριση με ιστογράμματος συχνοτήτων και συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας
- **Αριθμητικές μέθοδοι**
  - Έλεγχος x^2
  - Έλεγχος Kolmogorov-Smirnov
  - …

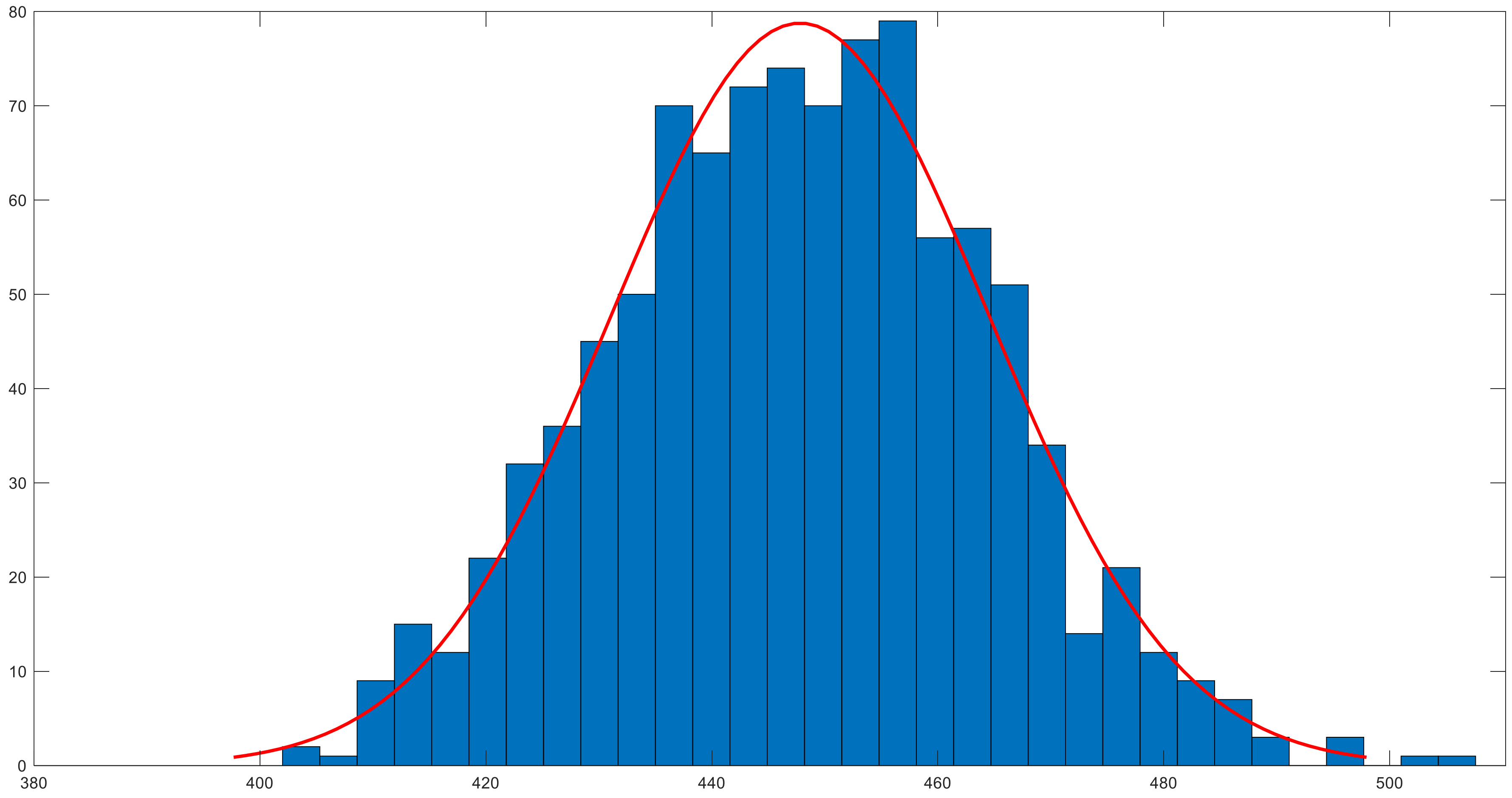
Χαρτί κανονικής κατανομής



Χαρτί κανονικής κατανομής



Ιστόγραμμα – πυκνότητα πιθανότητας



Έλεγχος x²

- Κατανομή με αριθμό παραμέτρων p
- Χωρίζεται το δείγμα σε k κλάσεις $k = 1 + 3.3logN$
- O_i ο εμπειρικός αριθμός παρατηρήσεων
- E_i αναμενόμενος αριθμός παρατηρήσεων
- Υπολογισμός x^2 $\longrightarrow x^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$
- Θεωρητικό x^2, συνάρτηση του επιπέδου εμπιστοσύνης και των βαθμών ελευθερίας → σύγκριση με το παραπάνω

Θεωρητικό x^2

- **Βαθμοί ελευθερίας=k-p-1**
  - k αριθμός κλάσεων
  - p αριθμός παραμέτρων κατανομής

