

Θεωρία Πιθανοτήτων και Στατιστική
Θέματα Εξετάσεων Ιουνίου 2026

Θέμα 1

Έχουμε 3 πανομοιότυπες σε σχήμα κάρτες. Η πρώτη κάρτα έχει τις δύο πλευρές χρωματισμένες κόκκινες. Η δεύτερη κάρτα, έχει τις δύο πλευρές της χρωματισμένες μαύρες. Η τρίτη κάρτα, έχει την μία πλευρά της χρωματισμένη κόκκινη και την άλλη πλευρά χρωματισμένη μαύρη.

Οι 3 κάρτες τοποθετούνται σε ένα καπέλο και 1 κάρτα επιλέγεται τυχαία και τοποθετείται στο τραπέζι.

(α) Να βρεθεί η πιθανότητα, η πάνω πλευρά της επιλεγμένης κάρτας να είναι χρωματισμένη κόκκινη.

(β) Αν η πάνω πλευρά της επιλεγμένης κάρτας είναι χρωματισμένη κόκκινη, ποια είναι η πιθανότητα η άλλη πλευρά να είναι χρωματισμένη μαύρη;

Βαθμολογία: (α) 1μ (β) 1μ

Ενδεικτική λύση

Έστω, $K = \{\text{πλευρά κόκκινη}\}$, $M = \{\text{πλευρά μαύρη}\}$. Τότε

$$P(\text{επιλέγω 1}^{\text{η}} \text{ κάρτα}) = P(KK) = 1/3,$$

$$P(\text{επιλέγω 2}^{\text{η}} \text{ κάρτα}) = P(MM) = 1/3,$$

$$P(\text{επιλέγω 3}^{\text{η}} \text{ κάρτα}) = P(KM) = 1/3,$$

(α) Νόμος Ολικής Πιθανότητας

$$P(K) = P(K|KK) P(KK) + P(K|MM) P(MM) + P(K|KM) P(KM) = 1 \cdot 1/3 + 0 \cdot 1/3 + 1/2 \cdot 1/3 = 1/2.$$

Εναλλακτικά, το ίδιο προκύπτει με απλή καταμέτρηση:

$$P(K) = \text{Ευνοϊκές} / \text{Συνολικές} = 3 / 6 = 0.5.$$

(β) Νόμος του Bayes

$$P(KM | K) = P(K | KM) \cdot P(KM) / P(K) = (1/2 \cdot 1/3) / 1/2 = 1/3.$$

Θέμα 2

Σε μια βιομηχανία υπάρχουν συνεργεία που εργάζονται ανεξάρτητα το ένα από το άλλο και κατασκευάζουν μεταλλικά εξαρτήματα. Το πλήθος των εξαρτημάτων που κατασκευάζονται ημερησίως από όλα τα συνεργεία δεν είναι σταθερό, ωστόσο είναι γνωστό ότι ο μέσος αριθμός εξαρτημάτων ανά ημέρα είναι ίσος με 7.

Μετά την κατασκευή τους, τα εξαρτήματα υποβάλλονται σε μία συγκεκριμένη διαδικασία καταπόνησης, την οποία αντέχει το 80% των εξαρτημάτων.

(α) Να υπολογιστεί η πιθανότητα, στη διάρκεια μίας ημέρας να κατασκευαστούν λιγότερα από 3 εξαρτήματα.

(β) Να υπολογιστεί η πιθανότητα μέσα σε μία περίοδο 30 ημερών να κατασκευαστούν συνολικά τουλάχιστον 230 εξαρτήματα.

(γ) Επιλέγονται τυχαία 400 εξαρτήματα και υποβάλλονται στη διαδικασία καταπόνησης. Να βρεθεί η πιθανότητα να αντέξουν τη δοκιμασία, τουλάχιστον 330 εξαρτήματα.

Βαθμολογία: **(α) 1μ** **(β) 1μ** **(γ) 1μ**

Ενδεικτική λύση

(α) Αν X είναι το πλήθος των εξαρτημάτων που κατασκευάζονται σε μία ημέρα τότε

$X \sim \text{Poisson}(7)$ και $P(X < 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = e^{-7} (1 + 7 + 7^2/2) = 0,03$.

(β) Σε 30 ημέρες: $T \sim \text{Poisson}(210)$, και $\lambda = 210 > 50$, άρα $\text{Poisson}(210) \approx N(210, 210)$. Με continuity correction:

$$\begin{aligned} P(T \geq 230) &= P(T > 229.5) = P(Z > (229.5 - 210) / 210^{0.5}) \\ &= P(Z > 1,35) = 1 - \Phi(1,35) = 1 - 0.91149 = 0,089. \end{aligned}$$

(γ) Αν Y είναι ο αριθμός των εξαρτημάτων που αντέχουν τη δοκιμασία, $Y \sim B(400, 0.8)$

