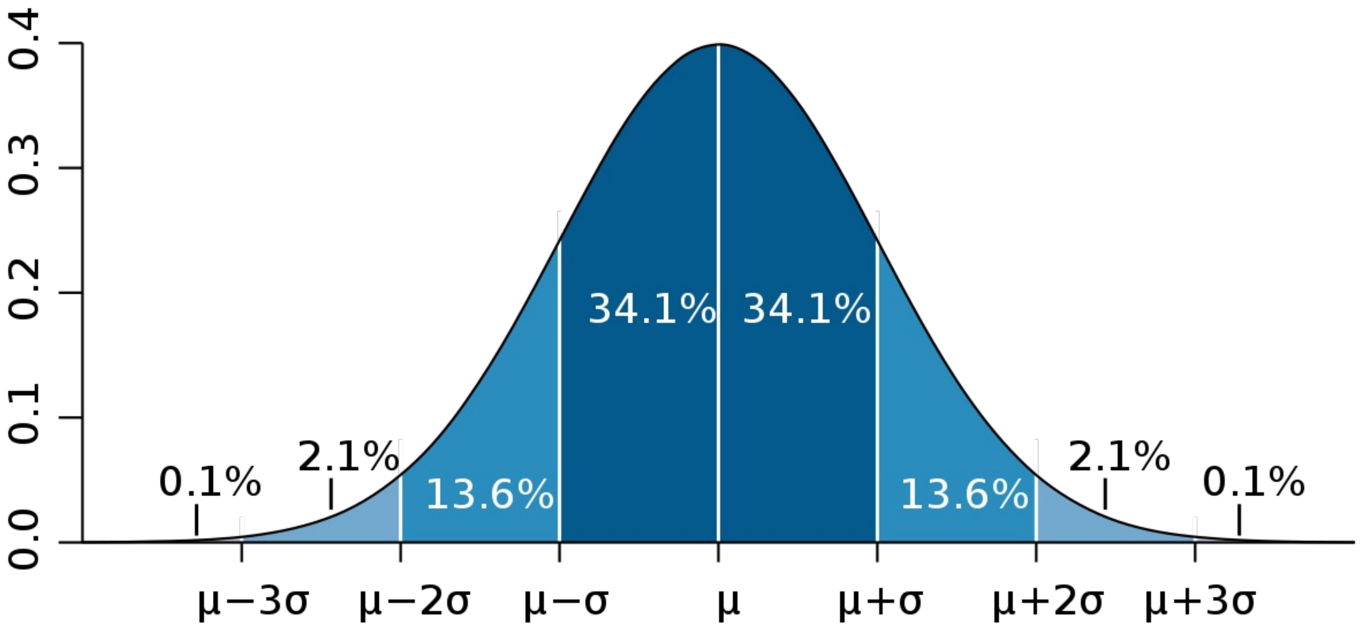
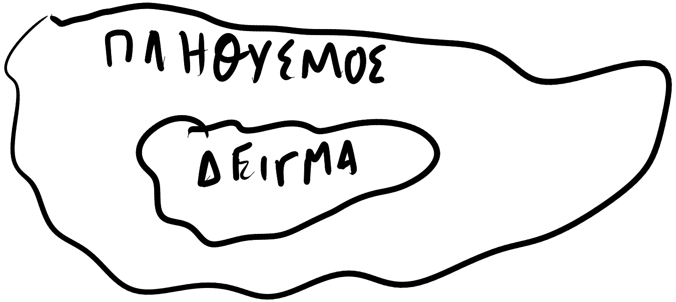
Θεωρία Πιθανοτήτων και Στατιστική



Διδάσκων: Επαμεινώνδας Διαμαντόπουλος
Επικοινωνία: epdiaman@ee.duth.gr

10η διάλεξη



H_0: Ισχυρισμός σχετικά με τον πληθυσμό.

T: Στατιστικό που δείχνει την "απόσταση" του δείγματος από την H_0.

Το T επιλέγεται έτσι ώστε να είναι γνωστή η κατανομή του

χ^2: έλεγχος προσαρμογής

$$T = \chi_0^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} \sim \chi^2(n-1)$$

χ^2: έλεγχος ανεξαρτησίας

$$T = \chi_0^2 = \sum \sum \frac{(O_{ij} - E_{ij})^2}{E_{ij}} \sim \chi^2((n-1)(m-1))$$

$$p = P(T_{ΔΕΙΓΜΑ} \mid H_0)$$

Όριο απόρριψης $a = 0,05$

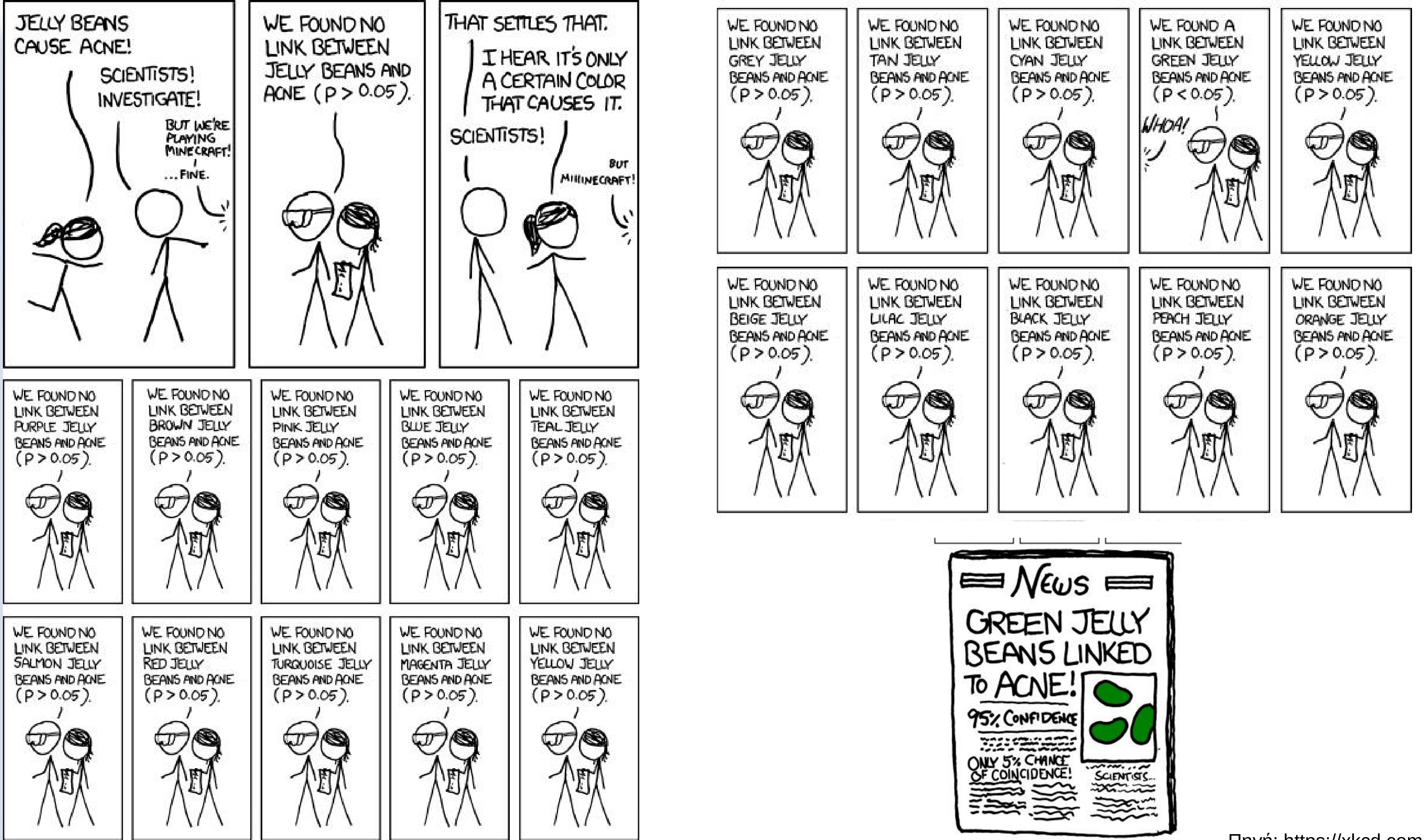
Περιεχόμενα 9ου μαθήματος

- Δοκιμασία t – test.

Γνωστικοί στόχοι μαθήματος

Ο φοιτητής θα πρέπει:

- Να γνωρίζει τις προϋποθέσεις της δοκιμασίας t-test.
- Να αντιλαμβάνεται τη διαφορά μεταξύ ενός t-test και ενός z-test.
- Να μπορεί να καταγράψει την στατιστική και την ερευνητική υπόθεση μίας δοκιμασίας χι-τετράγωνο ή ενός t-test
- Να μπορεί να υλοποιήσει τους υπολογισμούς μίας δοκιμασίας χι-τετράγωνο, t-test και z-test.



Πηγή: https://xkcd.com/882/

“If you torture data enough it will confess”

Ronald Coase (1910 – 2013)

Δοκιμασία Student (t - test) για ένα δείγμα

Η έννοια της υπόθεσης στο t – test

Μία υπόθεση είναι μία δήλωση για έναν πληθυσμό, την οποία επιθυμούμε να ελέγξουμε, χρησιμοποιώντας δεδομένα από ένα δείγμα. Στα πλαίσια του ελέγχου t – test, η υπόθεση αποκτά δύο εκδοχές:

- Την **μηδενική** ή **στατιστική H_0** με την οποία θα "συγκριθεί" το δείγμα και θα υπολογιστεί η "απόκλιση" του από αυτή.

  Παραδείγματα: (α) H_0: $\mu = \mu_0$, (β) H_0: $\mu \leq \mu_0$, (γ) H_0: $\mu \geq \mu_0$

- Την **εναλλακτική** ή **ερευνητική H_1**, η οποία είναι η συμπληρωματική δήλωση της H_0.

  Παραδείγματα: (α) H_1: $\mu \neq \mu_0$, (β) H_1: $\mu > \mu_0$, (γ) H_1: $\mu < \mu_0$

- Η H_1 αναδεικνύεται ως ερευνητικό αποτέλεσμα αν "απορριφθεί" η H_0 εξαιτίας της μεγάλης "απόκλισης" του δείγματος από αυτήν.

Εκδοχή 1η: "Δίπλευρος" έλεγχος

Παράδειγμα

Θέλουμε να ~~απο~~δείξουμε ότι το μέσο βάρος όλων των συσκευασιών γάλατος από μία αλυσίδα παραγωγής *δεν είναι* 500 γραμμάρια.

Στατιστική υπόθεση: H_0: $\mu = 500$.

Ερευνητική υπόθεση: H_1: $\mu \neq 500$.

Η H_0 θα απορριφθεί έναντι της H_1, αν η μέση τιμή του δείγματος είναι "σημαντικά" μεγαλύτερη ή "σημαντικά" μικρότερη από τα 500 γραμμάρια.

Εκδοχή 2η: “Μονόπλευρος” έλεγχος

Παράδειγμα

Θέλουμε να αποδείξουμε ότι το μέσο βάρος όλων των συσκευασιών γάλατος από μία αλυσίδα παραγωγής *είναι μεγαλύτερο από* τα 500 γραμμάρια.

Στατιστική υπόθεση: H_0: $\mu \leq 500$.

Ερευνητική υπόθεση: H_1: $\mu > 500$.

Η H_0 θα απορριφθεί έναντι της H_1, αν η μέση τιμή του δείγματος είναι “σημαντικά” μεγαλύτερη από τα 500 γραμμάρια.

Εκδοχή $2^η$: “Μονόπλευρος” έλεγχος

Παράδειγμα

Θέλουμε να αποδείξουμε ότι το μέσο βάρος όλων των συσκευασιών γάλατος από μία αλυσίδα παραγωγής *είναι μικρότερο από* τα 500 γραμμάρια.

Στατιστική υπόθεση: H_0: $\mu \geq 500$.

Ερευνητική υπόθεση: H_1: $\mu < 500$.

Η H_0 θα απορριφθεί έναντι της H_1, αν η μέση τιμή του δείγματος είναι “σημαντικά” μικρότερη από τα 500 γραμμάρια.

Το στατιστικό t

Κεντρικό Οριακό Θεώρημα

Αν X_1, X_2, …, X_n είναι τ.μ. ανεξάρτητες μεταξύ τους με ίδια αναμενόμενη τιμή και τυπική απόκλιση, τότε το θεώρημα που εξασφαλίζει την γνώση της κατανομής του $X = X_1 + X_2 + … + X_n$, είναι το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα (CLT).

Κεντρικό Οριακό Θεώρημα

Αν X_1, X_2, …, X_n είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές, με ίσες αναμενόμενες τιμές μ, ίσες πεπερασμένες διακυμάνσεις σ^2 και

$$Y = X_1 + X_2 + … + X_n,$$

τότε $\mathbf{(Y - n\cdot\mu) / (n^{1/2}\sigma) \sim N(0, 1)}$ ή $\mathbf{Y \sim N(n\cdot\mu, n\cdot\sigma^2)}$, ή ακόμα $\mathbf{\overline{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)}$

ή $$\mathbf{\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1)}$$

Αναπαράσταση: https://www.zoology.ubc.ca/~whitlock/Kingfisher/CLT.htm

Βαθμοί ελευθερίας στο t-test: one sample

Ένα δείγμα από n παρατηρήσεις

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

ως διάνυσμα n αριθμών, μπορεί να βρίσκεται οπουδήποτε στον n-διάστατο χώρο, δηλαδή με άλλα λόγια χρειάζονται n αριθμοί για να περιγραφεί με ακρίβεια η θέση του. Ισοδύναμα αναφέρουμε ότι έχει n βαθμούς ελευθερίας.

