Θεωρία Πιθανοτήτων και Στατιστική

Βασικές κατανομές συνεχών τυχαίων μεταβλητών

Διδάσκων: Επαμεινώνδας Διαμαντόπουλος
Επικοινωνία: epdiaman@ee.duth.gr

Περιεχόμενα 6ου μαθήματος

- Βασικές κατανομές συνεχών τυχαίων μεταβλητών.
  - Ομοιόμορφη κατανομή.
  - Εκθετική κατανομή.
  - Κανονική κατανομή.
  - Προσέγγιση της Διωνυμικής από την Κανονική κατανομή.
  - Προσέγγιση της Poisson από την Κανονική κατανομή.
  - Άλλες ενδιαφέρουσες κατανομές
    - Κατανομή Γάμμα $\Gamma(k, \lambda)$.
    - Κατανομή $\chi^2(n)$.
    - Κατανομή Βήτα $B(\alpha, \beta)$.
    - Κατανομή Student $t(n)$.
    - Κατανομή $F(d_1, d_2)$.

Κατανομές πιθανότητας συνεχών τυχαίων μεταβλητών

Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

Ορισμός

Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας ονομάζεται κάθε συνάρτηση f: R → R που ικανοποιεί τις ιδιότητες

α) $f(x) \geq 0$ σχεδόν παντού. β) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1.$

Κάθε συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας ορίζει μία συνάρτηση κατανομής για μία συνεχή τυχαία μεταβλητή X, ως

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx.$$

Αντίστροφα, αν F_X: R → [0, 1] είναι μία *συνεχώς διαφορίσιμη* συνάρτηση κατανομής πιθανότητας για την τυχαία μεταβλητή X, τότε η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f_{X,}$ ορίζεται ως

$$f(x) = F'(x) = \frac{dF(x)}{dx}$$

Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

Ο προσδιορισμός της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας μίας συνεχούς τυχαίας μεταβλητής, εκτός από τον υπολογισμό πιθανοτήτων της μορφής P(α < X < β), προσφέρει τη δυνατότητα υπολογισμού των γεωμετρικών χαρακτηριστικών της κατανομής.

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx.$$

$$Var(X) = E\left[(X-\mu)^2\right] = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x)\,dx.$$

$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx - \mu^2.$$

$$\sigma = \sqrt{Var(X)}.$$

$$\gamma = \frac{E\left[(X-\mu)^3\right]}{\sigma^3} = \frac{1}{\sigma^3}\int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^3 f(x)\,dx.$$

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x)\,dx.$$

$$\alpha = \frac{E\left[(X-\mu)^4\right]}{\sigma^4} = \frac{1}{\sigma^4}\int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^4 f(x)\,dx.$$

$$G_X(z) = E(z^X) = \int_{-\infty}^{\infty} z^x f(x)\,dx.$$

Ασκήσεις στη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3x^2$, $x \in [0, 1]$ και $f(x) = 0$, $x \in R – [0, 1]$.

(α) Να δείξετε ότι η f είναι συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας για μία συνεχή τ.μ. X.

(β) Να βρείτε τη συνάρτηση κατανομής F_X που αντιστοιχεί στη συνάρτηση πυκνότητας f.

(γ) Να υπολογίσετε τις πιθανότητες $P(X < 0)$, $P(X < ½)$, $P(X \leq ½)$, $P(X \geq ½)$, $P(X > 3)$.

(δ) Να υπολογίσετε τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά της κατανομής (μ, $σ^2$, σ, γ, α)

Ασκήσεις στη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3/ 4$, $x \in [0, c]$ και $f(x) = 0$, $x \in R – [0, c]$. Να βρείτε την τιμή του c για την οποία η f γίνεται συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας για μία συνεχή τ.μ. X.

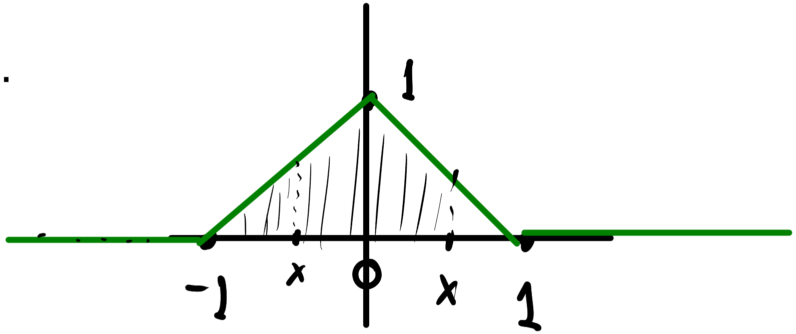
Ασκήσεις στη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

3. Δίνεται η συνάρτηση f(x) = x + 1 x є (-1, 0] και f(x) = 1 – x, x є [0, 1).

(α) Να δείξετε ότι η f είναι συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας μίας συνεχούς τ.μ. Χ.

(β) Να βρείτε την αντίστοιχη συνάρτηση κατανομής.

(γ) Να βρείτε τη συνάρτηση κατανομής της τ.μ. Υ = 2Χ + 1.



$$f(x) = \begin{cases} x+1, & x \in (-1,0] \\ 1-x, & x \in [0,1) \end{cases}$$

(α) $$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-1}^{0} (x+1)\,dx + \int_{0}^{1} (1-x)\,dx = \left.\frac{x^2}{2} + x\right|_{-1}^{0} + \left. x - \frac{x^2}{2}\right|_{0}^{1} =$$

$$= -\frac{1}{2} + 1 + 1 - \frac{1}{2} = 1.$$

(β) $F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \begin{cases} 0, & x < -1 \\ \frac{x^2}{2} + x + \frac{1}{2}, & -1 \leq x < 0 \\ \frac{1}{2} + x - \frac{x^2}{2}, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}$

Για $x < -1$: $F(x) = 0$.

Για $-1 \leq x < 0$: $F(x) = \int_{-1}^{x} (t+1)\,dt = \frac{t^2}{2} + t \Big|_{-1}^{x} = \frac{x^2}{2} + x + \frac{1}{2}$

Για $0 \leq x < 1$: $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \frac{1}{2} + \int_{0}^{x} (1-t)\,dt = \frac{1}{2} + t - \frac{t^2}{2} \Big|_{0}^{x} =$

$= \frac{1}{2} + x - \frac{x^2}{2}$

Για $x \geq 1$: $F(x) = 1$.

(γ) $Y = 2X + 1$

$x \in \mathbb{R}$, $F_Y(x) = P(Y \le x) = P(2X+1 \le x) = P\left(X \le \frac{x-1}{2}\right) =$

$$= F_X\left(\frac{x-1}{2}\right).$$

(δ) $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx = \int_{-1}^{0} x\cdot(1+x)\,dx + \int_{0}^{1} x\cdot(1-x)\,dx = 0$

$$Var(X) = E(X-\mu)^2 = E(X^2) - [E(X)]^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,dx = \dots$$

Ασκήσεις στη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

4. Δίνεται η συνάρτηση $F(x) = (x + 1)^2/4$, $x \in (-1, 1)$.

(α) Να δείξετε ότι η F είναι συνάρτηση κατανομής για κάποια συνεχή τυχαία μεταβλητή X.

(β) Να βρείτε την αντίστοιχη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας.

(γ) Να υπολογίσετε την αναμενόμενη τιμή της τ.μ. X.

Συνήθεις κατανομές συνεχών μεταβλητών

Συνήθεις κατανομές συνεχών μεταβλητών

κατανομή	συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας	παράμετροι	μέση τιμή	διακύμανση
Ομοιόμορφη	$\frac{1}{b-a} I_{[a,b]}(x)$	$a, b \in \mathbb{R}, a < b$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
Κανονική	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	$\mu \in \mathbb{R}, \sigma \in \mathbb{R}_+^*$	μ	σ^2
Εκθετική	$\lambda e^{-\lambda x}$	$\lambda > 0$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
Γάμμα	$\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x}$	$\alpha, \beta > 0$	$\frac{\alpha}{\beta}$	α/(β^2)
Βήτα	$\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} I_{(0,1)}(x)$	$\alpha, \beta > 0$	$\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$	$\frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}$
Cauchy	$\left(\pi\beta\left(1+\left(\frac{x-a}{\beta}\right)^2\right)\right)^{-1}$	$\alpha \in \mathbb{R}, \beta > 0$	δεν υπάρχει	δεν υπάρχει
Weibull	$\frac{c}{\alpha} x^{c-1} e^{-\frac{x^c}{\alpha}}$	$\alpha, c > 0$	$\alpha^{\frac{1}{c}} \Gamma\left(1+\frac{1}{c}\right)$	$\alpha^{\frac{2}{c}} \left(\Gamma\left(1+\frac{2}{c}\right) - \Gamma\left(1+\frac{1}{c}\right)^2\right)$

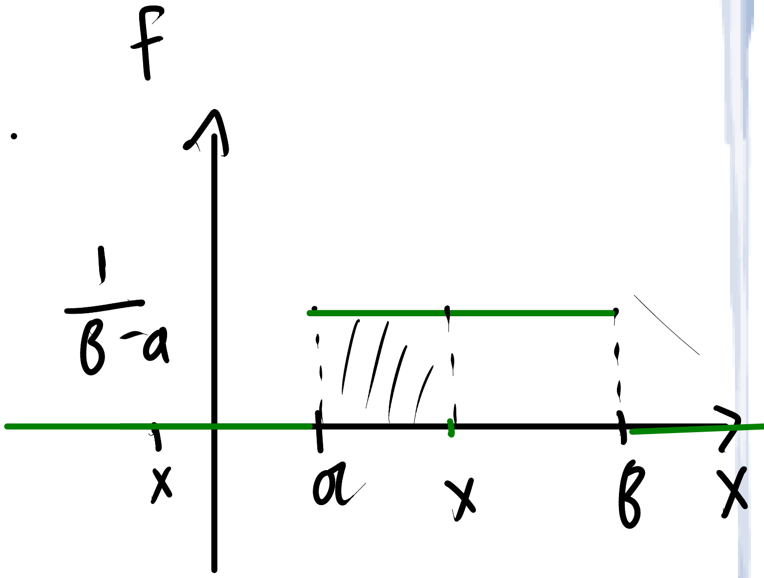
Ομοιόμορφη Κατανομή

Ομοιόμορφη Κατανομή

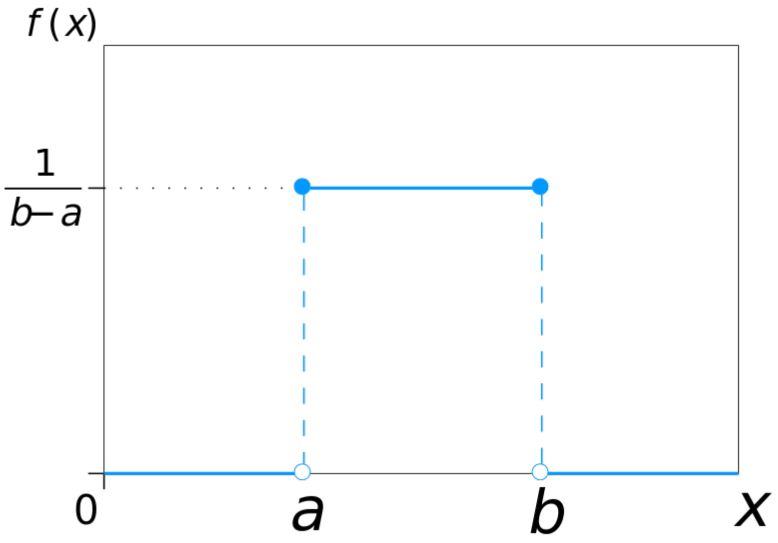
Η συνεχής, ομοιόμορφη κατανομή U(α, β), είναι μία συμμετρική κατανομή πιθανότητας στην οποία, όλα τα υποσύνολα του [α, β] ίσου μήκους είναι ισοπίθανα. Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της X ~ U(α, β) είναι:

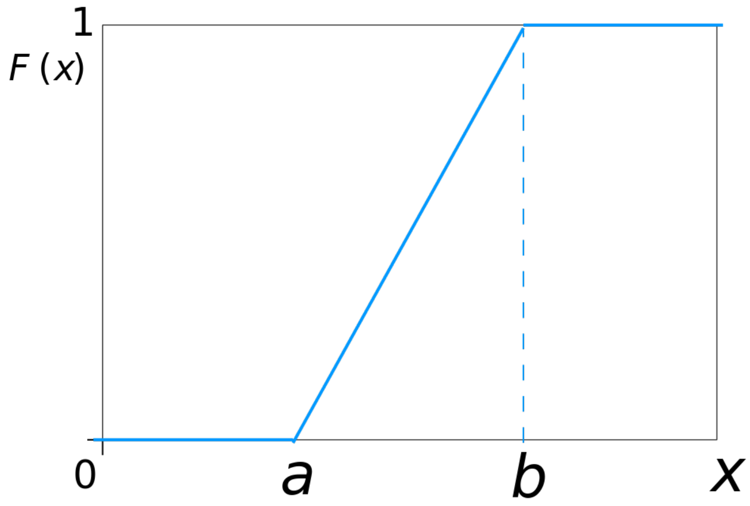
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\beta - \alpha} & , \quad \alpha \leq x \leq \beta, \\ 0 & , \quad x < \alpha \text{ ή } x > \beta. \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < \alpha, \\ \dfrac{x - \alpha}{\beta - \alpha} & , \quad \alpha \leq x \leq \beta, \\ 1 & , \quad x > \beta. \end{cases}$$



Ομοιόμορφη Κατανομή





Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας f(x), x є R

(Αθροιστική) Συνάρτηση κατανομής F(x) = P(X ≤ x), x є R

Ομοιόμορφη Κατανομή

Άσκηση 1
Αν X ~ U(α, β), τότε να δείξετε ότι E(X) = (α + β)/2.
Απόδειξη

$$X \sim U(a,\beta) \Rightarrow f(x) = \frac{1}{\beta - a}, \quad a \leq x \leq \beta$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx = \int_a^\beta x \cdot \frac{1}{\beta - a}\,dx = \frac{1}{\beta - a} \left. \frac{x^2}{2} \right|_a^\beta =$$

$$= \frac{1}{\beta - a} \cdot \left(\frac{\beta^2}{2} - \frac{a^2}{2} \right) = \frac{\beta + a}{2}.$$

Ομοιόμορφη: Γεωμετρικά χαρακτηριστικά

X ~ U(α, β): f(x) = 1/(β – α), α ≤ x ≤ β.

Αναμενόμενη τιμή: EX = (α + β) / 2.

Διακύμανση: VarX = $(\beta - \alpha)^2$ / 12.

Τυπική απόκλιση: $\sigma = (\beta - \alpha)\frac{\sqrt{3}}{6}$.

Ασυμμετρία: $\text{skew}(X) = \gamma = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = 0$

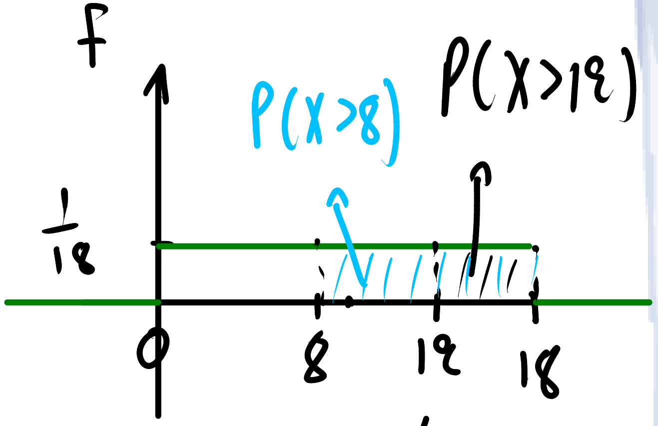
Κυρτότητα: $\text{kurt}(X) = \alpha = \frac{\mu_4}{\sigma^4} = \frac{9}{5}$

Ομοιόμορφη Κατανομή

Άσκηση 2
Αν X ~ U(0, 18), τότε να βρείτε τις πιθανότητες (α) P(X < E(X)), (β) P(X > 12 | X > 8).
Λύση

$X \sim U(0,18)$, $E(X) = \frac{a+b}{2} = 9$.

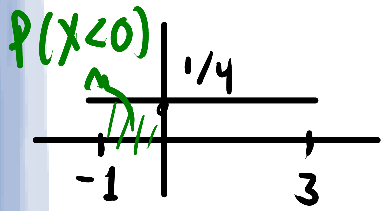
(α) $P(X < E(X)) = P(X < 9) = \frac{1}{2}$



(β) $P(X > 12 \mid X > 8) = \frac{P(X>12, X>8)}{P(X>8)} = \frac{P(X>12)}{P(X>8)} = \frac{\frac{6}{18}}{\frac{10}{18}} = \frac{3}{5}$.

Ομοιόμορφη Κατανομή

Άσκηση 3
Αν $X \sim U(1, 2)$, να βρεθεί $s \in R$, τέτοιο ώστε $P(X > s + \mu_X) = 1/4$.
Λύση



Ομοιόμορφη Κατανομή

Άσκηση 4

Γνωρίζουμε ότι η τ.μ. X ακολουθεί ομοιόμορφη κατανομή με αναμενόμενη τιμή 1 και διακύμανση 4/3. Να βρεθεί η $P(X < 0)$.

Λύση

$$X \sim U(a, b) = U(-1, 3) \Rightarrow P(X<0) = \frac{1}{4}.$$

$$E(X) = 1 \Leftrightarrow \frac{b+a}{2} = 1 \Leftrightarrow a+b = 2$$

$$Var(X) = \frac{4}{3} \Leftrightarrow \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{4}{3} \Leftrightarrow (b-a)^2 = 16$$

$$b - a = \pm 4$$

$$\left.\begin{array}{l} b = a+4 \\ 2a+4 = 2 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} a = -1 \\ b = 3 \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} b = a-4 \\ 2a-4 = 2 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} a = 3 \\ b = -1 \end{array}$$

$$f(x) = \frac{1}{b-a}, \quad a \le x \le b$$

$$Var(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,dx - \left[\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx\right]^2$$

$$= \int_a^b \frac{x^2}{b-a}\,dx - \left[\int_a^b \frac{x}{b-a}\,dx\right]^2 = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Ομοιόμορφη Κατανομή

Άσκηση 5
Αν X ~ U(0,1) τότε να υπολογισθεί η $E(X^3)$.
Λύση

$$X \sim U(0,1) \Rightarrow f(x) = \frac{1}{1-0} = 1$$

$$E(X^3) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^3 \cdot f(x)\,dx = \int_0^1 x^3\,dx = \frac{x^4}{4}\Big|_0^1 = \frac{1}{4}.$$

Ομοιόμορφη Κατανομή

Άσκηση 6
Ο χρόνος σε λεπτά που περιμένει κάποιος στην στάση το λεωφορείο (min) ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή U(0, 15).
(α) Να βρεθεί η f(x) και η F(x).
(β) Ποια είναι η πιθανότητα κάποιος να περιμένει λιγότερο από 12,5 min;
(γ) Ποια είναι η αναμενόμενη αναμονή στη στάση και ποια η τυπική απόκλιση αυτής;
Λύση

Εκθετική Κατανομή

Εκθετική Κατανομή

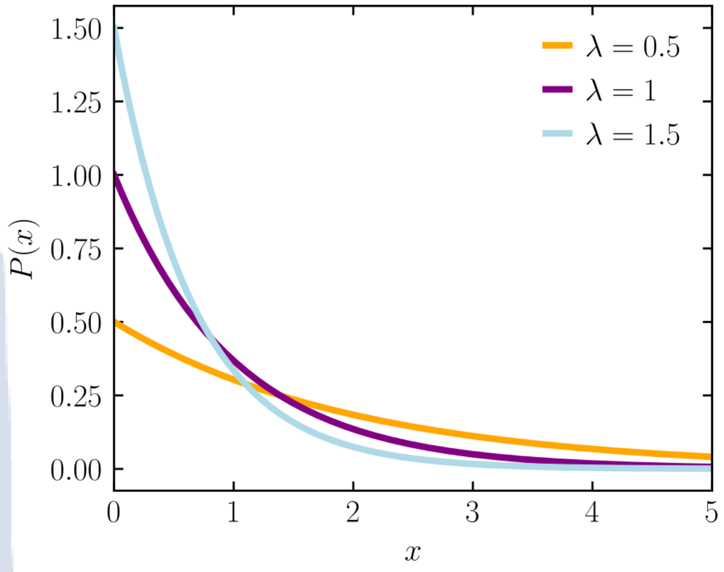
Λέμε ότι η συνεχής τυχαία μεταβλητή Χ, ακολουθεί την εκθετική κατανομή με παράμετρο λ (γράφουμε X ~ Exp(λ)) αν η κατανομή πιθανότητάς της δίνεται από τη σχέση:

$$F(x) = P(X \le x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & , \quad x \ge 0, \\ 0 & , \quad x < 0. \end{cases}$$

Στην περίπτωση αυτή η συνάρτηση πυκνότητας είναι:

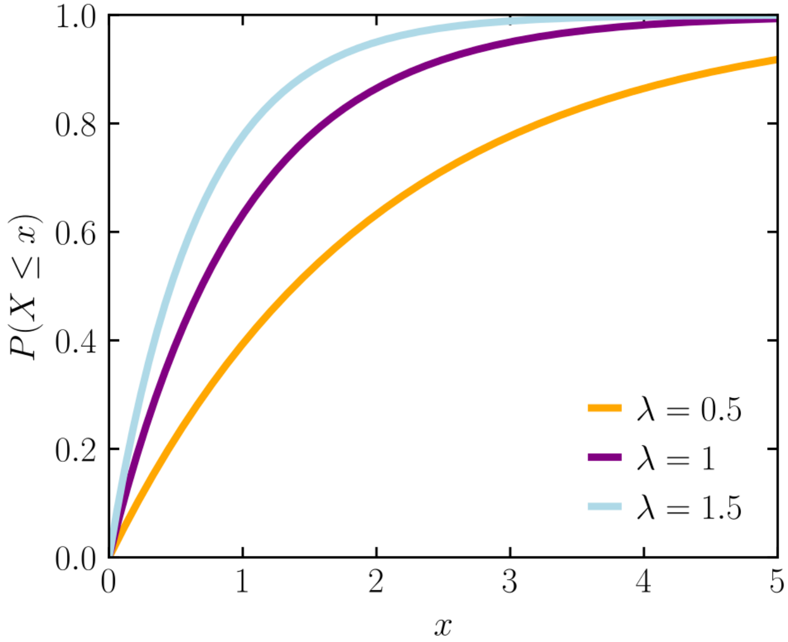
$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & , \quad x \ge 0, \\ 0 & , \quad x < 0. \end{cases}$$

Εκθετική Κατανομή



Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & , \quad x \geq 0, \\ 0 & , \quad x < 0. \end{cases}$$



Αθροιστική) Συνάρτηση κατανομής

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & , \quad x \geq 0, \\ 0 & , \quad x < 0. \end{cases}$$

Εκθετική Κατανομή

Άσκηση 1
Αν X ~ Exp(2) να βρεθούν οι πιθανότητες (α) P(X > 1), (β) P(X < 2), (γ) P(0,5 ≤ X ≤ 2).
Λύση

$$X \sim Exp(2) \Rightarrow F(x) = P(X \leq x) = 1 - e^{-2x}, \; x \geq 0.$$

$$f(x) = 2e^{-2x}, \; x \geq 0$$

$$(\alpha) \; P(X>1) = \int_1^{+\infty} 2e^{-2x} dx = 2 \frac{1}{-2} e^{-2x} \Big|_1^{+\infty} = e^{-2} \simeq 0,135.$$

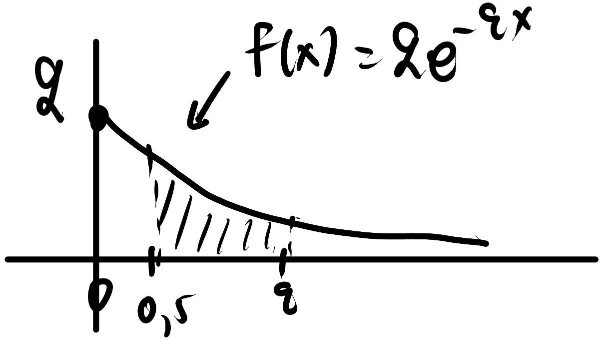
Εναλλακτικά: $P(X>1) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - F(1) = e^{-2}.$

(β) $P(X<2) = F(2) = 1 - e^{-4} = 0{,}982.$

(γ) $P(0{,}5 \le X \le 2) = P(X \le 2) - P(X \le 0{,}5) = F(2) - F(0{,}5) =$

$= (1 - e^{-4}) - (1 - e^{-1}) = e^{-1} - e^{-4} =$

$= 0{,}350.$



Εκθετική: Γεωμετρικά χαρακτηριστικά

$X \sim Exp(\lambda)$: $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, $x \geq 0$.

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx = \int_{0}^{+\infty} x e^{-\lambda x}\,dx = \frac{1}{\lambda}$$

Αναμενόμενη τιμή: $EX = 1 / \lambda$.

Διακύμανση: $VarX = 1 / \lambda^2$.

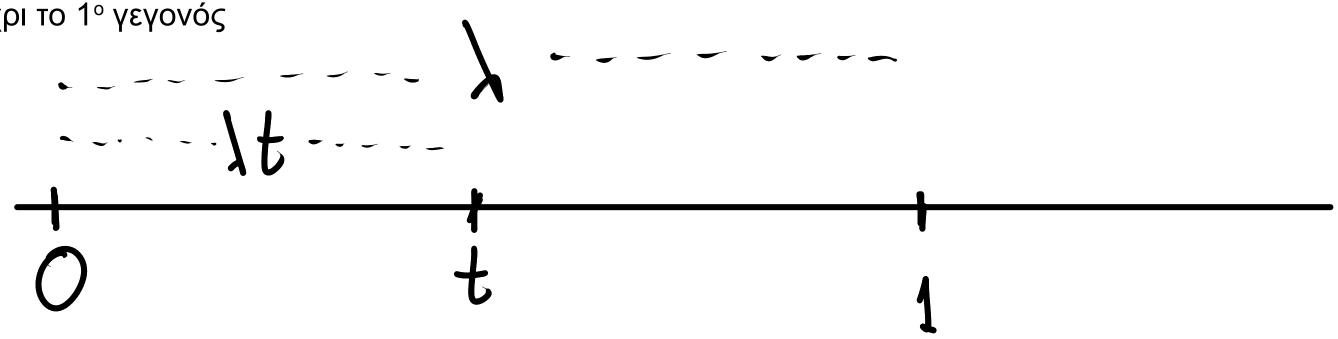
Τυπική απόκλιση: $\sigma = 1 / \lambda$

Ασυμμετρία: $\gamma = 2$.

Κυρτότητα: $\alpha = 9$.

Η εκθετική ως συνοδευτική κατανομή της κατανομής Poisson

Χρόνος μέχρι το 1ο γεγονός



$Y \sim Poisson(\lambda)$: $Y : 0, 1, 2, \dots$ | $Y_t \sim Poisson(\lambda t)$, $P(Y_t = k) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!}$

$P(Y = k) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}$

Y_t : αφίξεις στο $(0, t]$

X : χρόνος μέχρι την 1η άφιξη $\in (0, +\infty)$

$P(X > t) = P(0$ αφίξεις στο $[0, t]) = P(Y_t = 0) = e^{-\lambda t} \Rightarrow$

$\Rightarrow P(X \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0.$

Χρόνος μέχρι το 1ο γεγονός

Έστω ότι γνωρίζουμε πως κάποια γεγονότα συμβαίνουν με ρυθμό λ συμβάντα / μονάδα χρόνου και έστω $Y(t)$ η τυχαία μεταβλητή που περιγράφει το πλήθος των γεγονότων στο χρονικό διάστημα $(0, t]$. Τότε $Y(t) \sim \text{Poisson}(\lambda t)$. Έστω

X_1: ο χρόνος που περνάει από τη χρονική στιγμή 0, μέχρι να συμβεί το 1ο γεγονός.

Αναζητούμε την κατανομή της τ.μ. Χ, δηλαδή, την τιμή της πιθανότητας $P(X_1 \leq t)$, για $t \geq 0$.
Παρατηρούμε ότι για κάθε $t > 0$,

$$\{X_1 > t\} = \{\text{δεν συμβαίνει κανένα γεγονός στο χρονικό διάστημα } (0, t]\} = \{Y(t) = 0\},$$

άρα, $P(X_1 > t) = P(Y(t) = 0) = e^{-\lambda t} \lambda^0/0! = e^{-\lambda t}$ ή $P(X_1 \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$, $t \geq 0$ (και $P(X_1 \leq t) = 0$, $t < 0$),

Δηλαδή **η τ.μ. X_1 έχει τη συνάρτηση κατανομής της εκθετικής κατανομής με παράμετρο λ.**
Συμπεραίνουμε ότι $X_1 \sim \text{Exp}(\lambda)$.

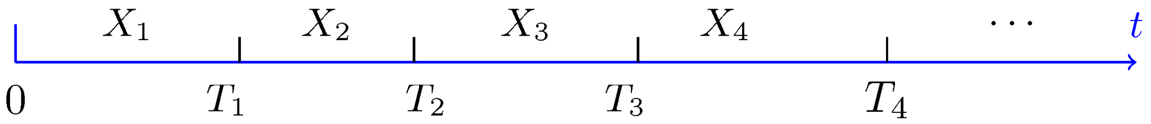
Χρόνος μέχρι το 1ο γεγονός

Βρήκαμε, ότι αν X_1: ο χρόνος που περνάει μέχρι να συμβεί το 1ο γεγονός, τότε $X_1 \sim \text{Exp}(\lambda)$.

Άμεσα συμπεράσματα είναι τα εξής:

- Αναμενόμενος χρόνος μέχρι το 1ο γεγονός: $E(X_1) = 1/\lambda$
- Διασπορά χρόνου μέχρι το 1ο γεγονός: $\text{Var}(X_1) = 1/\lambda^2$ (τυπική απόκλιση $\sigma = 1/\lambda$).

