Θεωρία Πιθανοτήτων και Στατιστική

Διδάσκων: Επαμεινώνδας Διαμαντόπουλος
Επικοινωνία: epdiaman@ee.duth.gr

5η διάλεξη

Περιεχόμενα 5ου μαθήματος

- Βασικές κατανομές διακριτών τυχαίων μεταβλητών (συνέχεια).
  - Ασκήσεις στην Poisson
  - Υπεργεωμετρική κατανομή
  - Γεωμετρική κατανομή (2 εκδοχές).
  - Αρνητική διωνυμική.
- Βασικές κατανομές συνεχών τυχαίων μεταβλητών.
  - Ομοιόμορφη κατανομή.
  - Εκθετική κατανομή.

Κατανομές πιθανότητας διακριτών τυχαίων μεταβλητών (συνέχεια)

Poisson κατανομή

Κατανομή Poisson

Ορισμός

Μία τ.μ. X є N, ακολουθεί την **κατανομή Poisson** (**X ~ Poisson(λ)** ή απλά **X ~ P(λ)**), αν για κάποιο λ > 0, η συνάρτηση πιθανότητας δίνεται από τον τύπο:

$$P(X = \kappa) = e^{-\lambda}\,\lambda^{\kappa} / \kappa!,\ \kappa = 0, 1, 2, \ldots$$

Η κατανομή Poisson εφαρμόζεται σε φαινόμενα με διακριτή συχνότητα και σταθερή πιθανότητα να συμβούν στη μονάδα μέτρησης χρόνου ή χώρου.

Η παράμετρος λ συμβολίζει την αναμενόμενη τιμή της X στην μονάδα μέτρησης.

Poisson: Γεωμετρικά χαρακτηριστικά

Y ~ Poisson(λ): P(X = κ) = $e^{-\lambda} \lambda^{\kappa}$ / κ!, κ = 0, 1, 2,…

Αναμενόμενη τιμή: EX = λ.

Διακύμανση: VarX = λ.

Τυπική απόκλιση: $\sigma = \sqrt{\lambda}$

Ασυμμετρία: $\text{skew}(X) = \gamma = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$

Κυρτότητα: $\text{kurt}(X) = \alpha = \frac{\mu_4}{\sigma^4} = \frac{1}{\lambda}$

Σημείωση: Από τον τρόπο ορισμού της η Poisson έχει πάντα θετική ασυμμετρία (ουρά προς τα δεξιά)

Υπεργεωμετρική κατανομή

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lambda \qquad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_n}{a_{n-1}} \qquad \Bigg| \qquad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{P(n)}{Q(n)}$$

Υπεργεωμετρική κατανομή

Παράδειγμα (γέννεση της υπεργεωμετρικής)

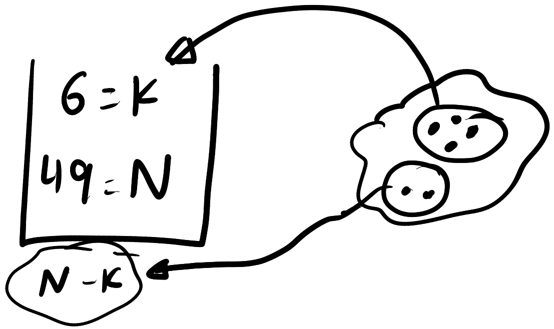
Στο Λόττο επιλέγουμε 6 αριθμούς από 49. Να βρεθεί η πιθανότητα να προβλέψουμε τους 4 αριθμούς που θα κληρωθούν, επιλέγοντας 6 αριθμούς.

Υπόδειξη: Η σωστή πρόβλεψη των 4 αριθμών από τους 6 που κληρώνονται μπορεί να θεωρηθεί μία διαδικασία που υλοποιείται σε δύο διαδοχικά βήματα.

Στο 1ο βήμα επιλέγονται οι 4 νικηφόροι αριθμοί από τους 6 που κληρώθηκαν.

Στο 2ο βήμα επιλέγονται οι 2 μη νικηφόροι αριθμοί από τους 43.

Λύση



X = {πλήθος σωστών προβλέψεων}

$$P(X=4) = \frac{\binom{6}{4}\binom{43}{2}}{\binom{49}{6}}$$

Υπεργεωμετρική κατανομή

Παράδειγμα (γέννεση της υπεργεωμετρικής)
Στο Λόττο επιλέγουμε 6 αριθμούς από 49. Να βρεθεί η πιθανότητα να προβλέψουμε τους 4 αριθμούς που θα κληρωθούν, επιλέγοντας 6 αριθμούς.
Υπόδειξη: Η σωστή πρόβλεψη των 4 αριθμών από τους 6 που κληρώνονται μπορεί να θεωρηθεί μία διαδικασία που υλοποιείται σε δύο διαδοχικά βήματα.
Στο 1^o βήμα επιλέγονται οι 4 νικηφόροι αριθμοί από τους 6 που κληρώθηκαν.
Στο 2^o βήμα επιλέγονται οι 2 μη νικηφόροι αριθμοί από τους 43.

Λύση
X = {πλήθος σωστών επιλογών από τους 6 που κληρώθηκαν}

$$P\left(X=4\right)=\frac{\text{ευνοϊκές}}{\text{συνολικές}}=\frac{\text{ευνοϊκές } 1^{o} \text{ βήμα} \cdot \text{ευνοϊκές } 2^{o} \text{ βήμα}}{\text{συνολικές}}=\frac{\binom{6}{4}\binom{49-6}{6-4}}{\binom{49}{6}}=0{,}000968=0{,}1\%.$$

Υπεργεωμετρική κατανομή

Από έναν πληθυσμό με $\overset{49}{N}$ στοιχεία, τα $\overset{6}{K}$ έχουν μία ιδιότητα (επιτυχία). Εμείς, παίρνουμε ένα δείγμα $\underset{6}{n}$ στοιχείων *χωρίς επανάθεση* και ορίζουμε

X = {πλήθος επιτυχιών στις n επιλογές}. Η τ.μ. X έχει συνάρτηση πιθανότητας

$$P(X = k) = \frac{\binom{K}{k}\binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

Λέμε ότι η X ακολουθεί την υπεργεωμετρική κατανομή Hypergeometric(N, K, n) (X ~ HG(N, K, n)).

Σημείωση
Η διωνυμική και η υπεργεωμετρική μοιάζουν στο γεγονός πως προκύπτουν σε πείραμα δειγματοληψίας n αντικειμένων από ένα σωρό. Η διαφορά τους είναι ότι στην υπεργεωμετρική τα αντικείμενα είναι πεπερασμένα (N) σε πλήθος και η πιθανότητα επιτυχίας αλλάζει κάθε φορά, ενώ στη διωνυμική είναι απεριόριστα και η πιθανότητα επιτυχίας είναι σταθερή (p) σε όλες τις επιλογές.

Υπεργεωμετρική: Γεωμετρικά χαρακτηριστικά

Y ~ HG(N, K, n): $$P\left(X = k\right) = \frac{\binom{K}{k}\binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$ $X = 0, 1, \ldots, n$

Αναμενόμενη τιμή: $$EX = \frac{n \cdot K}{N}.$$

Διακύμανση: $$VarX = \frac{n \cdot K \cdot \left(N - K\right) \cdot \left(N - n\right)}{N^2 \cdot \left(N - 1\right)}.$$

Υπεργεωμετρική Κατανομή

Παράδειγμα 1
Σε ένα σάκο είναι 45 κόκκινοι και 5 πράσινοι βόλοι. Βγάζουμε χωρίς επανάθεση 10 βόλους. Ποια είναι η πιθανότητα οι 4 από αυτούς να είναι πράσινοι;

Λύση

$$\boxed{\begin{array}{l} N=50 \\ K=5 \end{array}} \longrightarrow n=10$$

$X = \{$πλήθος πράσινων στους 10$\} \Rightarrow X \sim HG(50, 5, 10)$

$$P(X=4) = \frac{\binom{5}{4}\binom{45}{6}}{\binom{50}{10}}$$

$$\binom{5}{4} = \frac{5!}{4!\cdot 1!} = 5 \qquad \binom{45}{6} = \frac{45\cdot 44\cdot 43\cdot 42\cdot 41\cdot 40\cdot \cancel{39!}}{6!\cdot \cancel{39!}} = \dots$$

Υπεργεωμετρική Κατανομή

Παράδειγμα 1
Σε ένα σάκο είναι 45 κόκκινοι και 5 πράσινοι βόλοι. Βγάζουμε χωρίς επανάθεση 10 βόλους. Ποια είναι η πιθανότητα οι 4 από αυτούς να είναι πράσινοι;

Λύση

Αν X = {πλήθος πράσινων βόλων στους 10} τότε X ~ HG(50, 5, 10):

$$P\left(X = 4\right) = \frac{\binom{5}{4}\binom{50-5}{10-4}}{\binom{50}{10}} = 0{,}0039 = 0{,}39\,\%\,.$$

Υπεργεωμετρική Κατανομή

Παράδειγμα 2 (Λόττο updated)

Στο Λόττο κληρώνονται 6 αριθμοί από 49. Παίζουμε μία στήλη 6 αριθμών. Αν X = {το πλήθος των αριθμών που προβλέπουμε σωστά}, τότε να βρεθούν οι πιθανότητες (α) $P(X = 6)$ (β) $P(X = 5)$, (γ) $P(X = 4)$.

Λύση

Υπεργεωμετρική Κατανομή

Παράδειγμα 2 (Λόττο updated)

Στο Λόττο κληρώνονται 6 αριθμοί από 49. Παίζουμε μία στήλη 6 αριθμών. Αν X = {το πλήθος των αριθμών που προβλέπουμε σωστά}, τότε να βρεθούν οι πιθανότητες (α) P(X = 6) (β) P(X = 5), (γ) P(X = 4).

Λύση

Τους 49 αριθμούς μπορούμε να τους αντιληφθούμε ως ένα σάκο με βόλους από τους οποίους οι 43 είναι πράσινοι και οι 6 είναι κόκκινοι. Αν X = {πλήθος κόκκινων βόλων} τότε X ~ HG(49, 6, 6) και

$$P(X = k) = \frac{\binom{6}{k}\binom{43}{6-k}}{\binom{49}{6}}, \ k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6.$$

Η διωνυμική ως οριακή περίπτωση της υπεργεωμετρικής

Η μοναδική διαφορά στο πείραμα μεταξύ της διωνυμικής και της υπεργεωμετρικής είναι το γεγονός πως στην πρώτη περίπτωση υπάρχει επανάθεση ενώ στη δεύτερη όχι. Φανερά, όσο μεγαλύτερο είναι το πλήθος των διαθέσιμων επιλογών τόσο μικρότερη είναι η επιρροή της επανάθεσης στην πιθανότητα επιτυχίας μίας επιλογής.

