

Ασκήσεις Εμπέδωσης

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. Στον πίνακα παρουσιάζεται η κοινή συνάρτηση μάζας πιθανότητας $f_{X,Y}$. Να βρείτε:

(α) Τις περιθώριες κατανομές f_X, f_Y .

(β) Είναι οι X, Y ανεξάρτητες;

(γ) Τη συνδιακύμανση $Cov(X, Y)$

(δ) Το συντελεστή συσχέτισης $Corr(X, Y)$

$f_{X,Y}$	$Y = 0$	$Y = 1$	$Y = 2$
$X = 1$	1/8	0	1/8
$X = 2$	0	4/8	2/8

2. Γνωρίζουμε ότι το 10% των email που λαμβάνει ένας φοιτητής είναι spam. Μία ημέρα δέχθηκε 7 email. Να βρεθεί η πιθανότητα

(α) τα 3 από τα 7 να είναι spam.

(β) Κανένα να μην είναι spam

(γ) Ποιο είναι το αναμενόμενο πλήθος spam την ημέρα αυτή και ποια η τυπική απόκλιση του πλήθους;

3. Ένας φοιτητής γνωρίζει πως αν βγει έξω μόνος το βράδυ του Σαββάτου συναντάει γνωστούς με ρυθμό 5 γνωστούς ανά ώρα. Ποια είναι η πιθανότητα αν βγει έξω να βρει 3 γνωστούς μέσα σε μισή ώρα;

Λύσεις ασκήσεων

1. Στον πίνακα παρουσιάζεται η κοινή συνάρτηση μάζας πιθανότητας $f_{X,Y}$.

$$EY = 0 \cdot 1/8 + 1 \cdot 4/8 + 2 \cdot 3/8 = 10/8 = 5/4, \quad EX = 1 \cdot 2/8 + 2 \cdot 6/8 = 14/8 = 7/4.$$

$$E(Y^2) = 0^2 \cdot 1/8 + 1^2 \cdot 4/8 + 2^2 \cdot 3/8 = 16/8 = 2, \quad E(X^2) = 1^2 \cdot 2/8 + 2^2 \cdot 6/8 = 25/8.$$

$$\text{Var}(Y) = E(Y^2) - (EY)^2 = 2 - 25/16 = 7/16, \quad \text{Var}(X) = E(X^2) - (EX)^2 = 25/8 - 49/16 = 1/16.$$

$$E(XY) = 0 \cdot 1 \cdot 1/8 + 1 \cdot 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 \cdot 1/8 + 0 \cdot 2 \cdot 0 + 1 \cdot 2 \cdot 4/8 + 2 \cdot 2 \cdot 2/8 = 18/8 = 9/4.$$

(α) f_X, f_Y : Εμφανίζονται στον πίνακα.

(β) Είναι οι X, Y ανεξάρτητες; Όχι, γιατί $f_Y(0) \cdot f_X(1) = 1/8 \cdot 2/8 = 2/64 \neq 1/8 = f_{X,Y}(0, 1)$.

(γ) $\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(Y)E(X) = 9/4 - 5/4 \cdot 7/4 = 1/36$.

(δ) $\text{Corr}(X, Y) = \text{Cov}(X, Y) / (\sigma_X \cdot \sigma_Y) = 1/36 / (7/16 \cdot 1/16)^{0,5}$

$f_{X,Y}$	$Y = 0$	$Y = 1$	$Y = 2$	
$X = 1$	1/8	0	1/8	$f_X(1) = 2/8$
$X = 2$	0	4/8	2/8	$f_X(2) = 6/8$
	$f_Y(0) = 1/8$	$f_Y(1) = 4/8$	$f_Y(2) = 3/8$	1

Λύσεις ασκήσεων

2. Γνωρίζουμε ότι το 10% των email που λαμβάνει ένας φοιτητής είναι spam. Μία ημέρα δέχθηκε 7 email. Να βρεθεί η πιθανότητα
- (α) τα 3 από τα 7 να είναι spam.
 - (β) Κανένα να μην είναι spam
 - (γ) Ποιο είναι το αναμενόμενο πλήθος spam την ημέρα αυτή και ποια η τυπική απόκλιση του πλήθους;

Λύση

Είναι $X \sim B(7, 0.1)$, άρα $P(X = 3) = \binom{7}{3} 0,1^3(1 - 0,1)^4$, $P(X = 0) = \binom{7}{0} 0,1^0(1 - 0,1)^7$,
 $EX = np = 0,7$, $VarX = npq = 7 \cdot 0,1 \cdot 0,9 = 0,63$.

3. Ένας φοιτητής γνωρίζει πως αν βγει έξω μόνος το βράδυ του Σαββάτου συναντάει γνωστούς με ρυθμό 5 γνωστούς ανά ώρα. Ποια είναι η πιθανότητα αν βγει έξω να βρει 3 γνωστούς μέσα σε μισή ώρα;

Λύση

Ο φοιτητής συναντάει 5 γνωστούς ανά ώρα = 2,5 γνωστούς ανά 30 λεπτά $\rightarrow \lambda = 2,5$.

Αν X : πλήθος γνωστών στα 30 λεπτά, τότε $X \sim \text{Poisson}(2,5)$ και $P(X = 10) = e^{-2,5} \frac{2,5^{10}}{10!} = 0,214$.