Αν αφαιρέσουμε έναν οποιονδήποτε αριθμό μ από κάθε στοιχείο:

$$(x_1 - \mu, x_2 - \mu, \ldots, x_n - \mu),$$

τότε, το διάνυσμα που προκύπτει εξακολουθεί να έχει n βαθμούς ελευθερίας.

Βαθμοί ελευθερίας στο t-test: one sample

Αν όμως ο αριθμός αυτός είναι ο αριθμητικός μέσος των στοιχείων, τότε το νέο διάνυσμα

$$\left(x_1 - \bar{x}, x_2 - \bar{x}, \ldots, x_n - \bar{x}\right)$$

έχει στοιχεία που ικανοποιούν τη σχέση:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right) = 0.$$

Η σχέση αυτή επιτρέπει τον υπολογισμό ενός στοιχείου από τα υπόλοιπα.

Ισοδύναμα, απαιτούνται πλέον n – 1 αριθμοί για να περιγραφεί η κατανομή του.

Βαθμοί ελευθερίας στο t-test: one sample

Αφού το διάνυσμα $\left(x_1 - \bar{x}, x_2 - \bar{x}, \ldots, x_n - \bar{x}\right)$ προσδιορίζεται πλήρως από n – 1 τιμές, το ίδιο πρέπει να συμβαίνει και για οποιαδήποτε ποσότητα ορίζεται από αυτό και παίρνει τυχαίες τιμές, όπως το άθροισμα τετραγώνων των αποστάσεων κάθε μίας παρατήρησης από τη μέση τους τιμή

$$\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2$$

Αποδεικνύεται ότι

$$V = \frac{\left(n-1\right)s^2}{\sigma^2} = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2 \sim \chi^2\left(n-1\right)$$

Απόδειξη με χρήση της MGF: https://math.stackexchange.com/questions/47009/proof-of-fracn-1s2-sigma2-sim-chi2-n-1

Βαθμοί ελευθερίας στο t-test: one sample

Η κατανομή Student t(n) *από τον ορισμό της είναι* η κατανομή της τυχαίας μεταβλητής Τ με:

$$T = \frac{Z}{\sqrt{V/n}} = Z\sqrt{\frac{n}{V}}, \quad Z \sim N(0,1),\ V \sim \chi^2(n),\ Z \text{ και } V \text{ ανεξάρτητες.}$$

Γνωρίζουμε ότι υπό την $H_0: \mu = \mu_0$ και το Κ.Ο.Θ. είναι $\bar{x} - \mu_0 \sim N(0,1)$.

Επιπλέον, $s^2 \sim \chi^2(n-1)$. Συμπεραινουμε ότι

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} \sim t(n-1).$$

Η απόδειξη και διάφορα χρήσιμα σχόλια είναι διαθέσιμα εδώ:
https://stats.stackexchange.com/questions/151854/a-normal-divided-by-the-sqrt-chi2s-s-gives-you-a-t-distribution-proof

Βαθμοί ελευθερίας στο t-test: one sample

Συνοψίζοντας

$$(\alpha)\ \text{Αν } \sigma \text{ γνωστό}: t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)\ (\text{από Κ.Ο.Θ.})$$

$$(\beta)\ \text{Αν } n \leq 30: t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} \sim t(n-1),\ \left(\text{διότι } \bar{x} - \mu_0 \sim N(0,1) \text{ και } s/\sqrt{n} \sim \chi^2(n-1)\right).$$

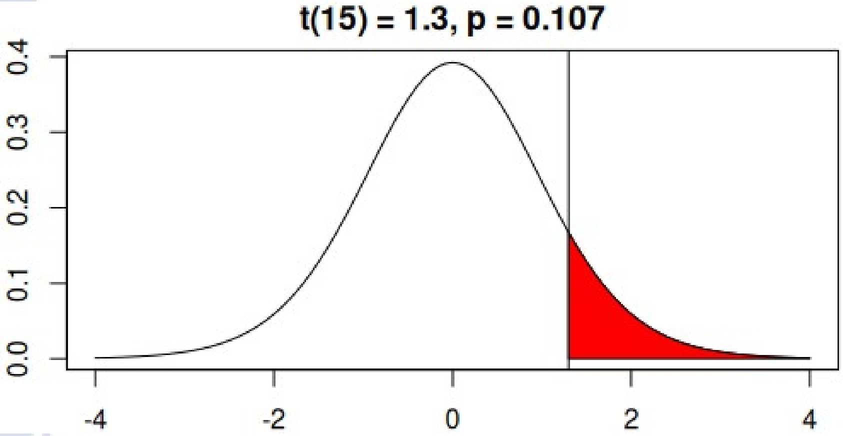
$$(\gamma)\ \text{Αν } n > 30: t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} \sim N(0,1),\ \left(\text{διότι } \lim_{n \to \infty} t(n) = N(0,1)\right)$$

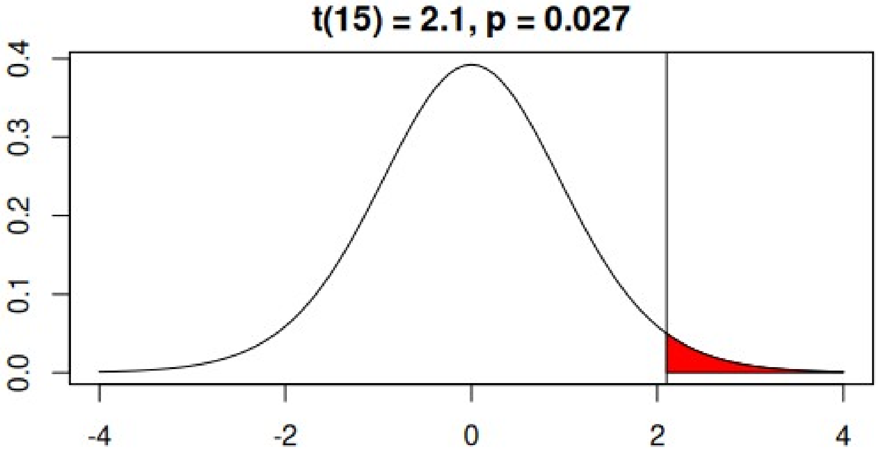
Αξιοποιώντας την κατανομή t(n)

Όταν γνωρίζουμε την κατανομή που ακολουθεί ένα στατιστικό, μπορούμε να υπολογίσουμε πιθανότητες αυτό να βρίσκεται σε ένα διάστημα τιμών. Ενδεικτικά, αν $t_0 \sim t(15)$, τότε:

$P(t_0 > 1.3) = 0.107$

$P(t_0 > 2.1) = 0.027$





Εντολή: my_plot_t_dist(df, t.test.statistic, side)

Το στατιστικό t

Έστω $x_0, x_1, \ldots, x_n$ ένα δείγμα. Το στατιστικό

$$t_0 = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$$

αντανακλά την "απόσταση" της μέσης τιμής του δείγματος από την στατιστική υπόθεση H_0 σε όλες τις εκδοχές της

- H_0: $\mu = \mu_0$ (δίπλευρος έλεγχος)
- H_0: $\mu \leq \mu_0$ (μονόπλευρος έλεγχος)
- H_0: $\mu \geq \mu_0$ (μονόπλευρος έλεγχος).

Η πληροφορία $\mathbf{t_0 \sim t(n-1)}$ (ή $\mathbf{t_0 \sim N(0, 1)}$)επιτρέπει τον υπολογισμό των πιθανοτήτων $\mathbf{p_{δίπλευρο} = P(t < -t_0}$ **ή** $\mathbf{t > t_0)}$ και $\mathbf{p_{μονόπλευρο} = P(t < -t_0) = P(t > t_0)}$

Αν $p < 0,05$, τότε απορρίπτουμε την H_0 έναντι της H_1.

Κρίση της H_0: Δίπλευρος έλεγχος

Πιθανότητα p: Δίπλευρος έλεγχος

Έστω p η πιθανότητα να εμφανιστεί μία περισσότερο ακραία δειγματική μέση τιμή από αυτή που παρατηρήθηκε στο δείγμα και

$$t_0 = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$$

Υπολογίζουμε την πιθανότητα:

$$p_{\text{δίπλευρο}} = P(t < -t_0 \text{ ή } t > t_0).$$

Η σύγκριση της p με το 0,05 οδηγεί στα δύο πιθανά αποτελέσματα:

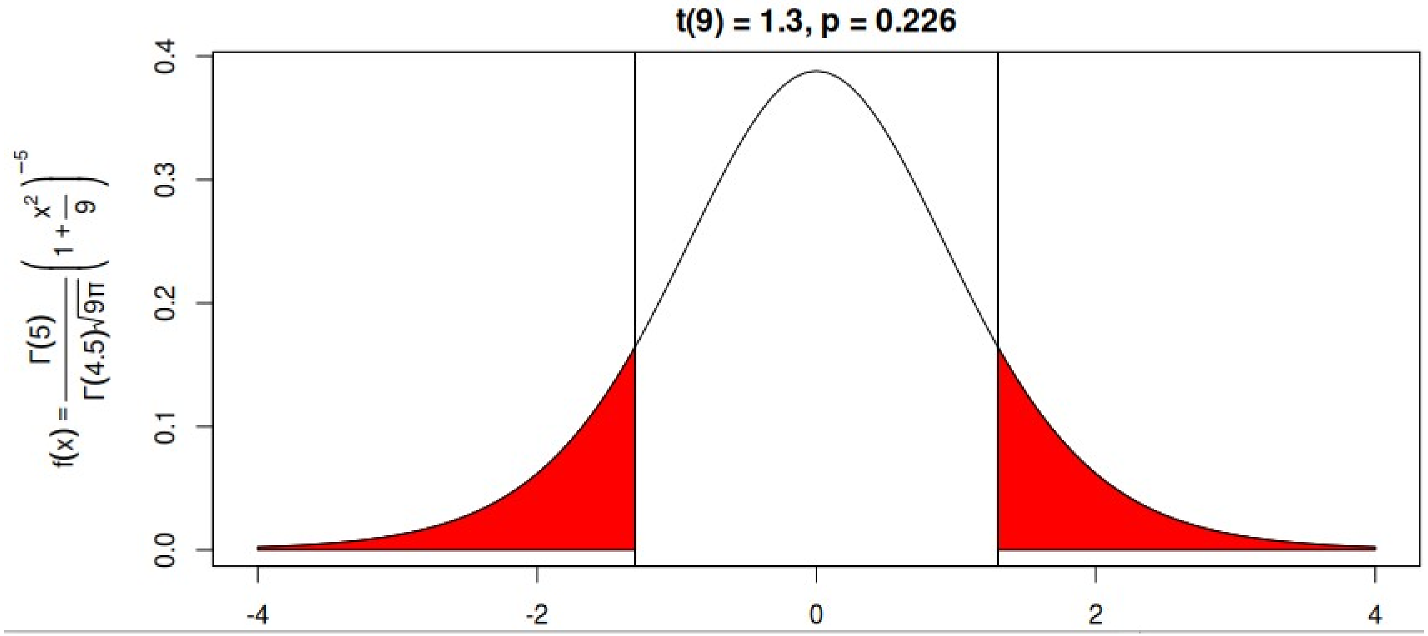
Αν $p < 0{,}05$, τότε **απορρίπτουμε την H_0: $\mu = \mu_0$, έναντι της H_1: $\mu \neq \mu_0$**.

Αν $p \geq 0{,}05$, τότε **δεν απορρίπτουμε την H_0: $\mu = \mu_0$, έναντι της H_1: $\mu \neq \mu_0$**.

Κρίση της H_0: Δίπλευρος έλεγχος

Παράδειγμα (δίπλευρος έλεγχος με δείγμα μεγέθους n = 10).

Αν $t_0 = 1{,}3$ τότε $p_{δίπλευρο} = 0{,}226 > 0{,}05$, και **δεν απορρίπτουμε την H_0 έναντι της H_1**.

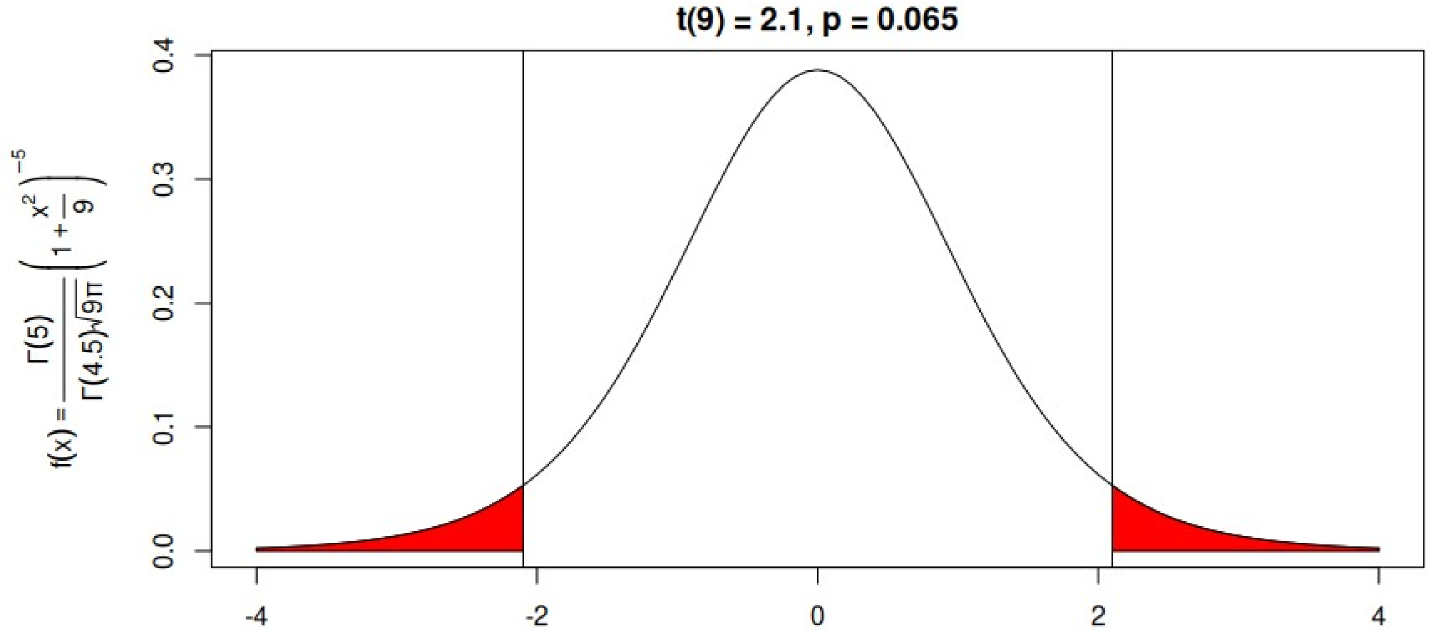


my_plot_t_dist(df = 9, t.test.statistic = 1.3)

Κρίση της H_0: Δίπλευρος έλεγχος

Παράδειγμα (δίπλευρος έλεγχος με δείγμα μεγέθους n = 10).