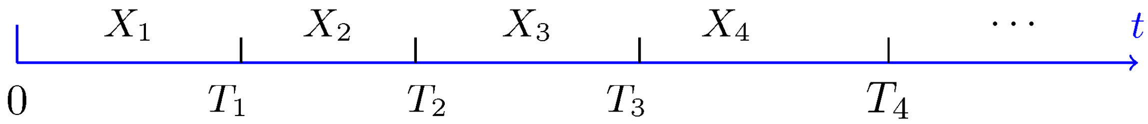
Το επόμενο βήμα είναι να βρούμε την κατανομή του χρόνου X_i, $i = 2, 3, \ldots$, που μεσολαβεί μεταξύ οποιωνδήποτε δύο συμβάντων.



Χρονικό διάστημα μεταξύ γεγονότων

Χρονικό διάστημα μεταξύ γεγονότων

Έστω ότι το n-1 γεγονός έχει συμβεί τη χρονική στιγμή s και X_n το χρονικό διάστημα που μεσολαβεί μεταξύ του n-1 και του n γεγονότος. Αναζητούμε την κατανομή πιθανότητας της X_n.



Ορίζουμε Y(t) = {πλήθος γεγονότων στο (s, s + t]}.

Το αναμενόμενο πλήθος συμβάντων στο διάστημα (s, s + t] είναι λ(s + t – s) = λt και Y(t) ~ Poisson(λt) και

$P(X_n > t)$ = P({κανένα γεγονός στο διάστημα (s, s+t]})

$= P(Y(t) = 0)$

$= e^{-\lambda t}$.

Συμπεραίνουμε, ότι $P(X_n > t) = e^{-\lambda t}$ ή $P(X_n \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$, $t \geq 0$ (και $P(X_n \leq t) = 0$, $t < 0$).

Παρατηρούμε ότι **η τ.μ. X_n έχει την αθροιστική συνάρτηση κατανομής της εκθετικής κατανομής με παράμετρο λ, δηλαδή $X_n \sim$ Exp(λ).**

Φυσική σημασία της παραμέτρου στην εκθετική κατανομή

Η παράμετρος λ στην εκθετική κατανομή αποκτά φυσική σημασία μόνο μέσα από την κατανομή Poisson που τη συνοδεύει ως η κατανομή που περιγράφει το πλήθος κάποιων γεγονότων στη μονάδα του χρόνου.

Δηλαδή, αν X είναι μία μεταβλητή που εκφράζει χρονικό διάστημα και X ~ Exp(λ), τότε

- Μπορεί να οριστεί και μία Y ~ Poisson(λ) που εκφράζει πλήθος (κάποιων) συμβάντων που συμβαίνουν στη μονάδα του χρόνου.

- Το λ θα είναι το μέσο πλήθος συμβάντων στη μονάδα του χρόνου.

Εύρεση εκθετικής από τη συνοδευτική Poisson

Παράδειγμα
Ας υποθέσουμε ότι κατά μέσο όρο έρχονται σε ένα εμπορικό κατάστημα 30 πελάτες ανά ώρα. Υποθέτουμε ότι οι αφίξεις είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους.

Αν Υ = {αναμενόμενο πλήθος πελατών σε μία ώρα} τότε $Y \sim \text{Poisson}(30)$.

Έστω Χ = {χρόνος αναμονής μεταξύ δύο πελατών}. Είναι $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ και $EX = 1/\lambda$.

Όμως, έρχονται 30 πελάτες / ώρα = 1 πελάτης / 2 λεπτά, άρα ο αναμενόμενος χρόνος μεταξύ των αφίξεων είναι 2 λεπτά.

Συμπεραίνουμε ότι, $EX = 1/\lambda \leftrightarrow 2 = 1/\lambda \leftrightarrow \lambda = 2$ και $X \sim \text{Exp}(2)$ και είμαστε σε θέση να υπολογίσουμε ερωτήματα που αφορούν το χρόνο αναμονής.

Παράδειγμα Poisson - Εκθετική

Παράδειγμα

Έστω ότι γνωρίζουμε πως κάποια γεγονότα συμβαίνουν με ρυθμό λ = 5 αφίξεις / min και έστω Y = {πλήθος γεγονότων στη μονάδα του χρόνου}. Τότε Y ~ Poisson(5). Να βρεθούν:

(α) το χρονικό διάστημα που αναμένεται να περάσει έως την 1η άφιξη.

(β) η πιθανότητα η 1η άφιξη να καθυστερήσει περισσότερο από μισό λεπτό.

Λύση

(α) $Y \sim Poisson(5)$, X : χρονος 1ης άφιξης $\sim Exp(5)$

$$E(X) = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{5}\text{ min} = 12\text{ sec.}$$

(β) $P(X > \frac{1}{2}) = e^{-5 \cdot \frac{1}{2}} = 0{,}08\%$.

Παράδειγμα Poisson - Εκθετική

Παράδειγμα

Έστω ότι γνωρίζουμε πως κάποια γεγονότα συμβαίνουν με ρυθμό $\lambda = 5$ αφίξεις / min και έστω Y = {πλήθος γεγονότων στη μονάδα του χρόνου}. Τότε $Y \sim Poisson(5)$. Να βρεθούν:

(α) το χρονικό διάστημα που αναμένεται να περάσει έως την 1η άφιξη.

(β) η πιθανότητα η 1η άφιξη να καθυστερήσει περισσότερο από μισό λεπτό.

Λύση

(α) $E(X_1) = 1/\lambda = 1/5$ min = 0,2 min = 12 sec.

(β) Γνωρίζουμε ότι $X_1 \sim Exp(\lambda) = Exp(5)$. Είναι:

$$P(X_1 > 0{,}5) = 1 - P(X_1 \le 0{,}5) = 1 – (1 – e^{-\lambda t}) = 1 – (1 – e^{-5\cdot 0{,}5}) = e^{-2{,}5} = 0{,}082 = 8{,}2\%$$

Η εκθετική κατανομή ως μία κατανομή με “απώλεια μνήμης”

Έστω X ~ Exp(λ). Τότε, $F(x) = 1 – e^{-λx}$, $x \geq 0$, και

$$
\begin{aligned}
P(X > t + α \mid X > α) &= P(X > t + α, X > α) / P(X > α) \\
&= P(X > t + α) / P(X > α) \\
&= (1 – F(t + α)) / (1 – F(α)) \\
&= e^{-λ(t + α)} / e^{-λα} \\
&= e^{-λt} \\
&= P(X > t).
\end{aligned}
$$

Παρατηρούμε, ότι **η τυχαία μεταβλητή X, χαρακτηρίζεται από “απώλεια μνήμης”**, δηλαδή πως η κατανομή των τιμών της μετά την τιμή α, είναι ανεξάρτητη του α.

Σημείωση: Η αντίστοιχη διακριτή κατανομή με την ιδιότητα της έλλειψης μνήμης (αποδεικνύεται ότι) είναι η γεωμετρική (το πλήθος των δοκιμασιών που έχουμε ήδη κάνει προσπαθώντας να πετύχουμε μία επιτυχία δεν συσχετίζεται με το πλήθος των δοκιμασιών που θα κάνουμε στο μέλλον, αφού κάθε μία δοκιμή είναι ανεξάρτητη από τις υπόλοιπες με σταθερή πιθανότητα επιτυχίας κάθε φορά).

Κατανοώντας την ιδιότητα “απώλειας μνήμης”

Η ιδιότητα της απώλειας μνήμης φαίνεται εκ πρώτης όψεως παράδοξη. Δηλαδή, προκύπτει το ερώτημα:

“Αν υπάρχει μία ακολουθία γεγονότων που εξελίσσονται με ρυθμό λ και εγώ αρχίζω να παρατηρώ το σύστημα μία ορισμένη χρονική στιγμή, τότε πως είναι δυνατόν να μην συσχετίζεται ο χρόνος που θα περιμένω μέχρι το επόμενο γεγονός με το χρόνο που ήδη έχει περάσει από το προηγούμενο γεγονός;”

Η απάντηση κρύβεται σε δύο σημαντικές λεπτομέρειες:

- **Τα γεγονότα συμβαίνουν ανεξάρτητα το ένα από το άλλο**
- **Ο πιθανός χρόνος αναμονής δεν έχει άνω όριο.**

Δηλαδή, η “απώλεια μνήμης” της εκθετικής κληρονομείται από την βασική προϋπόθεση της κατανομής Poisson πως τα γεγονότα συμβαίνουν ανεξάρτητα το ένα με το άλλο (η οποία ανεξαρτησία με τη σειρά της κληρονομήθηκε από την ανεξαρτησία των δοκιμών στη διωνυμική κατανομή)

Κατανοώντας την ιδιότητα “απώλειας μνήμης”

Το γεγονός της “απώλειας μνήμης” έχει και μία απλή και ενδιαφέρουσα γεωμετρική αναπαράσταση: Καθώς, κάθε πιθανότητα ερμηνεύεται ως ένα εμβαδόν της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας και κάθε δεσμευμένη πιθανότητα ως πιθανότητα σε περιορισμένο δειγματοχώρο, μπορούμε να αναγνωρίσουμε τη σχέση

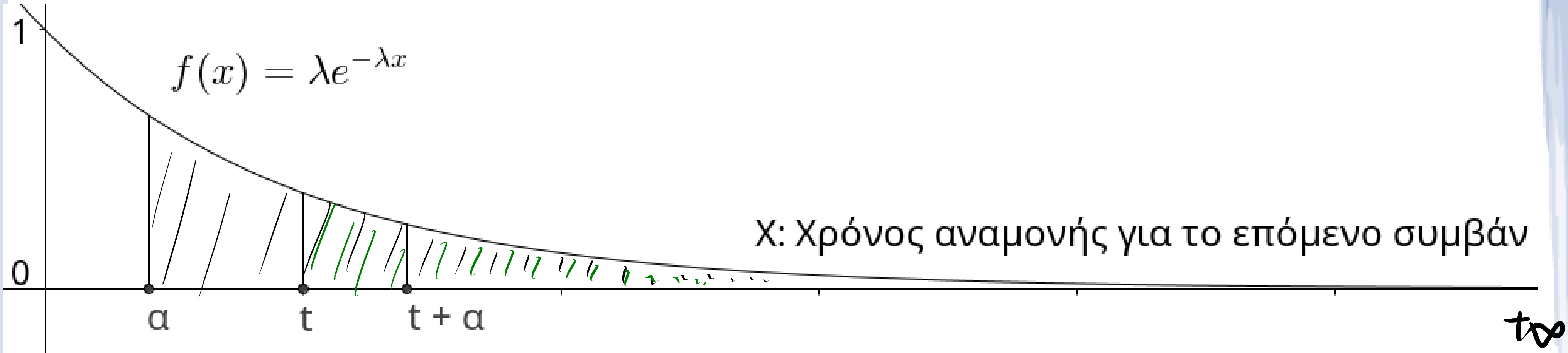
$$P(X > t + \alpha \mid X > \alpha) = P(X > t)$$

ως μία μοναδική αλγεβρική ιδιότητα της συνάρτησης $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ που αντανακλάται σε μία ιδιαίτερη συμμετρία της γραφικής της παράστασης. Αν

- A = {εμβαδόν της $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, μεταξύ x’x, για $x \in (t + \alpha, +\infty)$}
- B = {εμβαδόν της $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, μεταξύ x’x, για $x \in (\alpha, +\infty)$}
- Γ = {εμβαδόν της $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, μεταξύ x’x, για $x \in (t, +\infty)$},

τότε $A / B = \Gamma$.

Κατανοώντας την ιδιότητα “απώλειας μνήμης”



$$P(X > t + \alpha | X > \alpha) = \frac{\int_{t+\alpha}^{\infty} f(x)dx}{\int_{\alpha}^{\infty} f(x)dx} = \int_{t}^{\infty} f(x)dx = P(X > t)$$

$$\frac{P(X>t+a,\ X>a)}{P(X>a)} = \frac{P(X>t+a)}{P(X>a)}$$

$$\downarrow$$

$$\lambda e^{-\lambda x}$$

Κατανοώντας την ιδιότητα “απώλειας μνήμης”

Παράδειγμα
Ας υποθέσουμε ότι κατά μέσο όρο έρχονται σε ένα εμπορικό κατάστημα 30 πελάτες ανά ώρα. Υποθέτουμε επίσης ότι οι αφίξεις είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους.

Ας υποθέσουμε ότι έχουν περάσει 10 λεπτά από την άφιξη του τελευταίου πελάτη. Δεδομένου ότι πρόκειται για ασυνήθιστα μεγάλο χρονικό διάστημα, φαίνεται πιο πιθανό για έναν πελάτη να φτάσει μέσα στο επόμενο λεπτό.

Ωστόσο, αυτό δεν συμβαίνει.

Ο χρόνος αναμονής για την άφιξη του επόμενου πελάτη δεν εξαρτάται από τον χρόνο που έχει περάσει από την άφιξη του τελευταίου πελάτη.

Κατανοώντας την ιδιότητα “απώλειας μνήμης”

Ας υποθέσουμε ότι ο μέσος χρόνος ενός τηλεφωνήματος σε ένα καρτοτηλέφωνο είναι 5 min και πως η διάρκεια του τηλεφωνήματος ακολουθεί την εκθετική κατανομή.

Τότε $EX = 1/\lambda \leftrightarrow \lambda = 5$ και αν X = {διάρκεια ενός τηλεφωνήματος}, θα είναι $X \sim Exp(1/5)$.

Αν θέλεις να πάρεις τηλέφωνο και βρεις κάποιον εκεί ήδη να τηλεφωνεί, τότε η κατανομή του χρόνου που θα περιμένεις μέχρι να τελειώσει το τηλεφώνημα θα είναι και αυτός Exp(1/5) **ανεξάρτητα από το χρόνο που έχει ήδη μιλήσει ο προηγούμενος**.

Δηλαδή, η γνώση του χρόνου που έχει ήδη μεσολαβήσει, δεν βοηθάει στην πρόβλεψη του χρόνου που απομένει μέχρι να γίνει το επόμενο συμβάν.

Παράδειγμα “μη απώλειας μνήμης”

Είναι γνωστό ότι μια συγκεκριμένη μάρκα φορητών υπολογιστών διαρκούν περίπου 6 χρόνια, κατά μέσο όρο, πριν σταματήσουν να λειτουργούν. Έτσι, αν γνωρίζουμε ότι ένας συγκεκριμένος φορητός υπολογιστής είναι 5 ετών τότε ο αναμενόμενος χρόνος μέχρι να χαλάσει είναι αρκετά μικρός. Ωστόσο, εάν ένας άλλος φορητός υπολογιστής είναι μόλις 1 έτους, τότε ο αναμενόμενος χρόνος μέχρι να χαλάσει είναι αρκετά μεγάλος.

Σε αυτό το παράδειγμα, γνωρίζοντας το χρονικό διάστημα που έχει περάσει κατά τη διάρκεια ζωής κάθε φορητού υπολογιστή, μας ενημερώνει για πόσο καιρό ο φορητός υπολογιστής θα συνεχίσει να λειτουργεί μέχρι να πεθάνει. Έτσι, αυτή η κατανομή πιθανοτήτων δεν θα έχει μια ιδιότητα χωρίς μνήμη.

Αντίστοιχο είναι και το παράδειγμα της στάσης λεωφορείου όπου είναι βέβαιο ότι θα έρθει μία συγκεκριμένη χρονική στιγμή το επόμενο λεωφορείο. Στην περίπτωση αυτή, αν βρεθούμε τυχαία στη στάση μία χρονική στιγμή, ο χρόνος αναμονής για την επόμενη άφιξη λεωφορείου θα ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή.

Η σημαντική αλγεβρική διαφορά της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας των παραπάνω κατανομών σε σχέση με αυτήν της εκθετικής είναι πως οι παραπάνω είναι διάφορες του μηδενός σε ένα διάστημα πεπερασμένου μήκους, σε αντίθεση με την εκθετική που έχει μη μηδενικές τιμές στο $(0, +\infty)$.

Η εκθετική κατανομή ως η μόνη κατανομή συνεχούς μεταβλητής με “απώλεια μνήμης” 1/5

Πρόταση: Έστω f μία συνεχής, μη μηδενική, πραγματική συνάρτηση για την οποία ισχύει $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$ για κάθε x, y ϵ R. Τότε $f(x) = e^{cx}$, για κάποια σταθερά c ϵ R.

Απόδειξη
Αρχικά, παρατηρούμε ότι η συνάρτηση είναι θετική. Πράγματι, για κάθε x ϵ R:
$f(x) = f(x/2 + x/2) = f(x/2)^2 \geq 0 \leftrightarrow f(x) > 0$ καθώς η f δεν είναι ταυτοτικά μηδενική.

Θέτοντας x = y = 0 παίρνουμε, $f(0) = f(0)^2 \leftrightarrow f(0) = 0$ ή $1 \leftrightarrow$ **$f(0) = 1$** καθώς $f(x) \neq 0$.

Τώρα, παρατηρούμε ότι από την υπόθεση $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$, γενικότερα προκύπτει ότι:

$$\mathbf{f(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) = f(x_1) \cdot f(x_2) \cdot \ldots \cdot f(x_n)}$$

Η εκθετική κατανομή ως η μόνη κατανομή συνεχούς μεταβλητής με “απώλεια μνήμης” 2/5

Πρόταση: Έστω f μία συνεχής, μη μηδενική, πραγματική συνάρτηση για την οποία ισχύει $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$ για κάθε x, y є R. Τότε $f(x) = e^{cx}$, για κάποια σταθερά c є R.

Απόδειξη
Εφαρμόζοντας την τελευταία σχέση για τον φυσικό αριθμό n є N, υπολογίζουμε:

$$f(n) = f(1 + 1 + \ldots + 1) = f(1)^n$$

Τώρα, αν m є Z^- = {…, -3, -2, -1, 0} , τότε -m є N, και $f(-m) = f(1)^{-m}$. Επιπλέον:

$$f(m) \cdot f(-m) = f(m – m) = f(0) = 1, \text{ άρα } f(m) = f(-m)^{-1} = [f(1)^{-m}]^{-1} = f(1)^m,$$

Δηλαδή $\mathbf{f(m) = f(1)^m}$**, m є Z.**

Η εκθετική κατανομή ως η μόνη κατανομή συνεχούς μεταβλητής με "απώλεια μνήμης" 3/5

Πρόταση: Έστω f μία συνεχής, μη μηδενική, πραγματική συνάρτηση για την οποία ισχύει $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$ για κάθε x, y є R. Τότε $f(x) = e^{cx}$, για κάποια σταθερά c є R.

Απόδειξη
Περνώντας από τους ακέραιους στους ρητούς, παρατηρούμε ότι για κάθε ρητό 1/λ με λ є N^* είναι:

$$f(1) = f(1/\lambda) + f(1/\lambda) + \ldots + f(1/\lambda) \text{ (λ φορές)}= [f(1/\lambda)]^{\lambda} \leftrightarrow f(1/\lambda) = f(1)^{1/\lambda},$$

Ενώ αξιοποιώντας την $f(1/\lambda) \cdot f(-1/\lambda)= f(1/\lambda - 1/\lambda) = f(0) = 1$, βρίσκουμε ότι το ίδιο ισχύει για λ є Z^-. Γενικότερα, αν κ/λ є Q με $\kappa \geq 0$, $\lambda > 0$, τότε

$$f(\kappa/\lambda) = f(1/\lambda + 1/\lambda + \ldots + 1/\lambda) \text{ (κ φορές)} = f(1/\lambda)^{\kappa} = f(1)^{\kappa/\lambda}.$$

Συμπέρασμα που ανάλογα γενικεύεται για κ є Z, λ є Z^*.

Η εκθετική κατανομή ως η μόνη κατανομή συνεχούς μεταβλητής με “απώλεια μνήμης” 4/5

Πρόταση:Έστω f μία συνεχής, μη μηδενική, πραγματική συνάρτηση για την οποία ισχύει $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$ για κάθε x, y є R. Τότε $f(x) = e^{cx}$, για κάποια σταθερά c є R.

Απόδειξη
Έχοντας αποδείξει ότι $f(\rho) = f(1)^{\rho}$, για κάθε ρ є Q, η συνέχεια είναι απλή:

Οι ρητοί είναι πυκνοί στους πραγματικούς, άρα για κάθε x є R – Q, υπάρχει ακολουθία ρητών αριθμών $\rho_n \to x$. Καθώς η συνάρτηση f είναι συνεχής είναι:

$$f(x) = f(\lim_{n\to\infty} \rho_n) = \lim_{n\to\infty} f(\rho_n) = \lim_{n\to\infty} f(1)^{\rho n} = f(1)^{\lim n\to\infty \rho n} = f(1)^{x}. = e^{cx}, \text{ για } c = \ln(f(1)).$$

Η εκθετική κατανομή ως η μόνη κατανομή συνεχούς μεταβλητής με “απώλεια μνήμης” 5/5

Θεώρημα

Έστω X μία συνεχής θετική πραγματική τυχαία μεταβλητή. Η X ικανοποιεί την συνθήκη “απώλειας μνήμης”

$$P(X > t + \alpha \mid X > \alpha) = P(X > t),\ t > 0,\ \alpha \in R,$$

αν και μόνο αν ακολουθεί την εκθετική κατανομή, δηλαδή $X \sim Exp(\lambda)$ για κάποιο $\lambda \in R$.

Απόδειξη

Αρκεί να δείξουμε ότι $P(X \leq x) = 1 – e^{cx}$ για κάποια πραγματική σταθερά c. Από τη σχέση $P(X > t + \alpha \mid X > \alpha) = P(X > t)$ και τον ορισμό της δεσμευμένης πιθανότητας παίρνουμε

$$P(X > t + \alpha, X > \alpha) = P(X > t) \cdot P(X > \alpha) \leftrightarrow P(X > t + \alpha) = P(X > t) \cdot P(X > \alpha)$$

Θεωρούμε την πραγματική συνάρτηση **f(x) = P(X > x)** και παρατηρούμε ότι

$$f(x + y) = P(X > x + y) = P(X > x) \cdot P(X > \alpha) = f(x) \cdot f(y).$$

Καθώς, η f είναι συνεχής και μη μηδενική, από το προηγούμενο θεώρημα προκύπτει ότι $f(x) = e^{cx}$, για κάποια σταθερά $c \in R$ ή ισοδύναμα ότι $P(X > x) = e^{cx}$, από όπου $P(X \leq x) = 1 – e^{cx}$ ή **$X \sim Exp(c)$.**

Παράδειγμα

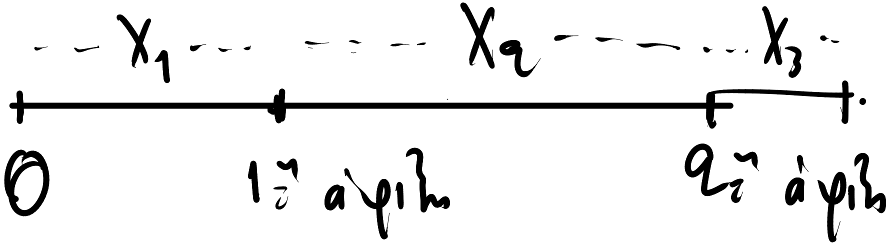
ανεξάρτητων

Έστω μία διαδικασία αφίξεων που συμβαίνει με ρυθμό λ = 2 συμβάντα / λεπτό και έστω X_1, X_2, …,, οι αντίστοιχοι χρόνοι μεταξύ των γεγονότων.

(α) Να βρείτε την πιθανότητα η πρώτη άφιξη να καθυστερήσει περισσότερο από μισό λεπτό.

(β) Αν γνωρίζουμε ότι δεν συνέβη κάποιο γεγονός έως το 1ο λεπτό, να βρεθεί η πιθανότητα το 1ο γεγονός να συμβεί μετά το 3ο λεπτό.

(γ) Αν γνωρίζουμε ότι το 3ο γεγονός έγινε το 2ο λεπτό, να βρεθεί η πιθανότητα, το 4ο γεγονός να συμβεί μετά το 4ο λεπτό.



$\lambda = 2$ συμβάντα/min

(α) $P\left(X_1 > \frac{1}{2}\right) = e^{-2\cdot\frac{1}{2}} = e^{-1} \simeq 0{,}368$

$X_1 \sim Exp\left(\frac{1}{2}\right)$

(β) $P(X_1>3 \mid X_1>1) = P(X_1>2) = e^{-2\cdot 2} = e^{-4}$

$$P(X_1 > 2+1 \mid X_1 > 1) = P(X_1 > 2)$$

έλλειψη μνήμης

$$P(X_1 > 3)$$

(γ) Γνωρίζουμε ότι $X_1 + X_2 + X_3 = 2$

$$P(\underbrace{X_1 + X_2 + X_3}_{2} + X_4 > 4 \mid X_1 + X_2 + X_3 = 2) = P(X_4 > 4-2)$$

$$= P(X_4 > 2) \xrightarrow{X_4 \sim Exp(2)} e^{-2 \cdot 2} = e^{-4} = 0{,}018.$$

Παράδειγμα

(α) Να βρείτε την πιθανότητα η πρώτη άφιξη να καθυστερήσει περισσότερο από μισό λεπτό.

Λύση

Είναι $X_1 \sim Exp(\lambda)$ και $\lambda = 2$, άρα $X_1 \sim Exp(2)$.

Υπολογίζουμε $P(X_1 > 0{,}5) = e^{-2 \cdot 0{,}5} = e^{-1} = 0{,}368 = 36{,}8\%$.

(β) Αν γνωρίζουμε ότι δεν συνέβη κάποιο γεγονός έως το 1ο λεπτό, να βρεθεί η πιθανότητα το 1ο γεγονός να συμβεί μετά το 3ο λεπτό.

Λύση

$P(X_1 > 3 \mid X_1 > 1) = P(X_1 > 1 + 2 \mid X_1 > 1) = P(X_1 > 2) = e^{-2 \cdot 2} = e^{-4} = 0{,}0183 = 1{,}83\%$

Παράδειγμα

(γ) Αν γνωρίζουμε ότι το 3ο γεγονός έγινε το 2ο λεπτό, να βρεθεί η πιθανότητα, το 4ο γεγονός να συμβεί μετά το 4ο λεπτό.

Λύση

Αν X_3 ο χρόνος που μεσολαβεί μεταξύ 2η και 3η μέτρηση τότε $X_3 \sim Exp(2)$.
Αν X_4 ο χρόνος που μεσολαβεί μεταξύ 3η και 4η μέτρηση τότε $X_4 \sim Exp(2)$.

{το 4ο γεγονός συμβαίνει μετά το 4ο λεπτό} = $\{X_4 > 4\}$
{το 3ο γεγονός έγινε το 2ο λεπτό} = $\{X_1 + X_2 + X_3 = 2\}$

P({το 4ο γεγονός συμβαίνει μετά το 4ο λεπτό} | {το 3ο γεγονός έγινε το 2ο λεπτό}) =

$= P(X_4 > 4 \mid X_1 + X_2 + X_3 = 2)$

$= P(X_4 > 4 - 2) = P(X_4 > 2)$ (ανεξαρτησία των γεγονότων)

$= e^{-2 \cdot 2} = e^{-4} = 0{,}0183 = 1{,}83\%$

Χρόνος μέχρι το n – οστό γεγονός

Έστω T_1, T_2, …T_n, …, ο χρόνος μέχρι την υλοποίηση του $1^{ου}$, $2^{ου}$, …, n – οστού, … γεγονότος. Αν X_1: ο χρόνος που περνάει μέχρι να συμβεί το $1^{ο}$ γεγονός, και X_n: ο χρόνος που περνάει μεταξύ του n – 1 και του n γεγονότος, τότε:

$T_1 = X_1$,
$T_2 = X_1 + X_2$
$T_3 = X_1 + X_2 + X_3$
….
$T_n = X_1 + X_2 + … + X_n$

Χρόνος μέχρι το n – οστό γεγονός

Κάθε

$$T_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n,\ n = 1, 2, \ldots,$$

είναι μία συνεχής τ.μ. που προκύπτει ως άθροισμα ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών που ακολουθούν την Exp(λ). Άρα, $T_n \sim$ Erlang(n, λ) (κατανομή Erlang), με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f_n(t) = \lambda^n \cdot t^{n-1} \cdot e^{-\lambda t} / (n-1)!,\ t > 0.$$

Επιπλέον,

$$E(T_n) = E(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) = E(X_1) + E(X_2) + \ldots + E(X_n) = n/\lambda.$$

$$Var(T_n) = Var(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) = Var(X_1) + Var(X_2) + \ldots + Var(X_n) = n/\lambda^2 \ (X_i,\ i = 1, 2, \ldots \text{ ανεξάρτητες}).$$

Σημειώσεις

1. Οι τ.μ. $T_1, T_2, \ldots T_n, \ldots$, δεν είναι ανεξάρτητες. Ιδιαίτερα, ισχύει: $T_1 \leq T_2 \leq \ldots \leq T_n \leq \ldots$,
2. Ακριβολογώντας είναι $T_n \sim$ Γάμμα(n, λ), καθώς Γάμμα(α, β) ≡ Erlang(α, β), για α, β ϵ N.

Χρόνος μέχρι το n – οστό γεγονός

Σύνοψη

- Αν X είναι ο χρόνος μεταξύ της εμφάνισης γεγονότων σε μία Poisson διεργασία, τότε X ~ Exp(λ) (εκθετική κατανομή με παράμετρο λ).

- Έστω T_n η χρονική στιγμή κατά την οποία το νιοστό γεγονός συμβαίνει σε μία Poisson διεργασία. Η αναμενόμενη τιμή της T_n είναι $E(T_n) = n/\lambda$ και η διακύμανση αυτής $Var(T_n) = n/\lambda^2$.

