

Θεωρία Πιθανοτήτων και Στατιστική

Διδάσκων: Επαμεινώνδας Διαμαντόπουλος
Επικοινωνία: epdiaman@ee.duth.gr



Ασκήσεις στο σύνολο της ύλης

Ασκήσεις στο σύνολο της ύλης

1. Ένας σάκος έχει 1 κόκκινη και 2 πράσινες μπάλες. Επιλέγω μια μπάλα. Αν είναι κόκκινη, την ξαναβάζω στο σάκο. Αν είναι πράσινη δεν την ξαναβάζω. Μετά επιλέγω μία δεύτερη μπάλα.
- (α) Βρείτε την πιθανότητα η δεύτερη μπάλα να είναι κόκκινη.
- (β) Κάποιος κάνει αυτό το πείραμα και μας λέει ότι επέλεξε μια κόκκινη μπάλα στη δεύτερη επιλογή. Ποια είναι η πιθανότητα να είχε επιλέξει κόκκινη μπάλα στην πρώτη επιλογή;
- (γ) Είναι ανεξάρτητα τα γεγονότα «η πρώτη μπάλα είναι κόκκινη» και «η δεύτερη μπάλα είναι κόκκινη»;

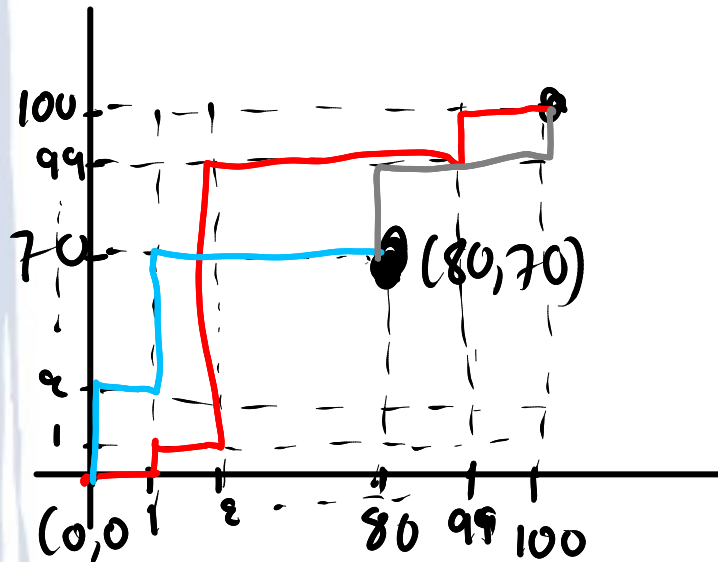
Ασκήσεις στο σύνολο της ύλης

2. Μία ασφαλιστική εταιρεία κατατάσσει τους ανθρώπους σε μία από τις τρεις κατηγορίες: καλοί πληρωτές, μεσαίοι πληρωτές και κακοί πληρωτές. Οι καταγραφές τους δηλώνουν ότι τα άτομα καλών, μεσαίων και κακών πληρωμών έχουν πιθανότητες να εμπλακούν σε τροχαίο ατύχημα μέσα σ' ένα χρόνο 0,05, 0,15 και 0,3 αντίστοιχα. Αν 20% του πληθυσμού είναι καλοί πληρωτές, 50% είναι μεσαίοι πληρωτές και 30% είναι κακοί πληρωτές, τι ποσοστό ανθρώπων έχουν ατύχημα μέσα σ' ένα σταθερό χρόνο; Αν ένας κάτοχος ασφαλιστικού συμβολαίου δεν είχε ατύχημα μέσα σ' ένα χρόνο, ποια είναι η πιθανότητα ότι είναι καλός πληρωτής;

Ασκήσεις στο σύνολο της ύλης

3. (α) Να βρεθεί το πλήθος των δυνατών τρόπων με τους οποίους μπορούμε να πάμε από το σημείο $(0, 0)$ στο $(100, 100)$ πηγαίνοντας πάνω ή δεξιά με βήμα 1 σε ένα καρτεσιανό σύστημα αξόνων.