Αν $t_0 = -2{,}1$ τότε $p_{δίπλευρο} = 0{,}0652 > 0{,}05$ και **δεν απορρίπτουμε την H_0 έναντι της H_1**.



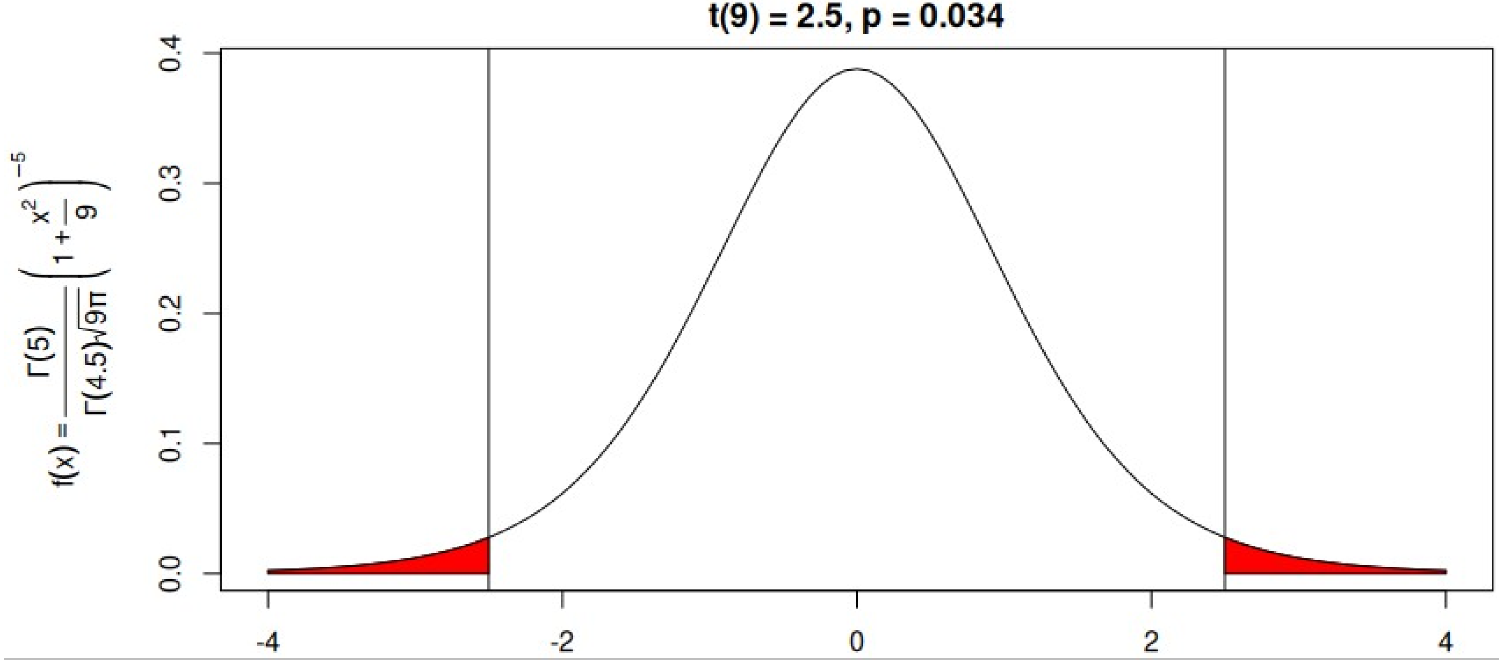
my_plot_t_dist(df = 9, t.test.statistic = -2.1)

Κρίση της H_0: Δίπλευρος έλεγχος

Παράδειγμα (δίπλευρος έλεγχος με δείγμα μεγέθους n = 10).

Αν t = 2,5 τότε $p_{\text{δίπλευρο}}$ = 0,034 < 0,05 και **απορρίπτουμε την H_0 έναντι της H_1**.

$$t_0 = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$$



my_plot_t_dist(df = 9, t.test.statistic = 2.5)

Κρίση της H_0: Μονόπλευρος έλεγχος

Πιθανότητα p: Μονόπλευρος έλεγχος

Στην περίπτωση όπου διεξάγεται μονόπλευρος έλεγχος τότε η πιθανότητα που μας ενδιαφέρει είναι η

$p_{\text{μονόπλευρο}} = P(t < -t_0)$ αν H_1: $\mu < \mu_0$

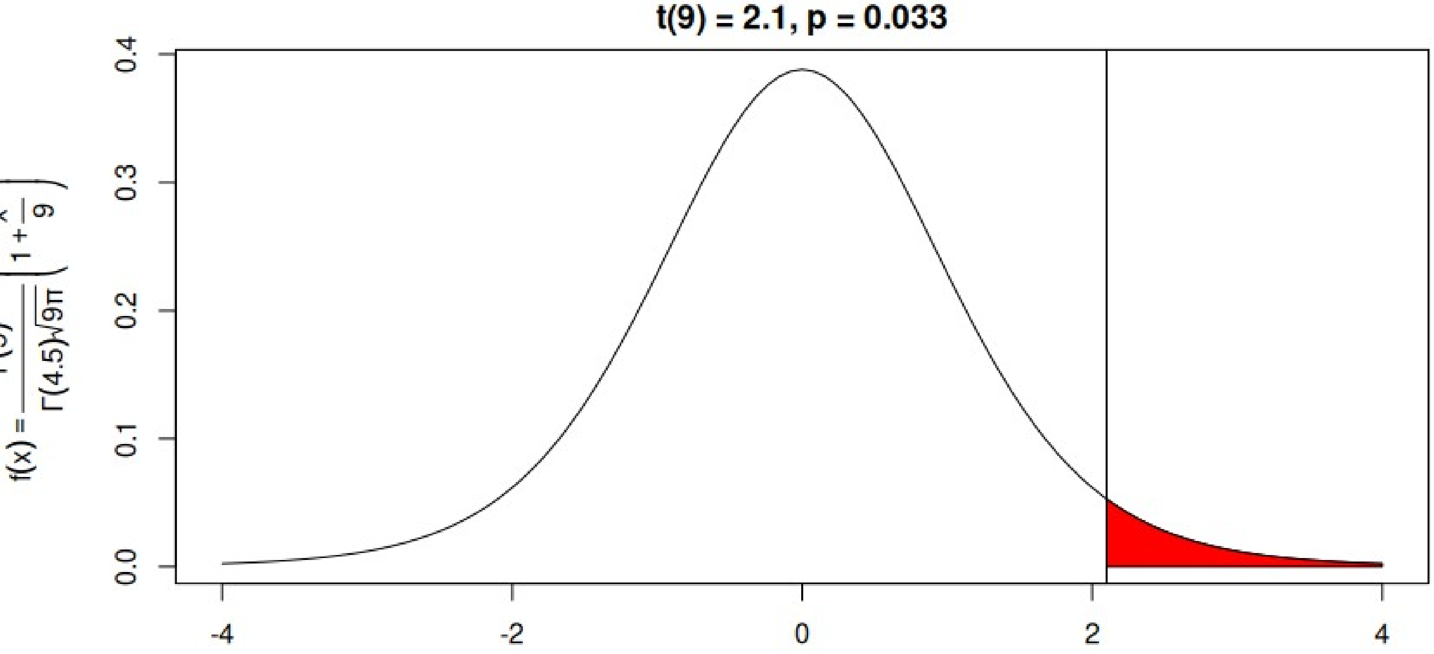
ή

$p_{\text{μονόπλευρο}} = P(t > t_0)$ αν H_1: $\mu > \mu_0$.

Μονόπλευρος έλεγχος H_0: $\mu \leq \mu_0$ έναντι H_1: $\mu > \mu_0$

Παράδειγμα (μονόπλευρος έλεγχος με δείγμα μεγέθους n = 10).

Αν $t_0 = 2{,}1$ τότε $p_{\text{μονόπλευρο}} = 0{,}033 < 0{,}05$ και **απορρίπτουμε την H_0 έναντι της H_1**.

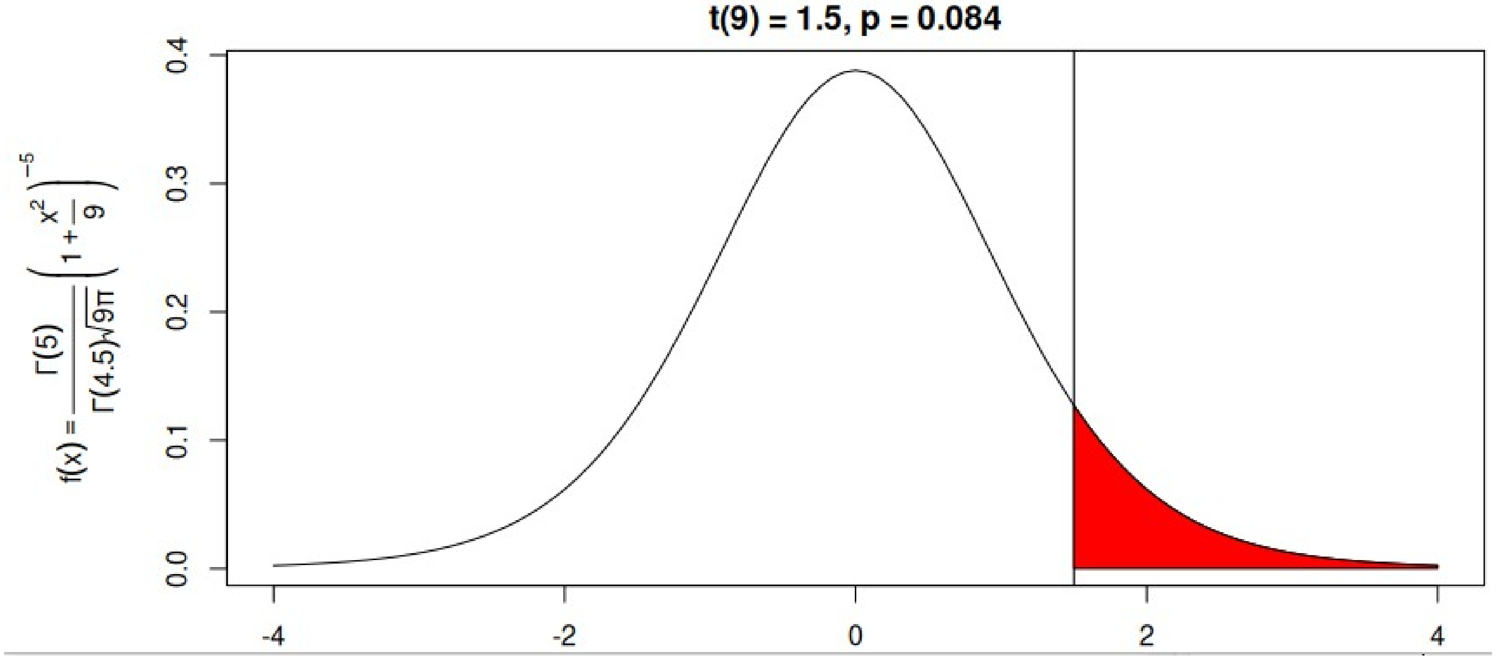


my_plot_t_dist(df = 9, t.test.statistic = 2.1, side = 'right')

Μονόπλευρος έλεγχος H_0: $\mu \leq \mu_0$ έναντι H_1: $\mu > \mu_0$

Παράδειγμα (μονόπλευρος έλεγχος με δείγμα μεγέθους n = 10).

Αν $t_0 = 1{,}5$ τότε $p_{μονόπλευρο} = 0{,}084 > 0{,}05$ και **δεν απορρίπτουμε την H_0 έναντι της H_1**.