με $np = 320 > 5$, $npq = 64 > 5$, άρα $Y \approx N(320, 64)$ και:

$$\begin{aligned} P(Y \geq 330) &\approx P(Y > 329.5) = P(Z > (329.5 - 320)/8) \\ &= P(Z > 1,1875) = 1 - \Phi(1,19) = 1 - 0.88298 = 0,117. \end{aligned}$$

Θέμα 3

Γνωρίζουμε ότι πανελλαδικά η μέση επίδοση των μαθητών στα Μαθηματικά είναι ίση με 54 μονάδες (στα 100). Ένα σχολείο ισχυρίζεται ότι η επίδοση των μαθητών του διαφέρει συνολικά από τον πανελλαδικό μέσο όρο. Για να εξεταστεί ο ισχυρισμός, επιλέχθηκε τυχαίο δείγμα 40 μαθητών από το σχολείο. Από το δείγμα προέκυψαν: $\bar{x} = 57$, $s = 9.6$.

(α) (i) Να διατυπωθεί ο κατάλληλος στατιστικός έλεγχος

(ii) να γραφούν η μηδενική και η εναλλακτική υπόθεση.

(β) Να ελεγχθεί ο ισχυρισμός του σχολείου σε επίπεδο σημαντικότητας $\alpha = 0.05$.

(γ) Να κατασκευαστεί 95% διάστημα εμπιστοσύνης για τη μέση επίδοση των μαθητών του σχολείου.

Βαθμολογία:

(α) (i) 0,2μ

(α) (ii) 0,3μ

(β) 1μ

(γ) 0.5μ

Ενδεικτική λύση

(α) (i) Εφαρμόζουμε τη δοκιμασία t – test για ένα δείγμα. (ii) $H_0: \mu = 54$ έναντι $H_1: \mu \neq 54$

$$(β) \text{ Υπολογίζουμε } t_0 = \frac{\bar{x} - 54}{s/\sqrt{40}} = \frac{57 - 54}{9.6/\sqrt{40}} = 1.98$$

Είναι $t \sim t(39) \approx N(0, 1)$ και

$$\begin{aligned} p &= P(t > 1.98 \text{ ή } t < -1.98) = 2 P(t > 1.98) = 2(1 - \Phi(1.98)) \\ &= 2(1 - 0.97615) = 0,0477 < 0,05, \end{aligned}$$

άρα η H_0 απορρίπτεται.

Συμπεραίνουμε, ότι οι μαθητές του σχολείου έχουν σημαντικά διαφορετική μέση επίδοση στα μαθηματικά από την αντίστοιχη πανελλαδική.

$$(γ) \left(\bar{x} - \frac{1.96 \cdot s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + \frac{1.96 \cdot s}{\sqrt{n}} \right) = \left(57 - \frac{1.96 \cdot 9.6}{\sqrt{40}}, 57 + \frac{1.96 \cdot 9.6}{\sqrt{40}} \right) = (54.02, 59.98)$$

Θέμα 4

Ένας ερευνητής κατέγραψε για 10 φοιτητές τις ώρες ημερήσιας χρήσης κινητού τηλεφώνου (X) και την επίδοση σε τεστ συγκέντρωσης (Y). Στη συνέχεια, υπολόγισε γραμμικό μοντέλο πρόβλεψης της Y από την X. Βρέθηκε ότι το 49% της συνολικής μεταβλητότητας της Y εξηγείται από το γραμμικό μοντέλο. Επιπλέον, γνωρίζουμε ότι από την ανάλυση των δεδομένων προέκυψαν τα παρακάτω στοιχεία:

$$\bar{x} = 4, \bar{y} = 76, \sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{x})^2 = 25, \sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = -70.$$

(α) Να υπολογιστεί η εξίσωση της ευθείας απλής γραμμικής παλινδρόμησης του Y ως προς το X.

(β) Να ερμηνευτούν οι συντελεστές της εξίσωσης.

(γ) Να υπολογιστεί η προβλεπόμενη επίδοση φοιτητή που χρησιμοποιεί το κινητό του 5 ώρες ημερησίως.

(δ) Να υπολογιστεί ο συντελεστής συσχέτισης Pearson r.

(ε) Να βρεθεί η τιμή του $\sum_{i=1}^{10} (y_i - \bar{y})^2$.

Βαθμολογία: **(α) 1μ** **(β) 0,3μ** **(γ) 0,2μ** **(δ) 0,7μ** **(ε) 0,8μ**

Ενδεικτική λύση

$$(α) \quad s_{xy} = \frac{1}{10 - 1} \left[\sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) \right] = -\frac{70}{9} = -7.78.$$

$$s_x^2 = \frac{1}{10 - 1} \left[\sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{x})^2 \right] = \frac{25}{9} = 2.78.$$

$$\hat{b} = \frac{s_{xy}}{s_x^2} = -2.8 \quad \text{και} \quad \hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x} = 87.2.$$

Η εξίσωση της ευθείας γραμμικής παλινδρόμησης είναι η

$$Y = -2.8 \cdot X + 87.2$$

(β)

- $\hat{b} = -2.8$, άρα για κάθε μία ώρα χρήσης κινητού η επίδοση μειώνεται κατά 2.8 μονάδες.
- $\hat{a} = 87.2$, άρα για μηδενική χρήση κινητού η επίδοση έχει τιμή 87.2 μονάδες.