$X \sim Exp(\lambda)$: Σύνοψη

- λ: ρυθμός με τον οποίο συμβαίνουν κάποια γεγονότα.
- X = {χρόνος μεταξύ δύο γεγονότων}
- $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, x \geq 0$
- $F(x) = P(X \leq x) = 1 - e^{-\lambda x}, x \geq 0$.
- $EX = 1 / \lambda$ (αναμενόμενος χρόνος μεταξύ δύο γεγονότων)
- $VarX = 1 / \lambda^2$
- $P(X > t + \alpha \mid X > \alpha) = P(X > t), t > 0, \alpha \in R$, (ιδιότητα απώλειας μνήμης)
  (ο χρόνος που θα περιμένεις δεν εξαρτάται από το πόσο ήδη περιμένεις, συνέπεια της ανεξαρτησίας των γεγονότων και της έλλειψης άνω φράγματος στις τιμές της X)

Ασκήσεις στην εκθετική κατανομή

1. Δείξτε ότι αν η τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί την εκθετική κατανομή με μέση τιμή EX = θ, τότε P(X > x) = $e^{-x/\theta}$.

$$X \sim Exp(\lambda) = Exp\left(\frac{1}{\theta}\right), \quad P(X > x) = e^{-\frac{1}{\theta}\cdot x} = e^{-\frac{x}{\theta}}.$$

$$E(X) = \theta \Leftrightarrow \frac{1}{\lambda} = \theta \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{\theta}$$

Ασκήσεις στην εκθετική κατανομή

2. Έχει παρατηρηθεί πως οι ταξιδιώτες αγοράζουν τα αεροπορικά τους εισιτήρια πριν το ταξίδι σε ένα πλήθος ημερών X που ακολουθεί εκθετική κατανομή. Το μέσο πλήθος ημερών είναι ίσο με 15 ημέρες.
(α) Βρείτε την πιθανότητα ένας ταξιδιώτης να αγοράσει ένα εισιτήριο έως και 10 ημέρες πριν από το ταξίδι που θα κάνει.
(β) Ποιο είναι το διάστημα μέσα στο οποίο αγοράζουν εισιτήριο οι μισοί από τους ταξιδιώτες;
Υπόδειξη: Αξιοποιήστε την $1^η$ άσκηση.

$X \sim Exp(\lambda) = Exp\left(\frac{1}{15}\right)$

$E(X) = 15 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{15}$

(α) $P(X \leq 10) = 1 - e^{-\frac{1}{15}\cdot 10}$

$= 0,487.$

(β) Ψάχνω a τ.ω. $P(X \leq a) = 0,5 \Leftrightarrow 1 - e^{-\frac{a}{15}} = 0,5 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow e^{-\frac{a}{15}} = 0{,}5 \Leftrightarrow -\frac{a}{15} = \ln 0{,}5$$

$$\Leftrightarrow a = -15 \cdot \ln 0{,}5 = 10{,}4 \text{ ημέρες.}$$

Ασκήσεις στην εκθετική κατανομή

3. Κατά μέσο όρο, ένα συγκεκριμένο εξάρτημα υπολογιστή διαρκεί 10 χρόνια. Γνωρίζουμε ότι το χρονικό διάστημα που διαρκεί το εξάρτημα του υπολογιστή κατανέμεται εκθετικά.
(α) Ποια είναι η πιθανότητα ένα εξάρτημα υπολογιστή να διαρκεί περισσότερο από 7 χρόνια;
(β) Κατά μέσο όρο, πόσο θα διαρκούσαν πέντε εξαρτήματα υπολογιστή εάν χρησιμοποιούνται το ένα μετά το άλλο;
(γ) Ποια είναι η διάρκεια ζωής του 80% των εξαρτημάτων αυτού του τύπου;
(δ) Ποια είναι η πιθανότητα ένα εξάρτημα υπολογιστή να διαρκέσει από 9 έως 11 χρόνια;
Υπόδειξη για το (β): Η αναμενόμενη τιμή έχει την αθροιστική ιδιότητα.

X: διάρκεια ζωής. $X \sim Exp(\lambda)$, $E(X) = 10 = \frac{1}{\lambda} \Rightarrow \lambda = 0.1$

(α) $P(X>7) = e^{-0.1\cdot 7} = 0,497$.

(β) Διάρκεια ζωής των 5: $X_1+X_2+X_3+X_4+X_5$

$$E(X_1+X_2+\dots+X_5) = E(X_1)+E(X_2)+\dots+E(X_5) = 10+10+\dots+10 = 50 \text{ χρ.}$$

(γ) $P(X \le a) = 0{,}8 \iff 1-e^{-0{,}1\cdot a} = 0{,}8 \iff$

$$\iff e^{-0{,}1\cdot a} = 0{,}2$$

$$\iff -0{,}1\cdot a = \ln 0{,}2$$

$$\iff a = -10\cdot \ln 0{,}2 = 16{,}1 \text{ χρονια.}$$

(δ) $P(9 \le X \le 11) = F(11) - F(9) = \left(1-e^{-0{,}1\cdot 11}\right) - \left(1-e^{-0{,}1\cdot 9}\right)$

$$= e^{-0{,}9} - e^{-1{,}1} = 0{,}074.$$

Ασκήσεις στην εκθετική κατανομή

4. Κατά μέσο όρο, ένα ζευγάρι παπούτσια για τρέξιμο διαρκεί 18 μήνες εάν χρησιμοποιείται κάθε μέρα. Γνωρίζουμε ότι η διάρκεια ενός ζευγαριού κατανέμεται εκθετικά.

(α) Ποια είναι η πιθανότητα ένα ζευγάρι παπούτσια για τρέξιμο να διαρκέσει περισσότερο από 15 μήνες;

(β) Κατά μέσο όρο, πόσο θα διαρκέσουν έξι ζευγάρια παπούτσια για τρέξιμο αν χρησιμοποιηθούν το ένα μετά το άλλο;

(γ) Πόσους μήνες αντέχει το 80% των παπουτσιών που χρησιμοποιούνται κάθε μέρα;

Ασκήσεις στην εκθετική κατανομή

5. Ο αριθμός των χιλιομέτρων που μπορεί να διανύσει ένα συγκεκριμένο αυτοκίνητο πριν τελειώσει η μπαταρία του κατανέμεται εκθετικά με μέσο όρο 50.000 χιλιόμετρα. Ο ιδιοκτήτης του αυτοκινήτου πρέπει να κάνει ένα ταξίδι 5.000 χιλιομέτρων. Ποια είναι η πιθανότητα να μπορέσει να ολοκληρώσει το ταξίδι χωρίς να χρειαστεί να αντικαταστήσει την μπαταρία του αυτοκινήτου;

Ασκήσεις στην εκθετική κατανομή

6. Σε ένα συγκεκριμένο τμήμα της Εγνατίας οδού, περνούν πέντε αυτοκίνητα ανά λεπτό. Υποθέτουμε ότι το χρονικό διάστημα μεταξύ των διαδοχικών διελεύσεων ακολουθεί την εκθετική κατανομή.

(α) Πόσα δευτερόλεπτα περνούν κατά μέσο όρο μεταξύ δύο διαδοχικών αυτοκινήτων;

(β) Αφού περάσει ένα αυτοκίνητο, πόσο χρόνο θα χρειαστούν κατά μέσο όρο για να περάσουν άλλα επτά αυτοκίνητα;

(γ) Βρείτε την πιθανότητα ότι αφού περάσει ένα αυτοκίνητο, το επόμενο αυτοκίνητο θα περάσει μέσα στα επόμενα 20 δευτερόλεπτα.

(δ) Βρείτε την πιθανότητα ότι αφού περάσει ένα αυτοκίνητο, δεν θα περάσει άλλο για τουλάχιστον άλλα 15 δευτερόλεπτα.

5 Ι.Χ./min. Αν X: χρόνος μεταξύ διελεύσεων

Τότε $X \sim Exp(5)$

(α) $E(X) = \frac{1}{5}\text{min} = 12\text{sec.}$

(β) $E(X_2 + X_3 + \cdots + X_8) = E(X_2) + \cdots + E(X_8)$

$= \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{5} = \frac{7}{5}\text{min} = 84\text{sec.}$

(γ) $P(X \leq \frac{1}{3}) = 1 - e^{-5 \cdot \frac{1}{3}} = 0{,}811.$

(δ) $P(X > \frac{1}{4}) = e^{-5 \cdot \frac{1}{4}} = 0{,}287.$

Κανονική Κατανομή

Κανονική Κατανομή – Συνάρτηση πυκνότητας

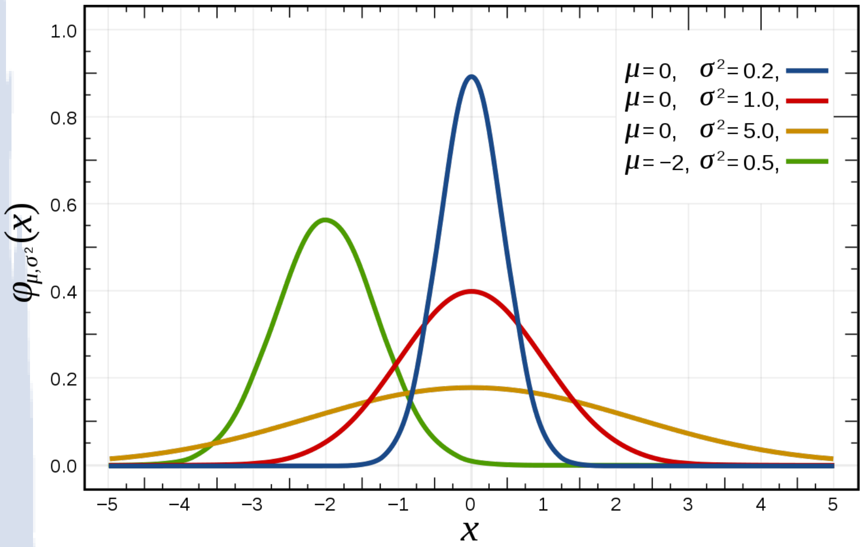
Η κανονική κατανομή (normal distribution) χρησιμοποιείται για να περιγραφούν τυχαίες μεταβλητές πραγματικών τιμών, οι οποίες λαμβάνουν τιμές ύστερα από την επίδραση πολλών ανεξάρτητων και αθροιστικών μεταξύ τους σφαλμάτων.

Αν μ є R και σ є (0, +∞) τότε **X ~ N(μ, σ²)** αν η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της X είναι η

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

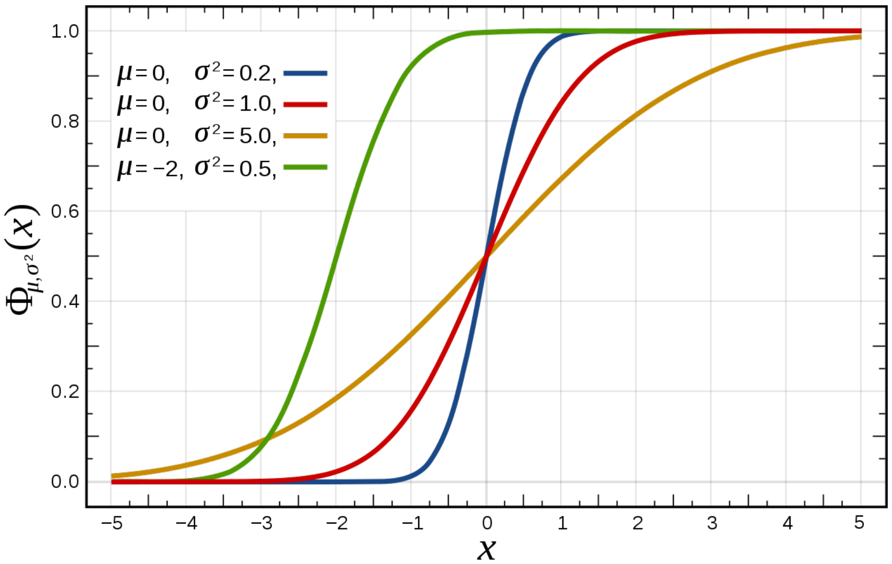
Σημειώσεις:
1. Η συνάρτηση κατανομής $F_X(X \leq x)$ δεν προσφέρεται σε κλειστή μορφή καθώς το ολοκλήρωμα της f(x) από το -∞ έως το x δεν υπολογίζεται με κάποια γνωστή μέθο

Κανονική Κατανομή



Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$



Συνάρτηση κατανομής

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt.$$

Κανονική Κατανομή: Γεωμετρικά Χαρακτηριστικά

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

$X \sim N(\underbrace{\mu}_{EX}, \underbrace{\sigma^2}_{Var})$

Αναμενόμενη τιμή: $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \mu.$

Διακύμανση: $Var(X) = E[(X-\mu)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \sigma^2.$

Τυπική απόκλιση: σ.

Συντελεστής ασυμμετρίας: $\gamma = \frac{E[(X-\mu)^3]}{\sigma^3} = \frac{1}{\sigma^3} \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^3 f(x) dx = 0.$ (απολύτως συμμετρική κατανομή γύρω από το μ)

Συντελεστής κυρτότητας: $\alpha = \frac{E[(X-\mu)^4]}{\sigma^4} = \frac{1}{\sigma^3} \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^3 f(x) dx = \underline{3}.$

Κανονική Κατανομή – Συνάρτηση πυκνότητας

Παραδείγματα μ σ^2

1. Αν X ~ N(10, 25) = N(10, 5^2), τότε $f(x) = \frac{1}{5\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-10)^2}{50}}$

2. Αν X ~ N(0, 2) = N(10, $(2^{½})^2$), τότε $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{4}}$

3. Αν X ~ N(0, 1), τότε $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

Η περίπτωση N(0, 1) είναι ιδιαίτερης σημασίας. Ονομάζεται **τυποποιημένη κανονική κατανομή** (standard normal distribution).

Κανονική Κατανομή – Συνάρτηση πυκνότητας

Παραδείγματα

1. Αν $f(x) = \frac{1}{3\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-2)^2}{18}}$, τότε μ = 2 και σ = 3 ή X ~ N(2, 3^2) = N(2, 9).

2. Αν $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x+1)^2}{2}}$, τότε μ = -1 και σ = 1 ή X ~ N(-1, 1^2) = N(-1, 1).

Κανονική Κατανομή – Συνάρτηση κατανομής

Αν **X ~ N(μ, σ²)** τότε η συνάρτηση κατανομής

$$F_X(x) = P(X \le x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(\cancel{x}\,t-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,d\cancel{x}\,t,$$

δεν προσφέρεται σε κλειστή μορφή καθώς το συγκεκριμένο ολοκλήρωμα δεν υπολογίζεται με κάποια γνωστή μέθοδο. Για να αντιμετωπιστεί αυτό το πρόβλημα έχει καθιερωθεί μία διαδικασία σε δύο βήματα:

1ο βήμα

Η αναγωγή της τ.μ. X ~ N(μ, σ^2) σε μία νέα τ.μ. Z ~ N(0, 1).

2ο βήμα

Η εύρεση της ζητούμενης πιθανότητας $\Phi(z) = F_Z(z) = P(Z \le z)$ από έτοιμους πίνακες της N(0, 1) που έχουν βρεθεί με αριθμητικές προσεγγιστικές μεθόδους.

Κανονική Κατανομή – Συνάρτηση κατανομής

1ο βήμα: Αναγωγή της $N(\mu, \sigma^2)$ στη $N(0, 1)$.

Πρόταση
Αν $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ τότε $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$.

Απόδειξη
Πράγματι, αν $x \in R$, τότε $F_X(x) = P(X \leq x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\displaystyle\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2} d\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\frac{x-\mu}{\sigma}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = F_Z\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right).$$

Από την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της Z είναι φανερό ότι $Z \sim N(0, 1)$.

$\Phi(a) = P(Z \leq a)$, $Z \sim N(0,1)$

$P(Z < 1,25) = 0.89435 = \int_{-\infty}^{1.25} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$

2ο βήμα: Εύρεση της $\Phi(z) = P(Z \leq z)$ από έτοιμους πίνακες της $N(0, 1)$

STANDARD NORMAL DISTRIBUTION: Table Values Represent AREA to the LEFT of the Z score.

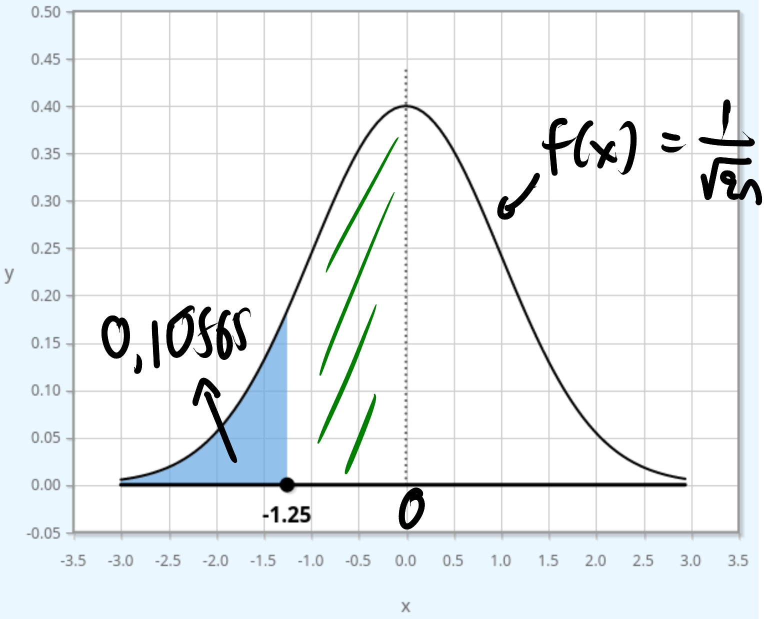
Z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
-3.9	.00005	.00005	.00004	.00004	.00004	.00004	.00004	.00004	.00003	.00003
-3.8	.00007	.00007	.00007	.00006	.00006	.00006	.00006	.00005	.00005	.00005
-3.7	.00011	.00010	.00010	.00010	.00009	.00009	.00008	.00008	.00008	.00008
-3.6	.00016	.00015	.00015	.00014	.00014	.00013	.00013	.00012	.00012	.00011
-3.5	.00023	.00022	.00022	.00021	.00020	.00019	.00019	.00018	.00017	.00017
-3.4	.00034	.00032	.00031	.00030	.00029	.00028	.00027	.00026	.00025	.00024
-3.3	.00048	.00047	.00045	.00043	.00042	.00040	.00039	.00038	.00036	.00035
-3.2	.00069	.00066	.00064	.00062	.00060	.00058	.00056	.00054	.00052	.00050
-3.1	.00097	.00094	.00090	.00087	.00084	.00082	.00079	.00076	.00074	.00071
-3.0	.00135	.00131	.00126	.00122	.00118	.00114	.00111	.00107	.00104	.00100
-2.9	.00187	.00181	.00175	.00169	.00164	.00159	.00154	.00149	.00144	.00139
-2.8	.00256	.00248	.00240	.00233	.00226	.00219	.00212	.00205	.00199	.00193
-2.7	.00347	.00336	.00326	.00317	.00307	.00298	.00289	.00280	.00272	.00264
-2.6	.00466	.00453	.00440	.00427	.00415	.00402	.00391	.00379	.00368	.00357
-2.5	.00621	.00604	.00587	.00570	.00554	.00539	.00523	.00508	.00494	.00480
-2.4	.00820	.00798	.00776	.00755	.00734	.00714	.00695	.00676	.00657	.00639
-2.3	.01072	.01044	.01017	.00990	.00964	.00939	.00914	.00889	.00866	.00842
-2.2	.01390	.01355	.01321	.01287	.01255	.01222	.01191	.01160	.01130	.01101
-2.1	.01786	.01743	.01700	.01659	.01618	.01578	.01539	.01500	.01463	.01426
-2.0	.02275	.02222	.02169	.02118	.02068	.02018	.01970	.01923	.01876	.01831
-1.9	.02872	.02807	.02743	.02680	.02619	.02559	.02500	.02442	.02385	.02330
-1.8	.03593	.03515	.03438	.03362	.03288	.03216	.03144	.03074	.03005	.02938
-1.7	.04457	.04363	.04272	.04182	.04093	.04006	.03920	.03836	.03754	.03673
-1.6	.05480	.05370	.05262	.05155	.05050	.04947	.04846	.04746	.04648	.04551
-1.5	.06681	.06552	.06426	.06301	.06178	.06057	.05938	.05821	.05705	.05592
-1.4	.08076	.07927	.07780	.07636	.07493	.07353	.07215	.07078	.06944	.06811
-1.3	.09680	.09510	.09342	.09176	.09012	.08851	.08691	.08534	.08379	.08226
-1.2	.11507	.11314	.11123	.10935	.10749	.10565	.10383	.10204	.10027	.09853
-1.1	.13567	.13350	.13136	.12924	.12714	.12507	.12302	.12100	.11900	.11702
-1.0	.15866	.15625	.15386	.15151	.14917	.14686	.14457	.14231	.14007	.13786
-0.9	.18406	.18141	.17879	.17619	.17361	.17106	.16853	.16602	.16354	.16109
-0.8	.21186	.20897	.20611	.20327	.20045	.19766	.19489	.19215	.18943	.18673
-0.7	.24196	.23885	.23576	.23270	.22965	.22663	.22363	.22065	.21770	.21476
-0.6	.27425	.27093	.26763	.26435	.26109	.25785	.25463	.25143	.24825	.24510
-0.5	.30854	.30503	.30153	.29806	.29460	.29116	.28774	.28434	.28096	.27760
-0.4	.34458	.34090	.33724	.33360	.32997	.32636	.32276	.31918	.31561	.31207
-0.3	.38209	.37828	.37448	.37070	.36693	.36317	.35942	.35569	.35197	.34827
-0.2	.42074	.41683	.41294	.40905	.40517	.40129	.39743	.39358	.38974	.38591
-0.1	.46017	.45620	.45224	.44828	.44433	.44038	.43644	.43251	.42858	.42465
-0.0	.50000	.49601	.49202	.48803	.48405	.48006	.47608	.47210	.46812	.46414

STANDARD NORMAL DISTRIBUTION: Table Values Represent AREA to the LEFT of the Z score.

Z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.50000	.50399	.50798	.51197	.51595	.51994	.52392	.52790	.53188	.53586
0.1	.53983	.54380	.54776	.55172	.55567	.55962	.56356	.56749	.57142	.57535
0.2	.57926	.58317	.58706	.59095	.59483	.59871	.60257	.60642	.61026	.61409
0.3	.61791	.62172	.62552	.62930	.63307	.63683	.64058	.64431	.64803	.65173
0.4	.65542	.65910	.66276	.66640	.67003	.67364	.67724	.68082	.68439	.68793
0.5	.69146	.69497	.69847	.70194	.70540	.70884	.71226	.71566	.71904	.72240
0.6	.72575	.72907	.73237	.73565	.73891	.74215	.74537	.74857	.75175	.75490
0.7	.75804	.76115	.76424	.76730	.77035	.77337	.77637	.77935	.78230	.78524
0.8	.78814	.79103	.79389	.79673	.79955	.80234	.80511	.80785	.81057	.81327
0.9	.81594	.81859	.82121	.82381	.82639	.82894	.83147	.83398	.83646	.83891
1.0	.84134	.84375	.84614	.84849	.85083	.85314	.85543	.85769	.85993	.86214
1.1	.86433	.86650	.86864	.87076	.87286	.87493	.87698	.87900	.88100	.88298
1.2	.88493	.88686	.88877	.89065	.89251	.89435	.89617	.89796	.89973	.90147
1.3	.90320	.90490	.90658	.90824	.90988	.91149	.91309	.91466	.91621	.91774
1.4	.91924	.92073	.92220	.92364	.92507	.92647	.92785	.92922	.93056	.93189
1.5	.93319	.93448	.93574	.93699	.93822	.93943	.94062	.94179	.94295	.94408
1.6	.94520	.94630	.94738	.94845	.94950	.95053	.95154	.95254	.95352	.95449
1.7	.95543	.95637	.95728	.95818	.95907	.95994	.96080	.96164	.96246	.96327
1.8	.96407	.96485	.96562	.96638	.96712	.96784	.96856	.96926	.96995	.97062
1.9	.97128	.97193	.97257	.97320	.97381	.97441	.97500	.97558	.97615	.97670
2.0	.97725	.97778	.97831	.97882	.97932	.97982	.98030	.98077	.98124	.98169
2.1	.98214	.98257	.98300	.98341	.98382	.98422	.98461	.98500	.98537	.98574
2.2	.98610	.98645	.98679	.98713	.98745	.98778	.98809	.98840	.98870	.98899
2.3	.98928	.98956	.98983	.99010	.99036	.99061	.99086	.99111	.99134	.99158
2.4	.99180	.99202	.99224	.99245	.99266	.99286	.99305	.99324	.99343	.99361
2.5	.99379	.99396	.99413	.99430	.99446	.99461	.99477	.99492	.99506	.99520
2.6	.99534	.99547	.99560	.99573	.99585	.99598	.99609	.99621	.99632	.99643
2.7	.99653	.99664	.99674	.99683	.99693	.99702	.99711	.99720	.99728	.99736
2.8	.99744	.99752	.99760	.99767	.99774	.99781	.99788	.99795	.99801	.99807
2.9	.99813	.99819	.99825	.99831	.99836	.99841	.99846	.99851	.99856	.99861
3.0	.99865	.99869	.99874	.99878	.99882	.99886	.99889	.99893	.99896	.99900
3.1	.99903	.99906	.99910	.99913	.99916	.99918	.99921	.99924	.99926	.99929
3.2	.99931	.99934	.99936	.99938	.99940	.99942	.99944	.99946	.99948	.99950
3.3	.99952	.99953	.99955	.99957	.99958	.99960	.99961	.99962	.99964	.99965
3.4	.99966	.99968	.99969	.99970	.99971	.99972	.99973	.99974	.99975	.99976
3.5	.99977	.99978	.99978	.99979	.99980	.99981	.99981	.99982	.99983	.99983
3.6	.99984	.99985	.99985	.99986	.99986	.99987	.99987	.99988	.99988	.99989
3.7	.99989	.99990	.99990	.99990	.99991	.99991	.99992	.99992	.99992	.99992
3.8	.99993	.99993	.99993	.99994	.99994	.99994	.99994	.99995	.99995	.99995
3.9	.99995	.99995	.99996	.99996	.99996	.99996	.99996	.99996	.99997	.99997

STANDARD NORMAL DISTRIBUTION: Table Values Represent AREA to the LEFT of the Z score.

Z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
-3.9	.00005	.00005	.00004	.00004	.00004	.00004	.00004	.00004	.00003	.00003
-3.8	.00007	.00007	.00007	.00006	.00006	.00006	.00006	.00005	.00005	.00005
-3.7	.00011	.00010	.00010	.00010	.00009	.00009	.00008	.00008	.00008	.00008
-3.6	.00016	.00015	.00015	.00014	.00014	.00013	.00013	.00012	.00012	.00011
-3.5	.00023	.00022	.00022	.00021	.00020	.00019	.00019	.00018	.00017	.00017
-3.4	.00034	.00032	.00031	.00030	.00029	.00028	.00027	.00026	.00025	.00024
-3.3	.00048	.00047	.00045	.00043	.00042	.00040	.00039	.00038	.00036	.00035
-3.2	.00069	.00066	.00064	.00062	.00060	.00058	.00056	.00054	.00052	.00050
-3.1	.00097	.00094	.00090	.00087	.00084	.00082	.00079	.00076	.00074	.00071
-3.0	.00135	.00131	.00126	.00122	.00118	.00114	.00111	.00107	.00104	.00100
-2.9	.00187	.00181	.00175	.00169	.00164	.00159	.00154	.00149	.00144	.00139
-2.8	.00256	.00248	.00240	.00233	.00226	.00219	.00212	.00205	.00199	.00193
-2.7	.00347	.00336	.00326	.00317	.00307	.00298	.00289	.00280	.00272	.00264
-2.6	.00466	.00453	.00440	.00427	.00415	.00402	.00391	.00379	.00368	.00357
-2.5	.00621	.00604	.00587	.00570	.00554	.00539	.00523	.00508	.00494	.00480
-2.4	.00820	.00798	.00776	.00755	.00734	.00714	.00695	.00676	.00657	.00639
-2.3	.01072	.01044	.01017	.00990	.00964	.00939	.00914	.00889	.00866	.00842
-2.2	.01390	.01355	.01321	.01287	.01255	.01222	.01191	.01160	.01130	.01101
-2.1	.01786	.01743	.01700	.01659	.01618	.01578	.01539	.01500	.01463	.01426
-2.0	.02275	.02222	.02169	.02118	.02068	.02018	.01970	.01923	.01876	.01831
-1.9	.02872	.02807	.02743	.02680	.02619	.02559	.02500	.02442	.02385	.02330
-1.8	.03593	.03515	.03438	.03362	.03288	.03216	.03144	.03074	.03005	.02938
-1.7	.04457	.04363	.04272	.04182	.04093	.04006	.03920	.03836	.03754	.03673
-1.6	.05480	.05370	.05262	.05155	.05050	.04947	.04846	.04746	.04648	.04551
-1.5	.06681	.06552	.06426	.06301	.06178	.06057	.05938	.05821	.05705	.05592
-1.4	.08076	.07927	.07780	.07636	.07493	.07353	.07215	.07078	.06944	.06811
-1.3	.09680	.09510	.09342	.09176	.09012	.08851	.08691	.08534	.08379	.08226
-1.2	.11507	.11314	.11123	.10935	.10749	.10565	.10383	.10204	.10027	.09853
-1.1	.13567	.13350	.13136	.12924	.12714	.12507	.12302	.12100	.11900	.11702
-1.0	.15866	.15625	.15386	.15151	.14917	.14686	.14457	.14231	.14007	.13786
-0.9	.18406	.18141	.17879	.17619	.17361	.17106	.16853	.16602	.16354	.16109
-0.8	.21186	.20897	.20611	.20327	.20045	.19766	.19489	.19215	.18943	.18673
-0.7	.24196	.23885	.23576	.23270	.22965	.22663	.22363	.22065	.21770	.21476
-0.6	.27425	.27093	.26763	.26435	.26109	.25785	.25463	.25143	.24825	.24510
-0.5	.30854	.30503	.30153	.29806	.29460	.29116	.28774	.28434	.28096	.27760
-0.4	.34458	.34090	.33724	.33360	.32997	.32636	.32276	.31918	.31561	.31207
-0.3	.38209	.37828	.37448	.37070	.36693	.36317	.35942	.35569	.35197	.34827
-0.2	.42074	.41683	.41294	.40905	.40517	.40129	.39743	.39358	.38974	.38591
-0.1	.46017	.45620	.45224	.44828	.44433	.44038	.43644	.43251	.42858	.42465
-0.0	.50000	.49601	.49202	.48803	.48405	.48006	.47608	.47210	.46812	.46414

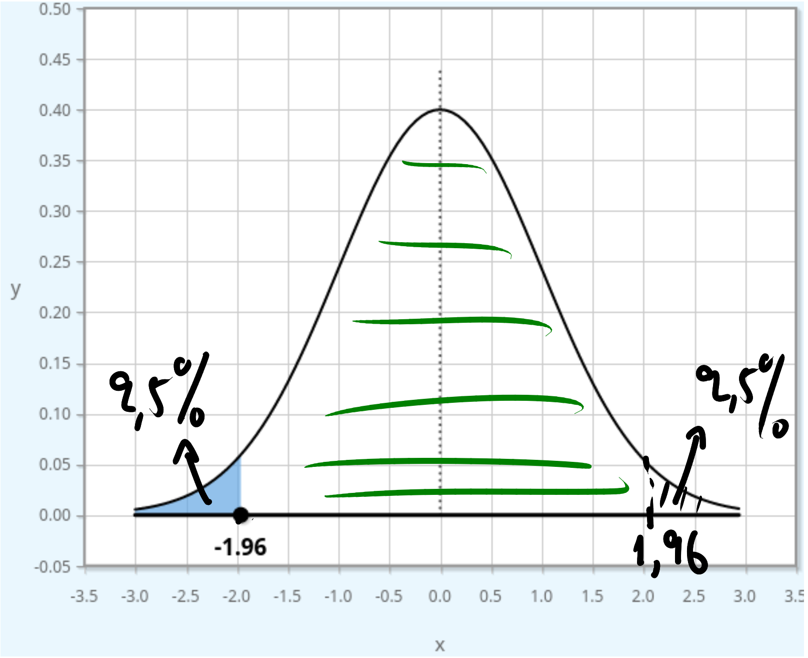


$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

π.χ. Αν Z ~ N(0, 1), να βρεθούν οι
(α) P(Z < -1,25) = 0,10565
(β) P(-1,25 < Z < 0) = 0,5-0,10565
(γ) P(Z > -1,25) = 1-0,10565.