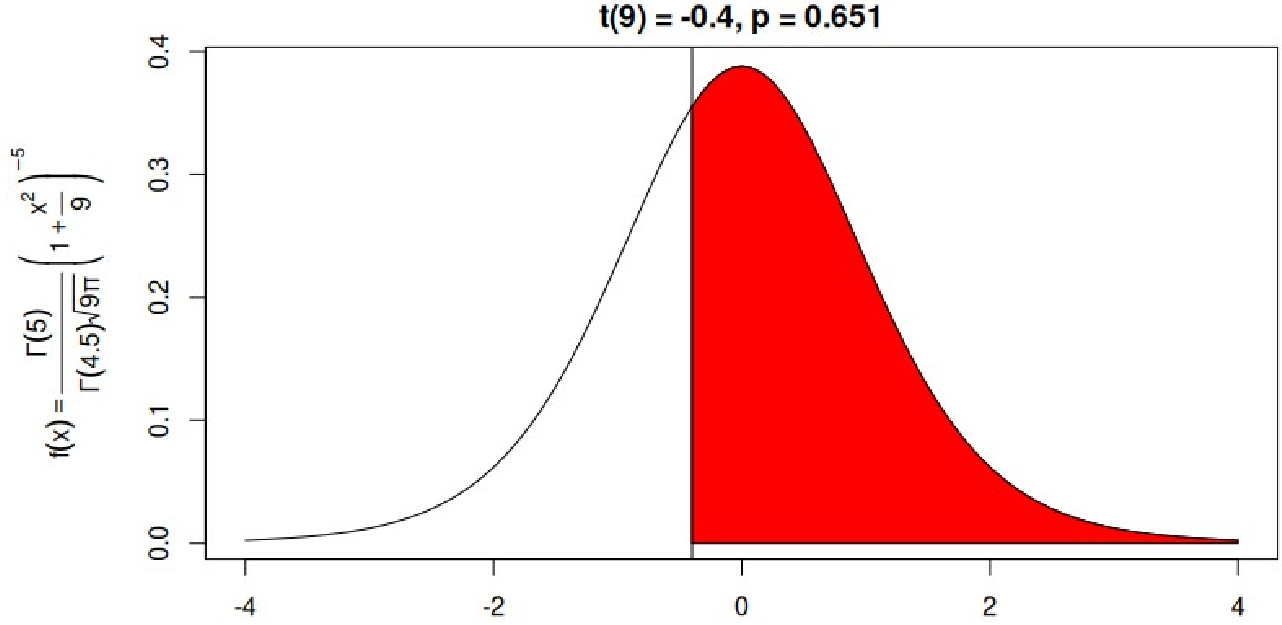


my_plot_t_dist(df = 9, t.test.statistic = 1.5, side = 'right')

Μονόπλευρος έλεγχος H_0: $\mu \leq \mu_0$ έναντι H_1: $\mu > \mu_0$

Παράδειγμα (μονόπλευρος έλεγχος με δείγμα μεγέθους n = 10).

Αν $t_0 = -0,4$ τότε $p_{μονόπλευρο} = 0,084 > 0,05$ και **δεν απορρίπτουμε την H_0 έναντι της H_1**.

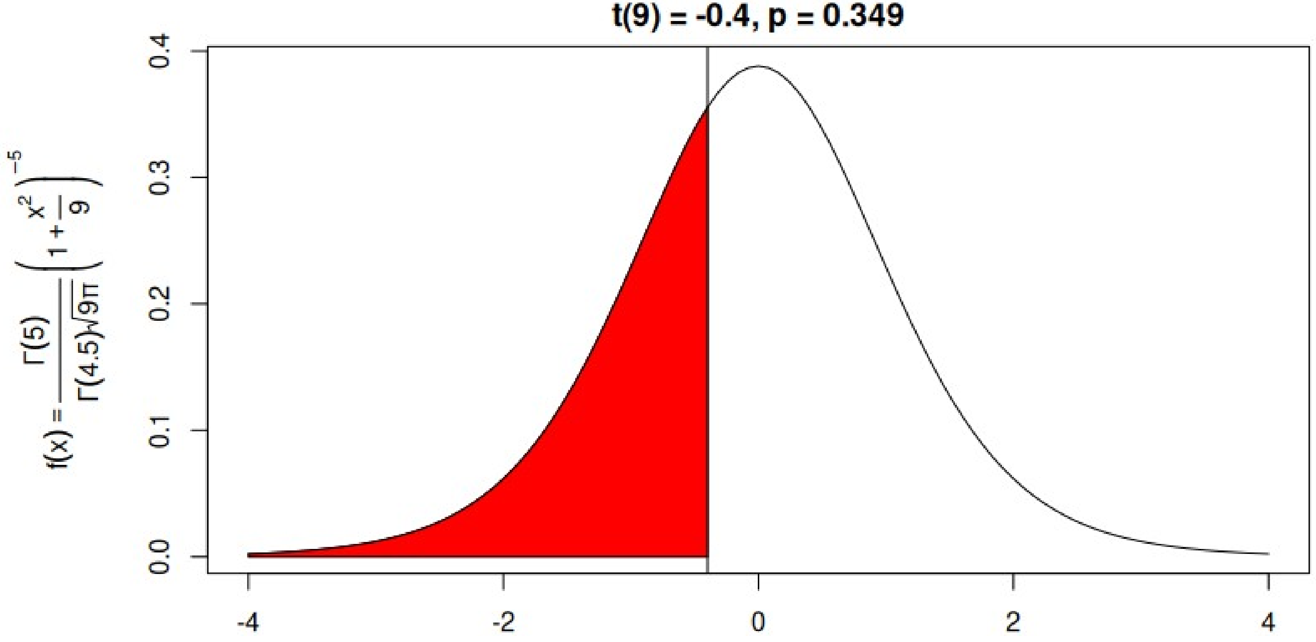


my_plot_t_dist(df = 9, t.test.statistic = -0.4, side = 'right')

Μονόπλευρος έλεγχος H_0: $\mu \geq \mu_0$ έναντι H_1: $\mu < \mu_0$

Παράδειγμα (μονόπλευρος έλεγχος με δείγμα μεγέθους n = 10).

Αν $t_0 = -0,4$ τότε $p_{μονόπλευρο} = 0,384 > 0,05$ και **δεν απορρίπτουμε την H_0 έναντι της H_1**.

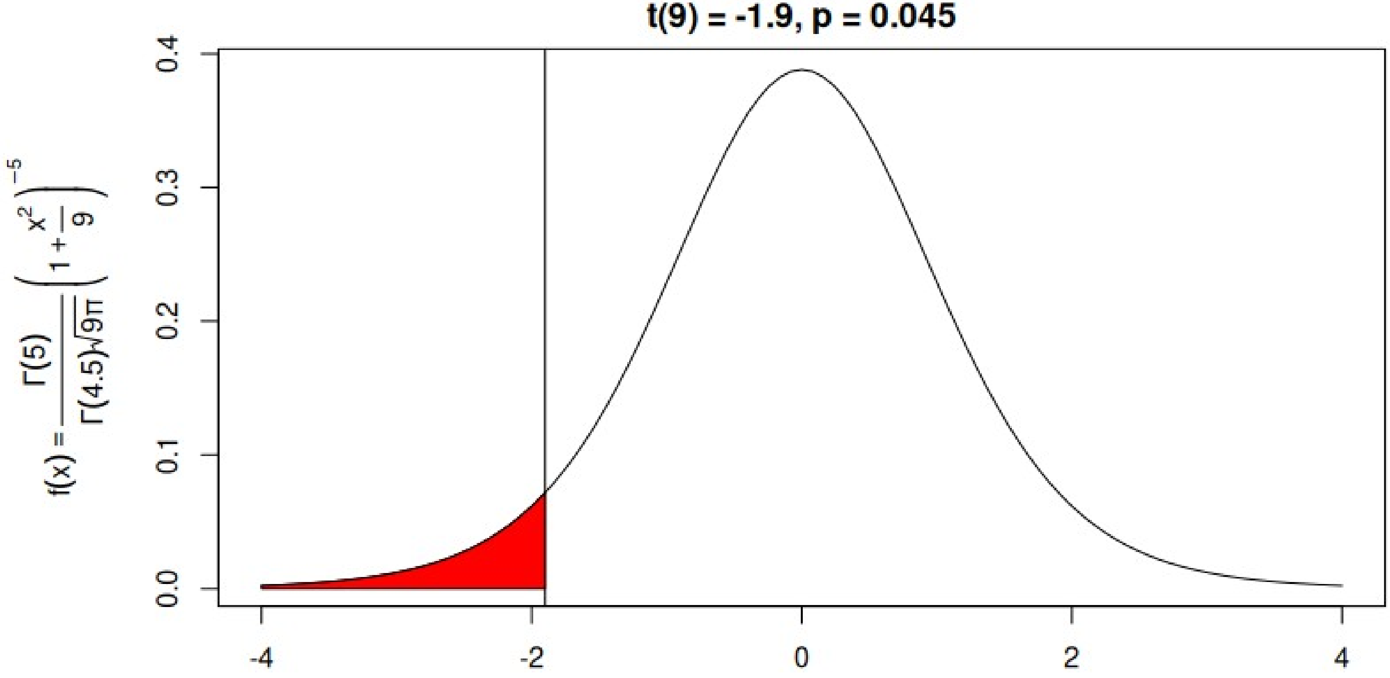


my_plot_t_dist(df = 9, t.test.statistic = -0.4, side = 'left')

Μονόπλευρος έλεγχος H_0: $\mu \geq \mu_0$ έναντι H_1: $\mu < \mu_0$

Παράδειγμα (μονόπλευρος έλεγχος με δείγμα μεγέθους n = 10).

Αν $t_0 = -1{,}9$ τότε $p_{μονόπλευρο} = 0{,}045 < 0{,}05$ και **απορρίπτουμε την H_0 έναντι της H_1.**



my_plot_t_dist(df = 9, t.test.statistic = -1.9, side = 'left')

Πιθανότητα p: Μονόπλευρος έλεγχος

Τα περισσότερα στατιστικά προγράμματα αναφέρουν μόνο την πιθανότητα p για δίπλευρο έλεγχο.

Από τη συμμετρία της κατανομής Student t(n) γίνεται αντιληπτό ότι:

$$p_{\text{μονόπλευρο}} = p_{\text{δίπλευρο}} / 2.$$

Συνεπώς, στην περίπτωση αυτή, **αν διεξάγουμε μονόπλευρο έλεγχο πρέπει να υπολογίζουμε το μισό της αναφερόμενης τιμής.**

Σύνοψη

Δείγμα μεγέθους n με μέση τιμή $\bar{x}$ και τυπική απόκλιση s.

1. Υπολογίζουμε το $t_0 = \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$

2. Είναι t ~ t(n – 1).

3. Υπολογίζουμε το $p = P(|t| > t_0)$ ή $p = P(t > t_0)$ ή $p = P(t < -t_0)$ αντίστοιχα για δίπλευρο ή μονόπλευρο έλεγχο.

4. Αν $p < 0,05$ τότε απορρίπτουμε την μηδενική υπόθεση και δεχόμαστε αντίστοιχα $\mu \neq \mu_0$ ή $\mu > \mu_0$ ή $\mu < \mu_0$.

5. Όταν $n > 30$ τότε $t(n – 1) \sim N(0, 1)$.

Παραδείγματα

Παράδειγμα 1

Θέλουμε να ελέγξουμε αν μία γραμμή συσκευασίας γάλατος παράγει συσκευασίες με μέσο βάρος διαφορετικό από 500 γραμμάρια. Παίρνουμε δείγμα 10 συσκευασιών και βρίσκουμε βάρος:

490, 503, 499, 492, 500, 501, 489, 478, 498, 508,

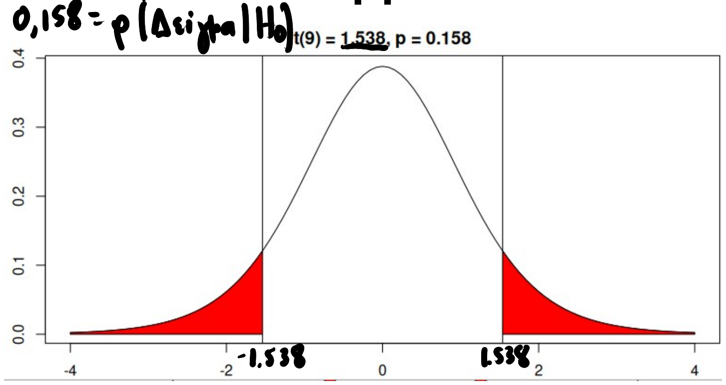
Στατιστική υπόθεση **H_0: μ = 500** έναντι της εναλλακτικής υπόθεσης **H_1: μ ≠ 500.**

Υπολογίζουμε: $\bar{x} = 495{,}8$, s = 8,64, και $t_0 = \dfrac{\bar{x} - 500}{s/\sqrt{n}} = \dfrac{495{,}8 - 500}{8{,}64/\sqrt{10}} = -1{,}538$

Είναι $p_{\text{δίπλευρο}}$ = 0,1584 > 0,05, άρα η υπόθεση H_0: μ = 500, **δεν απορρίπτεται** έναντι της H_1: μ ≠ 500.

Γράφουμε:

Το μέσο βάρος του δείγματος των 10 συσκευασιών δεν είναι σημαντικά διαφορετικό από τα 500 γραμμάρια (t(9) = 1,538, p = 0,158).



Παράδειγμα 1

Υλοποίηση στην R

```
>> one.sample.data = c(490, 503, 499, 492, 500, 501, 489, 478, 498, 508)
>> t.test(one.sample.data, mu = 500)
```

Output:

```
One Sample t-test

data:  one.sample.data
t = -1.5375, df = 9, p-value = 0.1585
alternative hypothesis: true mean is not equal to 500
95 percent confidence interval:
 489.6204 501.9796
sample estimates:
mean of x
    495.8
```

Παράδειγμα 2

Μία εταιρεία που παράγει μπάρες δημητριακών ~~υποθέτει~~ ισχυρίζεται ότι η ποσότητα πρωτεΐνης σε κάθε μία μπάρα είναι κατά μέσο όρο μεγαλύτερη από τα 4 γραμμάρια. Σε δείγμα 20 προϊόντων βρέθηκαν οι εξής ποσότητες πρωτεΐνης:

4.1, 3.9, 4.2, 3.8, 4, 4, 4.1, 4.3, 4.4, 4.9, 3.9, 4, 4.6, 4.7, 4.7, 4.6, 4, 4, 3.8, 4.1

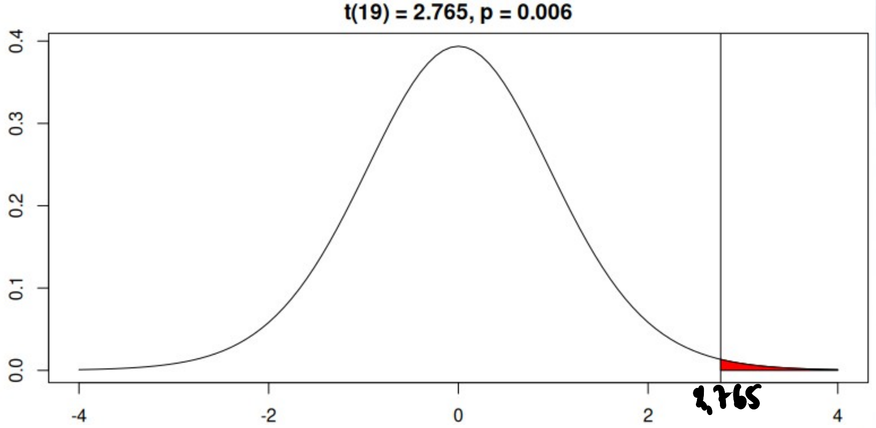
Στατιστική υπόθεση $\mathbf{H_0: \mu \leq 4}$ έναντι της εναλλακτικής υπόθεσης $\mathbf{H_1: \mu > 4}$.