(β) Να βρεθεί το πλήθος των δυνατών τρόπων με τους οποίους μπορούμε να πάμε από το σημείο $(0, 0)$ στο $(100, 100)$ πηγαίνοντας πάνω ή δεξιά με βήμα 1 σε ένα καρτεσιανό σύστημα αξόνων, με την επιπλέον υποχρέωση να περάσουμε από το σημείο $(80, 70)$.



$(0,0) : \text{-----} : (100,100)$

200 κινήσεις

(α) $\binom{200}{100}$: Πλήθος διδίων κινήσεων
σε 200 συνολικες.

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \binom{n}{n-k} \quad \left| \quad \binom{150}{80} = \frac{150!}{80! \cdot 70!}$$



B
B
⋮
B



A · B

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot (n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} = \binom{n}{k}$$

$$(3) \quad \left. \begin{array}{l} (0,0) \rightarrow (80,70): \binom{150}{80} \text{ ways} \\ (80,70) \rightarrow (100,100): \binom{50}{20} \text{ ways} \end{array} \right\} (0,0) \rightarrow (100,100): \binom{150}{80} \binom{50}{20}$$

Ασκήσεις στο σύνολο της ύλης

4. Δύο παίκτες A και B παίζουν ένα παιχνίδι ρίχνοντας ένα ζάρι διαδοχικά (ο A ρίχνει πρώτος). Ο πρώτος που θα φέρει 6 κερδίζει.

(α) Να βρείτε την πιθανότητα να νικήσει ο παίκτης A στη δεύτερη ρίψη που θα κάνει.

(β) Να βρείτε την πιθανότητα να νικήσει ο παίκτης A τελικά.

Υπόδειξη: Ορίστε $E = \{\text{το ζάρι ήρθε } 6\}$ και τα γεγονότα $A_i = \{\text{ο A κερδίζει στον } i \text{ γύρο}\}$, $B_i = \{\text{ο B κερδίζει στον } i \text{ γύρο}\}$, $i = 1, 2, \dots$

Ασκήσεις στο σύνολο της ύλης

5. Σε μία διεργασία παραγωγής ενός μεγάλου αριθμού αντικειμένων, μπορεί να συμβούν δύο ειδών σφάλματα A και B, καθένα με πιθανότητα $1/4$, και χωρίς να μπορούν να συμβούν μαζί. Αν το σφάλμα A συμβεί τότε το 50% των αντικειμένων είναι ελαττωματικά, ενώ αν το σφάλμα B συμβεί τότε το 75% των αντικειμένων είναι ελαττωματικά. Τέλος, αν δεν υπάρχει κανένα σφάλμα τότε κανένα από τα αντικείμενα δεν είναι ελαττωματικά. Επιλέγουμε 5 αντικείμενα από την παραγωγή.

α) Να υπολογιστεί η πιθανότητα ότι 2 από τα 5 αντικείμενα είναι ελαττωματικά.

β) Να υπολογιστεί η πιθανότητα ότι το πολύ ένα από τα αντικείμενα είναι ελαττωματικό.

γ) Αν κανένα από τα 5 αντικείμενα δεν είναι ελαττωματικό, ποια είναι η πιθανότητα ότι δεν υπάρχει σφάλμα;

$$P(A) = P(B) = \frac{1}{4}. \quad A \cap B = \emptyset \text{ ή } P(A \cap B) = 0. \quad E = \{\text{ελαττωματικό}\}$$