STANDARD NORMAL DISTRIBUTION: Table Values Represent AREA to the LEFT of the Z score.

Z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
-3.9	.00005	.00005	.00004	.00004	.00004	.00004	.00004	.00004	.00003	.00003
-3.8	.00007	.00007	.00007	.00006	.00006	.00006	.00006	.00005	.00005	.00005
-3.7	.00011	.00010	.00010	.00010	.00009	.00009	.00008	.00008	.00008	.00008
-3.6	.00016	.00015	.00015	.00014	.00014	.00013	.00013	.00012	.00012	.00011
-3.5	.00023	.00022	.00022	.00021	.00020	.00019	.00019	.00018	.00017	.00017
-3.4	.00034	.00032	.00031	.00030	.00029	.00028	.00027	.00026	.00025	.00024
-3.3	.00048	.00047	.00045	.00043	.00042	.00040	.00039	.00038	.00036	.00035
-3.2	.00069	.00066	.00064	.00062	.00060	.00058	.00056	.00054	.00052	.00050
-3.1	.00097	.00094	.00090	.00087	.00084	.00082	.00079	.00076	.00074	.00071
-3.0	.00135	.00131	.00126	.00122	.00118	.00114	.00111	.00107	.00104	.00100
-2.9	.00187	.00181	.00175	.00169	.00164	.00159	.00154	.00149	.00144	.00139
-2.8	.00256	.00248	.00240	.00233	.00226	.00219	.00212	.00205	.00199	.00193
-2.7	.00347	.00336	.00326	.00317	.00307	.00298	.00289	.00280	.00272	.00264
-2.6	.00466	.00453	.00440	.00427	.00415	.00402	.00391	.00379	.00368	.00357
-2.5	.00621	.00604	.00587	.00570	.00554	.00539	.00523	.00508	.00494	.00480
-2.4	.00820	.00798	.00776	.00755	.00734	.00714	.00695	.00676	.00657	.00639
-2.3	.01072	.01044	.01017	.00990	.00964	.00939	.00914	.00889	.00866	.00842
-2.2	.01390	.01355	.01321	.01287	.01255	.01222	.01191	.01160	.01130	.01101
-2.1	.01786	.01743	.01700	.01659	.01618	.01578	.01539	.01500	.01463	.01426
-2.0	.02275	.02222	.02169	.02118	.02068	.02018	.01970	.01923	.01876	.01831
-1.9	.02872	.02807	.02743	.02680	.02619	.02559	.02500	.02442	.02385	.02330
-1.8	.03593	.03515	.03438	.03362	.03288	.03216	.03144	.03074	.03005	.02938
-1.7	.04457	.04363	.04272	.04182	.04093	.04006	.03920	.03836	.03754	.03673
-1.6	.05480	.05370	.05262	.05155	.05050	.04947	.04846	.04746	.04648	.04551
-1.5	.06681	.06552	.06426	.06301	.06178	.06057	.05938	.05821	.05705	.05592
-1.4	.08076	.07927	.07780	.07636	.07493	.07353	.07215	.07078	.06944	.06811
-1.3	.09680	.09510	.09342	.09176	.09012	.08851	.08691	.08534	.08379	.08226
-1.2	.11507	.11314	.11123	.10935	.10749	.10565	.10383	.10204	.10027	.09853
-1.1	.13567	.13350	.13136	.12924	.12714	.12507	.12302	.12100	.11900	.11702
-1.0	.15866	.15625	.15386	.15151	.14917	.14686	.14457	.14231	.14007	.13786
-0.9	.18406	.18141	.17879	.17619	.17361	.17106	.16853	.16602	.16354	.16109
-0.8	.21186	.20897	.20611	.20327	.20045	.19766	.19489	.19215	.18943	.18673
-0.7	.24196	.23885	.23576	.23270	.22965	.22663	.22363	.22065	.21770	.21476
-0.6	.27425	.27093	.26763	.26435	.26109	.25785	.25463	.25143	.24825	.24510
-0.5	.30854	.30503	.30153	.29806	.29460	.29116	.28774	.28434	.28096	.27760
-0.4	.34458	.34090	.33724	.33360	.32997	.32636	.32276	.31918	.31561	.31207
-0.3	.38209	.37828	.37448	.37070	.36693	.36317	.35942	.35569	.35197	.34827
-0.2	.42074	.41683	.41294	.40905	.40517	.40129	.39743	.39358	.38974	.38591
-0.1	.46017	.45620	.45224	.44828	.44433	.44038	.43644	.43251	.42858	.42465
-0.0	.50000	.49601	.49202	.48803	.48405	.48006	.47608	.47210	.46812	.46414



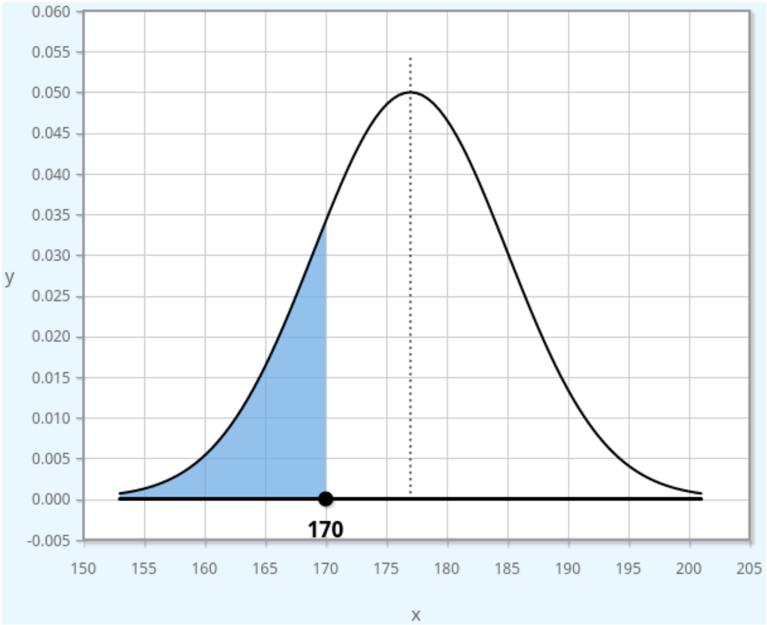
π.χ. Αν Z ~ N(0, 1), να βρεθεί η P(Z < -1,96)

$P(Z<-1,96)=0,025$

$P(-1,96<Z<1,96) = 0,95.$

STANDARD NORMAL DISTRIBUTION: Table Values Represent AREA to the LEFT of the Z score.

Z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
-3.9	.00005	.00005	.00004	.00004	.00004	.00004	.00004	.00004	.00003	.00003
-3.8	.00007	.00007	.00007	.00006	.00006	.00006	.00006	.00005	.00005	.00005
-3.7	.00011	.00010	.00010	.00010	.00009	.00009	.00008	.00008	.00008	.00008
-3.6	.00016	.00015	.00015	.00014	.00014	.00013	.00013	.00012	.00012	.00011
-3.5	.00023	.00022	.00022	.00021	.00020	.00019	.00019	.00018	.00017	.00017
-3.4	.00034	.00032	.00031	.00030	.00029	.00028	.00027	.00026	.00025	.00024
-3.3	.00048	.00047	.00045	.00043	.00042	.00040	.00039	.00038	.00036	.00035
-3.2	.00069	.00066	.00064	.00062	.00060	.00058	.00056	.00054	.00052	.00050
-3.1	.00097	.00094	.00090	.00087	.00084	.00082	.00079	.00076	.00074	.00071
-3.0	.00135	.00131	.00126	.00122	.00118	.00114	.00111	.00107	.00104	.00100
-2.9	.00187	.00181	.00175	.00169	.00164	.00159	.00154	.00149	.00144	.00139
-2.8	.00256	.00248	.00240	.00233	.00226	.00219	.00212	.00205	.00199	.00193
-2.7	.00347	.00336	.00326	.00317	.00307	.00298	.00289	.00280	.00272	.00264
-2.6	.00466	.00453	.00440	.00427	.00415	.00402	.00391	.00379	.00368	.00357
-2.5	.00621	.00604	.00587	.00570	.00554	.00539	.00523	.00508	.00494	.00480
-2.4	.00820	.00798	.00776	.00755	.00734	.00714	.00695	.00676	.00657	.00639
-2.3	.01072	.01044	.01017	.00990	.00964	.00939	.00914	.00889	.00866	.00842
-2.2	.01390	.01355	.01321	.01287	.01255	.01222	.01191	.01160	.01130	.01101
-2.1	.01786	.01743	.01700	.01659	.01618	.01578	.01539	.01500	.01463	.01426
-2.0	.02275	.02222	.02169	.02118	.02068	.02018	.01970	.01923	.01876	.01831
-1.9	.02872	.02807	.02743	.02680	.02619	.02559	.02500	.02442	.02385	.02330
-1.8	.03593	.03515	.03438	.03362	.03288	.03216	.03144	.03074	.03005	.02938
-1.7	.04457	.04363	.04272	.04182	.04093	.04006	.03920	.03836	.03754	.03673
-1.6	.05480	.05370	.05262	.05155	.05050	.04947	.04846	.04746	.04648	.04551
-1.5	.06681	.06552	.06426	.06301	.06178	.06057	.05938	.05821	.05705	.05592
-1.4	.08076	.07927	.07780	.07636	.07493	.07353	.07215	.07078	.06944	.06811
-1.3	.09680	.09510	.09342	.09176	.09012	.08851	.08691	.08534	.08379	.08226
-1.2	.11507	.11314	.11123	.10935	.10749	.10565	.10383	.10204	.10027	.09853
-1.1	.13567	.13350	.13136	.12924	.12714	.12507	.12302	.12100	.11900	.11702
-1.0	.15866	.15625	.15386	.15151	.14917	.14686	.14457	.14231	.14007	.13786
-0.9	.18406	.18141	.17879	.17619	.17361	.17106	.16853	.16602	.16354	.16109
-0.8	.21186	.20897	.20611	.20327	.20045	.19766	.19489	.19215	.18943	.18673
-0.7	.24196	.23885	.23576	.23270	.22965	.22663	.22363	.22065	.21770	.21476
-0.6	.27425	.27093	.26763	.26435	.26109	.25785	.25463	.25143	.24825	.24510
-0.5	.30854	.30503	.30153	.29806	.29460	.29116	.28774	.28434	.28096	.27760
-0.4	.34458	.34090	.33724	.33360	.32997	.32636	.32276	.31918	.31561	.31207
-0.3	.38209	.37828	.37448	.37070	.36693	.36317	.35942	.35569	.35197	.34827
-0.2	.42074	.41683	.41294	.40905	.40517	.40129	.39743	.39358	.38974	.38591
-0.1	.46017	.45620	.45224	.44828	.44433	.44038	.43644	.43251	.42858	.42465
-0.0	.50000	.49601	.49202	.48803	.48405	.48006	.47608	.47210	.46812	.46414



π.χ. Αν X ~ N(177, 8), να βρεθεί η P(X < 170)

$\mu_x = 177$, $\sigma_x^2 = 8 \Rightarrow \sigma_x = \sqrt{8}$

$Z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{X-177}{\sqrt{8}} \sim N(0,1)$ $=0{,}0676$

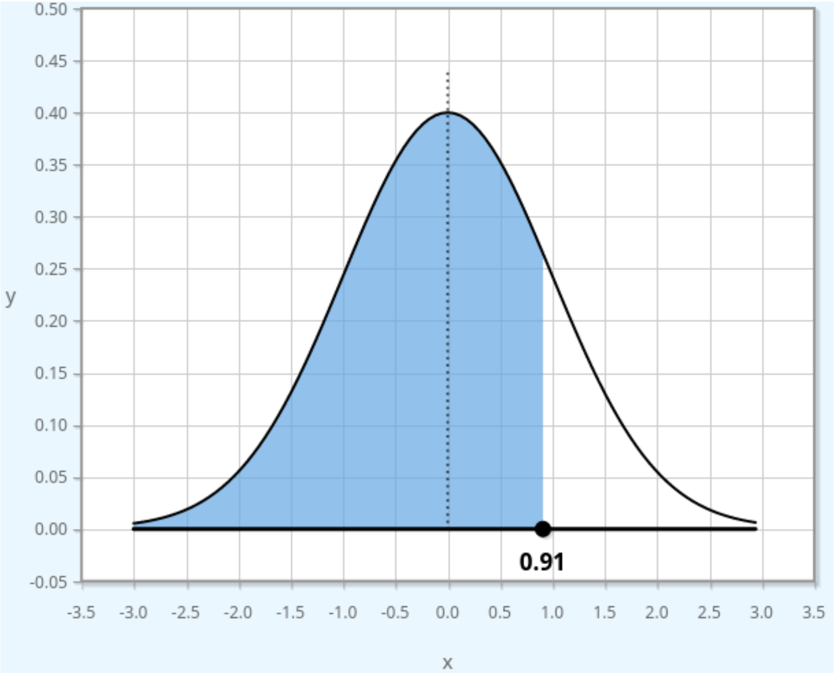
$P(X<170) = P\left(Z < \frac{170-177}{\sqrt{8}}\right) = P(Z<-2{,}47)$

STANDARD NORMAL DISTRIBUTION: Table Values Represent AREA to the LEFT of the Z score.

Z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
-3.9	.00005	.00005	.00004	.00004	.00004	.00004	.00004	.00004	.00003	.00003
-3.8	.00007	.00007	.00007	.00006	.00006	.00006	.00006	.00005	.00005	.00005
-3.7	.00011	.00010	.00010	.00010	.00009	.00009	.00008	.00008	.00008	.00008
-3.6	.00016	.00015	.00015	.00014	.00014	.00013	.00013	.00012	.00012	.00011
-3.5	.00023	.00022	.00022	.00021	.00020	.00019	.00019	.00018	.00017	.00017
-3.4	.00034	.00032	.00031	.00030	.00029	.00028	.00027	.00026	.00025	.00024
-3.3	.00048	.00047	.00045	.00043	.00042	.00040	.00039	.00038	.00036	.00035
-3.2	.00069	.00066	.00064	.00062	.00060	.00058	.00056	.00054	.00052	.00050
-3.1	.00097	.00094	.00090	.00087	.00084	.00082	.00079	.00076	.00074	.00071
-3.0	.00135	.00131	.00126	.00122	.00118	.00114	.00111	.00107	.00104	.00100
-2.9	.00187	.00181	.00175	.00169	.00164	.00159	.00154	.00149	.00144	.00139
-2.8	.00256	.00248	.00240	.00233	.00226	.00219	.00212	.00205	.00199	.00193
-2.7	.00347	.00336	.00326	.00317	.00307	.00298	.00289	.00280	.00272	.00264
-2.6	.00466	.00453	.00440	.00427	.00415	.00402	.00391	.00379	.00368	.00357
-2.5	.00621	.00604	.00587	.00570	.00554	.00539	.00523	.00508	.00494	.00480
-2.4	.00820	.00798	.00776	.00755	.00734	.00714	.00695	.00676	.00657	.00639
-2.3	.01072	.01044	.01017	.00990	.00964	.00939	.00914	.00889	.00866	.00842
-2.2	.01390	.01355	.01321	.01287	.01255	.01222	.01191	.01160	.01130	.01101
-2.1	.01786	.01743	.01700	.01659	.01618	.01578	.01539	.01500	.01463	.01426
-2.0	.02275	.02222	.02169	.02118	.02068	.02018	.01970	.01923	.01876	.01831
-1.9	.02872	.02807	.02743	.02680	.02619	.02559	.02500	.02442	.02385	.02330
-1.8	.03593	.03515	.03438	.03362	.03288	.03216	.03144	.03074	.03005	.02938
-1.7	.04457	.04363	.04272	.04182	.04093	.04006	.03920	.03836	.03754	.03673
-1.6	.05480	.05370	.05262	.05155	.05050	.04947	.04846	.04746	.04648	.04551
-1.5	.06681	.06552	.06426	.06301	.06178	.06057	.05938	.05821	.05705	.05592
-1.4	.08076	.07927	.07780	.07636	.07493	.07353	.07215	.07078	.06944	.06811
-1.3	.09680	.09510	.09342	.09176	.09012	.08851	.08691	.08534	.08379	.08226
-1.2	.11507	.11314	.11123	.10935	.10749	.10565	.10383	.10204	.10027	.09853
-1.1	.13567	.13350	.13136	.12924	.12714	.12507	.12302	.12100	.11900	.11702
-1.0	.15866	.15625	.15386	.15151	.14917	.14686	.14457	.14231	.14007	.13786
-0.9	.18406	.18141	.17879	.17619	.17361	.17106	.16853	.16602	.16354	.16109
-0.8	.21186	.20897	.20611	.20327	.20045	.19766	.19489	.19215	.18943	.18673
-0.7	.24196	.23885	.23576	.23270	.22965	.22663	.22363	.22065	.21770	.21476
-0.6	.27425	.27093	.26763	.26435	.26109	.25785	.25463	.25143	.24825	.24510
-0.5	.30854	.30503	.30153	.29806	.29460	.29116	.28774	.28434	.28096	.27760
-0.4	.34458	.34090	.33724	.33360	.32997	.32636	.32276	.31918	.31561	.31207
-0.3	.38209	.37828	.37448	.37070	.36693	.36317	.35942	.35569	.35197	.34827
-0.2	.42074	.41683	.41294	.40905	.40517	.40129	.39743	.39358	.38974	.38591
-0.1	.46017	.45620	.45224	.44828	.44433	.44038	.43644	.43251	.42858	.42465
-0.0	.50000	.49601	.49202	.48803	.48405	.48006	.47608	.47210	.46812	.46414

Να βρεθεί ο αριθμός z για τον οποίον ισχύει:

$P(Z < z) = 0,305 \Rightarrow z = -0,51$

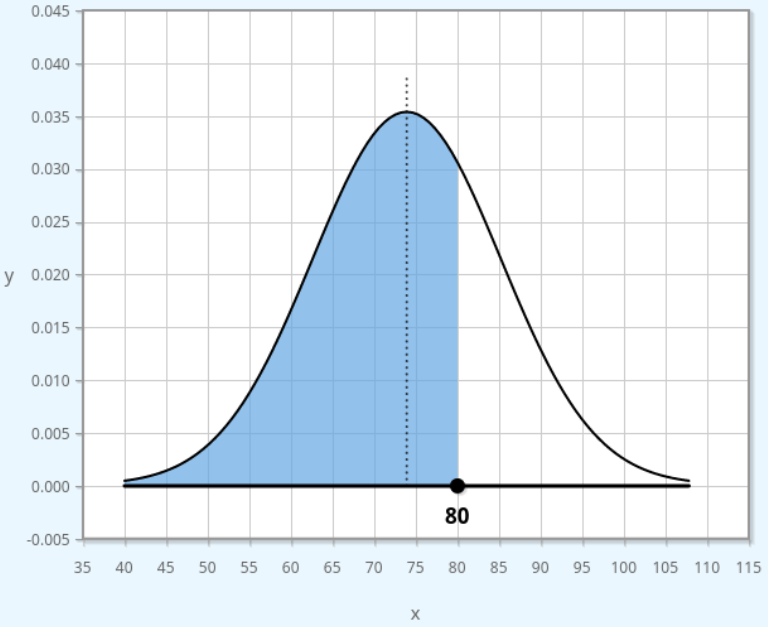


π.χ. Αν Z ~ N(0, 1), να βρεθεί η P(Z < 0,91)

$P(Z<0{,}91)=0{,}81859$

STANDARD NORMAL DISTRIBUTION: Table Values Represent AREA to the LEFT of the Z score.

Z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.50000	.50399	.50798	.51197	.51595	.51994	.52392	.52790	.53188	.53586
0.1	.53983	.54380	.54776	.55172	.55567	.55962	.56356	.56749	.57142	.57535
0.2	.57926	.58317	.58706	.59095	.59483	.59871	.60257	.60642	.61026	.61409
0.3	.61791	.62172	.62552	.62930	.63307	.63683	.64058	.64431	.64803	.65173
0.4	.65542	.65910	.66276	.66640	.67003	.67364	.67724	.68082	.68439	.68793
0.5	.69146	.69497	.69847	.70194	.70540	.70884	.71226	.71566	.71904	.72240
0.6	.72575	.72907	.73237	.73565	.73891	.74215	.74537	.74857	.75175	.75490
0.7	.75804	.76115	.76424	.76730	.77035	.77337	.77637	.77935	.78230	.78524
0.8	.78814	.79103	.79389	.79673	.79955	.80234	.80511	.80785	.81057	.81327
0.9	.81594	.81859	.82121	.82381	.82639	.82894	.83147	.83398	.83646	.83891
1.0	.84134	.84375	.84614	.84849	.85083	.85314	.85543	.85769	.85993	.86214
1.1	.86433	.86650	.86864	.87076	.87286	.87493	.87698	.87900	.88100	.88298
1.2	.88493	.88686	.88877	.89065	.89251	.89435	.89617	.89796	.89973	.90147
1.3	.90320	.90490	.90658	.90824	.90988	.91149	.91309	.91466	.91621	.91774
1.4	.91924	.92073	.92220	.92364	.92507	.92647	.92785	.92922	.93056	.93189
1.5	.93319	.93448	.93574	.93699	.93822	.93943	.94062	.94179	.94295	.94408
1.6	.94520	.94630	.94738	.94845	.94950	.95053	.95154	.95254	.95352	.95449
1.7	.95543	.95637	.95728	.95818	.95907	.95994	.96080	.96164	.96246	.96327
1.8	.96407	.96485	.96562	.96638	.96712	.96784	.96856	.96926	.96995	.97062
1.9	.97128	.97193	.97257	.97320	.97381	.97441	.97500	.97558	.97615	.97670
2.0	.97725	.97778	.97831	.97882	.97932	.97982	.98030	.98077	.98124	.98169
2.1	.98214	.98257	.98300	.98341	.98382	.98422	.98461	.98500	.98537	.98574
2.2	.98610	.98645	.98679	.98713	.98745	.98778	.98809	.98840	.98870	.98899
2.3	.98928	.98956	.98983	.99010	.99036	.99061	.99086	.99111	.99134	.99158
2.4	.99180	.99202	.99224	.99245	.99266	.99286	.99305	.99324	.99343	.99361
2.5	.99379	.99396	.99413	.99430	.99446	.99461	.99477	.99492	.99506	.99520
2.6	.99534	.99547	.99560	.99573	.99585	.99598	.99609	.99621	.99632	.99643
2.7	.99653	.99664	.99674	.99683	.99693	.99702	.99711	.99720	.99728	.99736
2.8	.99744	.99752	.99760	.99767	.99774	.99781	.99788	.99795	.99801	.99807
2.9	.99813	.99819	.99825	.99831	.99836	.99841	.99846	.99851	.99856	.99861
3.0	.99865	.99869	.99874	.99878	.99882	.99886	.99889	.99893	.99896	.99900
3.1	.99903	.99906	.99910	.99913	.99916	.99918	.99921	.99924	.99926	.99929
3.2	.99931	.99934	.99936	.99938	.99940	.99942	.99944	.99946	.99948	.99950
3.3	.99952	.99953	.99955	.99957	.99958	.99960	.99961	.99962	.99964	.99965
3.4	.99966	.99968	.99969	.99970	.99971	.99972	.99973	.99974	.99975	.99976
3.5	.99977	.99978	.99978	.99979	.99980	.99981	.99981	.99982	.99983	.99983
3.6	.99984	.99985	.99985	.99986	.99986	.99987	.99987	.99988	.99988	.99989
3.7	.99989	.99990	.99990	.99990	.99991	.99991	.99992	.99992	.99992	.99992
3.8	.99993	.99993	.99993	.99994	.99994	.99994	.99994	.99995	.99995	.99995
3.9	.99995	.99995	.99996	.99996	.99996	.99996	.99996	.99996	.99997	.99997



Το μέσο βάρος των νέων 20 – 29 ετών ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή 73,9 kg και τυπική απόκλιση 11,3 kg.

(α) Να βρεθεί το ποσοστό των νέων με βάρος μικρότερο από 80 κιλά.

(β) Να βρεθεί το ποσοστό των νέων με βάρος μεγαλύτερο από 80 κιλά.

$X \sim N(73.9, 11.3^2)$

(α) $P(X<80) = P\left(Z < \frac{80-73.9}{11.3}\right) =$

$= P(Z<0{,}54) = 0{,}7054$. (β) $1-0{,}7054$

STANDARD NORMAL DISTRIBUTION: Table Values Represent AREA to the LEFT of the Z score.

Z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.50000	.50399	.50798	.51197	.51595	.51994	.52392	.52790	.53188	.53586
0.1	.53983	.54380	.54776	.55172	.55567	.55962	.56356	.56749	.57142	.57535
0.2	.57926	.58317	.58706	.59095	.59483	.59871	.60257	.60642	.61026	.61409
0.3	.61791	.62172	.62552	.62930	.63307	.63683	.64058	.64431	.64803	.65173
0.4	.65542	.65910	.66276	.66640	.67003	.67364	.67724	.68082	.68439	.68793
0.5	.69146	.69497	.69847	.70194	.70540	.70884	.71226	.71566	.71904	.72240
0.6	.72575	.72907	.73237	.73565	.73891	.74215	.74537	.74857	.75175	.75490
0.7	.75804	.76115	.76424	.76730	.77035	.77337	.77637	.77935	.78230	.78524
0.8	.78814	.79103	.79389	.79673	.79955	.80234	.80511	.80785	.81057	.81327
0.9	.81594	.81859	.82121	.82381	.82639	.82894	.83147	.83398	.83646	.83891
1.0	.84134	.84375	.84614	.84849	.85083	.85314	.85543	.85769	.85993	.86214
1.1	.86433	.86650	.86864	.87076	.87286	.87493	.87698	.87900	.88100	.88298
1.2	.88493	.88686	.88877	.89065	.89251	.89435	.89617	.89796	.89973	.90147
1.3	.90320	.90490	.90658	.90824	.90988	.91149	.91309	.91466	.91621	.91774
1.4	.91924	.92073	.92220	.92364	.92507	.92647	.92785	.92922	.93056	.93189
1.5	.93319	.93448	.93574	.93699	.93822	.93943	.94062	.94179	.94295	.94408
1.6	.94520	.94630	.94738	.94845	.94950	.95053	.95154	.95254	.95352	.95449
1.7	.95543	.95637	.95728	.95818	.95907	.95994	.96080	.96164	.96246	.96327
1.8	.96407	.96485	.96562	.96638	.96712	.96784	.96856	.96926	.96995	.97062
1.9	.97128	.97193	.97257	.97320	.97381	.97441	.97500	.97558	.97615	.97670
2.0	.97725	.97778	.97831	.97882	.97932	.97982	.98030	.98077	.98124	.98169
2.1	.98214	.98257	.98300	.98341	.98382	.98422	.98461	.98500	.98537	.98574
2.2	.98610	.98645	.98679	.98713	.98745	.98778	.98809	.98840	.98870	.98899
2.3	.98928	.98956	.98983	.99010	.99036	.99061	.99086	.99111	.99134	.99158
2.4	.99180	.99202	.99224	.99245	.99266	.99286	.99305	.99324	.99343	.99361
2.5	.99379	.99396	.99413	.99430	.99446	.99461	.99477	.99492	.99506	.99520
2.6	.99534	.99547	.99560	.99573	.99585	.99598	.99609	.99621	.99632	.99643
2.7	.99653	.99664	.99674	.99683	.99693	.99702	.99711	.99720	.99728	.99736
2.8	.99744	.99752	.99760	.99767	.99774	.99781	.99788	.99795	.99801	.99807
2.9	.99813	.99819	.99825	.99831	.99836	.99841	.99846	.99851	.99856	.99861
3.0	.99865	.99869	.99874	.99878	.99882	.99886	.99889	.99893	.99896	.99900
3.1	.99903	.99906	.99910	.99913	.99916	.99918	.99921	.99924	.99926	.99929
3.2	.99931	.99934	.99936	.99938	.99940	.99942	.99944	.99946	.99948	.99950
3.3	.99952	.99953	.99955	.99957	.99958	.99960	.99961	.99962	.99964	.99965
3.4	.99966	.99968	.99969	.99970	.99971	.99972	.99973	.99974	.99975	.99976
3.5	.99977	.99978	.99978	.99979	.99980	.99981	.99981	.99982	.99983	.99983
3.6	.99984	.99985	.99985	.99986	.99986	.99987	.99987	.99988	.99988	.99989
3.7	.99989	.99990	.99990	.99990	.99991	.99991	.99992	.99992	.99992	.99992
3.8	.99993	.99993	.99993	.99994	.99994	.99994	.99994	.99995	.99995	.99995
3.9	.99995	.99995	.99996	.99996	.99996	.99996	.99996	.99996	.99997	.99997

Να βρεθεί ο αριθμός z για τον οποίον ισχύει:

(α) P(Z < z) = 0.9664 $\Rightarrow z = 1{,}83$

(β) P(Z > z) = 0,0078

$(\beta)\ P(Z>z) = 0{,}0078 \Rightarrow$

$\Rightarrow P(Z<z) = 1 - 0{,}0078$

$= 0{,}9922$

$\Rightarrow z = 2{,}42.$

STANDARD NORMAL DISTRIBUTION: Table Values Represent AREA to the LEFT of the Z score.