Υπολογίζουμε: $\bar{x} = 4{,}205$, s = 0,3316, και $t_0 = \dfrac{\bar{x} - 4}{s/\sqrt{n}} = \dfrac{4{,}205 - 4}{0{,}3316/\sqrt{20}} = 2{,}765$

Είναι $p_{μονόπλευρο} = 0{,}0062 < 0{,}05$, άρα η $\mathbf{H_0: \mu \leq 4}$, **απορρίπτεται έναντι της** $\mathbf{H_1: \mu > 4}$.

Γράφουμε:

Η μέση ποσότητα πρωτεΐνης του δείγματος των 20 προϊόντων είναι σημαντικά μεγαλύτερη από τα 4 γραμμάρια (t(19) = 2,765, p = 0,0062).



Παράδειγμα 2

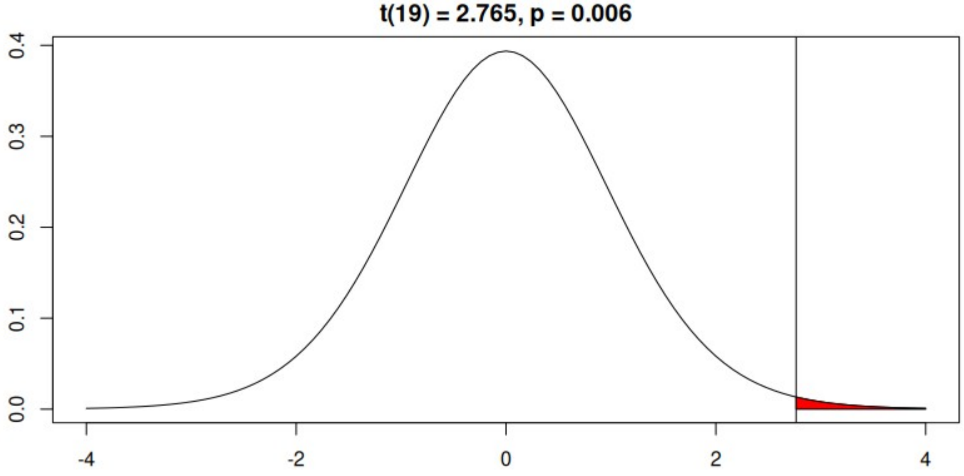
Υλοποίηση στην R

```
>> protein = c(4.1, 3.9, 4.2, 3.8, 4, 4, 4.1, 4.3, 4.4, 4.9, 3.9, 4, 4.6, 4.7, 4.7, 4.6, 4, 4, 3.8, 4.1)
>> t.test(protein, mu = 4, alternative = 'greater')
```

Output:

```
One Sample t-test

data:  protein
t = 2.7646, df = 19, p-value = 0.00617
alternative hypothesis: true mean is greater than 4
95 percent confidence interval:
 4.076779      Inf
sample estimates:
mean of x
   4.205
```



Παράδειγμα 2

Υλοποίηση στην R

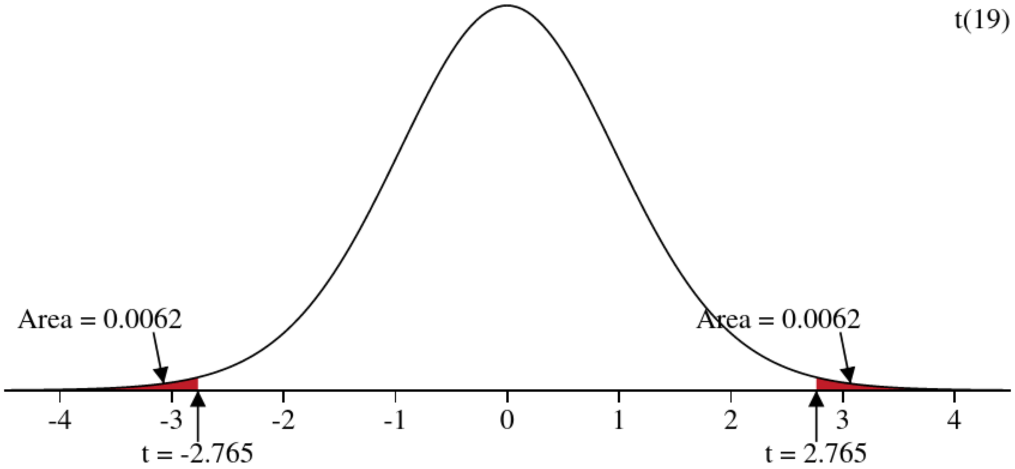
```
>> protein = c(4.1, 3.9, 4.2, 3.8, 4, 4, 4.1, 4.3, 4.4, 4.9, 3.9, 4, 4.6, 4.7, 4.7, 4.6, 4, 4, 3.8, 4.1)
>> t.test(protein, mu = 4)
```

Output:

```
One Sample t-test

data:  protein
t = 2.7646, df = 19, p-value = 0.01234
alternative hypothesis: true mean is not equal to 4
95 percent confidence interval:
 4.049796 4.360204
sample estimates:
mean of x
   4.205
```

Προσοχή!
Αν δεν οριστεί alternative = ‘greater’, τότε η R θα αναφέρει το p για το δίπλευρο έλεγχο. Στην περίπτωση που διεξάγουμε μονόπλευρο έλεγχο, θα πρέπει να υπολογίσουμε το μισό της αναφερόμενης τιμής!



Παράδειγμα 3

Ένας ερευνητής υποθέτει ότι το ChatGPT έχει επίδοση στο γνωστικό αντικείμενο της Φυσικής κατά μέσο όρο μεγαλύτερη από 18 (στα 20). Σε δείγμα 30 ασκήσεων καταγράφηκαν οι εξής επιδόσεις:

17, 16, 16, 18, 19, 19, 20, 20, 20, 20, 17, 18, 19, 19, 19, 19, 20, 19, 17, 18, 18, 17, 18, 17, 19, 20, 17, 17, 18, 19.

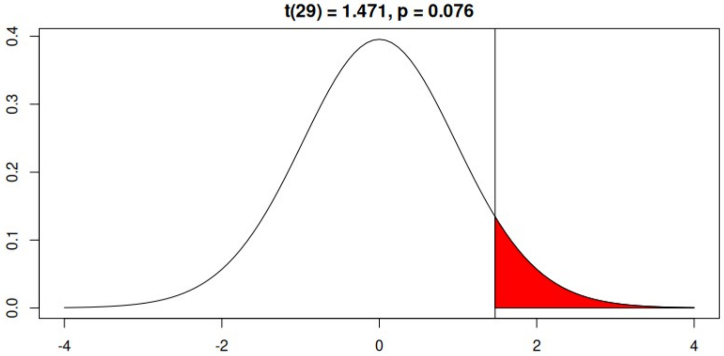
Στατιστική υπόθεση **H_0: $\mu \leq 18$** έναντι της εναλλακτικής υπόθεσης **H_1: $\mu > 18$.**

Υπολογίζουμε: $\bar{x} = 18,33$, s = 1,24, και $t_0 = \dfrac{\bar{x} - 18}{s/\sqrt{n}} = \dfrac{18,33 - 18}{1,24/\sqrt{30}} = 1,471$

Είναι $p_{μονόπλευρο} = 0,076 > 0,05$, άρα η H_0: $\mu \leq 18$, **δεν απορρίπτεται** έναντι της H_1: $\mu > 18$.

Γράφουμε:

Η μέση επίδοση στο δείγμα των 30 ασκήσεων δεν είναι σημαντικά μεγαλύτερη από το 18 (t(29) = 1,471, p = 0,076).



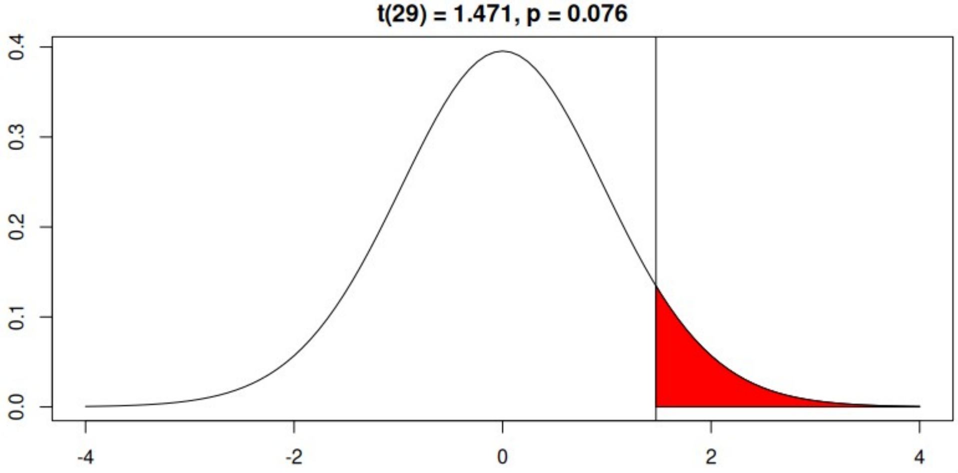
Παράδειγμα 3

Υλοποίηση στην R

```
>> physics = c(17, 16, 16, 18, 19, 19, 20, 20, 20, 20, 17, 18, 19, 19, 19, 19, 20, 19, 17, 18, 18, 17, 18, 17,
   19, 20, 17, 17, 18, 19)
>> t.test(physics, mu = 18, alternative = 'greater')
```

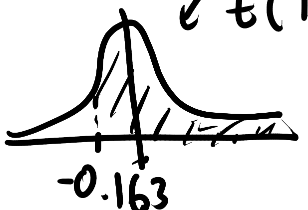
Output:

```
data:  physics
t = 1.4711, df = 29, p-value = 0.07601
alternative hypothesis: true mean is greater than 18
95 percent confidence interval:
 17.94834      Inf
sample estimates:
mean of x
 18.33333
```



Δραστηριότητες

Δραστηριότητα 1



Ένας μαθητής εκτιμά πως ένας καθηγητής λέει κατά μέσο όρο, περισσότερα από 3 ανέκδοτα σε κάθε μάθημα. Σε δείγμα 15 μαθημάτων καταγράφει το πλήθος των ανεκδότων:

4, 5, 3, 2, 1, 0, 5, 4, 2, 3, 3, 3, 5, 4, 2, 1

Ο μαθητής ελέγχει την υπόθεση **H_0: μ ≤ 3** έναντι της εναλλακτικής υπόθεσης **H_1: μ > 3.**

α) Εκτελέστε στην R τον παρακάτω κώδικα:

```
jokes = c(4, 5, 3, 2, 1, 0, 5, 4, 2, 3, 3, 3, 5, 4, 2, 1)
t.test(jokes, mu = 3, alternative = 'greater')
```

$\bar{x}, s, t_0 = \frac{\bar{x}-3}{s/\sqrt{15}} = -0.16381$

$t_0 \sim t(15) \quad p = P(t > t_0) = 0.56$

β) Συμπληρώστε την παρακάτω πρόταση

Το μέσο πλήθος ανεκδότων στο δείγμα των 15 μαθημάτων, (είναι/δεν είναι) δεν είναι **σημαντικά μεγαλύτερο από το 3 (t(** 15 **) =** -0.16381**, p =** 0.564 **).**

Δραστηριότητα 2

Ο ίδιος μαθητής εκτιμά πως ένας άλλος καθηγητής λέει κατά μέσο όρο, λιγότερα από 3 ανέκδοτα σε κάθε μάθημα. Σε δείγμα 1~~5~~6 μαθημάτων καταγράφει το πλήθος των ανεκδότων:

1, 2, 3, 2, 1, 0, 1, 2, 1, 3, 3, 3, 5, 2, 2, 1

Ο μαθητής ελέγχει την υπόθεση **H_0: μ ≥ 3** έναντι της εναλλακτικής υπόθεσης **H_1: μ < 3.**

α) Εκτελέστε στην R τον παρακάτω κώδικα:

```
jokes2 = c(1, 2, 3, 2, 1, 0, 1, 2, 1, 3, 3, 3, 5, 2, 2, 1)
t.test(jokes2, mu = 3, alternative = 'less')
```

$$t_0 = \frac{\bar{x}-3}{s/\sqrt{16}} = -3.3029$$

$$t_0 \sim t(15)$$

β) Συμπληρώστε την παρακάτω πρόταση

Το μέσο πλήθος ανεκδότων στο δείγμα των 1~~5~~6 μαθημάτων, (είναι/~~δεν είναι~~) είναι **σημαντικά μικρότερο από το 3 (t(**15**) =** -3.303**, p =** 0.002**).**

Σημείωση: Για πολύ μικρές τιμές του p γράφουμε p < 0,001.

Δραστηριότητα 3

Ένας οδηγός εκτιμά πως, σε κάθε φόρτιση, το νέο του Tesla καλύπτει κατά μέσο όρο περισσότερα από 300 χλμ. Καταγράφει το πλήθος χιλιομέτρων για 17 φορτίσεις και βρήκε τα εξής:

290, 310, 320, 280, 270, 306, 301, 298, 330, 320, 290, 270, 305, 315, 275, 280, 310.