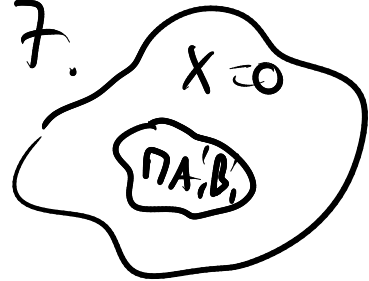
$$P(E | A) = 0,5, \quad P(E | B) = 0,75, \quad P(E | (A \cup B)') = 0.$$

$$\begin{aligned} P(E) &= P(E | A) \cdot P(A) + P(E | B) \cdot P(B) = 0,5 \cdot 0,25 + 0,75 \cdot 0,25 = \\ &= 0,125 + 0,1875 = 0,3125 \end{aligned}$$

$$(a) X = \{ \text{number of successes in } n \text{ trials} \} \sim B(5, 0.3125)$$

$$P(X=2) = \binom{5}{2} \cdot 0.3125^2 \cdot (1-0.3125)^3 = 0.317.$$

$$\binom{5}{2} = \frac{5!}{2! \cdot 3!} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$$



$$(b) P(X \leq 1) = P(X=0) + P(X=1) = \binom{5}{0} \cdot (1-0.3125)^5 + \binom{5}{1} \cdot 0.3125 \cdot (1-0.3125)^4$$

$$(c) P(\Pi_{i=1}^5 A_i B_i | X=0) = \frac{P(X=0, \Pi_{i=1}^5 A_i B_i)}{P(X=0)} = \frac{P(\Pi_{i=1}^5 A_i B_i)}{P(X=0)} = \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^5}{(1-0.3125)^5}$$

$$A_i = \{ \text{success in trial } i \} \text{ for } A \text{ on } i \text{ trials} \} = 0.366$$

Ασκήσεις στο σύνολο της ύλης

6. Μία εξέταση αποτελείται από 50 ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής, κάθε μία από τις οποίες προσφέρει δυνατότητα επιλογής μεταξύ τριών απαντήσεων, μόνο μία από τις οποίες είναι σωστή. Για να περάσει κάποιος την εξέταση χρειάζεται να απαντήσει σωστά σε τουλάχιστον 20 από τις ερωτήσεις.

(α) Να βρεθεί η πιθανότητα ότι ένας φοιτητής, που σε κάθε ερώτηση επιλέγει τυχαία την απάντηση, θα περάσει το μάθημα.

(β) Ο εξεταστής αποφάσισε να αυξήσει το πλήθος των δυνατών απαντήσεων ανά ερώτηση, κρατώντας σταθερό το συνολικό αριθμό των ερωτήσεων και τον αριθμό που χρειάζεται κάποιος για να περάσει. Πόσες επιλογές ανά ερώτηση πρέπει να προσφέρει ώστε η πιθανότητα για έναν τελείως απροετοίμαστο φοιτητή να περάσει την εξέταση να είναι μικρότερη από 0,01.

Ασκήσεις στο σύνολο της ύλης

7. Αντικείμενα παράγονται από ανεξάρτητες λειτουργίες μιας μηχανής. Σε κάθε μία παραγωγή αντικειμένου, η πιθανότητα να είναι αυτό ελαττωματικό είναι θ .

(α) Να βρεθεί η πιθανότητα, το πρώτο ελαττωματικό αντικείμενο να εμφανιστεί

(i) στη n -ιοστή λειτουργία (ii) πριν τη n -ιοστή λειτουργία της μηχανής.

(β) Αν $\theta = 0,1$, ποια είναι η μεγαλύτερη τιμή του n για την οποία η πιθανότητα της (α (i)) ερώτησης είναι μεγαλύτερη του 0.01;

Ασκήσεις στο σύνολο της ύλης

8. Δίνεται ότι η συνάρτηση $f(x) = c \cdot x \cdot (1 - x)$, $0 \leq x \leq 1$ είναι συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας μίας τυχαίας μεταβλητής X .

(α) Να αποδείξετε ότι $c = 6$.