Z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.50000	.50399	.50798	.51197	.51595	.51994	.52392	.52790	.53188	.53586
0.1	.53983	.54380	.54776	.55172	.55567	.55962	.56356	.56749	.57142	.57535
0.2	.57926	.58317	.58706	.59095	.59483	.59871	.60257	.60642	.61026	.61409
0.3	.61791	.62172	.62552	.62930	.63307	.63683	.64058	.64431	.64803	.65173
0.4	.65542	.65910	.66276	.66640	.67003	.67364	.67724	.68082	.68439	.68793
0.5	.69146	.69497	.69847	.70194	.70540	.70884	.71226	.71566	.71904	.72240
0.6	.72575	.72907	.73237	.73565	.73891	.74215	.74537	.74857	.75175	.75490
0.7	.75804	.76115	.76424	.76730	.77035	.77337	.77637	.77935	.78230	.78524
0.8	.78814	.79103	.79389	.79673	.79955	.80234	.80511	.80785	.81057	.81327
0.9	.81594	.81859	.82121	.82381	.82639	.82894	.83147	.83398	.83646	.83891
1.0	.84134	.84375	.84614	.84849	.85083	.85314	.85543	.85769	.85993	.86214
1.1	.86433	.86650	.86864	.87076	.87286	.87493	.87698	.87900	.88100	.88298
1.2	.88493	.88686	.88877	.89065	.89251	.89435	.89617	.89796	.89973	.90147
1.3	.90320	.90490	.90658	.90824	.90988	.91149	.91309	.91466	.91621	.91774
1.4	.91924	.92073	.92220	.92364	.92507	.92647	.92785	.92922	.93056	.93189
1.5	.93319	.93448	.93574	.93699	.93822	.93943	.94062	.94179	.94295	.94408
1.6	.94520	.94630	.94738	.94845	.94950	.95053	.95154	.95254	.95352	.95449
1.7	.95543	.95637	.95728	.95818	.95907	.95994	.96080	.96164	.96246	.96327
1.8	.96407	.96485	.96562	.96638	.96712	.96784	.96856	.96926	.96995	.97062
1.9	.97128	.97193	.97257	.97320	.97381	.97441	.97500	.97558	.97615	.97670
2.0	.97725	.97778	.97831	.97882	.97932	.97982	.98030	.98077	.98124	.98169
2.1	.98214	.98257	.98300	.98341	.98382	.98422	.98461	.98500	.98537	.98574
2.2	.98610	.98645	.98679	.98713	.98745	.98778	.98809	.98840	.98870	.98899
2.3	.98928	.98956	.98983	.99010	.99036	.99061	.99086	.99111	.99134	.99158
2.4	.99180	.99202	.99224	.99245	.99266	.99286	.99305	.99324	.99343	.99361
2.5	.99379	.99396	.99413	.99430	.99446	.99461	.99477	.99492	.99506	.99520
2.6	.99534	.99547	.99560	.99573	.99585	.99598	.99609	.99621	.99632	.99643
2.7	.99653	.99664	.99674	.99683	.99693	.99702	.99711	.99720	.99728	.99736
2.8	.99744	.99752	.99760	.99767	.99774	.99781	.99788	.99795	.99801	.99807
2.9	.99813	.99819	.99825	.99831	.99836	.99841	.99846	.99851	.99856	.99861
3.0	.99865	.99869	.99874	.99878	.99882	.99886	.99889	.99893	.99896	.99900
3.1	.99903	.99906	.99910	.99913	.99916	.99918	.99921	.99924	.99926	.99929
3.2	.99931	.99934	.99936	.99938	.99940	.99942	.99944	.99946	.99948	.99950
3.3	.99952	.99953	.99955	.99957	.99958	.99960	.99961	.99962	.99964	.99965
3.4	.99966	.99968	.99969	.99970	.99971	.99972	.99973	.99974	.99975	.99976
3.5	.99977	.99978	.99978	.99979	.99980	.99981	.99981	.99982	.99983	.99983
3.6	.99984	.99985	.99985	.99986	.99986	.99987	.99987	.99988	.99988	.99989
3.7	.99989	.99990	.99990	.99990	.99991	.99991	.99992	.99992	.99992	.99992
3.8	.99993	.99993	.99993	.99994	.99994	.99994	.99994	.99995	.99995	.99995
3.9	.99995	.99995	.99996	.99996	.99996	.99996	.99996	.99996	.99997	.99997

Συμμετρίες της κανονικής κατανομής

Η συμμετρία της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας της $N(0, 1)$, επιτρέπει τη χρήση μόνο του μισού πίνακα τιμών. Συνήθως, αξιοποιείται το “θετικό” του μέρος, δηλαδή αυτό που περιέχει τις τιμές $\Phi(z) = P(Z \leq z)$, για $0{,}5 \leq z \leq 3{,}49$.

Για τον υπολογισμό πιθανοτήτων που $P(Z \leq z)$ με αρνητικό z, μπορεί να αξιοποιηθεί η σχέση:

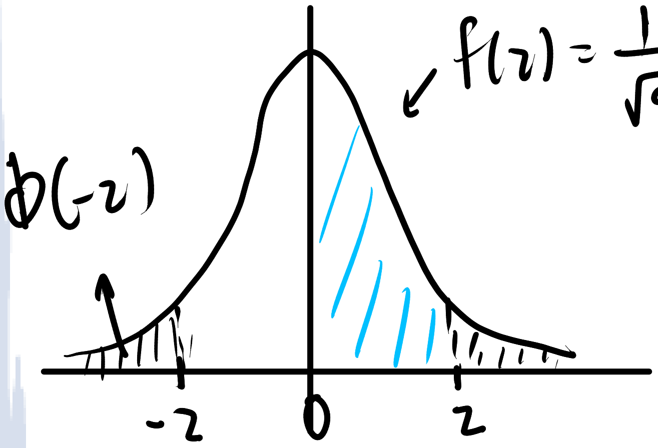
$$\mathbf{\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)} \quad \text{ή} \quad \mathbf{\Phi(z) + \Phi(-z) = 1}$$

Πράγματι, $\Phi(z) = P(Z \leq z) = 1 - P(Z > z) = 1 - P(Z < -z) = 1 - \Phi(-z)$. Επιπλέον, λόγω της συμμετρίας γύρω από το 0, είναι φανερό ότι:

$$\mathbf{P(0 < Z < z) = P(Z < z) - P(Z < 0) = \Phi(z) - \tfrac{1}{2}.}$$

$$\mathbf{P(-z < Z < z) = P(Z < z) - P(Z < -z) = \Phi(z) - \Phi(-z) = 2\Phi(z) - 1.}$$

Με τις παραπάνω σχέσεις και την δυνατότητα αναγωγής οποιασδήποτε κανονικής κατανομής στη $N(0, 1)$ είναι δυνατό να αντιμετωπιστούν όλα τα προβλήματα που αφορούν κανονική κατανομή.

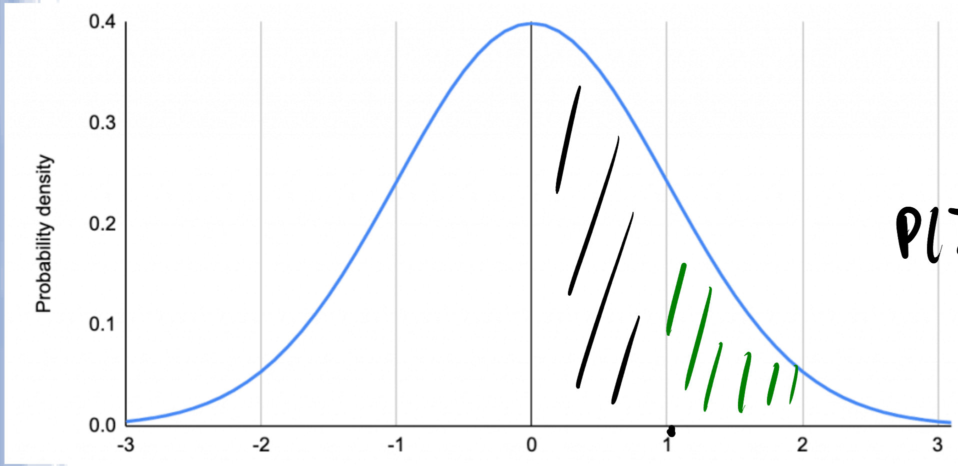


$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad x \in \mathbb{R}$$

- $\Phi(-z) = P(Z \leq -z) = P(Z \geq z)$
  $= 1 - P(Z \leq z) = 1 - \Phi(z).$

- $P(0 < Z < z) = \frac{1}{2} - P(Z \geq z) = \Phi(z) - \frac{1}{2}.$

- $P(-z < Z < z) = \Phi(z) - \Phi(-z) = \Phi(z) - (1 - \Phi(z)) = 2 \cdot \Phi(z) - 1.$



Δραστηριότητα: Αν Z ~ N(0, 1), να βρεθούν οι:

(α) P(0 < Z < 1) $= \phi(1) - 1/2 = 0{,}34134$

(β) P(1 < Z < 2) $= \phi(2) - \phi(1)$

(γ) P(2 < Z < 3)

(δ) P(-1 < Z < 0) $= P(0 < Z < 1) = 0{,}34134$

(ε) P(-2 < Z < -1)

(ζ) P(-1 < Z < 1)

(η) P(-2 < Z < 2)

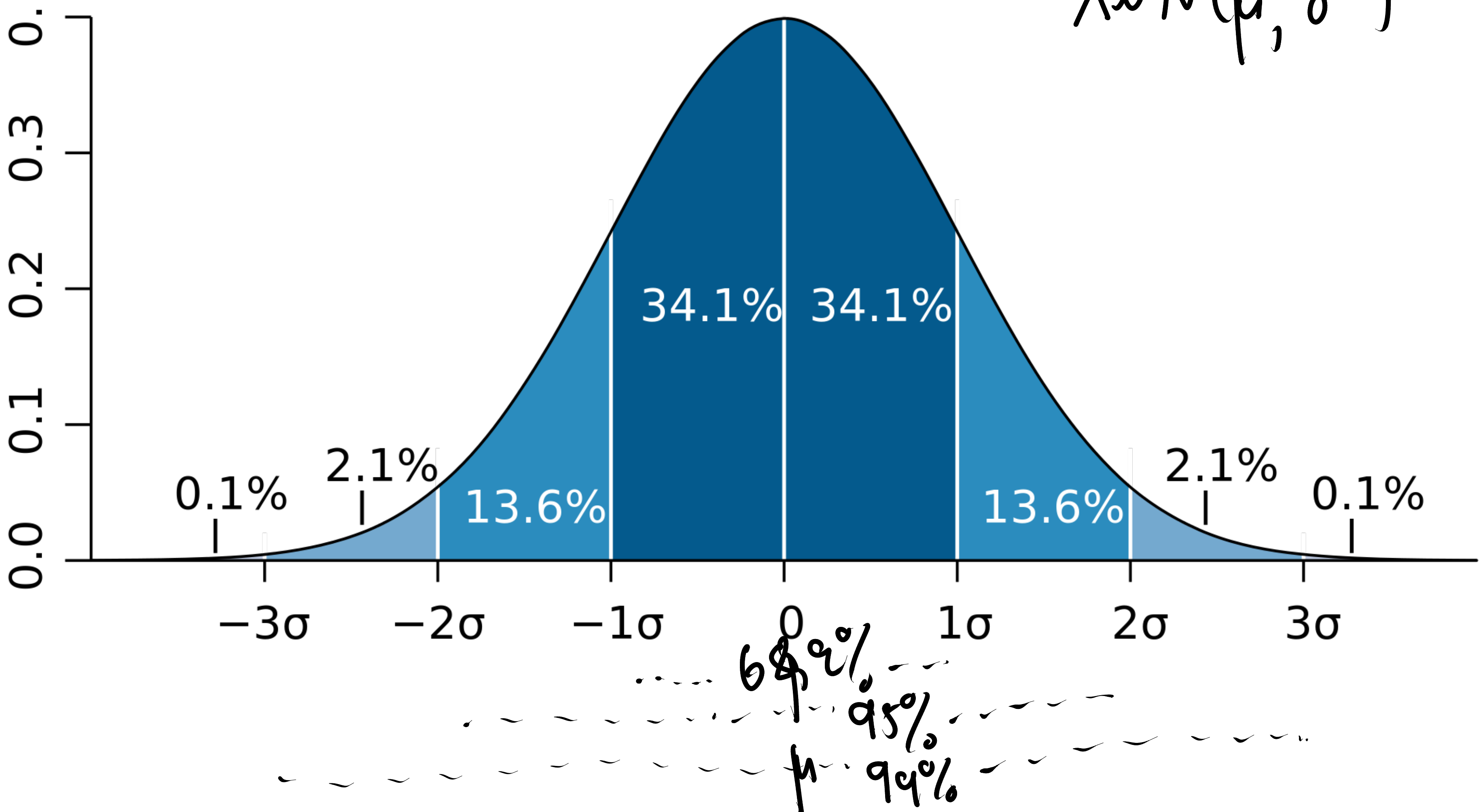
(θ) P(-3 < Z < 3)

$P(Z \le z)$

STANDARD NORMAL DISTRIBUTION: Table Values Represent AREA to the LEFT of the Z score.

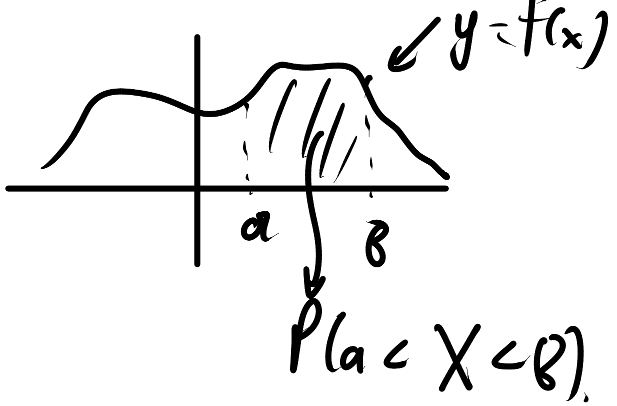
Z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.50000	.50399	.50798	.51197	.51595	.51994	.52392	.52790	.53188	.53586
0.1	.53983	.54380	.54776	.55172	.55567	.55962	.56356	.56749	.57142	.57535
0.2	.57926	.58317	.58706	.59095	.59483	.59871	.60257	.60642	.61026	.61409
0.3	.61791	.62172	.62552	.62930	.63307	.63683	.64058	.64431	.64803	.65173
0.4	.65542	.65910	.66276	.66640	.67003	.67364	.67724	.68082	.68439	.68793
0.5	.69146	.69497	.69847	.70194	.70540	.70884	.71226	.71566	.71904	.72240
0.6	.72575	.72907	.73237	.73565	.73891	.74215	.74537	.74857	.75175	.75490
0.7	.75804	.76115	.76424	.76730	.77035	.77337	.77637	.77935	.78230	.78524
0.8	.78814	.79103	.79389	.79673	.79955	.80234	.80511	.80785	.81057	.81327
0.9	.81594	.81859	.82121	.82381	.82639	.82894	.83147	.83398	.83646	.83891
1.0	.84134	.84375	.84614	.84849	.85083	.85314	.85543	.85769	.85993	.86214
1.1	.86433	.86650	.86864	.87076	.87286	.87493	.87698	.87900	.88100	.88298
1.2	.88493	.88686	.88877	.89065	.89251	.89435	.89617	.89796	.89973	.90147
1.3	.90320	.90490	.90658	.90824	.90988	.91149	.91309	.91466	.91621	.91774
1.4	.91924	.92073	.92220	.92364	.92507	.92647	.92785	.92922	.93056	.93189
1.5	.93319	.93448	.93574	.93699	.93822	.93943	.94062	.94179	.94295	.94408
1.6	.94520	.94630	.94738	.94845	.94950	.95053	.95154	.95254	.95352	.95449
1.7	.95543	.95637	.95728	.95818	.95907	.95994	.96080	.96164	.96246	.96327
1.8	.96407	.96485	.96562	.96638	.96712	.96784	.96856	.96926	.96995	.97062
1.9	.97128	.97193	.97257	.97320	.97381	.97441	.97500	.97558	.97615	.97670
2.0	.97725	.97778	.97831	.97882	.97932	.97982	.98030	.98077	.98124	.98169
2.1	.98214	.98257	.98300	.98341	.98382	.98422	.98461	.98500	.98537	.98574
2.2	.98610	.98645	.98679	.98713	.98745	.98778	.98809	.98840	.98870	.98899
2.3	.98928	.98956	.98983	.99010	.99036	.99061	.99086	.99111	.99134	.99158
2.4	.99180	.99202	.99224	.99245	.99266	.99286	.99305	.99324	.99343	.99361
2.5	.99379	.99396	.99413	.99430	.99446	.99461	.99477	.99492	.99506	.99520
2.6	.99534	.99547	.99560	.99573	.99585	.99598	.99609	.99621	.99632	.99643
2.7	.99653	.99664	.99674	.99683	.99693	.99702	.99711	.99720	.99728	.99736
2.8	.99744	.99752	.99760	.99767	.99774	.99781	.99788	.99795	.99801	.99807
2.9	.99813	.99819	.99825	.99831	.99836	.99841	.99846	.99851	.99856	.99861
3.0	.99865	.99869	.99874	.99878	.99882	.99886	.99889	.99893	.99896	.99900
3.1	.99903	.99906	.99910	.99913	.99916	.99918	.99921	.99924	.99926	.99929
3.2	.99931	.99934	.99936	.99938	.99940	.99942	.99944	.99946	.99948	.99950
3.3	.99952	.99953	.99955	.99957	.99958	.99960	.99961	.99962	.99964	.99965
3.4	.99966	.99968	.99969	.99970	.99971	.99972	.99973	.99974	.99975	.99976
3.5	.99977	.99978	.99978	.99979	.99980	.99981	.99981	.99982	.99983	.99983
3.6	.99984	.99985	.99985	.99986	.99986	.99987	.99987	.99988	.99988	.99989
3.7	.99989	.99990	.99990	.99990	.99991	.99991	.99992	.99992	.99992	.99992
3.8	.99993	.99993	.99993	.99994	.99994	.99994	.99994	.99995	.99995	.99995
3.9	.99995	.99995	.99996	.99996	.99996	.99996	.99996	.99996	.99997	.99997

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$

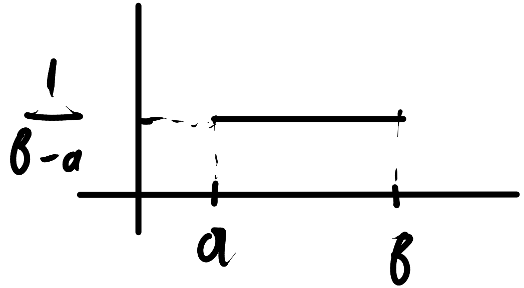


X συνεχής τ.μ. $f(x)$ σ.π.π. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1.$

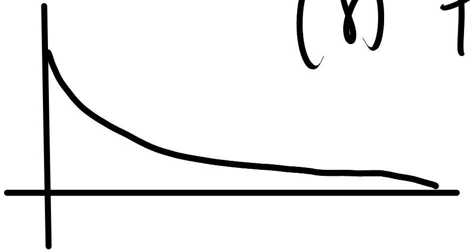
$$P(X \le a) = \int_{-\infty}^{a} f(t)dt = F(a)$$



(α) $U(a,\beta)$

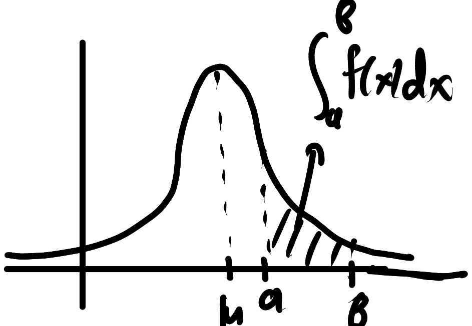


(β) $Exp(\lambda)$. $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$



(γ) $$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$N(\mu, \sigma^2)$



Κανονική Κατανομή – Συνάρτηση κατανομής

Υπολογισμός πιθανοτήτων με υπολογιστή:

Αν $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, τότε:

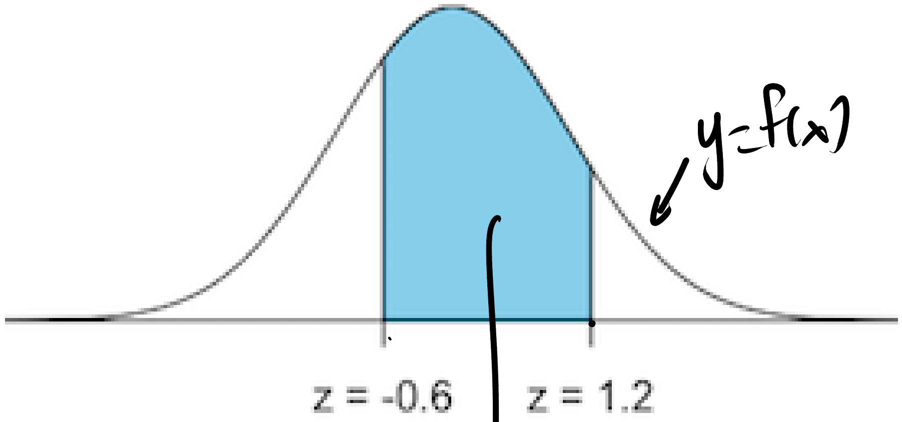
- MS Excel ή LibreOffice Calc: $F_X(x) = P(X \leq x)$ = NORM.DIST(z; μ; σ; 1)
- Γλώσσα R: $F_X(x) = P(X \leq x)$ = pnorm(x, μ, σ)
- Octave (ή Matlab): normcdf (x, μ, σ)

  (στο Octave πρώτα πρέπει να φορτωθεί η αντίστοιχη βιβλιοθήκη: pkg load statistics)

Ασκήσεις στην Κανονική Κατανομή

1. Στο σχήμα παρουσιάζεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$: σ.π.π. $N(0,1)$.

Να βρεθεί το εμβαδόν του χρωματισμένου χωρίου



$y = f(x)$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

σ.π.π. $N(\mu, \sigma^2)$

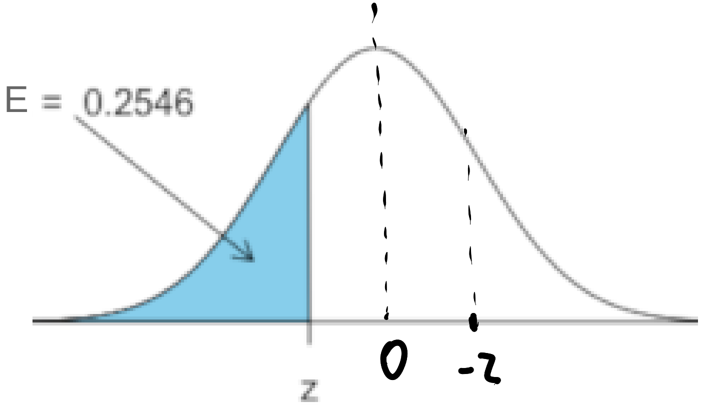
$$Z \sim N(0,1): \ P(-0.6 < Z < 1.2) = P(Z < 1.2) - P(Z < -0.6) =$$

$$= \Phi(1.2) - \Phi(-0.6) = 0.88493 - (1 - 0.72575) = 0.611.$$

Ασκήσεις στην Κανονική Κατανομή

2. Στο σχήμα παρουσιάζεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$: σ.π.π. $N(0,1)$

Να βρεθεί ο αριθμός z που εμφανίζεται στο διάγραμμα..



$$E = P(Z<z) = \Phi(z) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \Phi(z) = 0.2546 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1-\Phi(-z) = 0.2546 \Leftrightarrow$$

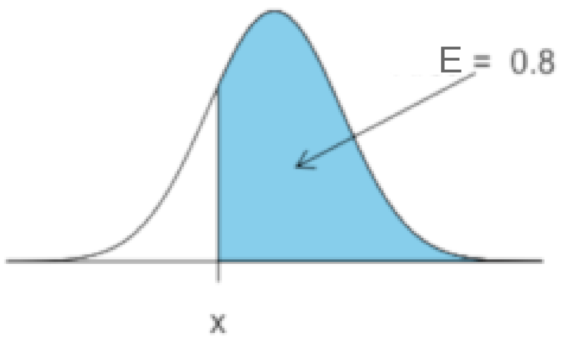
$$\Leftrightarrow \Phi(-z) = 0.7454 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -z = 0.66 \Leftrightarrow z = -0.66.$$

Ασκήσεις στην Κανονική Κατανομή

3. Στο σχήμα παρουσιάζεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \frac{1}{15\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-100)^2}{450}}$

Να βρεθεί ο αριθμός x που εμφανίζεται στο διάγραμμα.



Ασκήσεις στην Κανονική Κατανομή

4. Ο μέσος χρόνος που περνάει ένα άτομο στο ζωολογικό κήπο της Θεσσαλονίκης είναι 96 λεπτά. Η τυπική απόκλιση είναι 17 λεπτά. Υποθέτουμε ότι ο χρόνος είναι κανονικά κατανεμημένος.
Να βρεθεί το ποσοστό των επισκεπτών που αφιερώνουν (α) τουλάχιστον 120 λεπτά, (β) το πολύ 80 λεπτά στην επίσκεψή τους.

$X \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$

X : χρόνος $\Rightarrow X \sim N(96, 17^2)$

(α) $P(X > 120) = P\left(\frac{X-96}{17} > \frac{120-96}{17}\right) = P(Z > 1.412) =$

$= 1 - \Phi(1.412) = 1 - 0.92073 = 0.07927$

Προσέγγιση της Διωνυμικής και της κατανομής Poisson από την Κανονική

Κεντρικό Οριακό Θεώρημα (ΚΟΘ)
Central Limit Theorem (CLT)

Αν $X_1 + X_2 + \dots + X_n$ είναι τ.μ. ανεξάρτητες μεταξύ τους με ανάλογα γεωμετρικά χαρακτηριστικά στις κατανομές τους (αναμενόμενη τιμή και τυπική απόκλιση), τότε το θεώρημα που εξασφαλίζει την γνώση της κατανομής του $Y = X_1 + X_2 + \dots + X_n$, είναι το περίφημο **Κεντρικό Οριακό Θεώρημα (Central Limit Theorem – CLT).** Αυτό έχει πολλές εκδοχές ως προς τις αναγκαίες προϋποθέσεις. Αυτή που ταιριάζει στους σκοπούς μας είναι η εξής:

Θεώρημα (Κεντρικό Οριακό Θεώρημα)
Αν $X_1, X_2, \dots, X_n$ είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές, με ίσες αναμενόμενες τιμές μ και ίσες πεπερασμένες διακυμάνσεις σ^2 και

$$Y = X_1 + X_2 + \dots + X_n,$$

τότε $\mathbf{(Y - n\cdot\mu) / (n^{1/2}\sigma) \sim N(0, 1)}$ ή ισοδύναμα $\mathbf{Y \sim N(n\cdot\mu, n\cdot\sigma^2)}$, καθώς $n \to \infty$.

Βίντεο 1, 2

Γενική δυνατότητα προσέγγισης μίας διακριτής κατανομής από την κανονική

Παρατηρούμε ότι:

- Αν $X \sim B(n, p)$, τότε $X = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$, όπου X_i είναι οι n επιμέρους Bernoulli δοκιμές με $EX_i = p$ και $VarX_i = p(1 - p) = pq$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

  Συμπεραίνουμε, $\mathbf{X \sim N(n \cdot \mu_i, n \cdot \sigma_i^2) = N(np, npq)}$

- Αν $X \sim Poisson(\lambda)$, τότε εξ ορισμού είναι $Poisson(\lambda) = \lim_{n \to \infty} B(n, \lambda/n)$.

  Αν X_i είναι οι n επιμέρους Bernoulli δοκιμές με $EX_i = \lambda/n$ και $VarX_i = \lambda/n(1 - \lambda/n)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, τότε

  $$Poisson(\lambda) = \lim_{n \to \infty} B(n, \lambda/n) = \lim_{n \to \infty} N(n\lambda/n, n\lambda/n(1 - \lambda/n)) = N(\lambda, \lambda)$$

  Συμπεραίνουμε, $\mathbf{X \sim N(\lambda, \lambda)}$

Προσέγγιση της Διωνυμικής από την Κανονική

Αποδεικνύεται ότι:

Αν **$X \sim B(n, p)$**, $n > 30$ και $np > 5$, $nq > 5$ τότε **$X \approx N(np, npq)$**, $q = 1- p$.

Αν **$X \sim$ Poisson(λ)** και $\lambda > 20$, τότε **$X \approx N(\lambda, \lambda)$** ($\mu = \sigma^2 = \lambda$).