(γ) Για $x = 5$, είναι $y = -2.8 \cdot 5 + 87.2 = 73.5$.

(δ) Το 49% της συνολικής μεταβλητότητας της εξαρτημένης μεταβλητής εξηγείται από το γραμμικό μοντέλο, άρα $R^2 = 0.49$. Επιπλέον, γνωρίζουμε ότι στην απλή γραμμική παλινδρόμηση είναι $R^2 = r^2$, όπου r ο συντελεστής συσχέτισης Pearson. Άρα

$$r = 0.49^{0.5} = \pm 0.7.$$

Καθώς $\hat{b} = -2.8 < 0$, συμπεραίνουμε ότι η συσχέτιση των X , Y είναι αρνητική, άρα

$$r = -0.7.$$

$$(ε) \quad r = \frac{s_{XY}}{s_X \cdot s_Y} = -0.7 \Leftrightarrow s_Y = \frac{7.78}{\sqrt{2.78} \cdot 0.7} = 6.67 \Leftrightarrow s_Y^2 = 44.4 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{10} (y_i - \bar{y})^2 = 400.$$

Τυπολόγιο

A. Πίνακας κανονικής κατανομής: $\Phi(z) = P(Z < z)$, για $1 \leq z \leq 1,99$ όπου $Z \sim N(0, 1)$.

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.0	0.84134	0.84375	0.84614	0.84849	0.85083	0.85314	0.85543	0.85769	0.85993	0.86214
1.1	0.86433	0.86650	0.86864	0.87076	0.87286	0.87493	0.87698	0.87900	0.88100	0.88298
1.2	0.88493	0.88686	0.88877	0.89065	0.89251	0.89435	0.89617	0.89796	0.89973	0.90147
1.3	0.90320	0.90490	0.90658	0.90824	0.90988	0.91149	0.91308	0.91466	0.91621	0.91774
1.4	0.91924	0.92073	0.92220	0.92364	0.92507	0.92647	0.92785	0.92922	0.93056	0.93189
1.5	0.93319	0.93448	0.93574	0.93699	0.93822	0.93943	0.94062	0.94179	0.94295	0.94408
1.6	0.94520	0.94630	0.94738	0.94845	0.94950	0.95053	0.95154	0.95254	0.95352	0.95449
1.7	0.95543	0.95637	0.95728	0.95818	0.95907	0.95994	0.96080	0.96164	0.96246	0.96327
1.8	0.96407	0.96485	0.96562	0.96638	0.96712	0.96784	0.96856	0.96926	0.96995	0.97062
1.9	0.97128	0.97193	0.97257	0.97320	0.97381	0.97441	0.97500	0.97558	0.97615	0.97670

Σημείωση: Για τιμές του z ανάμεσα σε δύο τιμές του πίνακα υπολογίστε το ημιάθροισμα των αντίστοιχων πιθανοτήτων.

B. ΝΟΠ και Bayes $\cup B_i = \Omega \Rightarrow P(A) = \sum_i P(A \cap B_i)$, $P(A|B) = P(B|A)P(A)/P(B)$

Γ. Κατανομές

$X \sim N(\mu, \sigma^2) \rightarrow EX = \mu$, $\text{Var}X = \sigma^2$. $X \sim N(\mu, \sigma^2) \rightarrow (X - \mu)/\sigma \sim N(0, 1)$.

$X \sim t(n)$ και $n > 30 \rightarrow X \sim N(0, 1)$.

$X \sim \text{Poisson}(\lambda)$, $P(X = k) = e^{-\lambda} \lambda^k / k!$, $EX = \text{Var}X = \lambda$ και για $\lambda > 50$, $X \sim N(\lambda, \lambda)$.

$X \sim B(n, p)$, $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$, $EX = np$, $\text{Var}X = npq$ και $X \sim N(np, npq)$ ($np > 5$, $npq > 5$).

Δ. Στατιστική

Για κάθε τυχαίο δείγμα μεγέθους n από κατανομή με μέση τιμή μ_0 , ισχύει: $t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$.

$$y = \hat{\alpha} + \hat{b}x: \hat{\alpha} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x}, \hat{b} = \frac{s_{xy}}{s_x^2} = r_{xy} \frac{s_y}{s_x}, r_{xy} = \frac{s_{xy}}{s_x \cdot s_y}$$

$$s_{xy} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}), s_x^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

$$\text{TSS} = \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2, \text{ESS} = \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2, \text{RSS} = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2, R^2 = \frac{\text{ESS}}{\text{TSS}} = 1 - \frac{\text{RSS}}{\text{TSS}} = r^2$$