Πράγματι, αν $p = K / N$ παραμένει σταθερό καθώς το $N \to \infty$, τότε $K = Np$, $N – K = N(1 – p)$ και αποδεικνύεται ότι $\lim_{N\to\infty} HG(N, K, n) = B(n, p)$, όπου $p = N/K$, ή

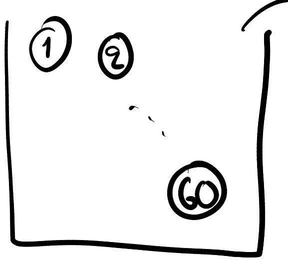
$$\lim_{N \to \infty} \frac{\binom{Np}{k}\binom{N(1-p)}{n-k}}{\binom{N}{n}} = \binom{n}{k} p^{k}(1-p)^{n-k}.$$

Σημείωση: Η απόδειξη μπορεί να βρεθεί εδώ:
https://math.stackexchange.com/questions/330553/proof-that-the-hypergeometric-distribution-with-large-n-approaches-the-binomia

Ασκήσεις στην υπεργεωμετρική κατανομή

1. Σε μία κάλπη υπάρχουν 60 αριθμημένοι βόλοι, από 1 έως 60. Παίρνουμε 5 βόλους και έστω X = {το πλήθος των βόλων με αριθμό που διαιρείται με το 3}. Να βρεθεί η πιθανότητα P(X = 2), αν (α) η επιλογή γίνει με επανατοποθέτηση, (β) η επιλογή γίνει χωρίς επανατοποθέτηση.

Λύση



$\to n = 5$

X = {πλήθος βόλων που διαιρούνται με το 3}

(α) $X \sim B(5, \frac{1}{3})$, $P(X=2) = \binom{5}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 = 10 \cdot \frac{8}{81} = \frac{80}{243}$.

(β) $X \sim HG(60, 20, 5)$, $P(X=2) = \dfrac{\binom{20}{2}\binom{40}{3}}{\binom{60}{5}} = \dots$

$\binom{5}{2} = \frac{5!}{2! \cdot 3!} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$ | $\binom{20}{2} = \frac{20!}{2! \cdot 18!} = \frac{20 \cdot 19}{2} = 190$

$\binom{40}{3} = \frac{40!}{3! \cdot 37!} = \frac{40 \cdot 39 \cdot 38}{2 \cdot 3} = 20 \cdot 13 \cdot 38 = 9.880$

Ασκήσεις στην υπεργεωμετρική κατανομή

2. Σε ένα δοχείο υπάρχουν 100 λαμπτήρες από τους οποίους οι 20 είναι ελαττωματικοί. Επιλέγουμε 5 λάμπες χωρίς επανατοποθέτηση και έστω X = {το πλήθος των ελαττωματικών λαμπτήρων}. Να βρεθεί η πιθανότητα $P(X = 2)$, (α) με ακρίβεια από την υπεργεωμετρική κατανομή,
(β) προσεγγιστικά από τη διωνυμική κατανομή.

Λύση

Ασκήσεις στην υπεργεωμετρική κατανομή

3. Στην αίθουσα υπάρχουν 100 φοιτητές από τους οποίους οι 70 έχουν αναπτύξει ανοσία στον Κορονοϊό είτε λόγω νόσησης είτε λόγω εμβολιασμού. Επιλέγονται 20 φοιτητές για να συμμετέχουν ως θεατές σε ένα θεατρικό έργο. Ποια είναι η πιθανότητα στους 20 φοιτητές οι 17 να έχουν ανοσία;

Λύση

$$\boxed{\begin{matrix} N = 100 \\ K = 70 \end{matrix}} \rightarrow n = 20$$

$X = \{$πλήθος φοιτητών στους 20 με ανοσία$\} \sim HG(100, 70, 20)$

$$P(X=17) = \frac{\binom{70}{17}\cdot\binom{30}{3}}{\binom{100}{20}}$$

Γεωμετρική κατανομή

Γεωμετρική κατανομή (εισαγωγή)

Άσκηση 1: Καταμέτρηση <u>δοκιμασιών</u> μέχρι την πρώτη επιτυχία
Ένα πείραμα έχει δύο πιθανές εκδοχές, επιτυχία με πιθανότητα p και αποτυχία με πιθανότητα 1 – p.
Ορίζουμε X = {το πλήθος των **δοκιμασιών** μέχρι την πρώτη επιτυχία}.
(α) Να βρείτε τις πιθανές τιμές της X.
(β) Να βρείτε τις πιθανότητες P(X = 1), P(X = 2), P(X = 3).
(γ) Ποιος είναι ο γενικός τύπος για την P(X = n);

Λύση

(α) $X = 1, 2, 3, \ldots$

(β) $P(X=1) = p$, $P(X=2) = (1-p)\cdot p$, $P(X=3) = (1-p)^2\cdot p$.

(γ) $P(X=n) = (1-p)^{n-1}\cdot p$.

$$\frac{P(X=n+1)}{P(X=n)} = 1-p$$

$X = 1, 2, 3, \ldots$ $P(X=n) = (1-p)^{n-1}\cdot p$

$X \sim G_T(p)$

Γεωμετρική κατανομή (εισαγωγή)

Άσκηση 2: Καταμέτρηση <u>αποτυχιών</u> μέχρι την πρώτη επιτυχία
Ένα πείραμα έχει δύο πιθανές εκδοχές, επιτυχία με πιθανότητα p και αποτυχία με πιθανότητα 1 – p.
Ορίζουμε Y = {το πλήθος των **αποτυχιών** μέχρι την πρώτη επιτυχία}.
(α) Να βρείτε τις πιθανές τιμές της Y.
(β) Να βρείτε τις πιθανότητες P(Y = 0), P(Y = 1), P(Y = 2).
(γ) Ποιος είναι ο γενικός τύπος για την P(Y = n);

Λύση

(α) $Y = 0, 1, 2, \ldots$

(β) $P(Y=0) = p$, $P(Y=1) = (1-p)\cdot p$, $P(Y=2) = (1-p)^2\cdot p$

(γ) $P(Y=n) = (1-p)^n\cdot p$

$Y = 0, 1, 2, \ldots$ $P(Y=n) = (1-p)^n\cdot p$

$Y \sim G_F(p)$

Γεωμετρική κατανομή (2 εκδοχές)

Με τον όρο “**γεωμετρική κατανομή**” περιγράφονται οι εξής δύο διακριτές κατανομές πιθανοτήτων:

- Η κατανομή πιθανότητας του πλήθους X є N* των δοκιμών (trials) Bernoulli(p) που απαιτούνται για να επιτευχθεί η πρώτη επιτυχία. Εάν η πιθανότητα επιτυχίας σε κάθε δοκιμή είναι p, τότε η πιθανότητα ότι η n – οστή δοκιμή είναι η πρώτη επιτυχία είναι

$$\mathbf{X \sim G_T(p) \rightarrow P(X = n) = (1 - p)^{n-1} \cdot p, \quad n = 1, 2, \ldots}$$

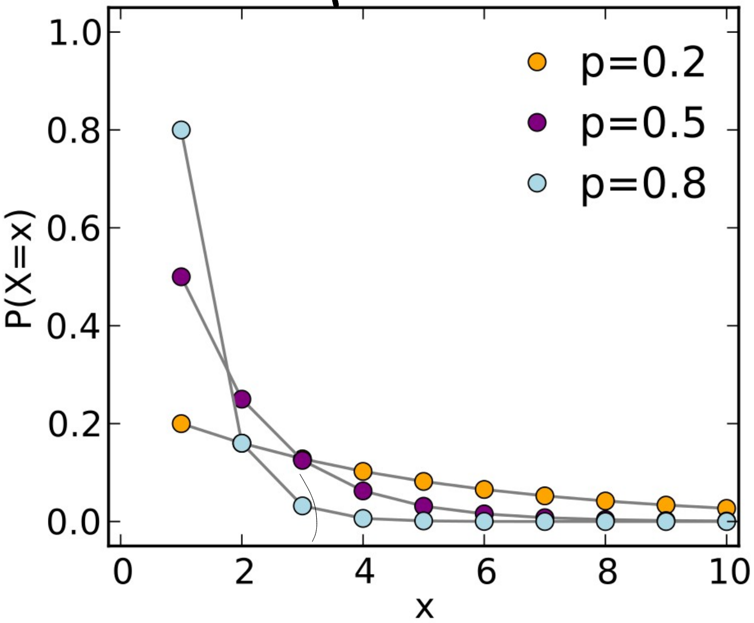
- Η κατανομή πιθανότητας του πλήθους Y = X − 1 (є N) αποτυχιών (failures) πριν από την πρώτη επιτυχία. Στην περίπτωση αυτή η συνάρτηση πιθανότητας της Y είναι

$$\mathbf{Y \sim G_F(p) \rightarrow P(Y = n) = (1 - p)^{n} \cdot p, \quad n = 0, 1, \ldots}$$

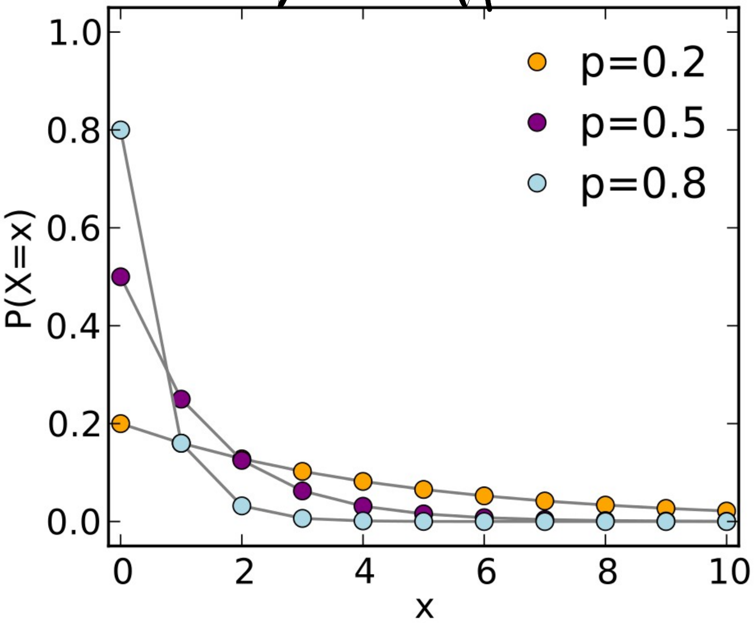
Σημείωση: Η προέλευση της ονομασίας είναι φανερή, καθώς και στις δύο περιπτώσεις η ακολουθία των πιθανοτήτων αποτελεί γεωμετρική πρόοδο.

Γεωμετρική κατανομή (2 εκδοχές)

$X \sim G_T(p)$



$Y \sim G_F(p)$



Συνάρτηση πιθανότητας $P(X = n) = (1 - p)^{n-1} \cdot p$, $n = 0, 1, \ldots$

Συνάρτηση πιθανότητας $P(Y = n) = (1 - p)^{n} \cdot p$, $n = 0, 1, \ldots$

Σημείωση: Στα διαγράμματα των συναρτήσεων μάζας πιθανότητας αντανακλάται η σχέση $Y = X - 1$.

Γεωμετρική: Γεωμετρικά χαρακτηριστικά

$X \sim G_T(p)$: $P(X=n) = (1 - p)^{n-1} \cdot p$, $n=1,2,\ldots$ και $Y \sim G_F(p)$: $P(Y=n) = (1 - p)^{n} \cdot p$, $n=0,1,\ldots$

Αναμενόμενη τιμή: $EX = 1 / p$. $EY = (1 - p) / p$.

Διακύμανση: $VarX = (1 - p) / p^2$. $VarY = (1 - p) / p^2$.