Στους τελικούς υπολογισμούς, έχει καθιερωθεί η εξής προσαρμογή ως μία πρακτική που δίνει καλύτερα προσεγγιστικά αποτελέσματα (continuity correction factor):

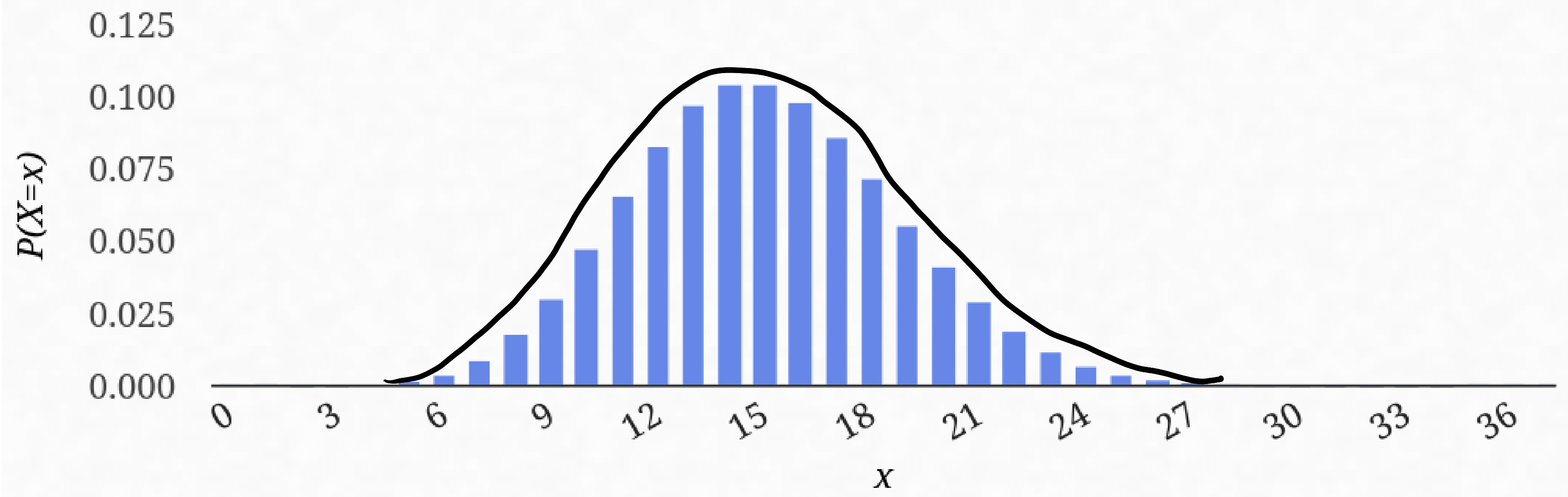
- $P_B(X \leq \alpha) = P_N(X < \alpha + ½)$, $P_P(X \leq \alpha) = P_N(X < \alpha + ½)$,
- $P_B(X \geq \alpha) = P_N(X > \alpha – ½)$, $P_P(X \geq \alpha) = P_N(X > \alpha – ½)$,
- $P_B(X = \alpha) = P_P(X = \alpha) = P_N(\alpha – ½ < X < \alpha + ½)$.

Προσέγγιση της B(n, p) από την N(np, npq)

$n = 300 > 30$, $n \cdot p = 15 > 5$, $n \cdot q > 5$

Παράδειγμα 1

Αν X ~ B(300, 0.05), τότε το διάγραμμα της συνάρτησης μάζας πιθανότητας της X είναι το εξής:

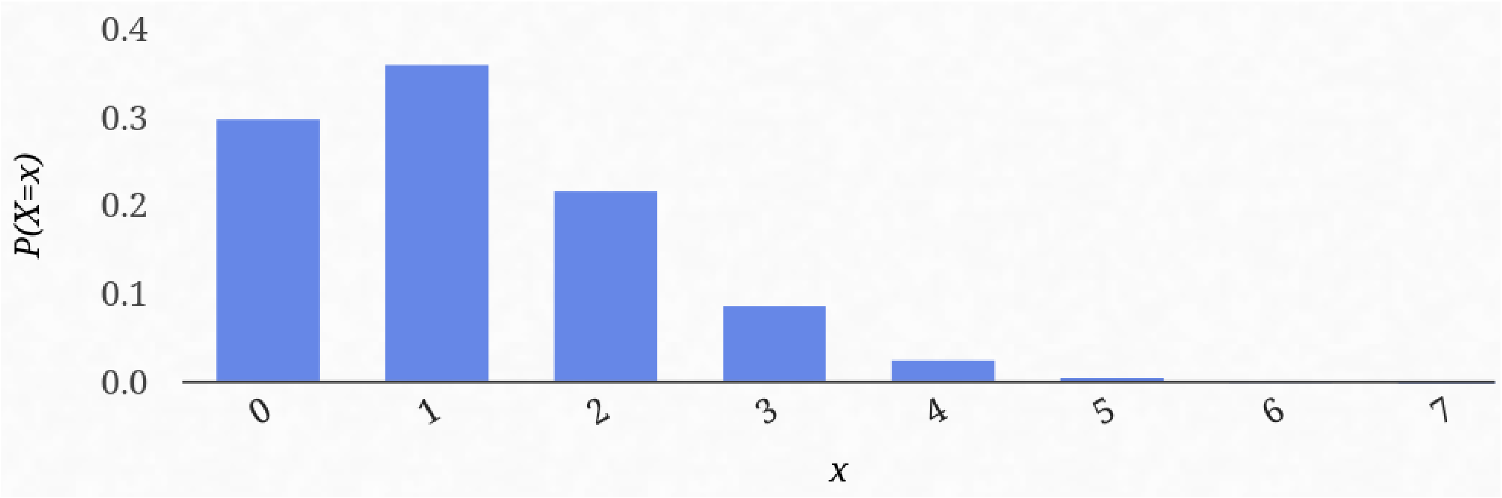


Παρατηρούμε ότι np = 15, nq = 285 και η προσέγγιση X ≈ N(15, 14.25) = N(15, 3.77^2), είναι μία αξιοπρεπής προσαρμογή της διωνυμικής κατανομής.

$N(np, npq)$

Προσέγγιση της B(n, p) από την N(np, npq)

Παράδειγμα 2
Αν X ~ B(300, 0.004), τότε το διάγραμμα της συνάρτησης μάζας πιθανότητας της X είναι το εξής:

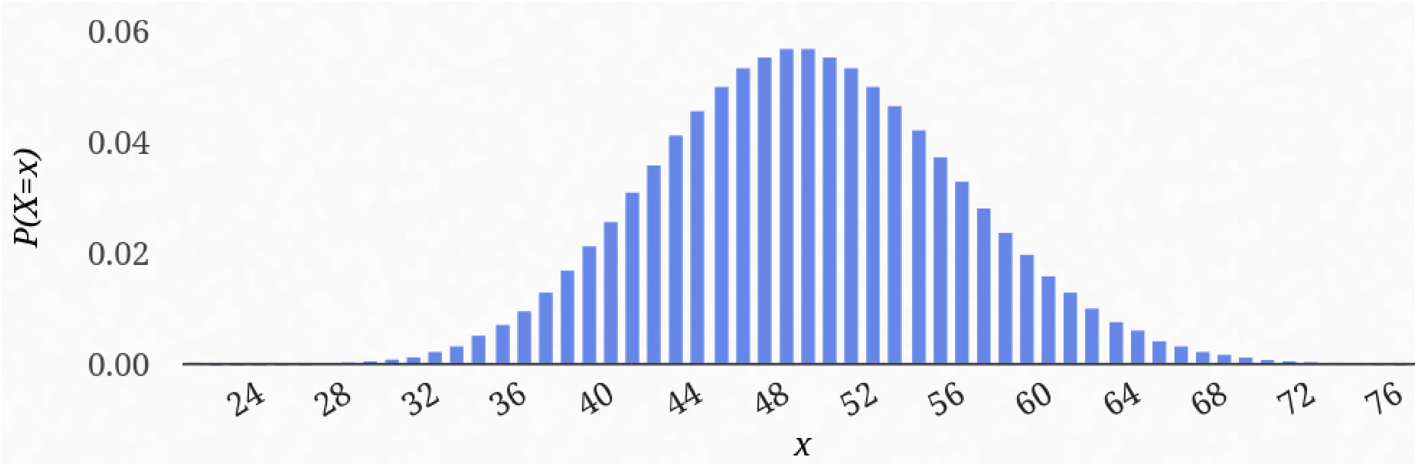


Παρατηρούμε ότι np = 1,2, nq = 298,8 και η προσέγγιση X ≈ N(1.2, 1.195) = N(1.2, 1.093^2), δεν είναι καλή προσαρμογή της διωνυμικής κατανομής.

Προσέγγιση της P(λ) από την N(λ, λ)

Παράδειγμα 1

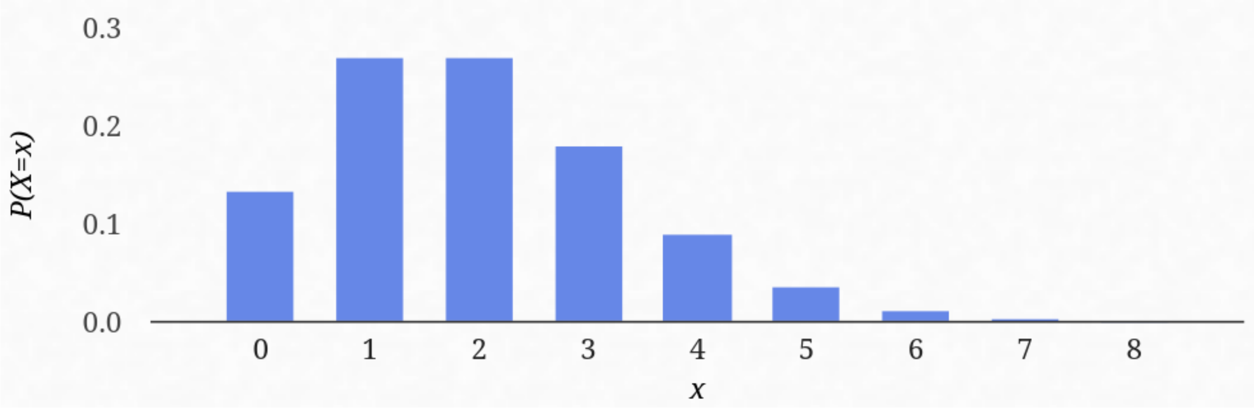
Αν X ~ Poisson(49), τότε η προσέγγιση X ~ N(49, 49) = N(49, 7^2) είναι ικανοποιητική.



Προσέγγιση της P(λ) από την N(λ, λ)

Παράδειγμα 2

Αν X ~ Poisson(2), τότε η προσέγγιση X ~ N(2, 2) = N(2, 1.4^2) δεν είναι καλή (δεξιά ασύμμετρη κατανομή).



$X \sim B(n,p) \Rightarrow X = 0, \dots, n, \; P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.

$\left.\begin{matrix} n = 300 \\ p = 0.05 \end{matrix}\right\} \begin{matrix} n \cdot p = 15 > 5 \\ nq = 285 > 5 \end{matrix}$

Ασκήσεις

$B(n,p) \approx N(np, npq)$

1. Από προηγούμενες έρευνες γνωρίζουμε ότι το 5% ενός τύπου ολοκληρωμένων κυκλωμάτων σταματούν να λειτουργούν μετά τον πρώτο χρόνο. Αγοράζουμε μία μεγάλη παρτίδα από 300 τέτοια ολοκληρωμένα κυκλώματα. Να βρεθούν οι πιθανότητες:

(α) τουλάχιστον 50 από τα 300 να σταματήσουν να λειτουργούν μετά τον πρώτο χρόνο.

(β) το πολύ 20 από τα 300 να σταματήσουν να λειτουργούν μετά τον πρώτο χρόνο.

(γ) λιγότερα από 10 στα 300 να σταματήσουν να λειτουργούν μετά τον πρώτο χρόνο.

(δ) ακριβώς 45 στα 300 να σταματήσουν να λειτουργούν μετά τον πρώτο χρόνο.

X: αριθμός κυκλωμάτων στα 300 που σταματούν να λειτουργούν.

$X \sim B(300, 0.05) \approx N(15, 3.77^2)$

(α) $P_B(X \geq 50) = P_N(X \geq 49.5) = P\left(\frac{X-15}{3.77} \geq \frac{49.5-15}{3.77}\right) = P(Z \geq 9.15) \approx 0.$

(β) $P_B(X \leq 20) = P_N(X \leq 20.5) = P\left(Z \leq \frac{20.5-15}{3.77}\right) = P(Z \leq 1.46) = 0.92785$

(γ) $P_B(X < 10) = P_N(X < 10) = P\left(Z < \frac{10-15}{3.77}\right) = P(Z < -1.33) =$

$= 1 - P(Z < 1.33) = 1 - 0.90824 = 0.09176$

(δ) $P_B(X = 45) = \binom{300}{45} \cdot 0.05^{45} \cdot 0.95^{255} = 4.5 \cdot 10^{-11}$

$P_B(X = 45) = P_N(44.5 < X < 45.5) = P\left(\frac{44.5-15}{3.77} < Z < \frac{45.5-15}{3.77}\right) =$

$= P(7.82 < Z < 8.09) = \Phi(8.09) - \Phi(7.82) \simeq 1 - 1 = 0.$

$X \sim Poisson(\lambda)$, $P(X=k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$

Ασκήσεις

2. Γνωρίζουμε ότι τα αυτοκίνητα φτάνουν σε ένα χώρο στάθμευσης με ρυθμό 50 ανά ώρα. Υποθέτουμε ότι οι αφίξεις των Ι.Χ. είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους. Να βρεθεί η πιθανότητα την επόμενη ώρα ο αριθμός των αυτοκινήτων που φτάνουν σε αυτό το πάρκινγκ να είναι μεταξύ 54 και 62.

X: Ι.Χ. που φτάνουν στο παρκινγκ σε μία ώρα $\sim Poisson(50) \approx N(50,50)$

$$P_P(54 \le X \le 62) = P_N(53.5 \le X \le 62.5) = P\left(\frac{53.5-50}{\sqrt{50}} \le Z \le \frac{62.5-50}{\sqrt{50}}\right)$$

$$= P(0.49 \le Z \le 1.78) = \Phi(1.78) - \Phi(0.49) =$$

$$= 0.962 - 0.688 = 0.274.$$

Εναλλακτικά:

$$P_p(54 \leq X \leq 62) = \sum_{k=54}^{62} P(X=k) = \sum_{k=54}^{62} e^{-50} \cdot \frac{50^k}{k!} = 0.262.$$

Ασκήσεις

3. Σε μια πόλη, το 46% των κατοίκων ψήφισε τον νυν δήμαρχο. Λαμβάνεται ένα τυχαίο δείγμα 500 κατοίκων. Να βρεθεί η πιθανότητα, τουλάχιστον 250 από αυτούς να έχουν ψηφίσει τον νυν δήμαρχο.

$n=500,\ p=0.46 \Rightarrow n\cdot p = 230>5,\ \ n\cdot q = 270>5$

X: πλήθος κατοίκων στους 500 που ψήφισαν τον νυν δήμαρχο.

$X \sim B(500,\ 0.46) \approx N(230, 124.2)$

$$P_B(X \geq 250) = P_N(X \geq 249.5) = P\left(Z \geq \frac{249.5-230}{\sqrt{124.2}}\right) =$$

$$= P(Z \geq 1,75) = 1 - P(Z < 1,75) =$$

$$= 1 - 0.96 = 0,04.$$

Ασκήσεις

4. Ο αριθμός σεισμών με μέγεθος τουλάχιστον 4,5 βαθμών της Κλίμακας Ρίχτερ και με επίκεντρο σε απόσταση 40 χιλιομέτρων από το κέντρο της Θεσσαλονίκης ακολουθεί μια κατανομή Poisson με μέσο όρο 6,5 σεισμοί τη δεκαετία. Ποια είναι η πιθανότητα να σημειωθούν τουλάχιστον 2 τέτοιοι σεισμοί τον επόμενο χρόνο;

X: σεισμοί τον επόμενο χρόνο $\sim \text{Poisson}\left(\frac{6.5}{10}\right) = \text{Poisson}(0.65)$

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - P(X=0) - P(X=1)$$

$$= 1 - e^{-0.65}\left(1 + \frac{0.65}{1!}\right) = 0,139.$$

Εναλλακτικά: Αν υποθέσω $\text{Poisson}(0.65) \approx N(0.65, 0.65)$

$$P_p(X \geq 2) = P_N(X \geq 1.5) = P\left(Z \geq \frac{1.5 - 0.65}{\sqrt{0.65}}\right) = P(Z \geq 1.05) =$$

$$= 1 - P(Z < 1.05) =$$

$$= 1 - 0.8531 = 0.147.$$

Ασκήσεις

5. Ένα εργοστάσιο κατασκευάζει κατά μέσο όρο 10.000 ολοκληρωμένα κυκλώματα την ημέρα με την παραγωγή κάθε ενός κυκλώματος είναι ανεξάρτητη από τις άλλα.
(α) Να βρεθεί η πιθανότητα σε μία ημέρα να κατασκευαστούν περισσότερα από 10.200 κυκλώματα.
(β) Να βρεθεί το αναμενόμενο πλήθος ημερών σε ένα έτος στις οποίες θα κατασκευαστούν περισσότερα από 10.200 κυκλώματα.

Κάποιες ακόμα ενδιαφέρουσες κατανομές συνεχών τυχαίων μεταβλητών

Κατανομή Γάμμα

Κατανομή Γάμμα

Ενδεικτικό παράδειγμα – γέννεση κατανομής

Γεγονότα συμβαίνουν ανεξάρτητα μεταξύ τους με ρυθμό λ συμβάντα / μονάδα χρόνου.

Αν T_k = {χρόνος που απαιτείται για να γίνουν k γεγονότα}, τότε να βρεθεί η συνάρτηση κατανομής και η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τ.μ. T_k.

$T_k \in (0, +\infty)$

$$P(T_k > t) = P(Y_t \leq k-1) = e^{-\lambda} \cdot \sum_{n=0}^{k-1} \frac{\lambda^n}{n!} \Leftrightarrow \underbrace{P(T_k \leq t)}_{F(t)} = 1 - e^{-\lambda t} \sum_{n=0}^{k-1} \frac{(\lambda t)^n}{n!}$$

γεγονότα στο (0, t]

$\downarrow$

$Y_t \sim Poisson(\lambda t)$

$0 \qquad\qquad t$

Κατανομή Γάμμα

Ενδεικτικό παράδειγμα – γέννεση κατανομής

Γεγονότα συμβαίνουν ανεξάρτητα μεταξύ τους με ρυθμό λ συμβάντα / μονάδα χρόνου.

Αν T_k = {χρόνος που απαιτείται για να γίνουν k γεγονότα}, τότε να βρεθεί η συνάρτηση κατανομής και η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τ.μ. T_k.

$$\sigma.\kappa.:\ F_{T_k}(x) = 1 - e^{-\lambda x}\sum_{j=0}^{k-1}\frac{(\lambda x)^j}{j!},\ x > 0. \qquad \sigma.\pi.\pi.:\ f(x) = \frac{\lambda e^{-\lambda x}(\lambda x)^{k-1}}{(k-1)!},\ x > 0.$$

Γράφουμε T_k ~ Γάμμα(k, λ). Δηλαδή,

Εάν οι αφίξεις γεγονότων ακολουθούν μια διαδικασία Poisson με ρυθμό λ, τότε ο χρόνος αναμονής μέχρι τις k αφίξεις ακολουθεί την κατανομή Γ(k, λ).

Κατανομή Γάμμα

Παράδειγμα

Όταν ο Γιάννης πάει για ψάρεμα, ψαρεύει κατά μέσο όρο ένα ψάρι ανά 30 λεπτά. Να βρεθεί η πιθανότητα να χρειαστεί να περιμένει 2 έως 4 ώρες για να πιάσει 4 ψάρια.

$\lambda = 1$ ψάρι$/30\text{min} = 2$ ψάρια$/h$

T_4 : χρόνος για να πιάσει 4 ψάρια $\sim \Gamma(4, 2)$.

$P(2 < T_4 < 4) = F(4) - F(2)$

Κατανομή Γάμμα

Παράδειγμα

Όταν ο Γιάννης πάει για ψάρεμα, ψαρεύει κατά μέσο όρο ένα ψάρι ανά 30 λεπτά. Να βρεθεί η πιθανότητα θα χρειαστεί να περιμένει 2 έως 4 ώρες για να πιάσει 4 ψάρια.

Λύση

Το πλήθος X των επιτυχιών του Γιάννη, ακολουθεί κατανομή Poisson με λ = 2 ψάρια / ώρα.

Άρα, ο χρόνος T_4 μέχρι τις 4 επιτυχίες, ακολουθεί τη Γάμμα κατανομή Γάμμα(4, 2).

$$\sigma.\kappa.:\ F_{T_4}(x) = 1 - e^{-\lambda x} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(\lambda x)^j}{j!} = 1 - e^{-2x} \sum_{j=0}^{3} \frac{(2x)^j}{j!},\ x > 0.$$

$$P(2 \le T_4 \le 4) = P(T_4 \le 4) - P(T_4 \le 2) = F_{T_4}(4) - F_{T_4}(2) = 0{,}4335 - 0{,}0424 = 0{,}3911 = 39{,}11\,\%.$$

Κατανομή Γάμμα

Με την ονομασία “κατανομή γάμμα” περιγράφεται μία οικογένεια συνεχών κατανομών πιθανοτήτων με δύο παραμέτρους. Η εκθετική κατανομή, η κατανομή Erlang και η κατανομή χι-τετράγωνο είναι ειδικές περιπτώσεις της κατανομής γάμμα. Στη βιβλιογραφία εμφανίζεται με δύο μορφές. Η μία είναι η Γάμμα(k, λ) [= Γάμμα(α, β) στη βιβλιογραφία] ενώ η άλλη είναι η Γάμμα(k, θ) = Γάμμα(k, 1/λ).

$$\sigma.\pi.\pi.\ \ X \sim \text{Γάμμα}(k,\lambda):\ \ f(x) = \frac{\lambda e^{-\lambda x}(\lambda x)^{k-1}}{\Gamma(k)},\ \ X \sim \text{Γάμμα}(k,\theta):\ f(x) = \frac{x^{k-1}e^{-x/\theta}}{\theta^k\Gamma(k)},\ x > 0.$$

Αν η παράμετρος k είναι φυσικός αριθμός, τότε η συνάρτηση κατανομής προσδιορίζεται σε κλειστή μορφή ως εξής:

$$\sigma.\kappa.\ \ X \sim \text{Γάμμα}(k,\lambda):\ F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x}\sum_{j=0}^{k-1}\frac{(\lambda x)^j}{j!},\ \ X \sim \text{Γάμμα}(k,\theta):\ F_X(x) = 1 - e^{-x/\theta}\sum_{j=0}^{k-1}\frac{1}{j!}\left(\frac{x}{\theta}\right)^j,\ x > 0.$$

Σημείωση: $\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}\,dt,\ \Re(z) > 0.$

Κατανομή Γάμμα και συνάρτηση Γάμμα

Με την ονομασία “συνάρτηση γάμμα” περιγράφεται η ειδική συνάρτηση

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t}\, dt,\ \mathrm{Re}(z) > 0.$$

Εύκολα προκύπτει ότι Γ(1) = 1, ενώ με κατά παράγοντες ολοκλήρωση αποδεικνύεται ότι

$$\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z).$$

Από τα παραπάνω, με επαγωγή βρίσκουμε

$$\Gamma(n) = (n - 1)!,\ n \in N^*.$$

Μία ακόμα σημαντική σχέση είναι ο τύπος του Euler

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)},\ z \notin \mathbb{Z}.$$

Ειδικότερα, για $z = ½$ υπολογίζουμε $\Gamma(½)^2 = \pi$ ή $\Gamma(½) = \pi^{½}$.

Κατανομή Γάμμα

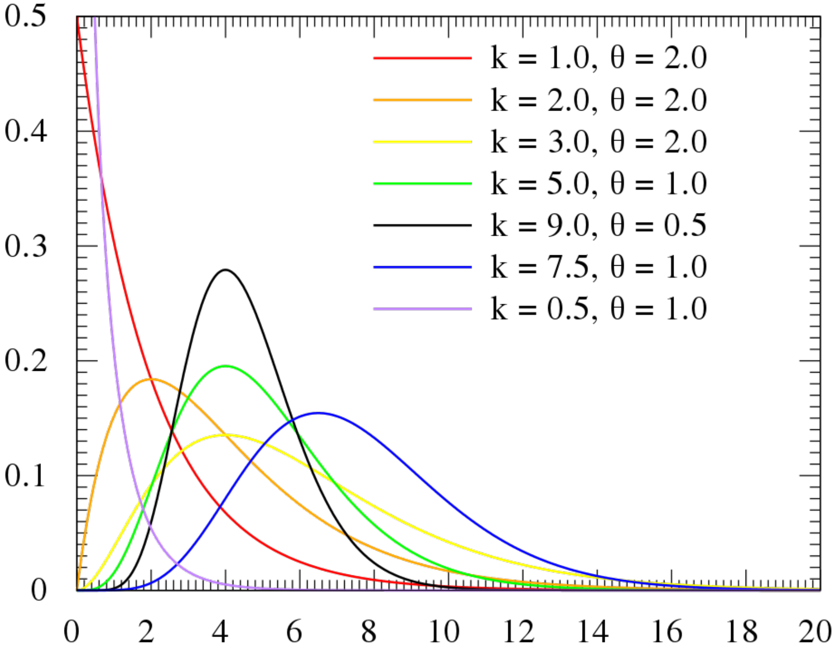
X ~ Γάμμα(k, θ): $f(x) = \dfrac{x^{k-1} e^{-x/\theta}}{\theta^k \Gamma(k)}, \ x > 0, \ \text{όπου} \ \Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t}\, dt, \ \Re(z) > 0.$

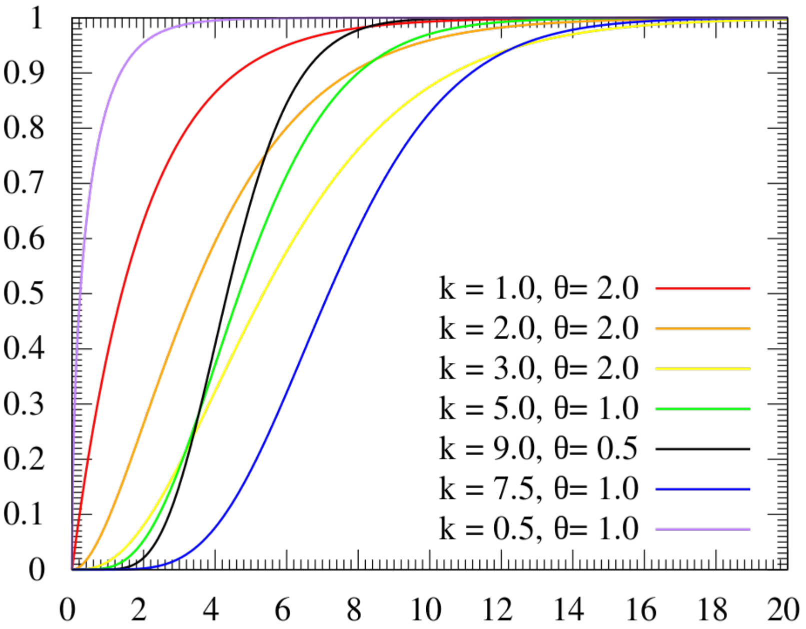
Γεωμετρικά χαρακτηριστικά: $E(X) = k\theta, \ \ Var(X) = k\theta^2, \ \ E(X^n) = \theta^n \dfrac{\Gamma(n+k)}{\Gamma(k)}, \ \ \gamma = \dfrac{2}{\sqrt{k}}$

Οι κατανομές γάμμα εμφανίζονται συχνά σε μοντέλα που χρησιμοποιούνται στη μηχανική (όπως ο χρόνος μέχρι την αστοχία του εξοπλισμού και τα επίπεδα φορτίου για τηλεπικοινωνιακές υπηρεσίες), στη μετεωρολογία (βροχόπτωση) και στα ασφαλιστικά μαθηματικά (ασφαλιστικές απαιτήσεις και αδυναμία αποπληρωμής δανείων) για τα οποία οι μεταβλητές είναι πάντα θετικές και η κατανομή χαρακτηρίζεται από ασυμμετρία.

Επίσης, μπορεί να θεωρηθεί ότι είναι το συνεχές ανάλογο της αρνητικής διωνυμικής κατανομής.

Κατανομή Γάμμα(k, θ)





$$f(x) = \frac{x^{k-1} e^{-x/\theta}}{\theta^k \Gamma(k)}, \; x > 0.$$

$$F(x) = \frac{1}{\theta^k \Gamma(k)} \int_0^x t^{k-1} e^{-t/\theta} \, dt, \; x > 0.$$

Κατανομή Γάμμα

Παρατηρήσεις

1. Αν X_1, X_2, X_3, ...X_n είναι μια ακολουθία ανεξάρτητων Exp(λ) τυχαίων μεταβλητών, τότε η

$$Y = X_1 + X_2 + \dots + X_n,$$

είναι μια τυχαία μεταβλητή με κατανομή Γάμμα(n, λ).

2. Αν το n είναι μεγάλο, τότε το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα διασφαλίζει ότι η κατανομή γάμμα μπορεί να προσεγγιστεί από την κανονική κατανομή $N(n\cdot\lambda, n\cdot\lambda^2)$, δηλαδή

$$\textbf{Γάμμα}(n, \lambda) \approx N(n\cdot\lambda, n\cdot\lambda^2)$$

Κατανομή Γάμμα

Παράδειγμα

Στο ταμείο του μάρκετ, βρίσκουμε μία ουρά με δύο άτομα μπροστά μας. Εκείνη τη στιγμή έρχεται η ταμίας και αρχίζει να εξυπηρετεί τον πρώτο πελάτη. Γνωρίζουμε ότι η ταμίας εξυπηρετεί τους πελάτες με ρυθμό 3 πελάτες / λεπτό. Ποια είναι η πιθανότητα ότι θα περιμένουμε περισσότερο από 1,5 λεπτό;

Λύση

Κατανομή Γάμμα

Παράδειγμα

Στο ταμείο του μάρκετ, βρίσκουμε μία ουρά με δύο άτομα μπροστά μας. Εκείνη τη στιγμή έρχεται η ταμίας και αρχίζει να εξυπηρετεί τον πρώτο πελάτη. Γνωρίζουμε ότι η ταμίας εξυπηρετεί τους πελάτες με ρυθμό 3 πελάτες / λεπτό. Ποια είναι η πιθανότητα ότι θα περιμένουμε περισσότερο από 1,5 λεπτό;

Λύση

Αν X = {πλήθος πελατών που εξυπηρετούνται στο 1 λεπτό} τότε X ~ Poisson(3). Αν T = {χρόνος μέχρι να εξυπηρετηθούν 2 πελάτες}, τότε T ~ Γάμμα(2, 3) και

$$F_T(1{,}5) = 1 - e^{-3\cdot 1{,}5}\sum_{j=0}^{2-1}\frac{(3\cdot 1{,}5)^j}{j!}, = 1 - e^{-4{,}5}(1 + 4{,}5) = 1 - 5{,}5\,e^{-4{,}5}.$$

Συμπεραίνουμε ότι: $P(T > 1{,}5) = 1 – P(T \leq 1{,}5) = 5{,}5^{e-4{,}5} = 0{,}061 = 6{,}1\%$.