Degrees of Freedom	Probability of a larger value of x^2								
	0.99	0.95	0.90	0.75	0.50	0.25	0.10	0.05	0.01
1	0.000	0.004	0.016	0.102	0.455	1.32	2.71	3.84	6.63
2	0.020	0.103	0.211	0.575	1.386	2.77	4.61	5.99	9.21
3	0.115	0.352	0.584	1.212	2.366	4.11	6.25	7.81	11.34
4	0.297	0.711	1.064	1.923	3.357	5.39	7.78	9.49	13.28
5	0.554	1.145	1.610	2.675	4.351	6.63	9.24	11.07	15.09
6	0.872	1.635	2.204	3.455	5.348	7.84	10.64	12.59	16.81
7	1.239	2.167	2.833	4.255	6.346	9.04	12.02	14.07	18.48
8	1.647	2.733	3.490	5.071	7.344	10.22	13.36	15.51	20.09
9	2.088	3.325	4.168	5.899	8.343	11.39	14.68	16.92	21.67
10	2.558	3.940	4.865	6.737	9.342	12.55	15.99	18.31	23.21
11	3.053	4.575	5.578	7.584	10.341	13.70	17.28	19.68	24.72
12	3.571	5.226	6.304	8.438	11.340	14.85	18.55	21.03	26.22
13	4.107	5.892	7.042	9.299	12.340	15.98	19.81	22.36	27.69
14	4.660	6.571	7.790	10.165	13.339	17.12	21.06	23.68	29.14
15	5.229	7.261	8.547	11.037	14.339	18.25	22.31	25.00	30.58
16	5.812	7.962	9.312	11.912	15.338	19.37	23.54	26.30	32.00
17	6.408	8.672	10.085	12.792	16.338	20.49	24.77	27.59	33.41
18	7.015	9.390	10.865	13.675	17.338	21.60	25.99	28.87	34.80
19	7.633	10.117	11.651	14.562	18.338	22.72	27.20	30.14	36.19
20	8.260	10.851	12.443	15.452	19.337	23.83	28.41	31.41	37.57
22	9.542	12.338	14.041	17.240	21.337	26.04	30.81	33.92	40.29
24	10.856	13.848	15.659	19.037	23.337	28.24	33.20	36.42	42.98
26	12.198	15.379	17.292	20.843	25.336	30.43	35.56	38.89	45.64
28	13.565	16.928	18.939	22.657	27.336	32.62	37.92	41.34	48.28
30	14.953	18.493	20.599	24.478	29.336	34.80	40.26	43.77	50.89
40	22.164	26.509	29.051	33.660	39.335	45.62	51.80	55.76	63.69
50	27.707	34.764	37.689	42.942	49.335	56.33	63.17	67.50	76.15
60	37.485	43.188	46.459	52.294	59.335	66.98	74.40	79.08	88.38

Άσκηση

- Μέσες ετήσιες παροχές Q (m^3/s) με φθίνουσα σειρά (66 έτη) και θεωρούμε ότι ακολουθούν την κανονική κατανομή

115.0	93.7	87.1	80.4	73.4	70.0	66.3	58.0	52.4	46.1	40.3
112.0	92.5	85.0	80.1	72.9	69.0	65.7	58.0	52.3	46.0	34.7
111.0	91.5	84.3	80.0	71.7	68.7	62.9	55.0	50.5	45.0	34.1
99.1	89.4	84.1	79.2	71.2	67.8	62.6	54.4	47.3	44.2	32.3
96.1	88.7	82.9	77.7	70.8	67.2	61.3	53.6	47.0	44.0	28.4
94.3	87.2	80.9	77.0	70.5	66.9	60.2	53.5	46.8	43.1	20.6

- Να γίνει το ιστόγραμμα σχετικών συχνοτήτων
- Να βρεθεί ποια είναι η παροχή για Τ=20 έτη
- Να βρεθεί η πιθανότητα υπέρβασης για Q=100 m^3/s
- Να βρεθούν τα όρια εμπιστοσύνης για Τ=100 έτη και για επίπεδο εμπιστοσύνης 95%
- Να ελεγχθεί αν η κανονική κατανομή μπορεί να προσαρμοστεί στο δείγμα για επίπεδο εμπιστοσύνης 95%

Κατά κύριο λόγο, η παρούσα διάλεξη άντλησε πληροφορίες από τα βιβλία «Τεχνική Υδρολογία» των Μ. Μιμίκου και Ε. Μπαλτά (2018, Εκδόσεις Παπασωτηρίου), «Υδατικοί Πόροι: Ι. Τεχνική Υδρολογία & Εισαγωγή στη Διαχείριση Υδατικών Πόρων» του Γ. Τσακίρη (2013, Εκδόσεις Συμμετρία), «Τεχνική Υδρολογία» των Δ. Κουτσογιάννη και Θ. Ξανθόπουλου - 4η έκδοση (2016, Ελληνικά Ακαδημαϊκά Ηλεκτρονικά Συγγράμματα και Βοηθήματα), «Ποτάμια Υδραυλική και Τεχνικά Έργα» του Β. Χρυσάνθου (2015, Ελληνικά Ακαδημαϊκά Ηλεκτρονικά Συγγράμματα και Βοηθήματα)