Τυπική απόκλιση: $\sigma_X = \sqrt{1 - p} / p$ $\sigma_Y = \sqrt{1 - p} / p$

Πιθανογεννήτρια συνάρτηση γεωμετρικής

Παράδειγμα

Αν $Y \sim G_F(p)$ τότε $P(Y = \kappa) = (1 - p)^\kappa \cdot p$, $\kappa = 0, 1, 2, \ldots$, και

$G_Y(z) = E(z^Y) = \Sigma_{\kappa = 0, 1, \ldots} (1 - p)^\kappa \cdot p \cdot z^\kappa$

$= p \cdot \Sigma_{\kappa = 0, 1, \ldots} [z(1 - p)]^\kappa$

$= p / [1 - z(1 - p)]$

Άρα, $G_Y(z) = p / [1 - z(1 - p)]$ **για κάθε $|z(1 - p)| < 1$**, δηλαδή **$|z| < 1 / (1 - p)$**.

Σημείωση

Άθροισμα γεωμετρικής προόδου $\Sigma_{\kappa = 0, 1, \ldots} \alpha^\kappa = 1 + \alpha + \alpha^2 + \ldots = 1/(1 - \alpha)$ για $|\alpha| < 1$.

Ασκήσεις στη γεωμετρική κατανομή

1. Σε ένα τυχερό παιχνίδι η πιθανότητα επιτυχίας είναι 40%. Ποια είναι η πιθανότητα να κερδίζεις συνεχώς μέχρι το πέμπτο παιχνίδι; Ποιο είναι το αναμενόμενο πλήθος παιχνιδιών που θα κερδίζει ο παίκτης μέχρι να αποτύχει;

Υπόδειξη: Αν Y = {πλήθος επιτυχιών μέχρι την πρώτη αποτυχία} τότε $Y \sim G_F(0{,}4)$ με τις έννοιες "επιτυχία" και "αποτυχία" να έχουν αντίθετους ρόλους.

Λύση

(α) $\underline{0{,}4}\ \underline{0{,}4}\ \underline{0{,}4}\ \underline{0{,}4}\ \underline{0{,}6}$ $\quad P(\{\text{κερδίζω μέχρι το 5ο παιχνίδι}\}) = 0{,}4^4 \cdot 0{,}6$

(β) $X = \{\text{πλήθος κερδισμένων παιχνιδιών μέχρι την αποτυχία}\} = 0, 1, 2, \dots$

$X \sim G_F(0{,}4) \Rightarrow EX = \dfrac{1-0{,}4}{0{,}4} = 1{,}5.$

$E(X) = \sum_k k \cdot P(X=k)$

Ασκήσεις στη γεωμετρική κατανομή

2. Το κόστος εκτέλεσης για πρώτη φορά ενός πειράματος είναι 100 Ευρώ. Αν το πείραμα αποτύχει, πριν από την επόμενη εκτέλεσή του απαιτείται ένα πρόσθετο ποσόν 20 Ευρώ κάθε φορά. Υποθέτουμε ότι οι δοκιμές είναι ανεξάρτητες με πιθανότητα επιτυχίας $p = 4/5$ και ότι συνεχίζονται μέχρι την πρώτη επιτυχία. Να υπολογισθούν

(α) η πιθανότητα να απαιτηθούν 4 το πολύ δοκιμές μέχρι την πρώτη επιτυχία και

(β) το αναμενόμενο κόστος μέχρι την πρώτη επιτυχία.

Λύση

Αρνητική διωνυμική κατανομή

Αρνητική διωνυμική κατανομή

Άσκηση – εισαγωγή στην αρνητική διωνυμική κατανομή
Αν Χ = {πλήθος ρίψεων ζαριού μέχρι να έρθουν 3 εξάρια} να βρεθούν:
(α) Οι πιθανές τιμές της Χ
(β) Η πιθανότητα P(X = 5)
Λύση

$$\left(\frac{5}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3$$

$$\underbrace{\frac{1}{6} \quad \frac{1}{6} \quad \frac{5}{6} \quad \frac{5}{6}}\quad \frac{1}{6}$$

(6, 6, όχι 6, όχι 6, 6)

(α) $X = 3, 4, \ldots$

(β) $P(X=5) = \binom{4}{2} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3$.

Επιτυχία : p

X = {πλήθος δοκιμ. μέχρι την n επιτ.}

$X = n, n+1, \ldots,$

$$P(X=k) = \binom{k-1}{n-1} \cdot p^n \cdot (1-p)^{k-n}$$

Αρνητική διωνυμική κατανομή

Έστω ότι ένα πείραμα επαναλαμβάνεται, έχει δύο πιθανά αποτελέσματα “Επιτυχία” και “Αποτυχία” και η πιθανότητα επιτυχίας είναι σταθερή και ίση με p.

Αν η τ.μ. X εκφράζει το πλήθος επαναλήψεων που θα απαιτηθούν μέχρι να συμβούν r επιτυχίες, τότε η X έχει συνάρτηση πιθανότητας

$$P(X = n) = \binom{n-1}{r-1} p^{r} (1-p)^{n-r}, \quad n = r, r+1, r+2, \ldots$$

και λέμε ότι η X ακολουθεί την αρνητική διωνυμική κατανομή NB(r, p) (X ~ NB(r, p)).

Σημειώσεις

1. NB(1, p) = G_T(p), δηλαδή, αν X ~ NB(1, p) τότε η X εκφράζει το πλήθος προσπαθειών έως την 1η επιτυχία που είναι η γεωμετρική κατανομή (1η εκδοχή: $P(X = n) = p(1 – p)^{n}$).
2. Η ονομασία «αρνητική διωνυμική» οφείλεται στο γεγονός ότι οι πιθανότητες P(X = n) εμφανίζονται στο ανάπτυγμα $(P – Q)^{-n}$, όπου P = 1/p και Q = (1− p)/p.

Αρνητική διωνυμική: Γεωμετρικά χαρακτηριστικά

X ~ NB(r, p): $$P(X = n) = \binom{n-1}{r-1} p^r (1-p)^{n-r}, \quad n = r, r+1, r+2, \ldots$$

Αναμενόμενη τιμή: EX = r / p.

Διακύμανση: VarX = r(1 – p) / p^2.

Τυπική απόκλιση: $$\sigma = \frac{\sqrt{r(1-p)}}{p}$$

Ασκήσεις στην αρνητική διωνυμική

1. Μια εταιρεία πετρελαίου γνωρίζει ότι κάθε γεώτρηση που κάνει σε μία περιοχή, έχει 20% πιθανότητα να βρει πετρέλαιο.
(α) Ποια είναι η πιθανότητα να βρει πετρέλαιο στην τρίτη γεώτρηση που θα ανοίξει;
(β) Ποια είναι η πιθανότητα να έχει τρεις επιτυχείς ανιχνεύσεις πετρελαίου στις 7 πρώτες γεωτρήσεις που θα κάνει;
(γ) Ποια είναι η πιθανότητα η τρίτη επιτυχής ανίχνευση πετρελαίου να συμβεί στην έβδομη γεώτρηση;
(δ) Ποιο είναι το μέσο πλήθος γεωτρήσεων που πρέπει να κάνει η εταιρεία αν θέλει να έχει τρεις επιτυχείς ανιχνεύσεις πετρελαίου;

Υπόδειξη: (α) Γεωμετρική, (β) Διωνυμική (γ), (δ) Αρνητική διωνυμική

Λύση $p=0,2$ $X=\{$πλήθος γεωτρήσεων μέχρι την πρώτη επιτυχία$\} \sim G_T(0,2)$

(α) $P(X=3) = 0,8^2 \cdot 0,2 = 0,128 = 12,8\%$.

(β) $Y = \{$πλήθος επιτυχιών στις 7 γεωτρ$\} \sim B(7, 0.2)$, $P(Y=3) = \binom{7}{3} \cdot 0,2^3 \cdot 0,8^4 = \ldots$

(γ) $Z = \{$πλήθος γεωτρήσεων μέχρι την 3η επιτυχία$\} \sim NB(3, 0.2)$, $P(Z=7) = \binom{6}{2} \cdot 0,2^3 \cdot 0,8^4 = \ldots$

$EZ = \frac{3}{0.2} = 15.$

Ασκήσεις στην αρνητική διωνυμική

2. Ένας επιθετικός σκοράρει με πιθανότητα 68% όταν εκτελεί σουτ προς το αντίπαλο τέρμα.
(α) Αν εκτελέσει 10 σουτ, τότε ποια είναι η πιθανότητα να βάλει 9 γκολ;
(β) Ποια είναι η πιθανότητα το 2ο γκολ να το βάλει στο 6ο σουτ που θα κάνει;
(γ) Ποιο είναι το αναμενόμενο πλήθος εκτελέσεων που πρέπει να κάνει για να βάλει 5 γκολ;
Υπόδειξη: (α) Διωνυμική (β), (γ) Αρνητική διωνυμική

Λύση

Ασκήσεις στην αρνητική διωνυμική

3. Γνωρίζουμε ότι η τ.μ. X ακολουθεί την αρνητική διωνυμική κατανομή με αναμενόμενη τιμή 0,36 και διακύμανση 1,44. Να βρεθεί η $P(X = 3)$.

Υπόδειξη: $EX = r / p$, $VarX = r(1 – p) / p^2$.

Λύση

Σύνοψη διακριτών κατανομών

Κατανομή	Παράμετροι	Περιγραφή	Πιθανότητα P(X = k)
Διωνυμική	B(n, p)	Ένα πείραμα εκτελείται n φορές με σταθερή πιθανότητα επιτυχίας p και X = {πλήθος επιτυχιών στις n επαναλήψεις}	$P(X=k) = C(n, k)p^k(1-p)^{n-k}$
Υπεργεωμετρική	HG(N,K,n)	Σε ένα σύνολο με N αντικείμενα, υπάρχουν K που έχουν μία ιδιότητα. Εμείς επιλέγουμε n και X = {πλήθος αντικειμένων στα n που έχουν την ιδιότητα}	$P(X=k) = \binom{K}{k}\binom{N-K}{n-k}/\binom{N}{n}$
Poisson	P(λ)	Γεγονότα συμβαίνουν με σταθερό ρυθμό λ γεγονότα / μονάδα χρόνου και ανεξάρτητα το ένα από το άλλο. X = {πλήθος γεγονότων στη μονάδα του χρόνου}	$P(X=k) = e^{-\lambda}\lambda^k/k!$
Γεωμετρική	$G_T(p)$ ή $G_F(p)$	Μία δοκιμασία έχει δύο πιθανά αποτελέσματα, επιτυχία με πιθανότητα p και αποτυχία με πιθανότητα 1 – p. Αν X = {πλήθος δοκιμασιών μέχρι την 1η επιτυχία} και Y = {πλήθος αποτυχιών μέχρι την 1η επιτυχία}, τότε $X \sim G_T(p)$, $Y \sim G_F(p)$ και Y = X – 1.	$P(X=k) = (1-p)^{k-1}p$ $P(Y=k) = (1-p)^k p$
Αρνητική διωνυμική	NB(r, p)	Μία δοκιμασία έχει δύο πιθανά αποτελέσματα, επιτυχία με πιθανότητα p και αποτυχία με πιθανότητα 1 – p. Αν X = {πλήθος δοκιμασιών μέχρι την rη επιτυχία}, τότε X ~ NB(r, p)	$P(X=k)=C(k-1,r-1)p^r(1-p)^{k-r}$

Κατανομές πιθανότητας συνεχών τυχαίων μεταβλητών

Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

Ορισμός

Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας ονομάζεται κάθε συνάρτηση f: R → R που ικανοποιεί τις ιδιότητες

α) $f(x) \geq 0$ σχεδόν παντού. β) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1.$

Κάθε συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας ορίζει μία συνάρτηση κατανομής για μία συνεχή τυχαία μεταβλητή X, ως

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx.$$

Αντίστροφα, αν F_X: R → [0, 1] είναι μία *συνεχώς διαφορίσιμη* συνάρτηση κατανομής πιθανότητας για την τυχαία μεταβλητή X, τότε η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f_{X,}$ ορίζεται ως

$$f(x) = F'(x) = \frac{dF(x)}{dx}$$

Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

Ο προσδιορισμός της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας μίας συνεχούς τυχαίας μεταβλητής, εκτός από τον υπολογισμό πιθανοτήτων της μορφής P(α < X < β), προσφέρει τη δυνατότητα υπολογισμού των γεωμετρικών χαρακτηριστικών της κατανομής.