Σημείωση: Ο ρυθμός εξυπηρέτησης θα μπορούσε να εκφραστεί στο 1,5 λεπτό ή ακόμα και σε sec. Η συνθήκη T > 1,5 θα διαμορφωνόταν αντίστοιχα T > 1 ή T > 90. Σε κάθε περίπτωση, το τελικό αποτέλεσμα θα ήταν το ίδιο.

Κατανομή χι-τετράγωνο ($\chi^2(n)$)

$\Gamma(n/2, 1/2) = \chi^2(n)$

Επιλέγοντας $\lambda = ½$ και $k = n/2$, παίρνουμε την ειδική περίπτωση της κατανομής Γάμμα με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f_X(x) = \frac{e^{-x/2} x^{n/2-1}}{2^{n/2}\Gamma(n/2)}, \ x > 0.$$

Καθώς το n/2 δεν είναι εν γένει ακέραιος, δεν είναι δυνατός ο υπολογισμός της συνάρτησης κατανομής στην γενική περίπτωση. Η κατανομή $\Gamma(n/2, 1/2) = \chi^2(n)$ έχει μεγάλη αξία εφαρμογής στη Στατιστική, ονομάζεται **κατανομή χι-τετράγωνο με n βαθμούς ελευθερίας** (chi square distribution with n degrees of freedom) και συμβολίζεται $\chi^2(n)$ ή χ^2_n ή $c^2(n)$ ή $x^2(n)$. Η ιδιαίτερη σημασία της προκύπτει από το:

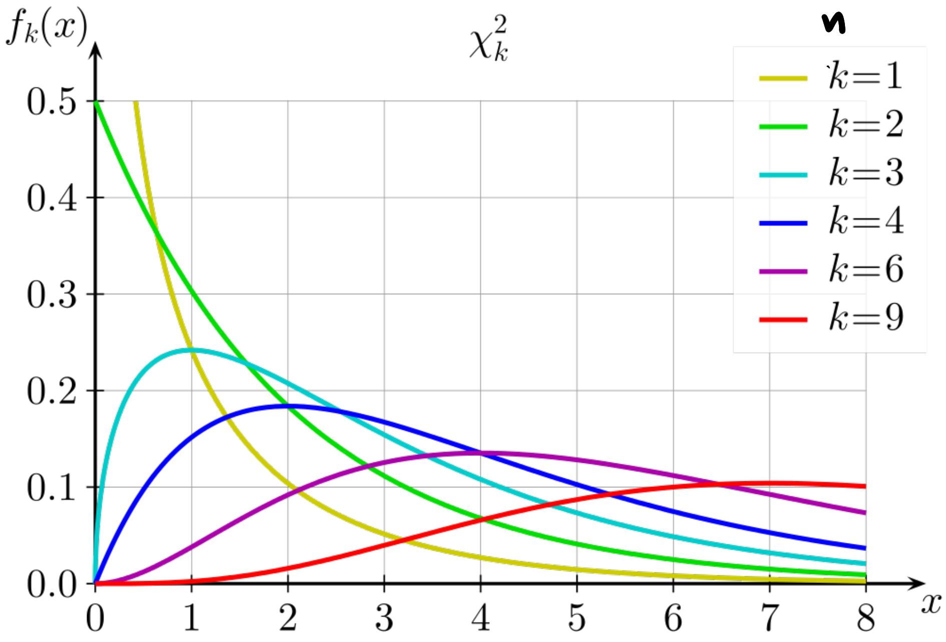
Θεώρημα

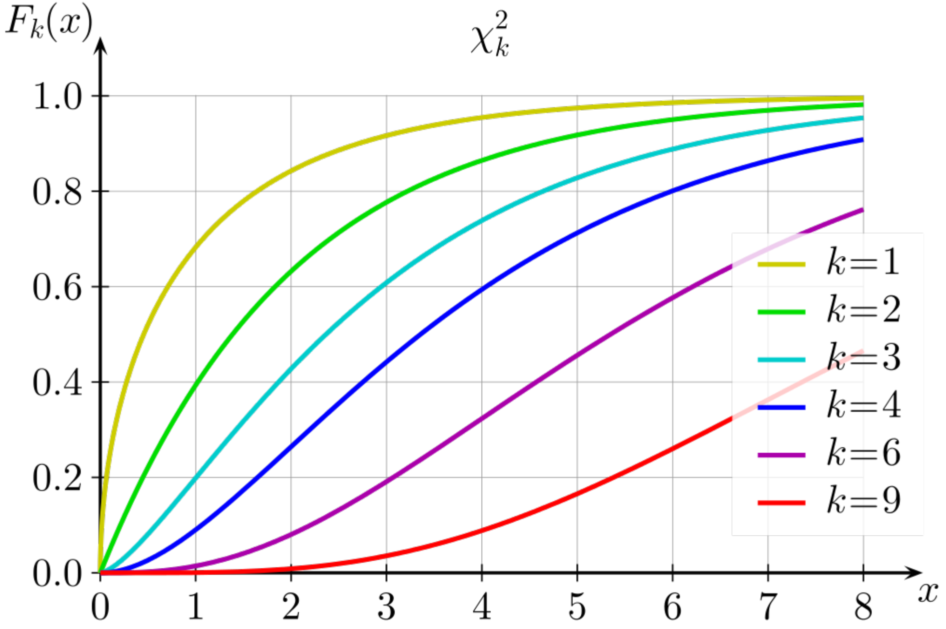
Αν $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ είναι ανεξάρτητες τ.μ. με κατανομή $N(0, 1)$, τότε η τυχαία μεταβλητή

$Q = Z^2_1 + Z^2_2 + \ldots + Z^2_n$ ακολουθεί την κατανομή $\chi^2(n)$ (δηλαδή $Q \sim \chi^2(n)$).

Μία απόδειξη είναι διαθέσιμη εδώ: https://statproofbook.github.io/P/chi2-pdf.html

Κατανομή $\chi^2(n)$





$$f_X(x) = \frac{e^{-x/2} x^{k/2-1}}{2^{k/2}\Gamma(k/2)}, \ x > 0.$$

$$F_X(x) = \frac{1}{2^{k/2}\Gamma(k/2)} \int_0^x e^{-t/2} t^{k/2-1} dt, \ x > 0.$$

Ειδικές περιπτώσεις $\chi^2(1)$ και $\chi^2(2)$

Επιλέγοντας n = 1, παίρνουμε την ειδική περίπτωση $\chi^2(1)$ (=Γ(½, ½)) της κατανομής χι-τετράγωνο με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^{-x/2}, \ x > 0,$$

Επιλέγοντας n = 2, παίρνουμε την ειδική περίπτωση $\chi^2(2)$ (=Γ(1, ½)) της κατανομής χι-τετράγωνο με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f_X(x) = \frac{1}{2} e^{-x/2}, \ x > 0,$$

και συνάρτηση κατανομής $F_X(x) = 1 – e^{-x/2}$, x > 0. Παρατηρούμε ότι

$$\chi^2(2) = \mathrm{Exp}(1/2)$$

Ειδικές περιπτώσεις $\chi^2(1)$ και $\chi^2(2)$

Άσκηση **(Το Θεώρημα για n = 1).**

Να αποδειχθεί ότι αν $Z \sim N(0, 1)$, τότε $Z^2 \sim \chi^2(1)$ (δηλαδή $f_{Z^2}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^{-x/2}, \; x > 0$)

$a > 0$

$$F_{Z^2}(a) = P(Z^2 \le a) = P(|Z| \le \sqrt{a}) = P(-\sqrt{a} \le Z \le \sqrt{a}) = \int_{-\sqrt{a}}^{\sqrt{a}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx$$

$$f_Z(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\sqrt{a}}^{\sqrt{a}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

$$f_{Z^2}(a) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\sqrt{a}}^{\sqrt{a}} e^{-x^2/2} dx \right)' = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(e^{-a/2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{a}} + e^{-a/2} \frac{1}{2\sqrt{a}} \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi a}} e^{-\frac{a}{2}}$$

Θ. Θ. Λ. : $\left(\int_0^x f(t)dt\right)' = f(x)$, $\left(\int_0^{g(x)} f(t)dt\right)' = f(g(x))\cdot g'(x)$

$$\left(\int_{h(x)}^{g(x)} f(t)dt\right)' = f(g(x))\cdot g'(x) - f(h(x))\cdot h'(x)$$

Κατανομή Βήτα

Κατανομή Βήτα

Στη θεωρία πιθανοτήτων και στη στατιστική, η κατανομή βήτα (beta) είναι μια οικογένεια συνεχών κατανομών πιθανοτήτων που ορίζονται στο διάστημα [0, 1], περιγράφονται από δύο θετικές παραμέτρους σχήματος, α και β, οι οποίες προσδιορίζουν και το σχήμα της κατανομής.

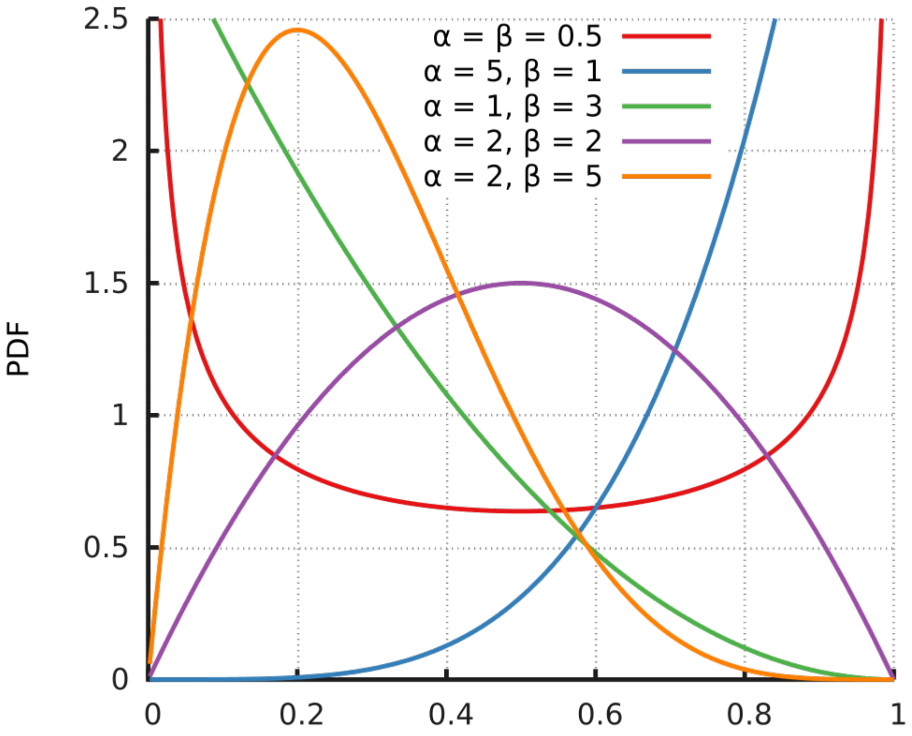
Αν X ~ Β(α, β) τότε $f(x) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\cdot\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} = \frac{1}{B(\alpha,\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}$, $X \in [0,1]$

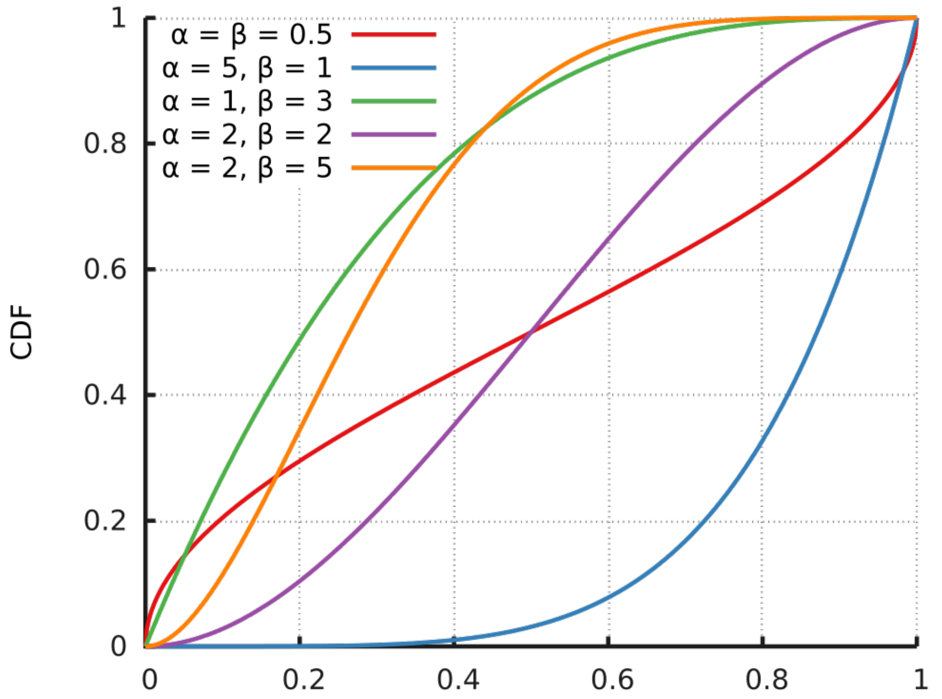
Ειδική συνάρτηση $B(z_1, z_2) = \int_0^1 t^{z_1-1}(1-t)^{z_2-1}\,dt, \ \Re(z)_1 > 0, \ \Re(z_2) > 0.$

Γεωμετρικά χαρακτηριστικά:

$$X \sim B(\alpha,\beta) \rightarrow E(X) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}, \ Var(X) = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}$$

Κατανομή Βήτα





$$f(x) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\cdot\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1},\ x \in [0,1]$$

$$F(x) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\cdot\Gamma(\beta)} \int_0^x t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}dt,\ x \in [0,1]$$

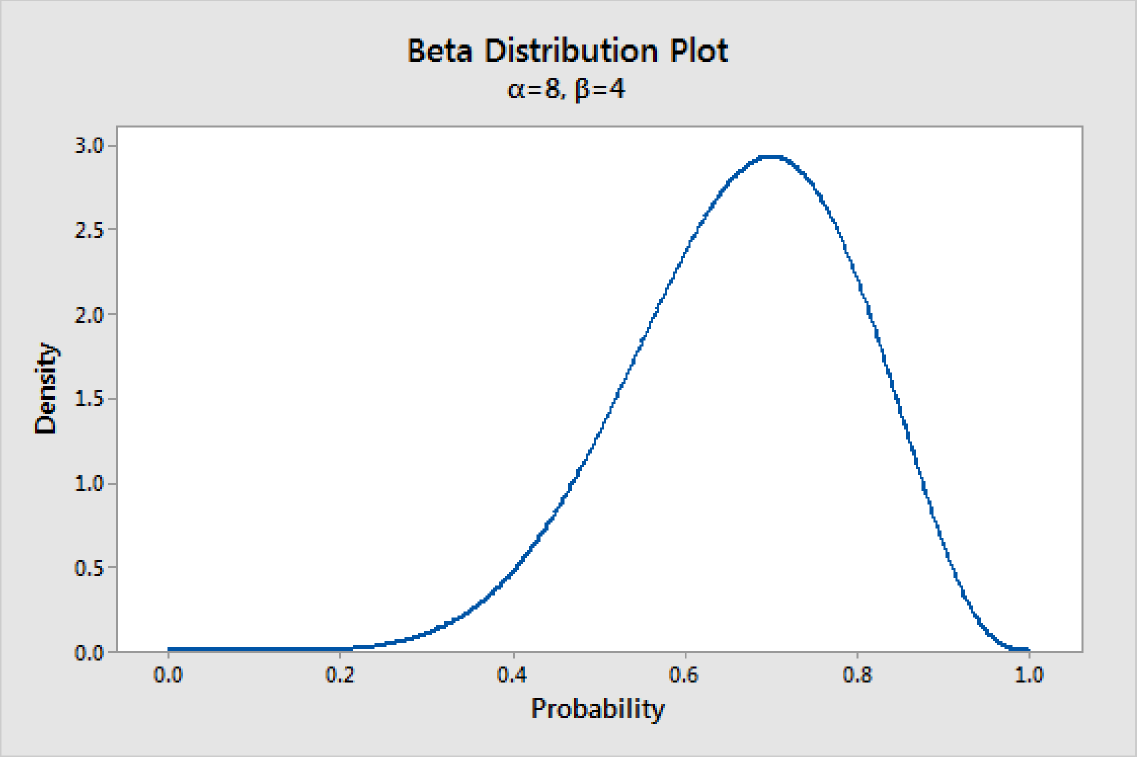
Κατανομή Βήτα

Η κατανομή Βήτα έχει τη δυνατότητα να αποτελέσει μοντέλο για τις πιθανότητες μίας άγνωστης κατανομής.

Για παράδειγμα, αν ένα πείραμα εξελίσσεται με δύο πιθανά αποτελέσματα αλλά δεν είναι γνωστή η πιθανότητα της επιτυχίας, τότε η εκτέλεση ενός περιορισμένου πλήθους πειραμάτων, η κατανομή Βήτα θα μπορούσε να προσφέρει ένα πιθανοθεωρητικό μοντέλο πρόβλεψης για την τιμή αυτής της πιθανότητας.

Παράδειγμα

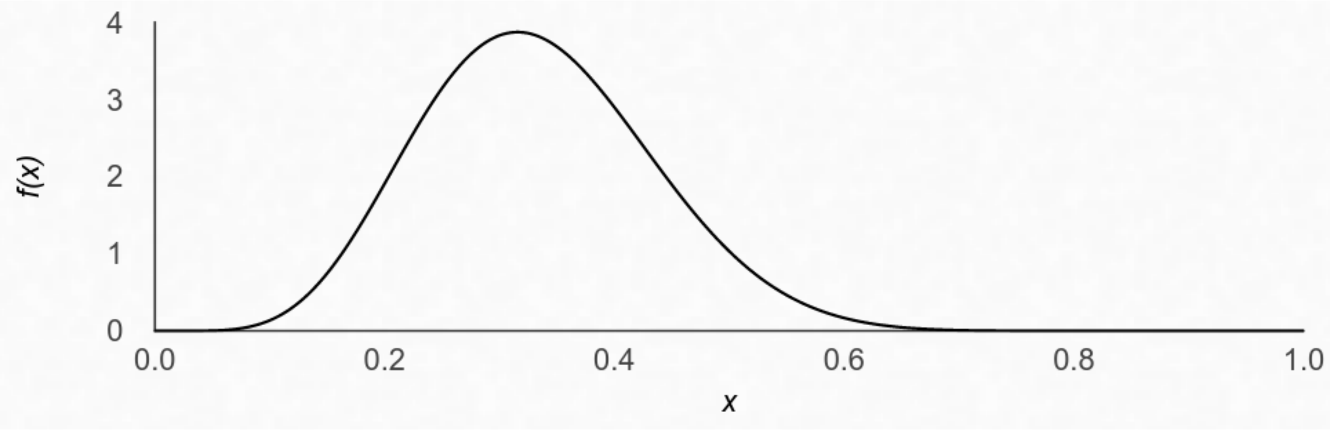
Σε $n = 10$ αγώνες η ομάδα A νίκησε την ομάδα B σε $k = 7$ από αυτούς. Εμείς, ενδιαφερόμαστε να βρούμε την κατανομή της πραγματικής πιθανότητας με την οποία η ομάδα A νικάει την ομάδα B. Αυτή η κατανομή μοντελοποιείται από την κατανομή $B(\alpha, \beta)$ όπου $\alpha = k + 1 = 8$ και $\beta = n – k + 1 = 4$.



Κατανομή Βήτα

Η κατανομή Βήτα εμφανίζεται επίσης ως η κατάλληλη κατανομή σε περίπτωση διάταξης τυχαίων τιμών από την ομοιόμορφη κατανομή U(0,1). Πιο συγκεκριμένα, αν $U_1, \ldots, U_n$ είναι n ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές, καθεμία από τις οποίες έχει την U(0,1) κατανομή και $U_{(1)}, \ldots, U_{(n)}$ είναι οι αντίστοιχες ταξινομημένες τιμές (δηλαδή $U_{(1)} = \min(U_1, \ldots, U_n) < U_{(2)} < \ldots < U_{(n)} = \max(U_1, \ldots, U_n)$), τότε μπορεί να αποδειχθεί ότι $U_{(k)} \sim$ Βήτα$(k, n + 1 - k)$, $k = 1, \ldots, n$.

Για παράδειγμα, αν επιλέξουμε τυχαία 20 αριθμούς από την U(0, 1), τότε η θέση του 7ου στη σειρά στοιχείου έχει την κατανομή Βήτα(7, 14)



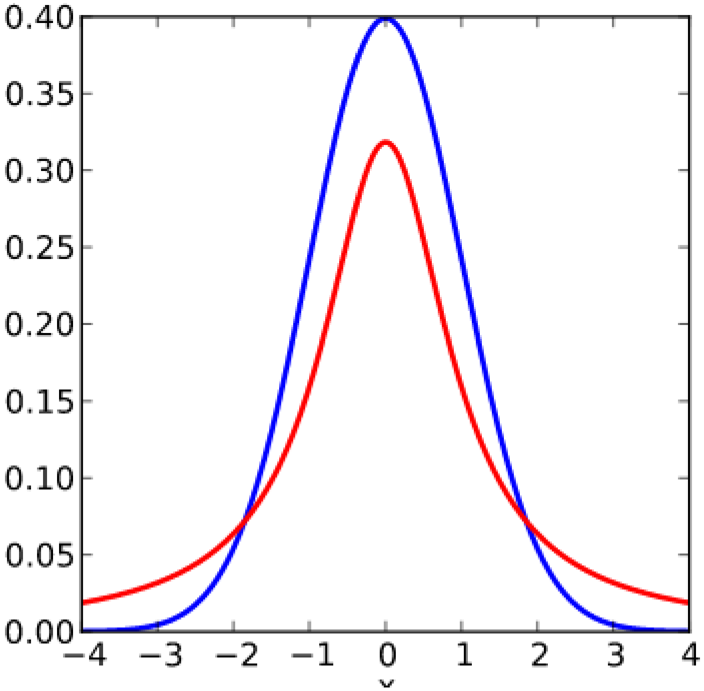
Κατανομή Student με n β.ε. (ή κατανομή t(n))

Κατανομή Student με n β.ε. (ή κατανομή t(n))

Η κατανομή Student αποτελεί μία προσαρμογή της κανονικής κατανομής ως προς την ταχύτητα με την οποία μειώνεται η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας καθώς η τιμή απομακρύνεται από την αναμενόμενη τιμή.

Η προσαρμογή αυτή θεωρείται απαραίτητη στις μεθόδους της επαγωγικής στατιστικής, όταν μελετώνται μικρά δείγματα (N < 30). Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της t(n) είναι:

$$f_n(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-(n+1)/2}$$



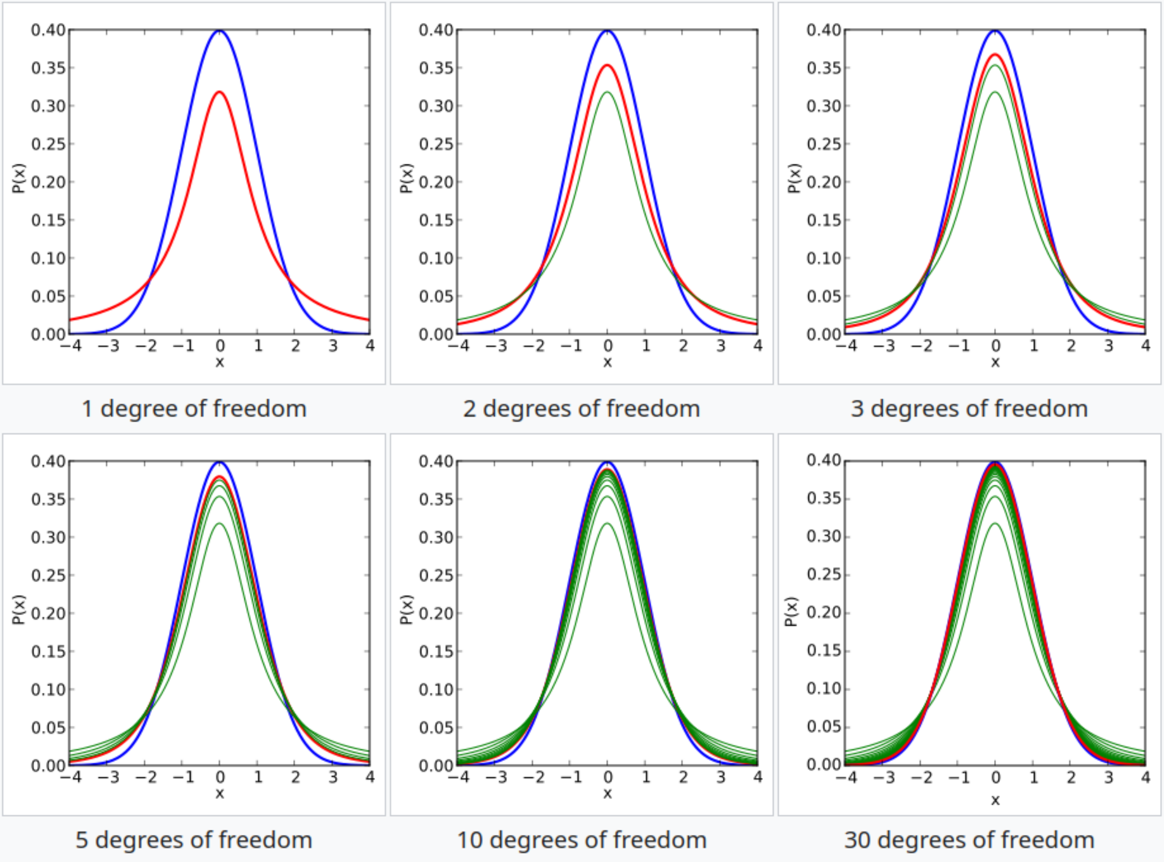
Αποδεικνύεται ότι: $$\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = \lim_{n \to +\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-(n+1)/2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Δηλαδή, στην πράξη, αν

X ~ t(n) με n > 30, μπορούμε να

δεχθούμε ότι προσεγγιστικά

είναι X ~ N(0, 1).



Κατανομή $F(n_1, n_2)$

Κατανομή $F(n_1, n_2)$

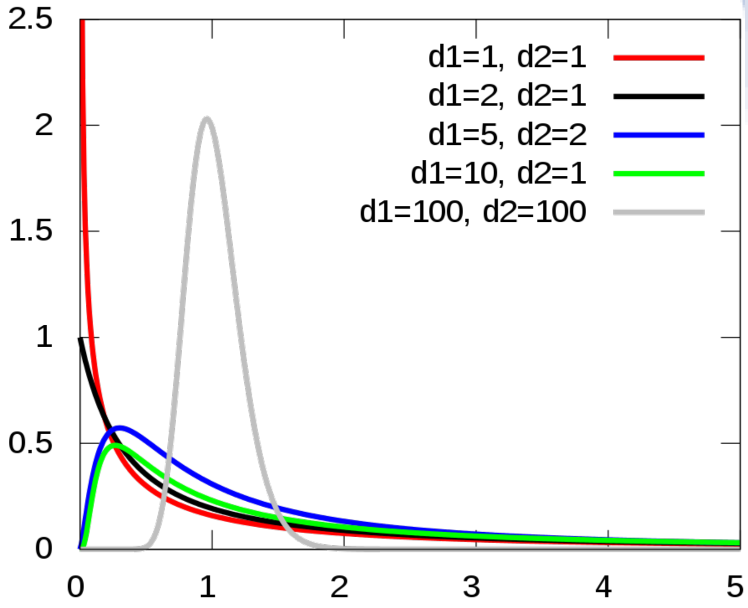
Η κατανομή F είναι αυτή που ακολουθεί μία μεταβλητή που ορίζεται ως ο λόγος δύο άλλων μεταβλητών που ακολουθούν κατανομή χ^2. Εμφανίζεται στον έλεγχο ισότητας διακυμάνσεων αλλά και στη ανάλυση διακύμανσης (ANOVA) σε όλες τις παραλλαγές της.

Αν $X_1 \sim \chi^2(d_1)$ και $X_2 \sim \chi^2(d_2)$ τότε

$Y = X_1 / X_2 \sim F(d_1, d_2)$.