(β) Να υπολογίσετε την πιθανότητα $P(X \in (1/4, 3/4])$.

$$f(x) = c \cdot x \cdot (1 - x)$$

$$(α) \text{ Πρέπει } \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1 \Leftrightarrow c \int_0^1 x \cdot (1 - x) dx = 1 \Leftrightarrow c \cdot \frac{1}{6} = 1 \Leftrightarrow c = 6.$$

$$\text{Είναι } \int_0^1 x \cdot (1 - x) dx = \left. \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right|_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

$$(β) P\left(\frac{1}{4} < X \leq \frac{3}{4}\right) = \int_{1/4}^{3/4} f(x) dx = 6 \int_{1/4}^{3/4} x(1-x) dx = 6 \cdot \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_{1/4}^{3/4} = 0,69$$

$B(n, p) \approx N(np, npq) \quad np \geq 5, \quad nq \geq 5$

Ασκήσεις στο σύνολο της ύλης

9. Ένα αρχείο κειμένου περιέχει 1000 λέξεις. Κάθε λέξη, ανεξάρτητα από τις άλλες, είναι ανορθόγραφη με πιθανότητα p .

(α) Αν $p = 0,015$, υπολογίστε την πιθανότητα να περιέχει τουλάχιστον 20 ανορθόγραφες λέξεις.

(β) Αν $p = 0,001$, υπολογίστε την πιθανότητα να περιέχει τουλάχιστον 3 ανορθόγραφες λέξεις.

(α) $p = 0,015$

$1.17 \approx 1.1 : γρατ$
 $0.07 : σκλ$

$X = \{\text{αριθμός ανορθόγραφων στις 1.000}\}$

$X \sim B(1.000, 0.015) \approx N(15, 14.775)$

$$P_B(X \geq 20) = P_N(X \geq 19.5) = P\left(\frac{X - 15}{\sqrt{14.775}} \geq \frac{19.5 - 15}{\sqrt{14.775}}\right) =$$

$$= P(Z \geq 1.171) = 1 - \Phi(1.171) = 1 - 0.879 = \underline{0.121}$$

$$(B) \quad p=0.001, \quad X \sim B(1.000, 0.001)$$

$$P(X \geq 3) = 1 - P(X < 3)$$

$$= 1 - P(X=0) - P(X=1) - P(X=2)$$

$$= 1 - \binom{1.000}{0} \cdot 0.999^{1.000} - \binom{1.000}{1} \cdot 0.001 \cdot 0.999^{999} - \binom{1.000}{2} \cdot 0.001^2 \cdot 0.999^{998}$$

$$= \dots$$

$n \cdot p = 1.000 \cdot 0.001 = 1 < 5$
 Normal
 approximation
 does not exist

Ασκήσεις στο σύνολο της ύλης

10. Γνωρίζουμε ότι το 90% των ανταλλακτικών που χρησιμοποιούνται σε μία συσκευή έχουν διάρκεια ζωής μεγαλύτερη των 200 ωρών. Τα ανταλλακτικά κατασκευάζονται σε δύο εργοστάσια Α και Β. Είναι γνωστό ότι τα ανταλλακτικά της μονάδας Α έχουν διάρκεια ζωής μεγαλύτερη από 200 ώρες, ενώ για τα ανταλλακτικά της μονάδας Β, γνωρίζουμε ότι η διάρκεια ζωής τους είναι τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f(x) = \frac{1}{300} e^{-\frac{x}{300}}, \quad x > 0.$$

Να βρεθεί το ποσοστό των ανταλλακτικών που προέρχονται από κάθε εργοστάσιο.

Ασκήσεις στο σύνολο της ύλης

11. Είναι γνωστό ότι το 5% των φορολογικών δηλώσεων έχουν κάποιο αριθμητικό λάθος. Να βρείτε την πιθανότητα μεταξύ 2.000 φορολογικών δηλώσεων να υπάρξουν περισσότερες από 12 δηλώσεις με αριθμητικό λάθος.

Ασκήσεις στο σύνολο της ύλης

12. Μία εταιρεία εισάγει ένα προϊόν συσκευασμένο σε κιβώτια που περιέχουν 50 προϊόντα. Γνωρίζουμε από το στάδιο της παραγωγής ότι το 10% των προϊόντων είναι ελαττωματικά. Πριν παραλάβει κάθε κιβώτιο η εταιρεία εξάγει τυχαία 5 αντικείμενα. Αν προκύψουν παραπάνω από 1 ελαττωματικό στα 5 τότε το κιβώτιο δεν γίνεται αποδεκτό. Να βρεθεί το ποσοστό των κιβωτίων που δεν γίνονται αποδεκτά.