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx.$$

$$Var(X) = E[(X-\mu)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x)dx.$$

$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx - \mu^2.$$

$$\sigma = \sqrt{Var(X)}.$$

$$\gamma = \frac{E[(X-\mu)^3]}{\sigma^3} = \frac{1}{\sigma^3}\int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^3 f(x)dx.$$

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x)dx.$$

$$\alpha = \frac{E[(X-\mu)^4]}{\sigma^4} = \frac{1}{\sigma^3}\int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^3 f(x)dx.$$

$$G_X(z) = E(z^X) = \int_{-\infty}^{\infty} z^x f(x)dx.$$

Συνήθεις κατανομές συνεχών μεταβλητών

Συνήθεις κατανομές συνεχών μεταβλητών

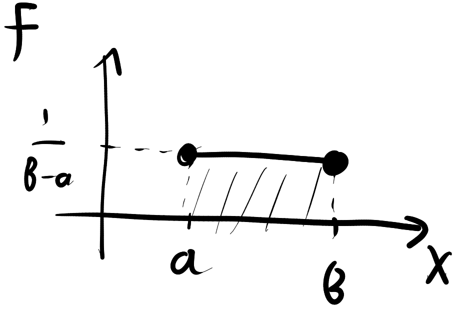
κατανομή	συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας	παράμετροι	μέση τιμή	διακύμανση
Ομοιόμορφη	$\frac{1}{b-a} I_{[a,b]}(x)$	$a, b \in \mathbb{R}, a < b$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
Κανονική	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	$\mu \in \mathbb{R}, \sigma \in \mathbb{R}_+^*$	μ	σ^2
Εκθετική	$\lambda e^{-\lambda x}$	$\lambda > 0$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
Γάμμα	$\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x}$	$\alpha, \beta > 0$	$\frac{\alpha}{\beta}$	α/(β^2)
Βήτα	$\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} I_{(0,1)}(x)$	$\alpha, \beta > 0$	$\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$	$\frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}$
Cauchy	$\left(\pi\beta\left(1+\left(\frac{x-a}{\beta}\right)^2\right)\right)^{-1}$	$\alpha \in \mathbb{R}, \beta > 0$	δεν υπάρχει	δεν υπάρχει
Weibull	$\frac{c}{\alpha} x^{c-1} e^{-\frac{x^c}{\alpha}}$	$\alpha, c > 0$	$\alpha^{\frac{1}{c}} \Gamma\left(1+\frac{1}{c}\right)$	$\alpha^{\frac{2}{c}} \left(\Gamma\left(1+\frac{2}{c}\right) - \Gamma\left(1+\frac{1}{c}\right)^2\right)$

Ομοιόμορφη Κατανομή

$f(x) \geq 0, \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1.$

Ομοιόμορφη Κατανομή

Η συνεχής, ομοιόμορφη κατανομή U(α, β), είναι μία συμμετρική κατανομή πιθανότητας στην οποία, όλα τα υποσύνολα του [α, β] ίσου μήκους είναι ισοπίθανα. Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της X ~ U(α, β) είναι:

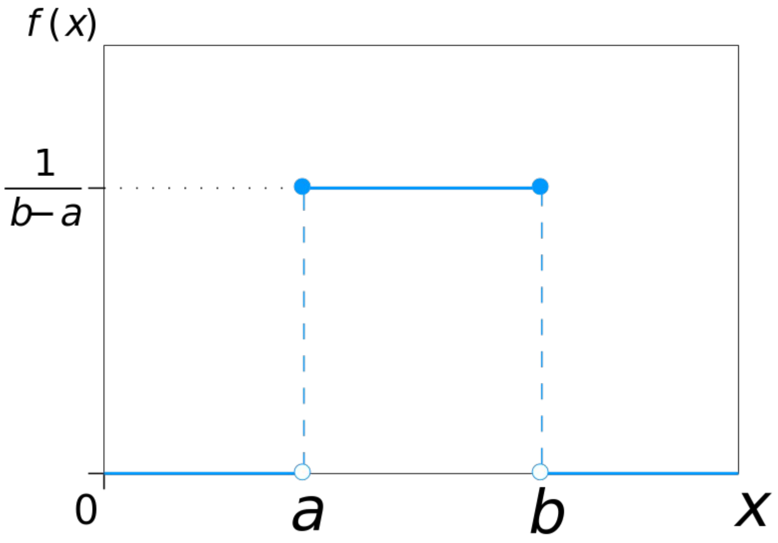


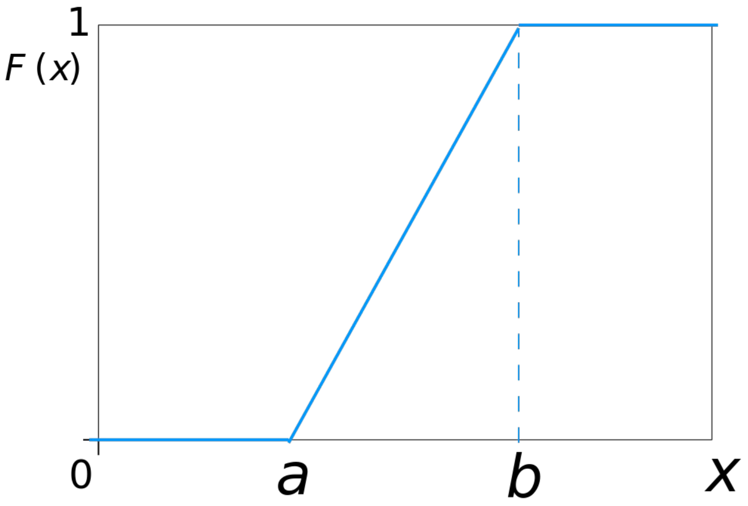
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\beta - \alpha}, & \alpha \leq x \leq \beta, \\ 0, & x < \alpha \text{ ή } x > \beta. \end{cases}$$

ενώ, η συνάρτηση αθροιστικής κατανομής είναι:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < \alpha, \\ \dfrac{x - \alpha}{\beta - \alpha}, & \alpha \leq x \leq \beta, \\ 1, & x > \beta. \end{cases}$$

Ομοιόμορφη Κατανομή





Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας f(x), x є R

(Αθροιστική) Συνάρτηση κατανομής F(x) = P(X ≤ x), x є R

Ομοιόμορφη Κατανομή

Άσκηση 1
Αν Χ ~ U(α, β), τότε να δείξετε ότι Ε(Χ) = (α + β)/2.
Απόδειξη

$$EX = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \int_{a}^{\beta} x \cdot \frac{1}{\beta - a} dx = \frac{1}{\beta - a} \left. \frac{x^2}{2} \right|_{a}^{\beta} = \frac{1}{\beta - a} \cdot \frac{\beta^2 - a^2}{2} = \frac{a + \beta}{2}$$

Ομοιόμορφη: Γεωμετρικά χαρακτηριστικά

$X \sim U(\alpha, \beta)$: $f(x) = 1/(\beta - \alpha)$, $\alpha \leq x \leq \beta$.

$VarX = E(X^2) - (EX)^2$

Αναμενόμενη τιμή: $EX = (\alpha + \beta) / 2$.

Διακύμανση: $VarX = (\beta - \alpha)^2 / 12$.

$$VarX = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - \mu^2$$

Τυπική απόκλιση: $\sigma = (\beta - \alpha)\frac{\sqrt{3}}{6}$.

Ασυμμετρία: $\text{skew}(X) = \gamma = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = 0$

$$\gamma = E\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^3 = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^3 f(x)dx$$

Κυρτότητα: $\text{kurt}(X) = \alpha = \frac{\mu_4}{\sigma^4} = \frac{9}{5}$

Ομοιόμορφη Κατανομή

Άσκηση 2
Αν X ~ U(0, 18), τότε να βρείτε τις πιθανότητες (α) P(X < E(X)), (β) P(X > 12 | X > 8).
Λύση

$$(\alpha)\quad P(X<E(X)) = P(X<9) = \int_{-\infty}^{9} f(x)\,dx = \int_0^9 \frac{1}{18}\,dx = \frac{1}{2}.$$

$$EX = \frac{0+18}{2} = 9$$

$$f(x) = \frac{1}{18},\quad x\in[0,18]$$

$$(\beta)\quad P(X>12 \mid X>8) = \frac{P(X>12,\ X>8)}{P(X>8)} = \frac{P(X>12)}{P(X>8)} = \frac{9}{15}.$$

$$P(X>12) = 1 - P(X\le 12) = 1 - F(12) = 1 - \frac{12-0}{18-0} = \frac{1}{3}$$

$$P(X>8) = 1 - P(X\le 8) = 1 - F(8) = 1 - \frac{8-0}{18-0} = \frac{5}{9}$$

Ομοιόμορφη Κατανομή

Άσκηση 3

Αν X ~ U(1, 2), να βρεθεί s ∊ R, τέτοιο ώστε $P(X > s + \mu_X) = \frac{1}{4}$.