Αποδεικνύεται ότι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της $Y \sim F(d_1, d_2)$ είναι η εξής:

$$f_{d_1, d_2}(x) = \frac{1}{B\left(\frac{d_1}{2}, \frac{d_2}{2}\right)} \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^{d_1/2} x^{d_1/2 - 1} \left(1 + \frac{d_1}{d_2} x\right)^{-(d_1 + d_2)/2}.$$



Μία απόδειξη είναι διαθέσιμη εδώ:https://statproofbook.github.io/P/f-pdf.html

Κατανομή Cauchy

Κατανομή Cauchy

Η κατανομή Cauchy(x_0, γ) είναι η οικογένεια κατανομών με σ.π.π

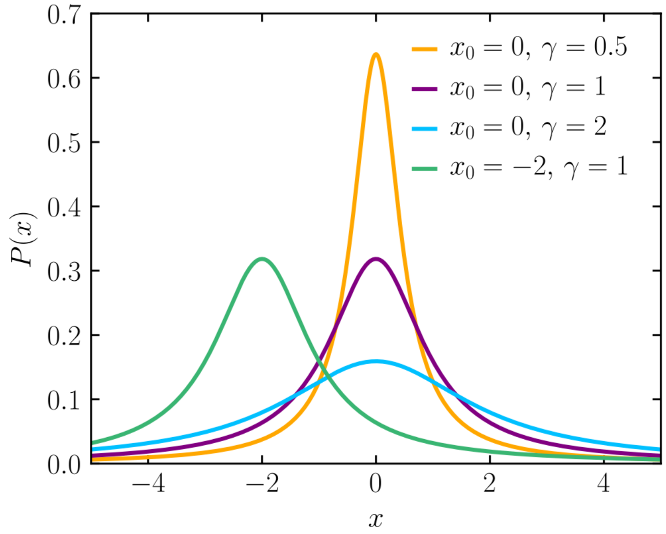
$$f_{x_0,\,\gamma}(x) = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\gamma}{(x - x_0)^2 + \gamma^2}\right].$$

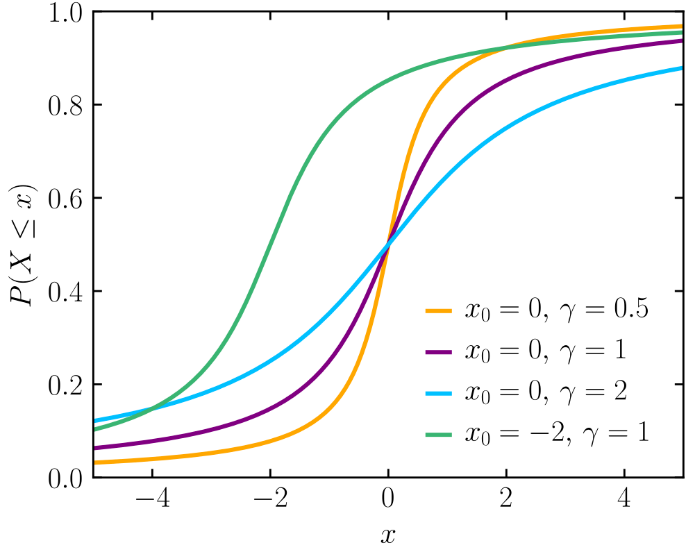
Αν Z = X / Y, με X, Y ~ N(0, 1), αποδεικνύεται ότι Z ~ Cauchy(0, 1):

$$f_Z(x) = \frac{1}{\pi(1 + x^2)}.$$

Η κατανομή Cauchy είναι ιδιόμορφη κατανομή υπό την έννοια πως δεν μπορούν να υπολογιστούν για αυτήν γεωμετρικά χαρακτηριστικά όπως τα EX, VarX, γ, α.

Εφαρμογές:
1. Προσεγγίζει τη συνάρτηση Dirac καθώς γ → 0.
2. Κατανομή αποστάσεων σε ευθύγραμμο τμήμα κεκλιμένο σε τυχαία γωνία.
3. Στη Φυσική είναι γνωστή ως κατανομή Lorentz.
4. Ειδική περίπτωση της κατανομής Student για n = 2.





$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2\pi}\ln(1+x^2)\Big|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{1}{2\pi}(+\infty - \infty)$$

ΑΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΤΟ.

Συναρτήσεις Τυχαίων Μεταβλητών

Συναρτήσεις Τυχαίων Μεταβλητών

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$

Παράδειγμα

Αν x είναι η ταχύτητα ενός Ι.Χ. στον αυτοκινητόδρομο, τότε η απόσταση που διανύει από τη στιγμή που πατιέται το φρένο μέχρι τη στιγμή που σταματάει δίνεται από τη συνάρτηση

$$g(x) = 0{,}008 \cdot x^2$$

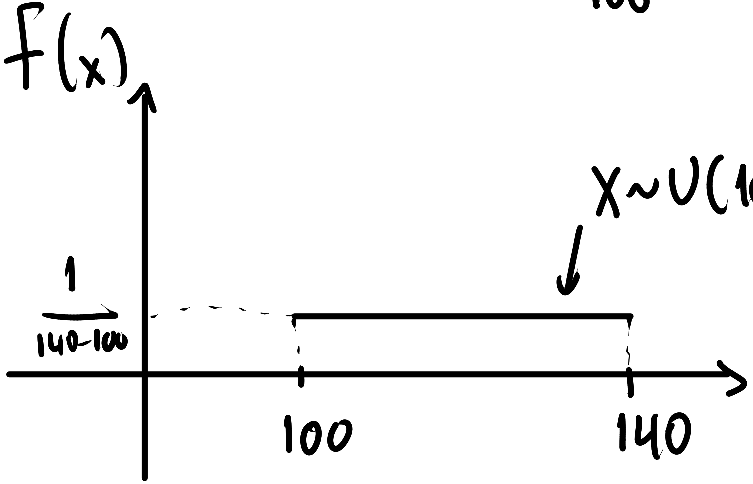
Σε μια συγκεκριμένη μελέτη η κατανομή των ταχυτήτων των αυτοκινήτων (km/h) κατά την έναρξη του φρεναρίσματος προσδιορίστηκε εμπειρικά να είναι η U(100, 140). Ποια είναι η αναμενόμενη τιμή της απόστασης ακινητοποίησης;

$g(x) = 0{,}008 \cdot x^2$. π.χ. αν $x = 100$, $g(100) = 0{,}008 \cdot 100^2 = 80$ μέτρα.

$X \sim U(100, 140)$. $Y = g(X)$

$$E(Y) = E(g(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \cdot f(x) dx = \int_{100}^{140} 0.008 x^2 \cdot \frac{1}{140-100} dx =$$

$$= \frac{0.008}{40} \left. \frac{x^3}{3} \right|_{100}^{140} = \frac{0.008}{120} \left(140^3 - 100^3\right) = 116,3 \text{ μέτρα.}$$



X: ταχύτητα κατά την έναρξη.

Συναρτήσεις Τυχαίων Μεταβλητών

Παράδειγμα

Αν x είναι η ταχύτητα ενός Ι.Χ. στον αυτοκινητόδρομο, τότε η απόσταση που διανύει από τη στιγμή που πατιέται το φρένο μέχρι τη στιγμή που σταματάει δίνεται από τη συνάρτηση

$$g(x) = 0{,}008 \cdot x^2$$

Σε μια συγκεκριμένη μελέτη η κατανομή των ταχυτήτων των αυτοκινήτων (km/h) κατά την έναρξη του φρεναρίσματος προσδιορίστηκε εμπειρικά να είναι η U(100, 140). Ποια είναι η αναμενόμενη τιμή της απόστασης ακινητοποίησης;

Λύση

Είναι X ~ U(100, 140). Αν Y = g(X) η τυχαία μεταβλητή της απόστασης, τότε

$$E(Y) = E(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x) dx = \int_{100}^{140} 0{,}008\, x^2 \frac{1}{140 - 100} dx = \frac{0{,}008}{40} \cdot \left[\frac{x^3}{3} \right]_{100}^{140} = 116{,}3 \text{ m}$$

Αναμενόμενη τιμή Y = g(X)

Στο προηγούμενο παράδειγμα βρήκαμε ότι E(g(X)) = 116,3 m.

Παρατηρούμε ότι E(X) = (100 + 140) / 2 = 120 και ότι g(E(X)) = $0{,}008 \cdot 120^2$ = 115,2 m, δηλαδή ότι

g(E(X)) ≠ E(g(X)).

Η παρατήρηση αυτή δεν είναι τυχαία. Αποδεικνύεται ότι η μοναδική περίπτωση όπου με βεβαιότητα αντιμετατίθεται η αναμενόμενη τιμή με μία συνάρτηση g(X) είναι στην περίπτωση όπου η g(x) είναι γραμμική, δηλαδή της μορφής g(x) = αx + β.

Συνεπώς, σε όλες τις άλλες περιπτώσεις, καταφεύγουμε στον ορισμό:

$$E\left(g\left(X\right)\right)=\int_{-\infty}^{\infty} g\left(x\right)f\left(x\right)dx, \text{ αν } X: \text{συνεχής}.$$

$$E\left(g\left(X\right)\right)=\sum_{x}^{\infty} g\left(x\right)f_X\left(x\right)dx, \text{ αν } X: \text{διακριτή}.$$

Συνάρτηση μάζας πιθανότητας διακριτής $Y = g(X)$

Γενικότερα, αν $Y = g(X)$ και R είναι το εύρος τιμών της X, τότε το εύρος τιμών της Y είναι το σύνολο

$$\{g(x),\ x \in R\}.$$

Αν η X είναι διακριτή τότε η συνάρτηση μάζας πιθανότητας της Y είναι

$$f_Y(y) = P(Y = y) = P(g(X) = y) = \Sigma_{x:\, g(x) = y} P(X = x) = \Sigma_{x:\, g(x) = y} f_X(x)$$

Στην περίπτωση αυτή, η αναμενόμενη τιμή και η διακύμανση της Y είναι αντίστοιχα:

$$E(Y) = E(g(X)) = \Sigma_x\, g(x) \cdot f_X(x)$$

$$Var(Y) = Var(g(X)) = \Sigma_x\, (g(x) - \mu_Y)^2 \cdot f_X(x)$$

Συνάρτηση μάζας πιθανότητας διακριτής Y = g(X)

Άσκηση 1

Αν X διακριτή τ.μ. με P(X = k) = 1/5, k = -1, 0, 1, 2, 3, να βρεθεί η σ.μ.π. της Y = |X|.

$$X = -1, 0, 1, 2, 3, \quad P(X=k) = \frac{1}{5}.$$

$$Y = |X| : 0, 1, 2, 3.$$

$$f_Y(0) = P(Y=0) = P(|X|=0) = P(X=0) = \frac{1}{5}$$

$$f_Y(1) = P(Y=1) = P(|X|=1) = P(X=\pm 1) = P(X=-1) + P(X=1) = \frac{2}{5}.$$

$$f_Y(2) = P(Y=2) = P(|X|=2) = P(X=2) = \frac{1}{5}, \quad P(Y=3) = P(|X|=3) = P(X=3) = \frac{1}{5}.$$

$E(X) = \sum_x x \cdot P(X=x)$, $E(g(X)) = \sum_x g(x) \cdot P(X=x)$

Συνάρτηση μάζας πιθανότητας διακριτής Y = g(X)

Άσκηση 2

Αν X διακριτή τ.μ. με P(X = k) = 1/5, k = 0, π/4, π/2, 3π/4, π, να βρεθεί η αναμενόμενη τιμή της Y = sin(X).

$X = 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \pi$, $P(X=k) = \frac{1}{5}$

$$E(\sin(X)) = \sin 0 \cdot P(X=0) + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot P\left(X=\frac{\pi}{4}\right) + \dots + \sin(\pi) \cdot P(X=\pi) =$$

$$= \frac{1}{5}\left(\overset{0}{\cancel{\sin 0}} + \sin\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{2} + \sin\frac{3\pi}{4} + \overset{0}{\cancel{\sin \pi}}\right) =$$

$$= \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1+\sqrt{2}}{5}.$$

Εναλλακτικά, αν $Y=\sin(X)$ τότε $Y=0, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1$ και

$$P(Y=0) = P(\sin X=0) = P(X=0)+P(X=\pi) = \frac{2}{5}$$

$$P\left(Y=\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = P\left(\sin X=\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = P\left(X=\frac{\pi}{4}\right)+P\left(X=\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{2}{5}$$

$$P(Y=1) = P(\sin X=1) = P\left(X=\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{5}$$

$$E(Y) = \sum_y y\cdot P(Y=y) = 0\cdot\frac{2}{5} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{2}{5} + 1\cdot\frac{1}{5} = \frac{1+\sqrt{2}}{5}.$$

Συνάρτηση κατανομής $Y = g(X)$

Παράδειγμα 1

Αν $X \sim Exp(\lambda)$, τότε να βρεθεί η συνάρτηση κατανομής της $Y = 1/X$.

Συνάρτηση κατανομής Y = g(X)

Παράδειγμα 1
Αν X ~ Exp(λ), τότε να βρεθεί η συνάρτηση κατανομής της Y = 1/X.

Λύση
Για X = 0, η Y δεν ορίζεται ενώ για X ϵ (0, +∞), η συνάρτηση Y = 1/X είναι γνησίως φθίνουσα.

$$F_Y(x) = P(Y \leq x) = P(1/X \leq x) = P(X \geq 1/x) = 1 – P(X \leq 1/x) = e^{-\lambda/x}.$$

Παραγωγίζοντας, μπορούμε να βρούμε και τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της Y:

$$f_Y(x) = (F_Y(x))' = e^{-\lambda/x}\cdot(-\lambda/x)' = -\lambda e^{-\lambda/x} / x^2.$$

Σημείωση
Η τ.μ. Y ονομάζεται **αντίστροφη εκθετική κατανομή** (inverse exponential distribution) και βρίσκει εφαρμογές στα συστήματα ασύρματης επικοινωνίας φθίνουσας ισχύος (fading wireless communication systems)

Συνάρτηση κατανομής $Y = g(X)$

Άσκηση 1

Αν $X \sim Exp(\lambda)$, τότε να βρεθεί η συνάρτηση κατανομής και η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της $Y = X^3$.

Λύση

Υπόδειξη

Πρώτα βρείτε τις πιθανές τιμές της Y. Στη συνέχεια, εκφράστε την $P(Y \leq y)$ από την F_X.

Συνάρτηση κατανομής $Y = g(X)$

Άσκηση 2

Αν $X \sim U(0, 1)$, τότε να βρεθούν η $E(Y)$, η σ.κ. F_Y και η σ.π.π. f_Y της τ.μ. $Y = e^X$.

Λύση

Υπόδειξη

Πρώτα βρείτε τις πιθανές τιμές της Y. Στη συνέχεια, εκφράστε την $P(Y \leq y)$ από την F_X

Συνάρτηση κατανομής Y = g(X)

Άσκηση 3

Να αποδείξετε ότι αν η τ.μ. $X \sim U(0,1)$ τότε η $Y = -\ln X$ ακολουθεί την Exp(1).

Υπόδειξη

Πρώτα βρείτε τις πιθανές τιμές της Y. Στη συνέχεια, εκφράστε την $P(Y \leq y)$ από την F_X.

Συνάρτηση κατανομής Y = g(X)

Στη γενική περίπτωση μίας συνάρτησης συνεχούς μεταβλητής ισχύει το εξής:

Θεώρημα

Αν X είναι μία συνεχής τυχαία μεταβλητή, g: R → R είναι μία μονότονη και συνεχώς διαφορίσιμη συνάρτηση, τότε η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της Y = g(X), είναι η

$$f_Y(y) = f_X\left(g^{-1}(y)\right)\left|\frac{d}{dy}g^{-1}(y)\right|$$

Απόδειξη

g αύξουσα:

$$F_Y(y) = P(Y \le y) = P\left(g(X) \le y\right) = P\left(X \le g^{-1}(y)\right) = F_X\left(g^{-1}(y)\right) \Rightarrow f_Y(y) = f_X\left(g^{-1}(y)\right)\frac{d}{dy}g^{-1}(y)$$

g φθίνουσα:

$$F_Y(y) = P(Y \le y) = P\left(g(X) \le y\right) = P\left(X \ge g^{-1}(y)\right) = 1 - F_X\left(g^{-1}(y)\right) \Rightarrow f_Y(y) = -f_X\left(g^{-1}(y)\right)\frac{d}{dy}g^{-1}(y) = f_X\left(g^{-1}(y)\right)\left|\frac{d}{dy}g^{-1}(y)\right|$$

Συνάρτηση κατανομής Y = g(X)

Παράδειγμα
Αν $X \sim U(0,1)$ τότε για να βρούμε την σ.π.π της $Y = -\ln X$, έχουμε:

$g(x) = -\ln x$, $g'(x) = -1/x < 0$, $x \in (0, 1) \rightarrow$ g: φθίνουσα.

Είναι $g^{-1}(y) = e^{-y}$, $(g^{-1}(y))' = (e^{-y})' = -e^{-y}$, και:

$$f_Y(y) = f_X\left(g^{-1}(y)\right)\left|\frac{d}{dy}g^{-1}(y)\right| = e^{-y} \Rightarrow Y \sim \text{Exp}(1)$$

Συνάρτηση κατανομής Y = g(X)

Άσκηση

Αν $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ τότε να βρεθεί η σ.π.π της $Z = (X - \mu)/\sigma$.

Ασκήσεις στο σύνολο της ύλης

Ασκήσεις στο σύνολο της ύλης

1. Ένας σάκος έχει 1 κόκκινη και 2 πράσινες μπάλες. Επιλέγω μια μπάλα. Αν είναι κόκκινη, την ξαναβάζω στο σάκο. Αν είναι πράσινη δεν την ξαναβάζω. Μετά επιλέγω μία δεύτερη μπάλα.
(α) Βρείτε την πιθανότητα η δεύτερη μπάλα να είναι κόκκινη.
(β) Κάποιος κάνει αυτό το πείραμα και μας λέει ότι επέλεξε μια κόκκινη μπάλα στη δεύτερη επιλογή. Ποια είναι η πιθανότητα να είχε επιλέξει κόκκινη μπάλα στην πρώτη επιλογή;
(γ) Είναι ανεξάρτητα τα γεγονότα «η πρώτη μπάλα είναι κόκκινη» και «η δεύτερη μπάλα είναι κόκκινη»;

Ασκήσεις στο σύνολο της ύλης

2. Μία ασφαλιστική εταιρεία κατατάσσει του ανθρώπους σε μία από τις τρεις κατηγορίες: καλοί πληρωτές, μεσαίοι πληρωτές και κακοί πληρωτές. Οι καταγραφές τους δηλώνουν ότι τα άτομα καλών, μεσαίων και κακών πληρωμών έχουν πιθανότητες να εμπλακούν σε τροχαίο ατύχημα μέσα σ’ ένα χρόνο 0,05, 0,15 και 0,3 αντίστοιχα. Αν 20% του πληθυσμού είναι καλοί πληρωτές, 50% είναι μεσαίοι πληρωτές και 30% είναι κακοί πληρωτές, τι ποσοστό ανθρώπων έχουν ατύχημα μέσα σ’ ένα σταθερό χρόνο; Αν ένας κάτοχος ασφαλιστικού συμβολαίου δεν είχε ατύχημα μέσα σ’ ένα χρόνο, ποια είναι η πιθανότητα ότι είναι καλός πληρωτής;

Ασκήσεις στο σύνολο της ύλης

3. (α) Να βρεθεί το πλήθος των δυνατών τρόπων με τους οποίους μπορούμε να πάμε από το σημείο (0, 0) στο (100, 100) πηγαίνοντας πάνω ή δεξιά με βήμα 1 σε ένα καρτεσιανό σύστημα αξόνων.

(β) Να βρεθεί το πλήθος των δυνατών τρόπων με τους οποίους μπορούμε να πάμε από το σημείο (0, 0) στο (100, 100) πηγαίνοντας πάνω ή δεξιά με βήμα 1 σε ένα καρτεσιανό σύστημα αξόνων, με την επιπλέον υποχρέωση να περάσουμε από το σημείο (80, 70).

Ασκήσεις στο σύνολο της ύλης

4. Δύο παίκτες Α και Β παίζουν ένα παιχνίδι ρίχνοντας ένα ζάρι διαδοχικά (ο Α ρίχνει πρώτος). Ο πρώτος που θα φέρει 6 κερδίζει.

(α) Να βρείτε την πιθανότητα να νικήσει ο παίκτης Α στη δεύτερη ρίψη που θα κάνει.

(β) Να βρείτε την πιθανότητα να νικήσει ο παίκτης Α τελικά.

Υπόδειξη: Ορίστε Ε = {το ζάρι ήρθε 6} και τα γεγονότα A_i = {ο Α κερδίζει στον i γύρο}, B_i = {ο Β κερδίζει στον i γύρο}, i = 1, 2, …

Ασκήσεις στο σύνολο της ύλης

5. Σε μία διεργασία παραγωγής ενός μεγάλου αριθμού αντικειμένων, μπορεί να συμβούν δύο ειδών σφάλματα A και B, καθένα με πιθανότητα 1/4, και χωρίς να μπορούν να συμβούν μαζί. Αν το σφάλμα A συμβεί τότε το 50% των αντικειμένων είναι ελαττωματικά, ενώ αν το σφάλμα B συμβεί τότε το 75% των αντικειμένων είναι ελαττωματικά. Τέλος, αν δεν υπάρχει κανένα σφάλμα τότε κανένα από τα αντικείμενα δεν είναι ελαττωματικά. Επιλέγουμε 5 αντικείμενα από την παραγωγή.

α) Να υπολογιστεί η πιθανότητα ότι 2 από τα αντικείμενα είναι ελαττωματικά.

β) Να υπολογιστεί η πιθανότητα ότι το πολύ ένα από τα αντικείμενα είναι ελαττωματικό.

γ) Αν κανένα από τα αντικείμενα δεν είναι ελαττωματικό, ποια είναι η πιθανότητα ότι δεν υπάρχει σφάλμα;

Ασκήσεις στο σύνολο της ύλης

6. Μία εξέταση αποτελείται από 50 ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής, κάθε μία από τις οποίες προσφέρει δυνατότητα επιλογής μεταξύ τριών απαντήσεων, μόνο μία από τις οποίες είναι σωστή. Για να περάσει κάποιος την εξέταση χρειάζεται να απαντήσει σωστά σε τουλάχιστον 20 από τις ερωτήσεις.

(α) Να βρεθεί η πιθανότητα ότι ένας φοιτητής, που σε κάθε ερώτηση επιλέγει τυχαία την απάντηση, θα περάσει το μάθημα.

(β) Ο εξεταστής αποφάσισε να αυξήσει το πλήθος των δυνατών απαντήσεων ανά ερώτηση, κρατώντας σταθερό το συνολικό αριθμό των ερωτήσεων και τον αριθμό που χρειάζεται κάποιος για να περάσει. Πόσες επιλογές ανά ερώτηση πρέπει να προσφέρει ώστε η πιθανότητα για έναν τελείως απροετοίμαστο φοιτητή να περάσει την εξέταση να είναι μικρότερη από 0,01.

Ασκήσεις στο σύνολο της ύλης

7. Αντικείμενα παράγονται από ανεξάρτητες λειτουργίες μιας μηχανής. Σε κάθε μία παραγωγή αντικειμένου, η πιθανότητα να είναι αυτό ελαττωματικό είναι θ.

(α) Να βρεθεί η πιθανότητα, το πρώτο ελαττωματικό αντικείμενο να εμφανιστεί

(i) στη n-ιοστή λειτουργία (ii) πριν τη n-ιοστή λειτουργία της μηχανής.

(β) Αν θ = 0,1, ποια είναι η μεγαλύτερη τιμή του n για την οποία η πιθανότητα της (α (i)) ερώτησης είναι μεγαλύτερη του 0.01;

Ασκήσεις στο σύνολο της ύλης

8. Δίνεται ότι η συνάρτηση $f(x) = c \cdot x \cdot (1 – x)$ είναι συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας μίας τυχαίας μεταβλητής Χ.
(α) Να αποδείξετε ότι $c = 6$.
(β) Να υπολογίσετε την πιθανότητα $P(X \in (1/4, 3/4])$

Ασκήσεις στο σύνολο της ύλης

9. Ένα αρχείο κειμένου περιέχει 1000 λέξεις. Κάθε λέξη, ανεξάρτητα από τις άλλες, είναι ανορθόγραφη με πιθανότητα p.

(α) Αν $p = 0{,}015$, υπολογίστε την πιθανότητα να περιέχει τουλάχιστον 20 ανορθόγραφες λέξεις.

(β) Αν $p = 0{,}001$, υπολογίστε την πιθανότητα να περιέχει τουλάχιστον 3 ανορθόγραφες λέξεις.

Ασκήσεις στο σύνολο της ύλης

10. Γνωρίζουμε ότι το 90% των ανταλλακτικών που χρησιμοποιούνται σε μία συσκευή έχουν διάρκεια ζωής μεγαλύτερη των 200 ωρών. Τα ανταλλακτικά κατασκευάζονται σε δύο εργοστάσια Α και Β. Είναι γνωστό ότι τα ανταλλακτικά της μονάδας Α έχουν διάρκεια ζωής μεγαλύτερη από 200 ώρες, ενώ για τα ανταλλακτικά της μονάδας Β, γνωρίζουμε ότι η διάρκεια ζωής τους είναι τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f(x) = \frac{1}{300} e^{-\frac{x}{300}}, \ x > 0.$$

Να βρεθεί το ποσοστό των ανταλλακτικών που προέρχονται από κάθε εργοστάσιο.

Ασκήσεις στο σύνολο της ύλης

11. Είναι γνωστό ότι το 5% των φορολογικών δηλώσεων έχουν κάποιο αριθμητικό λάθος. Να βρείτε την πιθανότητα μεταξύ 2.000 φορολογικών δηλώσεων να υπάρξουν περισσότερες από 12 δηλώσεις με αριθμητικό λάθος.

Ασκήσεις στο σύνολο της ύλης

12. Μία εταιρεία εισάγει ένα προϊόν συσκευασμένο σε κιβώτια που περιέχουν 50 προϊόντα. Γνωρίζουμε από το στάδιο της παραγωγής ότι το 10% των προϊόντων είναι ελαττωματικά. Πριν παραλάβει κάθε κιβώτιο η εταιρεία εξάγει τυχαία 5 αντικείμενα. Αν προκύψουν παραπάνω από 1 ελαττωματικό στα 5 τότε το κιβώτιο δεν γίνεται αποδεκτό. Να βρεθεί το ποσοστό των κιβωτίων που δεν γίνονται αποδεκτά.

Ασκήσεις στο σύνολο της ύλης

13. Η εσωτερική διάμετρος κυλίνδρου μηχανής είναι τυχαία μεταβλητή X (cm) με $X \sim N(10, 9\cdot10^{-4})$.
Να υπολογιστεί το ποσοστό των κυλίνδρων με εσωτερική διάμετρο :
(α) Μικρότερη από 9,95 cm.
(β) Μεταξύ 9,95 και 10,06 cm.
(γ) Ποια είναι η πιθανότητα αν επιλέξουμε 10 κυλίνδρους, οι 3 από αυτούς να έχουν διάμετρο μεταξύ 9,95 και 10,06cm;

Ασκήσεις στο σύνολο της ύλης

14. Κάθε υαλοπίνακας έχει ατέλειες σε πλήθος X ~ Poisson(λ), όπου λ = 0,2 ατέλειες/m^2. Μία ηλεκτρονική συσκευή εντοπίζει τις ατέλειες με ακρίβεια (πιθανότητα αναγνώρισης) 90%. Να προσδιοριστεί :

α) Η κατανομή του αριθμού Y των καταγραφόμενων ατελειών.

β) Η πιθανότητα P (X > 3 | Y = 2).

Ασκήσεις στο σύνολο της ύλης

15. Κατά μέσο όρο 60 πελάτες εισέρχονται σ’ ένα κατάστημα κατά τη διάρκεια μιας ώρας. Να υπολογιστεί η πιθανότητα ότι κατά τη διάρκεια ενός συγκεκριμένου διαστήματος 2 λεπτών:

(α) κανένας πελάτης δεν εισέρχεται στο κατάστημα.

(β) τουλάχιστον δύο πελάτες εισέρχονται στο κατάστημα.

Ασκήσεις στο σύνολο της ύλης

16. Έστω η τυχαία μεταβλητή $X \sim Poisson(\lambda)$, $\lambda > 0$. Αν $E(X^2) = 12$ να βρεθεί το λ.

Ασκήσεις στο σύνολο της ύλης

17. Στο ταμείο του μάρκετ, βρίσκουμε μία ουρά με δύο άτομα μπροστά μας. Εκείνη τη στιγμή έρχεται η ταμίας και αρχίζει να εξυπηρετεί τον πρώτο πελάτη. Γνωρίζουμε ότι η ταμίας εξυπηρετεί κάθε πελάτη σε 2 λεπτά κατά μέσο όρο. Ποια είναι η πιθανότητα ότι θα περιμένουμε περισσότερο από 5 λεπτά;

Υπόδειξη: Αν T ~ Γάμμα(k, λ), τότε $F_T(x) = P(X \leq x) = 1 - e^{-\lambda x} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(\lambda x)^j}{j!}$

Ασκήσεις στο σύνολο της ύλης

18. Έστω $\theta > 0$. Για την τυχαία μεταβλητή X, γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητάς της είναι η

$$f_X(x) = \frac{\theta}{(1+x)^{1+\theta}}, \quad x > 0.$$

Να αποδειχθεί ότι η τ.μ. $Y = 2\theta \ln(1 + X)$ ακολουθεί την X^2-κατανομή με δύο βαθμούς ελευθερίας.

Υπόδειξη: Αν $X \sim X^2(2)$, τότε $f_X(x) = \frac{1}{2} e^{-x/2}$, $x > 0$,

Ασκήσεις στο σύνολο της ύλης

19. Για την τυχαία μεταβλητή X, γνωρίζουμε ότι $f_X(x) = e^{-(x-\theta)}$, $0 < x < \theta$.

Να δειχθεί ότι η τ.μ. $Y = 2(X - \theta)$ ακολουθεί την X^2-κατανομή με δύο βαθμούς ελευθερίας.

Υπόδειξη: Αν $X \sim X^2(2)$, τότε $f_X(x) = \frac{1}{2}e^{-x/2}$, $x > 0$,

Ασκήσεις στο σύνολο της ύλης

20. Φορτηγό μεταφέρει κομμάτια συμπιεσμένου χαρτιού. Το βάρος κάθε κομματιού είναι τ.μ. με αναμενόμενη τιμή $\mu = 25$ kgr και τυπική απόκλιση $\sigma = 1{,}5$ kgr. Πόσα το πολύ κομμάτια μπορεί να μεταφέρει το φορτηγό ώστε με πιθανότητα 95% το ολικό φορτίο να είναι μικρότερο από 1tn;

Ασκήσεις στο σύνολο της ύλης

21. Σε ένα ορυχείο υπάρχουν 100 μηχανήματα εξόρυξης μεταλλευμάτων τα οποία λειτουργούν ανεξάρτητα το ένα από το άλλο. Η ποσότητα (σε τόνους) που εξορύσσεται από κάθε ένα μηχάνημα περιγράφεται από μία τ.μ. με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f(x) = \frac{1}{6} x^3 e^{-x}, \ x > 0.$$

(α) Να υπολογιστεί η πιθανότητα ότι τα 100 μηχανήματα θα εξορύξουν τουλάχιστον 420 τόνους μετάλλευμα.

(β) Πόσα παραπάνω μηχανήματα πρέπει να αγοραστούν, ώστε να είμαστε σίγουροι με 97,5% πιθανότητα πως θα εξορύσσονται τουλάχιστον 420 τόνοι του υλικού;

Υπόδειξη: Αξιοποιήστε τον ορισμό της συνάρτηση Γάμμα $\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} x^{z-1} e^{-z} dz, \ \mathrm{Re}\, z > 0$, και την ιδιότητά της Γ(n) = (n – 1)!.