Ασκήσεις στο σύνολο της ύλης

13. Η εσωτερική διάμετρος κυλίνδρου μηχανής είναι τυχαία μεταβλητή X (cm) με $X \sim N(10, 9 \cdot 10^{-4})$.
Να υπολογιστεί το ποσοστό των κυλίνδρων με εσωτερική διάμετρο :

(α) Μικρότερη από 9,95 cm.

(β) Μεταξύ 9,95 και 10,06 cm.

(γ) Ποια είναι η πιθανότητα αν επιλέξουμε 10 κυλίνδρους, οι 3 από αυτούς να έχουν διάμετρο μεταξύ 9,95 και 10,06cm;

Ασκήσεις στο σύνολο της ύλης

14. Κάθε υαλοπίνακας έχει ατέλειες σε πλήθος $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$, όπου $\lambda = 0,2$ ατέλειες/m². Μία ηλεκτρονική συσκευή εντοπίζει τις ατέλειες με ακρίβεια (πιθανότητα αναγνώρισης) 90%. Να προσδιοριστεί :

- α) Η κατανομή του αριθμού Y των καταγραφόμενων ατελειών.
- β) Η πιθανότητα $P(X > 3 \mid Y = 2)$.

Ασκήσεις στο σύνολο της ύλης

15. Κατά μέσο όρο 60 πελάτες εισέρχονται σ' ένα κατάστημα κατά τη διάρκεια μιας ώρας. Να υπολογιστεί η πιθανότητα ότι κατά τη διάρκεια ενός συγκεκριμένου διαστήματος 2 λεπτών:

- (α) κανένας πελάτης δεν εισέρχεται στο κατάστημα.
- (β) τουλάχιστον δύο πελάτες εισέρχονται στο κατάστημα.

Ασκήσεις στο σύνολο της ύλης

16. Έστω η τυχαία μεταβλητή $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$, $\lambda > 0$. Αν $E(X^2) = 12$ να βρεθεί το λ .

Ασκήσεις στο σύνολο της ύλης

17. Στο ταμείο του μάρκετ, βρίσκουμε μία ουρά με δύο άτομα μπροστά μας. Εκείνη τη στιγμή έρχεται η ταμίας και αρχίζει να εξυπηρετεί τον πρώτο πελάτη. Γνωρίζουμε ότι η ταμίας εξυπηρετεί κάθε πελάτη σε 2 λεπτά κατά μέσο όρο. Ποια είναι η πιθανότητα ότι θα περιμένουμε περισσότερο από 5 λεπτά;

Υπόδειξη: Αν $T \sim \text{Γάμμα}(k, \lambda)$, τότε $F_T(x) = P(X \leq x) = 1 - e^{-\lambda x} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(\lambda x)^j}{j!}$

Ασκήσεις στο σύνολο της ύλης

18. Έστω $\theta > 0$. Για την τυχαία μεταβλητή X , γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητάς της είναι η

$$f_X(x) = \frac{\theta}{(1+x)^{1+\theta}}, \quad x > 0.$$

Να αποδειχθεί ότι η τ.μ. $Y = 2\theta \ln(1 + X)$ ακολουθεί την X^2 -κατανομή με δύο βαθμούς ελευθερίας.

Υπόδειξη: Αν $X \sim X^2(2)$, τότε $f_X(x) = \frac{1}{2}e^{-x/2}$, $x > 0$,

Ασκήσεις στο σύνολο της ύλης

19. Για την τυχαία μεταβλητή X , γνωρίζουμε ότι $f_X(x) = e^{-(x-\theta)}$, $0 < x < \theta$.

Ναδειχθεί ότι η τ.μ. $Y = 2(X - \theta)$ ακολουθεί την χ^2 -κατανομή με δύο βαθμούς ελευθερίας.

Υπόδειξη: Αν $X \sim \chi^2(2)$, τότε $f_X(x) = \frac{1}{2}e^{-x/2}$, $x > 0$,