Λύση

$$\mu_X = EX = \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2} \quad , \quad f(x) = \frac{1}{2-1} = 1 \, , \; x \in [1,2] \, .$$

$$P\left(X > s + \frac{3}{2}\right) = \frac{1}{4} \iff \int_{s+\frac{3}{2}}^{+\infty} f(x)\,dx = \frac{1}{4} \overset{(I)}{\iff} \int_{s+\frac{3}{2}}^{2} dx = \frac{1}{4} \iff$$

Πρέπει $1 < s + \frac{3}{2} < 2 \; (I)$

$$\iff 2 - \left(s + \frac{3}{2}\right) = \frac{1}{4} \iff \frac{1}{2} - s = \frac{1}{4} \iff \boxed{s = \frac{1}{4}}$$

Ομοιόμορφη Κατανομή

Άσκηση 4
Γνωρίζουμε ότι η τ.μ. X ακολουθεί ομοιόμορφη κατανομή με αναμενόμενη τιμή 1 και διακύμανση 4/3. Να βρεθεί η P(X < 0).
Λύση

$$X \sim U(a, \beta). \quad \left. \begin{array}{l} EX = 1 \Leftrightarrow \dfrac{a+\beta}{2} = 1 \\ VarX = \dfrac{4}{3} \Leftrightarrow \dfrac{(\beta-a)^2}{12} = \dfrac{4}{3} \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} a+\beta = 2 \\ \beta - a = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \beta = 3 \\ a = -1 \end{array}$$

$$X \sim U(-1,3) \Rightarrow P(X<0) = F(0) = \frac{0-(-1)}{3-(-1)} = \frac{1}{4}.$$

Ομοιόμορφη Κατανομή

Άσκηση 5
Αν X ~ U(0,1) τότε να υπολογισθεί η $E(X^3)$.
Λύση

$$f(x) = \frac{1}{1-0} = 1, \quad x \in [0,1]$$

$$E(X^3) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^3 \cdot f(x)\,dx = \int_0^1 x^3\,dx = \frac{1}{4}.$$

Ομοιόμορφη Κατανομή

Άσκηση 6
Ο χρόνος σε λεπτά που περιμένει κάποιος στην στάση το λεωφορείο (min) ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή U(0, 15).
(α) Να βρεθεί η f(x) και η F(x).
(β) Ποια είναι η πιθανότητα κάποιος να περιμένει λιγότερο από 12,5 min;
(γ) Ποια είναι η αναμενόμενη αναμονή στη στάση και ποια η τυπική απόκλιση αυτής;
Λύση

Εκθετική Κατανομή

Εκθετική Κατανομή

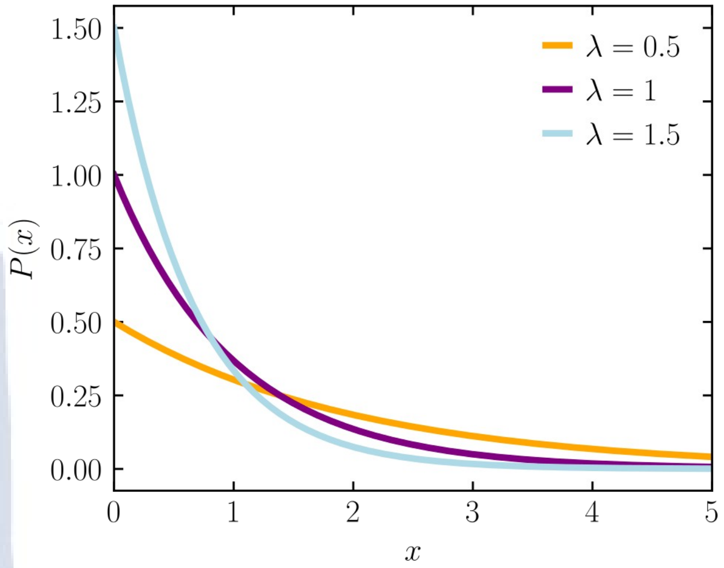
Λέμε ότι η συνεχής τυχαία μεταβλητή X, ακολουθεί την εκθετική κατανομή με παράμετρο λ (γράφουμε X ~ Exp(λ)) αν η κατανομή πιθανότητάς της δίνεται από τη σχέση:

$$F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & , \quad x \geq 0, \\ 0 & , \quad x < 0. \end{cases}$$

Στην περίπτωση αυτή η συνάρτηση πυκνότητας είναι:

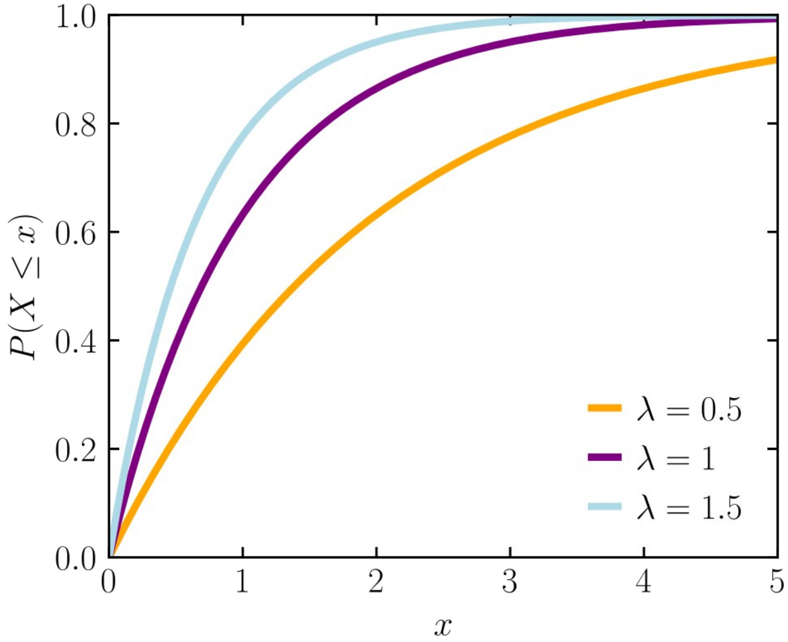
$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & , \quad x \geq 0, \\ 0 & , \quad x < 0. \end{cases}$$

Εκθετική Κατανομή



Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & , \quad x \geq 0, \\ 0 & , \quad x < 0. \end{cases}$$



Αθροιστική) Συνάρτηση κατανομής

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & , \quad x \geq 0, \\ 0 & , \quad x < 0. \end{cases}$$

Εκθετική Κατανομή

Άσκηση 1
Αν X ~ Exp(2) να βρεθούν οι πιθανότητες (α) P(X > 1), (β) P(X < 2), (γ) P(0,5 ≤ X ≤ 2).
Λύση

$$X \sim Exp(2) \Rightarrow P(X>t) = e^{-2t}, \; P(X \leq t) = 1 - e^{-2t}$$

(α) $P(X>1) = e^{-2} = 0,135$ $\qquad F_X(t) = P(X \leq t)$

(β) $P(X<2) = 1 - e^{-4} = 0,982$

(γ) $P(0,5 \leq X \leq 2) = F(2) - F(0,5) = (1-e^{-4}) - (1-e^{-1}) = e^{-1} - e^{-4} =$

$= 0,350$

Εκθετική: Γεωμετρικά χαρακτηριστικά

$X \sim Exp(\lambda)$: $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, $x \geq 0$.

Αναμενόμενη τιμή: $EX = 1 / \lambda$.

Διακύμανση: $VarX = 1 / \lambda^2$.

Τυπική απόκλιση: $\sigma = 1 / \lambda$

Ασυμμετρία: $\gamma = 2$.

Κυρτότητα: $\alpha = 9$.

Η εκθετική ως συνοδευτική κατανομή της κατανομής Poisson

Χρόνος μέχρι το 1ο γεγονός

Έστω ότι γνωρίζουμε πως κάποια γεγονότα συμβαίνουν με ρυθμό λ συμβάντα / μονάδα χρόνου και έστω Y(t) η τυχαία μεταβλητή που περιγράφει το πλήθος των γεγονότων στο χρονικό διάστημα (0, t]. Τότε Y(t) ~ Poisson(λt). Έστω

X_1: ο χρόνος που περνάει από τη χρονική στιγμή 0, μέχρι να συμβεί το 1ο γεγονός.

Αναζητούμε την κατανομή της τ.μ. X, δηλαδή, την τιμή της πιθανότητας $P(X_1 \leq t)$, για $t \geq 0$.
Παρατηρούμε ότι για κάθε $t > 0$,

$\{X_1 > t\}$ = {δεν συμβαίνει κανένα γεγονός στο χρονικό διάστημα (0, t]} = $\{Y(t) = 0\}$,

άρα, $P(X_1 > t) = P(Y(t) = 0) = e^{-\lambda t} \lambda^0/0! = e^{-\lambda t}$ ή $P(X_1 \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$, $t \geq 0$ (και $P(X_1 \leq t) = 0$, $t < 0$),

Δηλαδή **η τ.μ. X_1 έχει τη συνάρτηση κατανομής της εκθετικής κατανομής με παράμετρο λ.**
Συμπεραίνουμε ότι X_1 ~ Exp(λ).

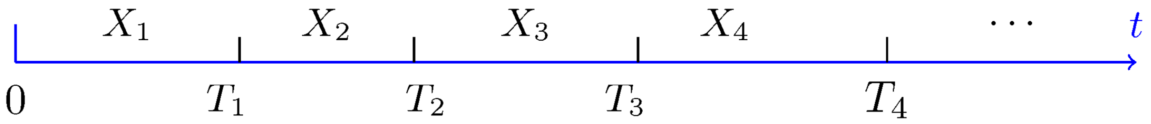
Χρόνος μέχρι το 1ο γεγονός

Βρήκαμε, ότι αν X_1: ο χρόνος που περνάει μέχρι να συμβεί το 1ο γεγονός, τότε $X_1 \sim$ Exp(λ).

Άμεσα συμπεράσματα είναι τα εξής:

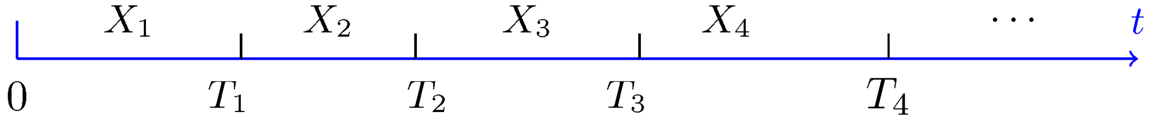
- Αναμενόμενος χρόνος μέχρι το 1ο γεγονός: $E(X_1) = 1/\lambda$
- Διασπορά χρόνου μέχρι το 1ο γεγονός: $Var(X_1) = 1/\lambda^2$ (τυπική απόκλιση $\sigma = 1/\lambda$).

Το επόμενο βήμα είναι να βρούμε την κατανομή του χρόνου X_i, i = 2, 3, …, που μεσολαβεί μεταξύ οποιωνδήποτε δύο συμβάντων.



Χρονικό διάστημα μεταξύ γεγονότων

Έστω ότι το n-1 γεγονός έχει συμβεί τη χρονική στιγμή s και X_n το χρονικό διάστημα που μεσολαβεί μεταξύ του n-1 και του n γεγονότος. Αναζητούμε την κατανομή πιθανότητας της X_n.



Ορίζουμε Y(t) = {πλήθος γεγονότων στο (0, t]}. Τότε Y(t) ~ Poisson(λt) και

$P(X_n > t)$ = P({κανένα γεγονός στο διάστημα (s, s+t]})

$= P(Y(s + t) – Y(s) = 0)$

$= P(Y(s + t – s) = 0)$ (τα γεγονότα εμφανίζονται ανεξάρτητα το ένα από το άλλο)

$= P(Y(t) = 0)$ (άρα η εμφάνιση ενός γεγονότος εξαρτάται μόνο από το χρόνο που περνά)

$= e^{-\lambda t}$.

Όμοια με την περίπτωση της X_1 συμπεραίνουμε, ότι $P(X_n > t) = e^{-\lambda t}$ ή

$$P(X_n \le t) = 1 – e^{-\lambda t},\ t \ge 0 \text{ (και } P(X_n \le t) = 0,\ t < 0\text{).}$$

Παρατηρούμε ότι **η τ.μ. X_n έχει την αθροιστική συνάρτηση κατανομής της εκθετικής κατανομής με παράμετρο λ, δηλαδή X_n ~ Exp(λ).**

Εύρεση εκθετικής από τη συνοδευτική Poisson

Παράδειγμα
Ας υποθέσουμε ότι κατά μέσο όρο έρχονται σε ένα εμπορικό κατάστημα 30 πελάτες ανά ώρα. Υποθέτουμε ότι οι αφίξεις είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους.