Ο οδηγός ελέγχει την **H_0: μ ≤ 300** έναντι της **H_1: μ > 300**.

α) Εκτελέστε στην R τον παρακάτω κώδικα:

```
distance = c(290, 310, 305, 280, 270, 306, 301, 290, 315, 320, 290, 270, 305, 305, 270, 280, 295)
t.test(distance, mu = 300, alternative = 'greater')
```

β) Συμπληρώστε την παρακάτω πρόταση

Το μέσο πλήθος χιλιομέτρων στο δείγμα των 17 φορτίσεων, (~~είναι~~/δεν είναι)______ σημαντικά μεγαλύτερο από το 300 (t(16) = -0.396, p = 0.649).

Δραστηριότητα 4

Ένας μετεωρολόγος εκτιμά πως σε μία περιοχή πέφτουν περισσότερα από 200mm βροχής το χρόνο. Καταγράφει τη βροχόπτωση για 13 χρόνια και βρήκε τα εξής:

190, 170, 202, 210, 180, 170, 205, 185, 188, 195, 208, 190, 192.

Ο μετεωρολόγος ελέγχει την **H_0: $\mu \leq$ 200** έναντι της **H_1: $\mu > 200$**.

α) Εκτελέστε στην R τον παρακάτω κώδικα:

```
rain = c(190, 170, 202, 210, 180, 170, 205, 185, 188, 195, 208, 190, 192)
t.test(rain, mu = 200, alternative = 'greater')
```

β) Συμπληρώστε την παρακάτω πρόταση

Το μέσο ύψος βροχής στο δείγμα των 13 ετών, (είναι/δεν είναι)______ σημαντικά μεγαλύτερο από τα 200 mm (t(___) = _______, p = ______).

Δραστηριότητα 5

Ένας δήμαρχος εκτιμά πως το μέσο πλήθος παιδιών στην περιοχή του ανά οικογένεια είναι διαφορετικό από το μέσο πλήθος όλων των οικογενειών στην Ελλάδα που είναι 1,4. Καταγράφει τη πλήθος παιδιών για 17 οικογένειες και βρήκε τα εξής:

5, 0, 1, 2, 2, 3, 4, 2, 1, 1, 0, 0, 3, 3, 2, 2, 2

Ο δήμαρχος ελέγχει την **H_0: μ = 1,4** έναντι της **H_1: μ ≠ 1,4**.

α) Εκτελέστε στην R τον παρακάτω κώδικα:

```
children = c(5, 0, 1, 2, 2, 3, 4, 2, 1, 1, 0, 0, 3, 3, 2, 2, 2)
t.test(children, mu = 1.4)
```

β) Συμπληρώστε την παρακάτω πρόταση

Το μέσο πλήθος παιδιών στο δείγμα των 17 οικογενειών, (είναι/δεν είναι)______ σημαντικά διαφορετικό από το 1,4 (t(___) = _______, p = ______).

Δοκιμασία Student (t - test) για ένα δείγμα

Παρατηρήσεις

1. Αν το μέγεθος του δείγματος είναι μεγαλύτερο από 30 τότε $t(n-1) \sim N(0, 1)$ και στη θέση της κατανομής Student, μπορούμε χωρίς σημαντικό σφάλμα να χρησιμοποιούμε την κανονική κατανομή:

$$n > 30 \Rightarrow t = \frac{\left(\overline{X} - \mu_0\right)}{s/\sqrt{n}} \sim N(0\ ,1)$$

2. Έχουμε δει ότι το 95% διάστημα εμπιστοσύνης για την άγνωστη μέση τιμή του πληθυσμού είναι

$$\left(\overline{X} - 1{,}96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ ,\ \overline{X} + 1{,}96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

Παρατηρούμε ότι:

Η στατιστική υπόθεση H_0: $\mu = \mu_0$, απορρίπτεται έναντι της H_1: $\mu \neq \mu_0$, σε επίπεδο σημαντικότητας 0,05 αν και μόνο αν το t_0 δεν ανήκει στο 95% διάστημα εμπιστοσύνης για την άγνωστη μέση τιμή μ.

Δοκιμασία Student (t - test) για ένα δείγμα

Παρατηρήσεις

3. Στην Στατιστική, η τυπική απόκλιση του δειγματικού μέσου, ονομάζεται **τυπικό σφάλμα (Standard Error).**

Το τυπικό σφάλμα δίνει τη δυνατότητα συντομότερης έκφρασης του 95% και του 99% διαστήματος εμπιστοσύνης για τη μέση τιμή ενός πληθυσμού.

Ενδεικτικά, αν n > 30, τότε $\overline{X} \sim N\left(\mu_0, \frac{\sigma^2}{n}\right)$, $SE_N = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

και το 95% διάστημα εμπιστοσύνης είναι το $\left(\overline{X} - 1{,}96 \cdot SE_N, \overline{X} + 1{,}96 \cdot SE_N\right)$

Αντίστοιχα αν $\overline{X} \sim N\left(\mu_0, \frac{s^2}{n}\right)$ τότε $SE_t = \frac{s}{\sqrt{n}}$ και 95% δ.ε. $= \left(\overline{X} - t_{n;0.025} \cdot SE_t, \overline{X} + t_{n;0.025} \cdot SE_t\right)$

Δοκιμασία Student (t - test) για ένα δείγμα

4. Καταγραφή δοκιμασίας t - test για ένα δείγμα.

Στοιχεία που πρέπει να αναφερθούν

- τα στοιχεία του δείγματος (πλήθος παρατηρήσεων, μέση τιμή και τυπική απόκλιση),
- η τιμή του στατιστικού t ως απόλυτη τιμή,
- οι βαθμοί ελευθερίας,
- το είδος του στατιστικού ελέγχου (μονόπλευρος ή δίπλευρος),
- η στατιστική σημαντικότητα p της διαφοροποίησης από τη στατιστική υπόθεση H_0

Προϋποθέσεις t - test για ένα δείγμα

Απαραίτητη προϋπόθεση είναι η δυνατότητα να αποδεχθούμε την κανονικότητα της κατανομής του εκτιμητή του αριθμητικού μέσου.

Στην πράξη, αυτήν την προϋπόθεση μπορούμε να την δεχθούμε όταν:

Η ίδια η μεταβλητή γνωρίζουμε ότι ακολουθεί την κανονική κατανομή

είτε

Το μέγεθος του δείγματος είναι μεγάλο (μεγαλύτερο του 30).

Επιπλέον, καθώς η δοκιμασία βασίζεται στο Κεντρικό Οριακό Θεώρημα και αυτό αφορά άθροισμα ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών, συνάγεται ότι:

Οι παρατηρήσεις πρέπει να είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους.

Δοκιμασία Student (t - test) για ένα δείγμα

Άσκηση 1

Μία έρευνα ήθελε να αξιολογήσει τη γνώμη των καταναλωτών για μία νέα μπύρα. Δείγμα 55 ατόμων δοκίμασε την μπύρα και απάντησε σε κλίμακα Likert από -5 έως 5 τη γνώμη της για τη νέα μπύρα με την κωδικοποίηση να σημαίνει 0 να είναι ουδέτερο, οι θετικές βαθμολογίες να δείχνουν ότι τους άρεσε η μπύρα και οι αρνητικές βαθμολογίες να δείχνουν ότι δεν τους άρεσε. Βρέθηκε μέση τιμή στις κριτικές 1,1 με τυπική απόκλιση 0,4. Να ελεγχθεί η υπόθεση ότι η μέση κριτική των καταναλωτών διαφοροποιείται σημαντικά από το 0 (α = 0,05).

Λύση

$n = 55, \ \bar{x} = 1,1, \ s = 0,4$

$$t_0 = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} = \frac{1.1 - 0}{0.4/\sqrt{55}} = 20.39$$

$H_0: \mu = 0$ $\qquad t_0 \sim t(54) \approx N(0,1)$

$H_1: \mu \neq 0$ $\qquad p = P(t > 20.39) < 0,001$

Δοκιμασία Student (t - test) για ένα δείγμα

Άσκηση 2

Η τελική εξέταση στη Στατιστική συνήθως έχει μέση βαθμολογία 78 / 100. Το προηγούμενο εξάμηνο, οι 120 φοιτητές που έδωσαν την εξέταση πέτυχαν μέση βαθμολογία 82 / 100 με τυπική απόκλιση 3,2. Ένας καθηγητής ισχυρίζεται ότι οι φοιτητές αυτού του έτους είναι καλύτεροι από τους προηγούμενους. Ελέγξτε τον ισχυρισμό του καθηγητή (α = 0,05).

Λύση

$\bar{x} = 82$, $s = 3{,}2$

$n = 120$

$H_0: \mu \leq 78$

$H_1: \mu > 78$

$$t_0 = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} = \frac{82 - 78}{3.2/\sqrt{120}} = 13{,}69$$

$t \sim t(119) \approx N(0,1)$

$p = P(t_0 > 13.69) < 0.001$

Είναι $p < 0.001$, άρα η H_0 απορρίπτεται έναντι της $H_1: \mu > 78$.

Δοκιμασία Student (t - test) για ένα δείγμα

Άσκηση 3

Ένας μηχανικός της Citroen ισχυρίζεται ότι ο νέος σχεδιασμός ψεκασμού καυσίμου αυξάνει τη μέση χιλιομετρική απόσταση στο C4 πάνω από το τρέχον επίπεδο των 30 χλμ ανά λίτρο. Ελέγχθηκαν είκοσι από τις νέες μηχανές και ο μέσος όρος καταγράφηκε ως 32 χλμ ανά λίτρο με τυπική απόκλιση 3,87. Αξιολογήστε αυτόν τον ισχυρισμό.

Λύση

$\mu_0 = 30$ χλμ/lt

$n = 20$, $\bar{x} = 32$ χλμ/lt, $s = 3.87$

$H_0: \mu \leq 30$

$H_1: \mu > 30$

$$t_0 = \frac{32-30}{3.87/\sqrt{20}} = 2,311 \quad , \quad t_0 \sim t(19)$$

$$p = P(t > 2.311) = 0.016 < 0.05 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ η $H_0: \mu \leq 30$ απορρίπτεται.

Δοκιμασία z - test για μία αναλογία

Δοκιμασία z - test για μία αναλογία

Με τον όρο z – test περιγράφονται όλες οι δοκιμασίες που βασίζονται στην κανονική κατανομή για τον υπολογισμό της πιθανότητας p.

Στην πράξη αυτό σημαίνει ότι έχουμε τη δυνατότητα να υπολογίσουμε την τυπική απόκλιση του δειγματικού μέσου (αυτό που ονομάζεται και τυπικό σφάλμα standard error).

Μία ενδεικτική δοκιμασία z – test είναι η δοκιμασία z – test για μία αναλογία (one sample z – test for a proportion) η οποία χρησιμοποιείται όταν θέλουμε να ελέγξουμε την ισότητα μίας αναλογίας με μία προκαθορισμένη τιμή σε κάποιον πληθυσμό παρατηρώντας ένα αντιπροσωπευτικό δείγμα του.

Προϋποθέσεις z - test για μία αναλογία

Η δοκιμασία βασίζεται στην υπόθεση πως η διωνυμική κατανομή B(n, p) μπορεί να προσεγγιστεί από την κανονική κατανομή N(np, npq).

Ως εκ τούτου, προϋπόθεση εφαρμογής της μεθόδου είναι να μπορεί να υποτεθεί ότι

$$\mathbf{np > 5 \text{ και } nq = n(1 - p) > 5.}$$

Για παράδειγμα, αν p ≈ 0,1 τότε απαιτείται μέγεθος δείγματος τουλάχιστον 50, ενώ αν p ≈ 0,5, τότε η διαδικασία μπορεί να εφαρμοστεί με αξιόπιστα αποτελέσματα σε δείγμα μεγέθους n ≈ 15.

$$X \sim B(n,p) \stackrel{\sim}{\approx} N(np, npq) \Rightarrow \frac{X}{n} \stackrel{\sim}{\approx} N\left(p, \frac{pq}{n}\right)$$

$$\Rightarrow \hat{p} \stackrel{\sim}{\approx} N\left(p, \frac{pq}{n}\right)$$

Δοκιμασία z - test για μία αναλογία

Υπολογισμός p (στατιστική σημαντικότητα ελέγχου)
Σύμφωνα με την στατιστική υπόθεση H_0: $p = p_0$, θα πρέπει να είναι ($q_0 = 1 - p_0$)

$$\hat{p} \sim N\left(p_0, \frac{p_0 q_0}{n}\right) \Leftrightarrow \frac{\sqrt{n}(\hat{p} - p_0)}{\sqrt{p_0 q_0}} \sim N(0, 1).$$

Τώρα, αρκεί να υπολογίσουμε την πιθανότητα, αν η υπόθεση H_0 ήταν αληθής, να πάρουμε μία σημαντικά διαφορετική τιμή για το στατιστικό

$$z_0 = \frac{\sqrt{n}(\hat{p} - p_0)}{\sqrt{p_0 q_0}}$$

Αυτή η πιθανότητα συγκρινόμενη με το όριο απόρριψης α (= 0,05) οδηγεί και στην απόρριψη ή μη απόρριψη της υπόθεσης

H_0: $p = p_0$, έναντι της **H_1: $p \neq p_0$** (δίπλευρος έλεγχος), ή

H_0: $p \leq p_0$, έναντι της **H_1: $p > p_0$,** ή **H_0: $p \geq p_0$,** έναντι της **H_1: $p < p_0$,** (μονόπλευρος έλεγχος)

X = πλήθος αγοριών στα 25.468 $\quad X \sim B(25.468, 0.5)$

Δοκιμασία z - test για μία αναλογία

Παράδειγμα

Ένα τυχαίο δείγμα βρήκε ότι μεταξύ 25.468 νεογέννητων παιδιών γεννήθηκαν 13.173 αγόρια. Η αναλογία του δείγματος των αγοριών ήταν 0,5172. Ελέγξτε αν είναι πιο πιθανό για τα νεογέννητα μωρά να είναι αγόρια παρά κορίτσια (α = 0,05);

$\hat{p} = 0.5172$

$H_0: p \leq 0.5$ έναντι της $H_1: p > 0.5$

$H_0: p = 0.5$ έναντι της $H_1: p \neq 0.5$

$H_0: p \geq 0.5$ έναντι της $H_1: p < 0.5$ $\quad | \; p = P(z < 17.36) = 1.$

$$Z_0 = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{p_0 q_0} / \sqrt{n}} = \frac{0{,}5172 - 0{,}5}{\sqrt{0{,}5 \cdot 0{,}5}} \cdot \sqrt{25.468} = 17{,}36$$

$Z_0 \sim N(0,1)$ και $p = P(|z| > 17.36) < 0{,}001 \Rightarrow$ η H_0 απορρίπτεται.