Αν Y = {αναμενόμενο πλήθος πελατών σε μία ώρα} τότε $Y \sim \text{Poisson}(30)$.

Έστω X = {χρόνος αναμονής μεταξύ δύο πελατών}. Είναι $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ και $EX = 1/\lambda$.

Όμως, έρχονται 30 πελάτες / ώρα = 1 πελάτης / 2 λεπτά, άρα ο αναμενόμενος χρόνος αναμονής είναι 2 λεπτά.

Συμπεραίνουμε, $EX = 1/\lambda \leftrightarrow 2 = 1/\lambda \leftrightarrow \lambda = 2$ και $X \sim \text{Exp}(2)$ και είμαστε σε θέση να υπολογίσουμε ερωτήματα που αφορούν το χρόνο αναμονής.

Παράδειγμα Poisson - Εκθετική

Παράδειγμα

Έστω ότι γνωρίζουμε πως κάποια γεγονότα συμβαίνουν με ρυθμό $\lambda = 5$ αφίξεις / min και έστω Y = {πλήθος γεγονότων στη μονάδα του χρόνου}. Τότε $Y \sim$ Poisson(5). Να βρεθούν:

(α) το χρονικό διάστημα που αναμένεται να περάσει έως την $1^{η}$ άφιξη.

(β) η πιθανότητα η $1^{η}$ άφιξη να καθυστερήσει περισσότερο από μισό λεπτό.

Λύση

(α) $E(X_1) = 1/\lambda = 1/5$ min $= 0{,}2$ min $= 12$ sec.

(β) Γνωρίζουμε ότι $X_1 \sim \mathrm{Exp}(\lambda) = \mathrm{Exp}(5)$. Είναι:

$$P(X_1 > 0{,}5) = 1 - P(X_1 \leq 0{,}5) = 1 - (1 - e^{-\lambda t}) = 1 - (1 - e^{-5 \cdot 0{,}5}) = e^{-2{,}5} = 0{,}082 = 8{,}2\%$$

Η εκθετική κατανομή ως μία κατανομή με “απώλεια μνήμης”

Έστω $X \sim Exp(\lambda)$. Τότε, $F(x) = 1 – e^{-\lambda x}$, $x \geq 0$, και

$$
\begin{aligned}
P(X > t + \alpha \mid X > \alpha) &= P(X > t + \alpha, X > \alpha) / P(X > \alpha) \\
&= P(X > t + \alpha) / P(X > \alpha) \\
&= (1 – F(t + \alpha)) / (1 – F(\alpha)) \\
&= e^{-\lambda(t + \alpha)} / e^{-\lambda\alpha} \\
&= e^{-\lambda t} \\
&= P(X > t).
\end{aligned}
$$

Παρατηρούμε, ότι **η τυχαία μεταβλητή X, χαρακτηρίζεται από “απώλεια μνήμης”**, δηλαδή πως η κατανομή των τιμών της μετά την τιμή α, είναι ανεξάρτητη του α.

Σημείωση: Η αντίστοιχη διακριτή κατανομή με την ιδιότητα της έλλειψης μνήμης (αποδεικνύεται ότι) είναι η γεωμετρική (το πλήθος των δοκιμασιών που έχουμε ήδη κάνει προσπαθώντας να πετύχουμε μία επιτυχία δεν συσχετίζεται με το πλήθος των δοκιμασιών που θα κάνουμε στο μέλλον, αφού κάθε μία δοκιμή είναι ανεξάρτητη από τις υπόλοιπες με σταθερή πιθανότητα επιτυχίας κάθε φορά).

Κατανοώντας την ιδιότητα “απώλειας μνήμης”

Η ιδιότητα της απώλειας μνήμης φαίνεται εκ πρώτης όψεως παράδοξη. Δηλαδή, προκύπτει το ερώτημα:

“Αν υπάρχει μία ακολουθία γεγονότων που εξελίσσονται με ρυθμό λ και εγώ αρχίζω να παρατηρώ το σύστημα μία ορισμένη χρονική στιγμή, τότε πως είναι δυνατόν να μην συσχετίζεται ο χρόνος που θα περιμένω μέχρι το επόμενο γεγονός με το χρόνο που ήδη έχει περάσει από το προηγούμενο γεγονός;”

Η απάντηση κρύβεται σε δύο σημαντικές λεπτομέρειες:

- **Τα γεγονότα συμβαίνουν ανεξάρτητα το ένα από το άλλο**
- **Ο πιθανός χρόνος αναμονής δεν έχει άνω όριο.**

Δηλαδή, η “απώλεια μνήμης” της εκθετικής κληρονομείται από την βασική προϋπόθεση της κατανομής Poisson πως τα γεγονότα συμβαίνουν ανεξάρτητα το ένα με το άλλο (η οποία ανεξαρτησία με τη σειρά της κληρονομήθηκε από την ανεξαρτησία των δοκιμών στη διωνυμική κατανομή)

Κατανοώντας την ιδιότητα “απώλειας μνήμης”

Το γεγονός της “απώλειας μνήμης” έχει και μία απλή και ενδιαφέρουσα γεωμετρική αναπαράσταση: Καθώς, κάθε πιθανότητα ερμηνεύεται ως ένα εμβαδόν της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας και κάθε δεσμευμένη πιθανότητα ως πιθανότητα σε περιορισμένο δειγματοχώρο, μπορούμε να αναγνωρίσουμε τη σχέση

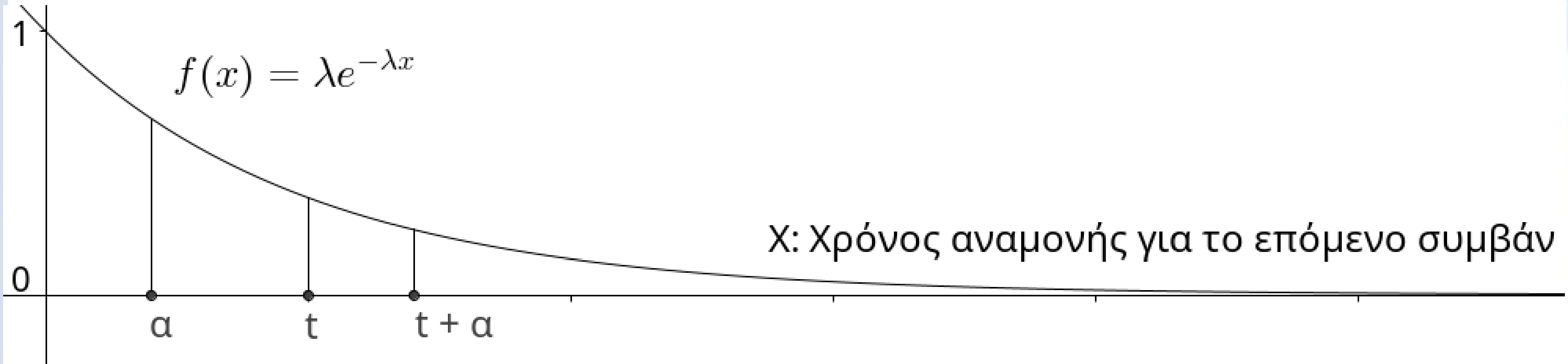
$$P(X > t + \alpha \mid X > \alpha) = P(X > t)$$

ως μία μοναδική αλγεβρική ιδιότητα της συνάρτησης $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ που αντανακλάται σε μία ιδιαίτερη συμμετρία της γραφικής της παράστασης. Αν

- A = {εμβαδόν της $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, μεταξύ x’x, για $x \in (t + \alpha, +\infty)$}
- B = {εμβαδόν της $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, μεταξύ x’x, για $x \in (\alpha, +\infty)$}
- Γ = {εμβαδόν της $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, μεταξύ x’x, για $x \in (t, +\infty)$},

τότε A / B = Γ.

Κατανοώντας την ιδιότητα “απώλειας μνήμης”



$$P(X > t + \alpha | X > \alpha) = \frac{\int_{t+\alpha}^{\infty} f(x)dx}{\int_{\alpha}^{\infty} f(x)dx} = \int_{t}^{\infty} f(x)dx = P(X > t)$$

Κατανοώντας την ιδιότητα “απώλειας μνήμης”

Παράδειγμα

Ας υποθέσουμε ότι κατά μέσο όρο έρχονται σε ένα εμπορικό κατάστημα 30 πελάτες ανά ώρα. Υποθέτουμε επίσης ότι οι αφίξεις είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους.

Ας υποθέσουμε ότι έχουν περάσει 10 λεπτά από την άφιξη του τελευταίου πελάτη. Δεδομένου ότι πρόκειται για ασυνήθιστα μεγάλο χρονικό διάστημα, φαίνεται πιο πιθανό για έναν πελάτη να φτάσει μέσα στο επόμενο λεπτό.

Ωστόσο, αυτό αποδεικνύεται ότι δεν συμβαίνει.

Ο χρόνος αναμονής για την άφιξη του επόμενου πελάτη δεν εξαρτάται από τον χρόνο που έχει περάσει από την άφιξη του τελευταίου πελάτη.

Κατανοώντας την ιδιότητα “απώλειας μνήμης”

Ας υποθέσουμε ότι ο μέσος χρόνος ενός τηλεφωνήματος σε ένα καρτοτηλέφωνο είναι 5 min και πως η διάρκεια του τηλεφωνήματος ακολουθεί την εκθετική κατανομή.

Τότε $EX = 1/\lambda \leftrightarrow \lambda = 5$ και αν X = {διάρκεια ενός τηλεφωνήματος}, θα είναι $X \sim Exp(1/5)$.

Αν θέλεις να πάρεις τηλέφωνο και βρεις κάποιον εκεί ήδη να τηλεφωνεί, τότε η κατανομή του χρόνου που θα περιμένεις μέχρι να τελειώσει το τηλεφώνημα θα είναι και αυτός Exp(1/5) **ανεξάρτητα από το χρόνο που έχει ήδη μιλήσει ο προηγούμενος**.

Δηλαδή, η γνώση του χρόνου που έχει ήδη μεσολαβήσει, δεν βοηθάει στην πρόβλεψη του χρόνου που απομένει μέχρι να γίνει το επόμενο συμβάν.

Παράδειγμα “μη απώλειας μνήμης”

Είναι γνωστό ότι μια συγκεκριμένη μάρκα φορητών υπολογιστών διαρκούν περίπου 6 χρόνια, κατά μέσο όρο, πριν σταματήσουν να λειτουργούν. Έτσι, αν γνωρίζουμε ότι ένας συγκεκριμένος φορητός υπολογιστής είναι 5 ετών τότε ο αναμενόμενος χρόνος μέχρι να χαλάσει είναι αρκετά μικρός. Ωστόσο, εάν ένας άλλος φορητός υπολογιστής είναι μόλις 1 έτους, τότε ο αναμενόμενος χρόνος μέχρι να χαλάσει είναι αρκετά μεγάλος.

Σε αυτό το παράδειγμα, γνωρίζοντας το χρονικό διάστημα που έχει περάσει κατά τη διάρκεια ζωής κάθε φορητού υπολογιστή, μας ενημερώνει για πόσο καιρό ο φορητός υπολογιστής θα συνεχίσει να λειτουργεί μέχρι να πεθάνει. Έτσι, αυτή η κατανομή πιθανοτήτων δεν θα έχει μια ιδιότητα χωρίς μνήμη.

Αντίστοιχο είναι και το παράδειγμα της στάσης λεωφορείου όπου είναι βέβαιο ότι θα έρθει μία συγκεκριμένη χρονική στιγμή το επόμενο λεωφορείο. Στην περίπτωση αυτή, αν βρεθούμε τυχαία στη στάση μία χρονική στιγμή, ο χρόνος αναμονής για την επόμενη άφιξη λεωφορείου θα ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή.

Η σημαντική αλγεβρική διαφορά της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας των παραπάνω κατανομών σε σχέση με αυτήν της εκθετικής είναι πως οι παραπάνω είναι διάφορες του μηδενός σε ένα διάστημα πεπερασμένου μήκους, σε αντίθεση με την εκθετική που έχει μη μηδενικές τιμές στο $(0, +\infty)$.

Η εκθετική κατανομή ως η μόνη κατανομή συνεχούς μεταβλητής με “απώλεια μνήμης” 1/5

Πρόταση: Έστω f μία συνεχής, μη μηδενική, πραγματική συνάρτηση για την οποία ισχύει $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$ για κάθε x, y є R. Τότε $f(x) = e^{cx}$, για κάποια σταθερά c є R.

Απόδειξη

Αρχικά, παρατηρούμε ότι η συνάρτηση είναι θετική. Πράγματι, για κάθε x є R:
$f(x) = f(x/2 + x/2) = f(x/2)^2 \geq 0 \leftrightarrow f(x) > 0$ καθώς η f δεν είναι ταυτοτικά μηδενική.

Θέτοντας x = y = 0 παίρνουμε, $f(0) = f(0)^2 \leftrightarrow f(0) = 0$ ή $1 \leftrightarrow$ **f(0) = 1** καθώς $f(x) \neq 0$.

Τώρα, παρατηρούμε ότι από την υπόθεση $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$, γενικότερα προκύπτει ότι:

$$\mathbf{f(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) = f(x_1) \cdot f(x_2) \cdot \ldots \cdot f(x_n)}$$

Η εκθετική κατανομή ως η μόνη κατανομή συνεχούς μεταβλητής με “απώλεια μνήμης” 2/5

Πρόταση: Έστω f μία συνεχής, μη μηδενική, πραγματική συνάρτηση για την οποία ισχύει $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$ για κάθε x, y є R. Τότε $f(x) = e^{cx}$, για κάποια σταθερά c є R.

Απόδειξη
Εφαρμόζοντας την τελευταία σχέση για τον φυσικό αριθμό n є N, υπολογίζουμε:

$$f(n) = f(1 + 1 + \ldots + 1) = f(1)^n$$

Τώρα, αν m є $Z^- = \{\ldots, -3, -2, -1, 0\}$, τότε -m є N, και $f(-m) = f(1)^{-m}$. Επιπλέον:

$$f(m) \cdot f(-m) = f(m - m) = f(0) = 1, \text{ άρα } f(m) = f(-m)^{-1} = [f(1)^{-m}]^{-1} = f(1)^m,$$

Δηλαδή **$f(m) = f(1)^m$, m є Z.**

Η εκθετική κατανομή ως η μόνη κατανομή συνεχούς μεταβλητής με “απώλεια μνήμης” 3/5

Πρόταση: Έστω f μία συνεχής, μη μηδενική, πραγματική συνάρτηση για την οποία ισχύει $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$ για κάθε x, y ϵ R. Τότε $f(x) = e^{cx}$, για κάποια σταθερά c ϵ R.

Απόδειξη
Περνώντας από τους ακέραιους στους ρητούς, παρατηρούμε ότι για κάθε ρητό 1/λ με λ ϵ N^* είναι:

$$f(1) = f(1/\lambda) + f(1/\lambda) + \ldots + f(1/\lambda) \text{ (λ φορές)}= [f(1/\lambda)]^\lambda \leftrightarrow f(1/\lambda) = f(1)^{1/\lambda},$$

Ενώ αξιοποιώντας την $f(1/\lambda) \cdot f(-1/\lambda)= f(1/\lambda - 1/\lambda) = f(0) = 1$, βρίσκουμε ότι το ίδιο ισχύει για λ ϵ Z^-. Γενικότερα, αν κ/λ ϵ Q με $\kappa \geq 0$, $\lambda > 0$, τότε

$$f(\kappa/\lambda) = f(1/\lambda + 1/\lambda + \ldots + 1/\lambda) \text{ (κ φορές)} = f(1/\lambda)^\kappa = f(1)^{\kappa/\lambda}.$$

Συμπέρασμα που ανάλογα γενικεύεται για κ ϵ Z, λ ϵ Z^*.

Η εκθετική κατανομή ως η μόνη κατανομή συνεχούς μεταβλητής με “απώλεια μνήμης” 4/5

Πρόταση:Έστω f μία συνεχής, μη μηδενική, πραγματική συνάρτηση για την οποία ισχύει $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$ για κάθε x, y є R. Τότε $f(x) = e^{cx}$, για κάποια σταθερά c є R.

Απόδειξη
Έχοντας αποδείξει ότι $f(\rho) = f(1)^{\rho}$, για κάθε ρ є Q, η συνέχεια είναι απλή:

Οι ρητοί είναι πυκνοί στους πραγματικούς, άρα για κάθε x є R – Q, υπάρχει ακολουθία ρητών αριθμών $\rho_n \rightarrow x$. Καθώς η συνάρτηση f είναι συνεχής είναι:

$$f(x) = f(\lim_{n\to\infty} \rho_n) = \lim_{n\to\infty} f(\rho_n) = \lim_{n\to\infty} f(1)^{\rho n} = f(1)^{\lim n\to\infty \rho n} = f(1)^x. = e^{cx}, \text{ για } c = \ln(f(1)).$$

Η εκθετική κατανομή ως η μόνη κατανομή συνεχούς μεταβλητής με “απώλεια μνήμης” 5/5

Θεώρημα

Έστω X μία συνεχής θετική πραγματική τυχαία μεταβλητή. Η X ικανοποιεί την συνθήκη “απώλειας μνήμης”

$$P(X > t + \alpha \mid X > \alpha) = P(X > t),\ t > 0,\ \alpha \in R,$$

αν και μόνο αν ακολουθεί την εκθετική κατανομή, δηλαδή $X \sim Exp(\lambda)$ για κάποιο $\lambda \in R$.

Απόδειξη

Αρκεί να δείξουμε ότι $P(X \leq x) = 1 - e^{cx}$ για κάποια πραγματική σταθερά c. Από τη σχέση $P(X > t + \alpha \mid X > \alpha) = P(X > t)$ και τον ορισμό της δεσμευμένης πιθανότητας παίρνουμε

$$P(X > t + \alpha, X > \alpha) = P(X > t) \cdot P(X > \alpha) \leftrightarrow P(X > t + \alpha) = P(X > t) \cdot P(X > \alpha)$$

Θεωρούμε την πραγματική συνάρτηση **$f(x) = P(X > x)$** και παρατηρούμε ότι

$$f(x + y) = P(X > x + y) = P(X > x) \cdot P(X > \alpha) = f(x) \cdot f(y).$$

Καθώς, η f είναι συνεχής και μη μηδενική, από το προηγούμενο θεώρημα προκύπτει ότι $f(x) = e^{cx}$, για κάποια σταθερά $c \in R$ ή ισοδύναμα ότι $P(X > x) = e^{cx}$, από όπου προκύπτει $P(X \leq x) = 1 - e^{cx}$ ή **$X \sim Exp(c)$.**

Φυσική σημασία της παραμέτρου στην εκθετική κατανομή

Από τα παραπάνω γίνεται σαφές πως η παράμετρος λ στην εκθετική κατανομή μπορεί να αποκτήσει κάποια φυσική σημασία μόνο μέσα από την κατανομή Poisson που τη συνοδεύει ως η κατανομή που περιγράφει το πλήθος κάποιων γεγονότων στη μονάδα του χρόνου.

Δηλαδή, αν X είναι μία μεταβλητή που εκφράζει χρονικό διάστημα και X ~ Exp(λ), τότε

- Μπορεί να οριστεί και μία Y ~ Poisson(λ) που εκφράζει πλήθος (κάποιων) συμβάντων που συμβαίνουν στη μονάδα του χρόνου,
- Το λ θα είναι το μέσο πλήθος συμβάντων στη μονάδα του χρόνου και σε αυτό το πλαίσιο
- Η X ~ Exp(λ) εκφράζει το χρόνο που μεσολαβεί μεταξύ δύο οποιωνδήποτε συμβάντων.

Παράδειγμα

Έστω μία διαδικασία αφίξεων που συμβαίνει με ρυθμό λ = 2 συμβάντα / λεπτό και έστω X_1, X_2, …,, οι αντίστοιχοι χρόνοι μεταξύ των γεγονότων.
(α) Να βρείτε την πιθανότητα η πρώτη άφιξη να καθυστερήσει περισσότερο από μισό λεπτό.
(β) Αν γνωρίζουμε ότι δεν συνέβη κάποιο γεγονός έως το 1ο λεπτό, να βρεθεί η πιθανότητα το 1ο γεγονός να συμβεί μετά το 3ο λεπτό.
(γ) Αν γνωρίζουμε ότι το 3ο γεγονός έγινε το 2ο λεπτό, να βρεθεί η πιθανότητα, το 4ο γεγονός να συμβεί μετά το 4ο λεπτό.

(α) $X_1 = \{\text{χρόνος μέχρι την 1η άφιξη}\} \Rightarrow X_1 \sim Exp(2) \mid X_i \sim Exp(2),\ i \in \mathbb{N}.$

$P(X_1 > 0,5) = e^{-2\cdot 0,5} = e^{-1} = 0,368$

(β) $P(X_1 > 3 \mid X_1 > 1) = P(X_1 > 1+2 \mid X_1 > 1) = P(X_1 > 2) = e^{-4} = 0,0183$

(γ) $P(X_4 > 2) = e^{-4} = 0,0183.$

Παράδειγμα

(α) Να βρείτε την πιθανότητα η πρώτη άφιξη να καθυστερήσει περισσότερο από μισό λεπτό.

Λύση

Είναι $X_1 \sim Exp(\lambda)$ και $\lambda = 2$, άρα $X_1 \sim Exp(2)$.

Υπολογίζουμε $P(X_1 > 0{,}5) = e^{-2 \cdot 0{,}5} = e^{-1} = 0{,}368 = 36{,}8\%$.

(β) Αν γνωρίζουμε ότι δεν συνέβη κάποιο γεγονός έως το 1ο λεπτό, να βρεθεί η πιθανότητα το 1ο γεγονός να συμβεί μετά το 3ο λεπτό.