$p = P(z > 17.36) < 0.001.$

Δοκιμασία z - test για μία αναλογία

Παράδειγμα

Ένα τυχαίο δείγμα βρήκε ότι μεταξύ 25.468 νεογέννητων παιδιών γεννήθηκαν 13.173 αγόρια. Η αναλογία του δείγματος των αγοριών ήταν 0,5172. Ελέγξτε αν είναι πιο πιθανό για τα νεογέννητα μωρά να είναι αγόρια παρά κορίτσια (α = 0,05);

Λύση

Αν p είναι η (άγνωστη) αναλογία των αγοριών σε όλον τον πληθυσμό, ελέγχουμε τη στατιστική υπόθεση

H_0: p = 0,5 (= p_0), έναντι της ερευνητικής υπόθεσης: H_1: p ≠ 0,5.

Υπολογίζουμε:

$$z_0 = \frac{\sqrt{25.468}\left(0{,}5172 - 0{,}5\right)}{\sqrt{0{,}5 \cdot 0{,}5}} = 5{,}49$$

Είναι p = P(|z| > z_0) = P(|z| > 5,49) < 0,001. Συνάγουμε ότι η μηδενική υπόθεση απορρίπτεται, δηλαδή, ότι η αναλογία των νεογέννητων αγοριών είναι σημαντικά διαφορετική από το 50%.

z - test vs δοκιμασία χ^2 ως έλεγχος προσαρμογής

z - test vs δοκιμασία χ^2 ως έλεγχος προσαρμογής

Η δοκιμασία χ^2 ως έλεγχος προσαρμογής είναι ισοδύναμη με το z – test για τον έλεγχο της υπόθεσης πως η αναλογία είναι ίση με κάποια συγκεκριμένη τιμή. Ενδεικτικά, αν H_0: $p = p_0$, τότε διαμορφώνουμε τον πίνακα:

$H_0 : p = p_0$

	Χαρακτηριστικό		
	Ναι	Όχι	Σύνολο
Παρατηρήσεις	n_1	n_2	N
Αναμενόμενες H_0	p_0N	q_0N	N

$\frac{n_1}{N} \neq p_0$

Υπολογίζουμε, ότι:

$$\chi_0^2 = \frac{(n_1 - p_0 \cdot N)^2}{p_0 \cdot N} + \frac{(n_2 - q_0 \cdot N)^2}{q_0 \cdot N} = \frac{N^2(\hat{p} - p_0)^2}{p_0 \cdot N} + \frac{N^2(1 - \hat{p} - (1 - p_0))^2}{q_0 \cdot N} = \frac{N(\hat{p} - p_0)^2}{p_0 q_0} = z_0^2.$$

Στην πράξη οι δύο δοκιμασίες δίνουν το ίδιο αποτέλεσμα, με την επισήμανση πως η δοκιμασία χ^2 είναι από τη φύση της δίπλευρος έλεγχος, ενώ το z – test δίνει την δυνατότητα μονόπλευρης εναλλακτικής υπόθεσης.

Ασκήσεις

Άσκηση 1

Ένας δάσκαλος εκτιμά πως το 85% των μαθητών επιθυμεί να επισκεφθεί το ζωολογικό κήπο. Σε δείγμα 50 μαθητών οι 39 αποκρίθηκαν θετικά στην ερώτηση που τους έκανε ο δάσκαλος. Να ελεγχθεί ο ισχυρισμός του δασκάλου σε επίπεδο εμπιστοσύνης 95% (δηλαδή α = 0,05),

(α) Με δοκιμασία z-test για την αναλογία πληθυσμού.

(β) Με τη δοκιμασία χι-τετράγωνο ως έλεγχο ομοιογένειας.

Λύση

(α) z-test $H_0: p = 0.85$, $H_1: p \neq 0.85$, $\hat{p} = \frac{39}{50} = 0.78$.

$$z_0 = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{p_0 q_0}/\sqrt{n}} = \frac{0.78 - 0.85}{\sqrt{0.85 \cdot 0.15}/\sqrt{50}} = 1{,}386, \quad p = P(|z| > 1.386) = 0.176$$

η H_0: δεν απορρίπτεται.

(β) χι-τετράγωνο ως προσαρμογή

	Θ	A	Σύνολο
O_i	39	11	50
E_i	42.5	7.5	50
δ	3.5	-3.5	0

$$\chi_0^2 = \sum_{i=1}^{2} \frac{(E_i - O_i)^2}{E_i} = \frac{3.5^2}{42.5} + \frac{(-3.5)^2}{7.5} = 1.921$$

$\chi_0^2 \sim \chi^2(1)$ και $p = P(\chi^2 > 1.921) = 0.166$

Ασκήσεις

Άσκηση 2

Μία εταιρεία που εισάγει κινητά τηλέφωνα υποστηρίζει ότι το ποσοστό των οικογενειών που έχουν τρία κινητά τηλέφωνα είναι 30%. Μια εταιρεία κινητής τηλεφωνίας έχει λόγους να πιστεύει ότι το ποσοστό δεν είναι 30%. Πριν ξεκινήσουν μια μεγάλη διαφημιστική καμπάνια, πραγματοποιούν μία έρευνα σε 150 νοικοκυριά και βρίσκουν 43 από αυτά να έχουν τρία κινητά τηλέφωνα. Να ελεγχθεί ο ισχυρισμός της εισαγωγικής εταιρείας σε επίπεδο εμπιστοσύνης 95%,

(α) Με δοκιμασία z-test για την αναλογία πληθυσμού.

(β) Με τη δοκιμασία χι-τετράγωνο ως έλεγχο ομοιογένειας.

Λύση

Ασκήσεις

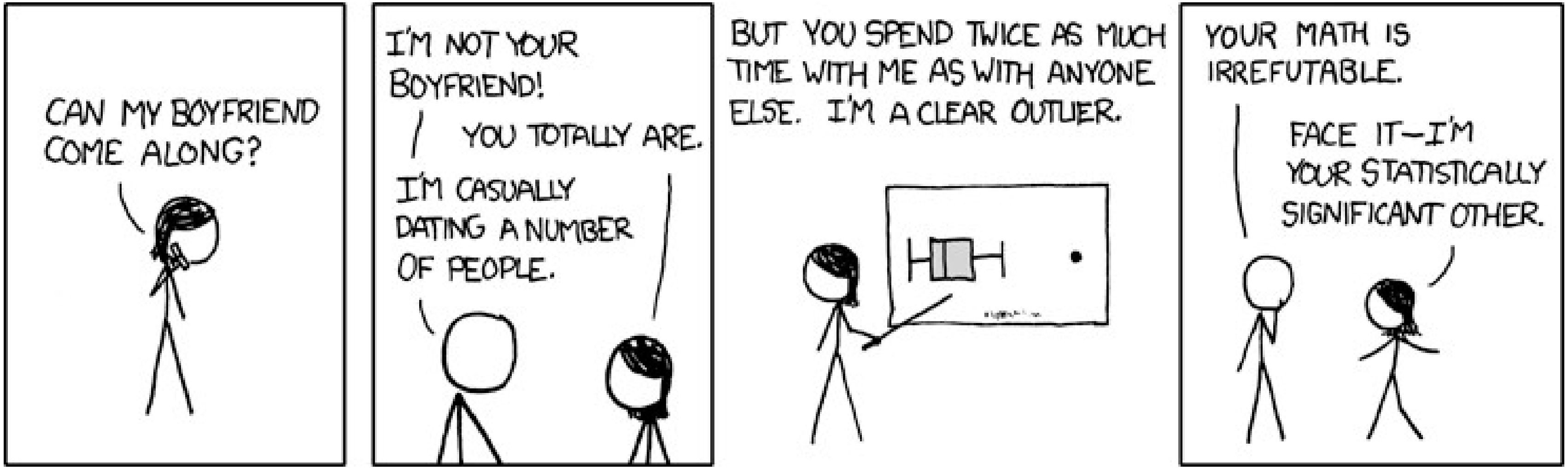
Άσκηση 3

Μία εμπορική εταιρεία θεωρεί πως περισσότερο από το 70% του πληθυσμού είναι σύμφωνο με την απαγόρευση της πώλησης αεροζόλ. Σε μια έρευνα, 813 από τους 1084 ερωτηθέντες υποστήριξαν την απαγόρευση των αεροζόλ. Ελέγξτε τον ισχυρισμό της εταιρείας.

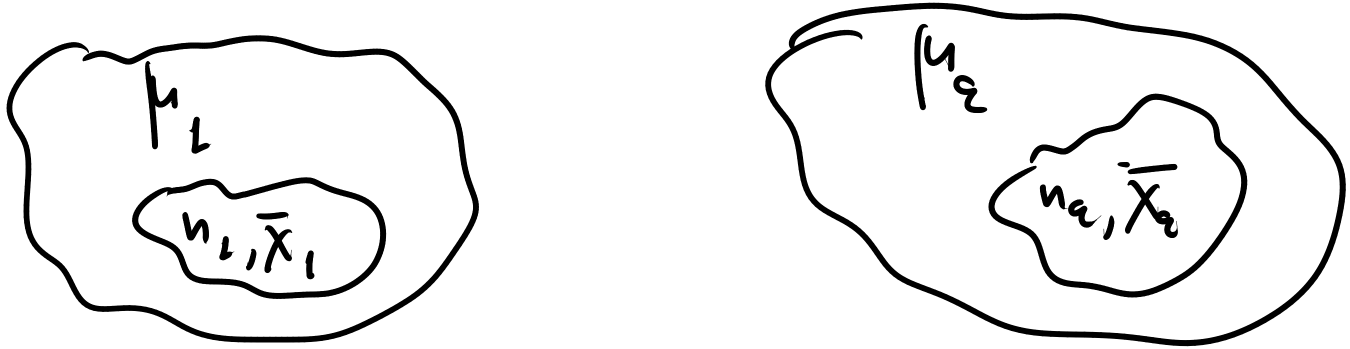
Λύση

Ασκήσεις

Άσκηση 4
Υπάρχει η υπόνοια ότι το νόμισμα που χρησιμοποιήθηκε για την έναρξη του τοπικού αγώνα ποδοσφαίρου δεν είναι αμερόληπτο νόμισμα. Παίρνετε το ύποπτο νόμισμα και το πετάτε 100 φορές από τις οποίες οι 65 είναι Κορώνα. Είναι αυτό το αποτέλεσμα σημαντικά υψηλότερο από αυτό που θα έπρεπε να παράγεται από ένα αμερόληπτο νόμισμα;
Λύση



https://xkcd.com/539/



Δοκιμασία Student (t - test) για δύο ανεξάρτητα δείγματα

$$H_0: \mu_1 = \mu_2$$

$$H_1: \mu_1 \neq \mu_2$$

Δοκιμασία Student (t - test) για δύο ανεξάρτητα δείγματα

Η δοκιμασία t-test για δύο ανεξάρτητα δείγματα (independent samples t - test) χρησιμοποιείται όταν θέλουμε να ελέγξουμε την υπόθεση πως δύο πληθυσμοί δεν διαφέρουν σημαντικά ως προς τη μέση τιμή μίας συνεχούς μεταβλητής μετρώντας από ένα αντιπροσωπευτικό δείγμα τους.

Απαραίτητες προϋποθέσεις είναι

(α) η κανονικότητα της κατανομής της συνεχούς μεταβλητής που μελετούμε σε κάθε μία από τις δύο ανεξάρτητες ομάδες (ή μεγάλο μέγεθος δείγματος για κάθε μία ομάδα),

(β) η ομοιογένεια των δύο ομάδων (δηλαδή να έχουν τυπική απόκλιση που δεν διαφέρει σημαντικά).

Δοκιμασία Student (t - test) για δύο ανεξάρτητα δείγματα

Ομάδα 1: Μέγεθος n_1, μέση τιμή $\overline{x}_1$ και τυπική απόκλιση s_1.

Ομάδα 2: Μέγεθος n_2, μέση τιμή $\overline{x}_2$ και τυπική απόκλιση s_2.

Ελέγχουμε τη στατιστική υπόθεση

$$H_0: \mu_1 = \mu_2,$$

έναντι της ερευνητικής υπόθεσης:

- $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$ (δίπλευρος) ή
- $H_1: \mu_1 < \mu_2$ ή
- $H_1: \mu_1 > \mu_2$ (μονόπλευρος)

Βαθμοί ελευθερίας στο t-test: ind. samples

Στην περίπτωση 2 ανεξάρτητων δειγμάτων $\{x_i\}$ και $\{y_i\}$ με μέγεθος n_1 και n_2, τότε το άθροισμα

$$\overset{n_1-1}{\sum_{i=1}^{n_1}\left(x_i-\bar{x}\right)^2}+\overset{n_2-1}{\sum_{i=1}^{n_2}\left(y_i-\bar{y}\right)^2}=\overset{n_1}{\left(n_1-1\right)s_1^2}+\overset{n_2}{\left(n_2-1\right)s_2^2}$$

έχει $n_1 + n_2 - 2$ βαθμούς ελευθερίας.