Λύση

$P(X_1 > 3 \mid X_1 > 1) = P(X_1 > 1 + 2 \mid X_1 > 1) = P(X_1 > 2) = e^{-2 \cdot 2} = e^{-4} = 0{,}0183 = 1{,}83\%$

Παράδειγμα

(γ) Αν γνωρίζουμε ότι το 3ο γεγονός έγινε το 2ο λεπτό, να βρεθεί η πιθανότητα, το 4ο γεγονός να συμβεί μετά το 4ο λεπτό.

Λύση

Αν X_3 ο χρόνος που μεσολαβεί μεταξύ 2η και 3η μέτρηση τότε $X_3 \sim Exp(2)$.
Αν X_4 ο χρόνος που μεσολαβεί μεταξύ 3η και 4η μέτρηση τότε $X_4 \sim Exp(2)$.

{το 4ο γεγονός συμβαίνει μετά το 4ο λεπτό} = $\{X_4 > 4\}$
{το 3ο γεγονός έγινε το 2ο λεπτό} = $\{X_1 + X_2 + X_3 = 2\}$

P({το 4ο γεγονός συμβαίνει μετά το 4ο λεπτό} | {το 3ο γεγονός έγινε το 2ο λεπτό}) =

$= P(X_4 > 4 \mid X_1 + X_2 + X_3 = 2)$

$= P(X_4 > 4 - 2) = P(X_4 > 2)$ (ανεξαρτησία των γεγονότων)

$= e^{-2 \cdot 2} = e^{-4} = 0{,}0183 = 1{,}83\%$

$X \sim Exp(\lambda)$: Σύνοψη

- λ: ρυθμός με τον οποίο συμβαίνουν κάποια γεγονότα.
- X = {χρόνος μεταξύ δύο γεγονότων}
- $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, x \geq 0$
- $F(x) = P(X \leq x) = 1 - e^{-\lambda x}, x \geq 0.$
- $EX = 1 / \lambda$ (αναμενόμενος χρόνος μεταξύ δύο γεγονότων)
- $VarX = 1 / \lambda^2$
- $P(X > t + \alpha \mid X > \alpha) = P(X > t), t > 0, \alpha \in R$, (ιδιότητα απώλειας μνήμης)
  (ο χρόνος που θα περιμένεις δεν εξαρτάται από το πόσο ήδη περιμένεις, συνέπεια της ανεξαρτησίας των γεγονότων και της έλλειψης άνω φράγματος στις τιμές της X)

Ασκήσεις στην εκθετική κατανομή

1. Δείξτε ότι αν η τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί την εκθετική κατανομή με μέση τιμή EX = θ, τότε P(X > x) = $e^{-x/\theta}$.

$$X \sim Exp\left(\frac{1}{\theta}\right) \Rightarrow P(X > x) = e^{-\frac{1}{\theta}\cdot x} = e^{-x/\theta}.$$

$$EX = \theta = \frac{1}{\lambda} \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{\theta}$$

Ασκήσεις στην εκθετική κατανομή

2. Έχει παρατηρηθεί πως οι ταξιδιώτες αγοράζουν τα αεροπορικά τους εισιτήρια πριν το ταξίδι σε ένα πλήθος ημερών X που ακολουθεί εκθετική κατανομή. Το μέσο πλήθος ημερών είναι ίσο με 15 ημέρες.
(α) Βρείτε την πιθανότητα ένας ταξιδιώτης να αγοράσει ένα εισιτήριο έως και 10 ημέρες πριν από το ταξίδι που θα κάνει.
(β) Ποιο είναι το διάστημα μέσα στο οποίο αγοράζουν εισιτήριο οι μισοί από τους ταξιδιώτες;
Υπόδειξη: Αξιοποιήστε την 1η άσκηση.

Λύση

$X \sim Exp(\lambda)$, $EX = \frac{1}{\lambda} = 15 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{15}$.

(α) $X = \{$ημέρες πριν το ταξίδι που συμβαίνει η αγορά$\} \sim Exp(\frac{1}{15})$.

$$P(X \leq 10) = 1 - e^{-\frac{10}{15}} = 0{,}487.$$

(β) $t = ;$ $P(X \leq t) = 0{,}5 \Leftrightarrow 1 - e^{-\frac{t}{15}} = 0{,}5 \Leftrightarrow e^{-\frac{t}{15}} = 0{,}5 \Leftrightarrow -\frac{t}{15} = \ln 0{,}5$

$\Leftrightarrow t = -15 \cdot \ln 0{,}5 = 10{,}4$ ημέρες

$P(X > EX) = P(X > \frac{1}{\lambda}) = e^{-\lambda \cdot \frac{1}{\lambda}} = e^{-1}.$

Ασκήσεις στην εκθετική κατανομή

3. Κατά μέσο όρο, ένα συγκεκριμένο εξάρτημα υπολογιστή διαρκεί 10 χρόνια. Γνωρίζουμε ότι το χρονικό διάστημα που διαρκεί το εξάρτημα του υπολογιστή κατανέμεται εκθετικά.
(α) Ποια είναι η πιθανότητα ένα εξάρτημα υπολογιστή να διαρκεί περισσότερο από 7 χρόνια;
(β) Κατά μέσο όρο, πόσο θα διαρκούσαν πέντε εξαρτήματα υπολογιστή εάν χρησιμοποιούνται το ένα μετά το άλλο;
(γ) Ποια είναι η διάρκεια ζωής του 80% των εξαρτημάτων αυτού του τύπου;
(δ) Ποια είναι η πιθανότητα ένα εξάρτημα υπολογιστή να διαρκέσει από 9 έως 11 χρόνια;
Υπόδειξη για το (β): Η αναμενόμενη τιμή έχει την αθροιστική ιδιότητα.

Λύση

$X = \{$διάρκεια ζωής του εξαρτήματος$\}$, $EX = 10$.

$X \sim Exp(\lambda)$, $EX = \frac{1}{\lambda} = 10 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{10}$ και $X \sim Exp(\frac{1}{10})$.

(α) $P(X > 7) = e^{-\frac{7}{10}} = 0{,}497$

(β) $X_1, X_2, \ldots, X_5$: διάρκεια ζωής του $1^{ου}, 2^{ου}, \ldots, 5^{ου}$ εξαρτ.

$E(X_1 + X_2 + \ldots + X_5) = \frac{5}{1/10} = 50$ χρ.

(γ) $P(X < t) = 0{,}8 \Leftrightarrow 1 - e^{-\frac{t}{10}} = 0{,}8 \Leftrightarrow e^{-\frac{t}{10}} = 0{,}2 \Leftrightarrow -\frac{t}{10} = \ln 0{,}2 \Leftrightarrow t = -10 \ln 0{,}2 = 16{,}1$ χρ.

(δ) $P(9 < X < 11) = F(11) - F(9)$
$= (1 - e^{-11/10}) - (1 - e^{-9/10}) =$
$= e^{-9/10} - e^{-11/10} = 0{,}0737.$

Ασκήσεις στην εκθετική κατανομή

4. Κατά μέσο όρο, ένα ζευγάρι παπούτσια για τρέξιμο διαρκεί 18 μήνες εάν χρησιμοποιείται κάθε μέρα. Γνωρίζουμε ότι η διάρκεια ενός ζευγαριού κατανέμεται εκθετικά.
(α) Ποια είναι η πιθανότητα ένα ζευγάρι παπούτσια για τρέξιμο να διαρκέσει περισσότερο από 15 μήνες;
(β) Κατά μέσο όρο, πόσο θα διαρκέσουν έξι ζευγάρια παπούτσια για τρέξιμο αν χρησιμοποιηθούν το ένα μετά το άλλο;
(γ) Πόσους μήνες αντέχει το 80% των παπουτσιών που χρησιμοποιούνται κάθε μέρα;

Λύση

$X = \{\text{διάρκεια ζωής}\} \sim Exp\left(\frac{1}{18}\right)$

$EX = 18 \Leftrightarrow \frac{1}{\lambda} = 18 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{18}$

(α) $P(X > 15) = e^{-\frac{15}{18}} = 0,435$

(β) $E(X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6) = E(X_1) + \dots + E(X_6) = 6 \cdot 18 = 108$ μήνες

$X_i = \{\text{διάρκεια ζωής του } i \text{ ζευγαριού}\}, \; i = 1, 2, \dots, 6 \Rightarrow X_i \sim Exp\left(\frac{1}{18}\right)$

(γ) $P(X < t) = 0,8 \Leftrightarrow 1 - e^{-\frac{t}{18}} = 0,8 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow e^{-\frac{t}{18}} = 0,2 \Leftrightarrow t = -18 \cdot \ln 0,2 \simeq 29$ μήνες

Ασκήσεις στην εκθετική κατανομή

5. Ο αριθμός των χιλιομέτρων που μπορεί να διανύσει ένα συγκεκριμένο αυτοκίνητο πριν τελειώσει η μπαταρία του κατανέμεται εκθετικά με μέσο όρο 50.000 χιλιόμετρα. Ο ιδιοκτήτης του αυτοκινήτου πρέπει να κάνει ένα ταξίδι 5.000 χιλιομέτρων. Ποια είναι η πιθανότητα να μπορέσει να ολοκληρώσει το ταξίδι χωρίς να χρειαστεί να αντικαταστήσει την μπαταρία του αυτοκινήτου;

Λύση $X = \{$αρ. χλμ πριν τελειώσει η μπαταρία$\} \sim Exp\left(\frac{1}{50.000}\right)$

$$P(X > 5.000) = e^{-\frac{5.000}{50.000}} = e^{-\frac{1}{10}} = 0,905 = 90,5\%$$

Ασκήσεις στην εκθετική κατανομή

6. Σε ένα συγκεκριμένο τμήμα της Εγνατίας οδού, περνούν πέντε αυτοκίνητα ανά λεπτό. Υποθέτουμε ότι το χρονικό διάστημα μεταξύ των διαδοχικών διελεύσεων ακολουθεί την εκθετική κατανομή

(α) Πόσα δευτερόλεπτα περνούν κατά μέσο όρο μεταξύ δύο διαδοχικών αυτοκινήτων;

(β) Αφού περάσει ένα αυτοκίνητο, πόσο χρόνο θα χρειαστούν κατά μέσο όρο για να περάσουν άλλα επτά αυτοκίνητα;

(γ) Βρείτε την πιθανότητα ότι αφού περάσει ένα αυτοκίνητο, το επόμενο αυτοκίνητο θα περάσει μέσα στα επόμενα 20 δευτερόλεπτα.

(δ) Βρείτε την πιθανότητα ότι αφού περάσει ένα αυτοκίνητο, δεν θα περάσει άλλο για τουλάχιστον άλλα 15 δευτερόλεπτα.

Λύση $\lambda = 5$ Δ.Χ./min . $X = \{$πλήθος Δ.Χ./min$\} \Rightarrow X \sim Poisson(5)$

$Y = \{$χρονικό διάστημα μεταξύ 2 διελεύσεων$\} \Rightarrow Y \sim Exp(5)$.

(α) $EY = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{5}$ min $= 12$ sec.

(β) $Z = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_7$, $EZ = 7 \cdot \frac{1}{5} = 1,4$ min

(γ) $P(Y < \frac{1}{3}) = 1 - e^{-\frac{5}{3}} = 0,811$.

(δ) $P(Y > \frac{1}{4}) = \dots$