Αντίστοιχα, το ίδιο ισχύει για την ποσότητα $$s_p^2=\frac{\left(n_1-1\right)s_1^2+\left(n_2-1\right)s_2^2}{n_1+n_2-2}$$

Δοκιμασία Student (t - test) για δύο ανεξάρτητα δείγματα

Με την υπόθεση (β) πως οι δύο ομάδες είναι ομοιογενείς ($\sigma_1 = \sigma_2$), είναι δυνατή η εκτίμηση της άγνωστης τυπικής απόκλισης του κοινού πληθυσμού από τον τύπο

$$s_P = \sqrt{\frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}}$$

s_p: Pooled standard variation: Κοινή τυπική απόκλιση

Στην περίπτωση αυτή, αποδεικνύεται ότι

$$t_0 = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{s_p\sqrt{\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} \sim t(n_1 + n_2 - 2)$$

ή ότι $t_0 = \dfrac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{SE_p} \sim t(n_1 + n_2 - 2)$, $SE_p = s_p\sqrt{\left(\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}\right)}$

Απόδειξη: https://www.math.arizona.edu/~jwatkins/ttest.pdf

Δοκιμασία Student (t - test) για δύο ανεξάρτητα δείγματα

Από το σημείο αυτό, η διαδικασία ακολουθεί τα ίδια βήματα με το t-test για ένα δείγμα. Καθώς

$$t_0 = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{SE_p} \quad \text{και} \quad t = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{SE_p} \sim t(n_1 + n_2 - 2)$$

αρκεί να υπολογίσουμε την πιθανότητα να παίρναμε μία σημαντικά διαφορετική τιμή από το t_0, για το στατιστικό t αν η υπόθεση H_0: $\mu_1 = \mu_2$, ήταν αληθής.

Μονόπλευρος έλεγχος H_0: $\mu_1 \geq \mu_2$ έναντι H_1: $\mu_1 < \mu_2$: $p = P(t < t_0)$.

Μονόπλευρος έλεγχος H_0: $\mu_1 \leq \mu_2$ έναντι H_1: $\mu_1 > \mu_2$: $p = P(t > t_0)$.

Δίπλευρος έλεγχος H_0: $\mu_1 = \mu_2$ έναντι H_1: $\mu_1 \neq \mu_2$: $p = P(t < |t_0|)$.

Συγκρίνοντας το p με το επίπεδο απόρριψης α, καταλήγουμε και στο αντίστοιχο ερευνητικό συμπέρασμα.

Δοκιμασία Student (t - test) για δύο ανεξάρτητα δείγματα

Επιπλέον, γνωρίζοντας ότι

$$t = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{SE_p} \sim t\left(n_1 + n_2 - 2\right),\ SE_p = s_p\sqrt{\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}$$

μπορούμε να υπολογίσουμε ένα (1-α)% διάστημα εμπιστοσύνης ως εξής:

$$\left(\overline{X}_1 - \overline{X}_2 - t_{\alpha/2}SE_p,\ \ \overline{X}_1 - \overline{X}_2 - t_{\alpha/2}SE_p\right)$$

Ειδικότερα, αν $n_1 + n_2 > 28$, τότε $t(n_1 + n_2 - 2) \sim N(0, 1)$ και μπορούμε να γράψουμε πως το 95% δ.ε. είναι

$$\left(\overline{X}_1 - \overline{X}_2 - 1{,}96\,SE_p,\ \ \overline{X}_1 - \overline{X}_2 - 1{,}96\,SE_p\right)$$

Δοκιμασία Student (t - test) για δύο ανεξάρτητα δείγματα

Παράδειγμα

Μία αλυσίδα supermarket στην προσπάθεια της να ενισχύσει τις πωλήσεις επιθυμεί να ελέγξει ποια από τις δύο παρακάτω προτεινόμενες πρακτικές είναι περισσότερο αποδοτική.

Πρακτική Α: επιστροφή 4% στις αγορές των πελατών όταν αυτοί χρησιμοποιούν πιστωτική κάρτα μίας τράπεζας που συνεργάζεται με την εταιρεία ή

Πρακτική Β: προσφορά κουπόνια για έκπτωση σε αγορές των προϊόντων που εμπορεύεται.

Για να συγκρίνει την αποτελεσματικότητα των δύο αυτών διαφορετικών πρακτικών επιλέγει τυχαία 21 συχνούς πελάτες τους οποίους χωρίζει με τυχαίο τρόπο σε δύο ομάδες (Ομάδα Α και Β) των 10 και 11 ατόμων αντίστοιχα και παρακολουθεί τις αγορές τους για ένα έτος. Τα αποτελέσματα είναι (σε ευρώ):

Ομάδα Α : 2233, 2327, 1280, 1477, 1461, 1495, 1950, 1857, 1471, 1567, 1627

Ομάδα Β: 1404, 1514, 1730, 1610, 1854, 1107, 2145, 784, 1410, 2226

Δοκιμασία Student (t - test) για δύο ανεξάρτητα δείγματα

Ομάδα Α: $n_1 = 11$, $\bar{x}_1 = 1.704,1$ €, $s_1 = 341,3$ €
Ομάδα Β: $n_2 = 10$, $\bar{x}_2 = 1.578,4$ €, $s_2 = 441,8$ €

Η μέση τιμή των αγορών της ομάδας Α που χρησιμοποίησε την πιστωτική κάρτα είναι 125,7 ευρώ μεγαλύτερη από την μέση τιμή της ομάδας Β στην οποία είχαν σταλεί κουπόνια.
Είναι όμως η διαφορά των 125,7 ευρώ τόσο σημαντική ώστε να συνάγουμε πως η πιστωτική κάρτα είναι περισσότερο αποτελεσματική στο σύνολο των πελατών ή μήπως αυτή η διαφορά οφείλεται στο σφάλμα που αντιστοιχεί στην τυχαία επιλογή των πελατών κάθε ομάδας;

Περισσότερο μεθοδολογικά, αν μ_A και μ_B είναι οι μέσες καταναλώσεις που αναμένουμε να έχουν οι πελάτες των ομάδων Α και Β αντίστοιχα, αναζητούμε την απάντηση στην ερώτηση σχετικά με το αν απορρίπτεται ή όχι η στατιστική υπόθεση:

H_0: $\mu_A = \mu_B$, έναντι της ερευνητικής υπόθεσης: **H_1: $\mu_A \neq \mu_B$.**

Δοκιμασία Student (t - test) για δύο ανεξάρτητα δείγματα

Ομάδα Α: $n_1 = 11$, $\overline{x}_1 = 1.704{,}1$ €, $s_1 = 341{,}3$ €
Ομάδα Β: $n_2 = 10$, $\overline{x}_2 = 1.578{,}4$ €, $s_2 = 441{,}8$ €

Υπολογίζουμε:

$$SE_p = \sqrt{\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)\frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}} = \sqrt{\left(\frac{1}{11} + \frac{1}{10}\right)\frac{(11 - 1)341{,}3^2 + (10 - 1)441{,}8^2}{11 + 10 - 2}} = 171{,}3$$

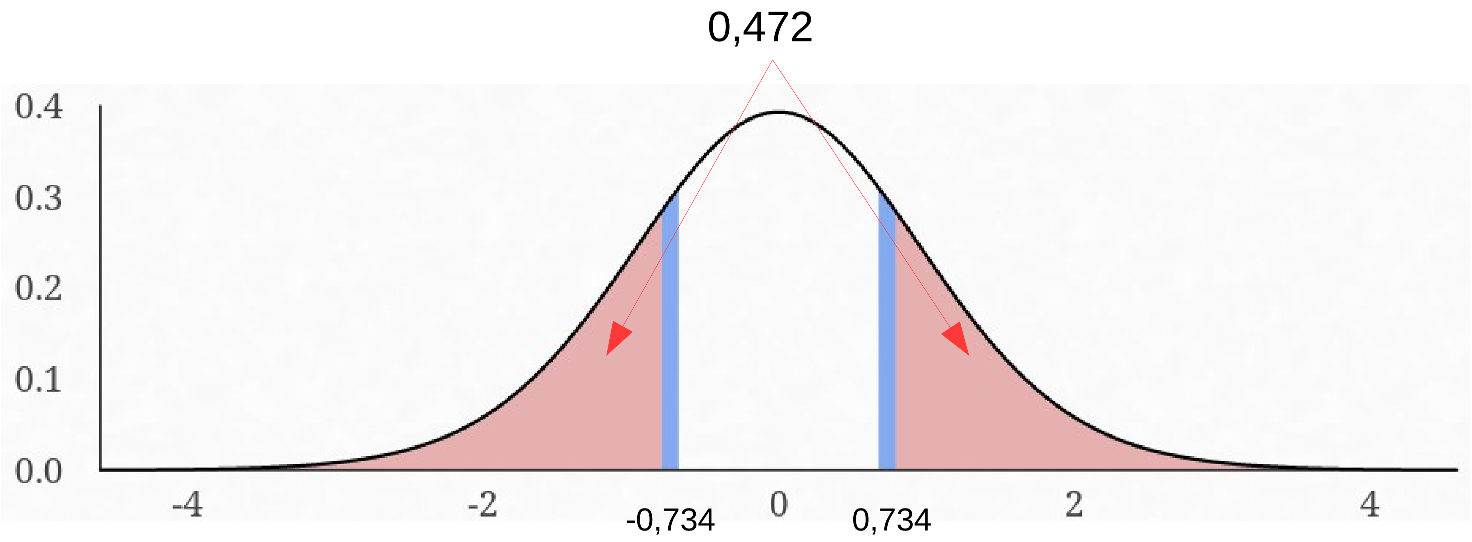
$$t_0 = \frac{\overline{x}_1 - \overline{x}_2}{SE_p} = \frac{1.704{,}1 - 1.578{,}4}{171{,}3} = 0{,}734 \quad \text{και} \quad t = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{171{,}3} \sim t(19)$$

Δίπλευρος έλεγχος H_1: $\mu_1 \neq \mu_2$: $p = P(|t| > t_0) = P(|t| > 0{,}734) = 0{,}472 = 47{,}2\%$. Δηλαδή: Αν λαμβάναμε 100 διαφορετικά δείγματα από 11 και 10 άτομα αντίστοιχα από τις δύο ανεξάρτητες ομάδες τότε στα 47,2 από αυτά θα είχαμε διαφορά τουλάχιστον τόσο μεγάλη όσο αυτή που παρατηρήθηκε στο δείγμα μας. Συμπερασματικά:

Βρήκαμε ότι $p = 0{,}472 > 0{,}05$, άρα η στατιστική υπόθεση H_0: $\mu_A = \mu_B$, δεν απορρίπτεται έναντι της ερευνητικής υπόθεσης: H_1: $\mu_A \neq \mu_B$.

Δοκιμασία Student (t - test) για δύο ανεξάρτητα δείγματα

Δίπλευρος έλεγχος H_1: $\mu_1 \neq \mu_2$: $p = P(|t| > t_0) = P(|t| > 0{,}734) = 0{,}472 = 47{,}2\%$.



Δοκιμασία Student (t - test) για δύο ανεξάρτητα δείγματα

Κώδικας R για την επαλήθευση των υπολογισμών

```
purchases.A = c(2233, 2327, 1280, 1477, 1461, 1495, 1950, 1857, 1471, 1567, 1627)
purchases.B = c(1404, 1514, 1730, 1610, 1854, 1107, 2145, 784, 1410, 2226)

n1 <- length(purchases.A)
n2 <- length(purchases.B)

var1 <- var(purchases.A)
var2 <- var(purchases.B)

pooled <- ((n1-1)*var1 + (n2-1)*var2) / (n1+n2-2)

s_p = ((1/n1 + 1/n2)*pooled)^0.5

s_p

t.test(purchases.A, purchases.B, var.equal = TRUE)
```

Δοκιμασία Student (t - test) για δύο ανεξάρτητα δείγματα

Άσκηση 1

Ένας δάσκαλος θέλει να δει αν υπάρχει σημαντική διαφοροποίηση μεταξύ αγοριών και κοριτσιών στη γλώσσα. Εξετάζει τους μαθητές του (16 αγόρια και 16 κορίτσια) σε μία τυποποιημένη γραπτή δοκιμασία και βγάζει τα εξής αποτελέσματα:

Ομάδα Αγοριών: $n_1 = 16$, $\bar{x}_1 = 74{,}8$, $s_1 = 6{,}8$. Ομάδα Κοριτσιών: $n_2 = 16$, $\bar{x}_2 = 81{,}4$, $s_2 = 9{,}5$.

Να βρείτε αν οι δύο ομάδες διαφέρουν σημαντικά σε επίπεδο σημαντικότητας 0,05. (υποθέτουμε ίδια διακύμανση)

Λύση

$H_0: \mu_A = \mu_K$ $\quad t_0 = \dfrac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{SE_D}$, $SE_D = S_p \sqrt{\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}}$

$H_1: \mu_A \neq \mu_K$ $\quad S_p = \sqrt{\dfrac{(n_1-1)s_1^2 + (n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2}} = \sqrt{\dfrac{15 \cdot 6.8^2 + 15 \cdot 9.5^2}{30}} = 8.261$

$SE_D = 8.261 \cdot \sqrt{\dfrac{1}{16} + \dfrac{1}{16}} = 2.11$, $\quad t_0 = \dfrac{74.8 - 81.4}{2.11} = -3.128$

Είναι $t_0 \sim t(30) \approx N(0,1)$

$p = P(|t_0| > 3.128) = 0.004 < 0.05 \Rightarrow$ η H_0 απορρίπτεται

Δοκιμασία Student (t - test) για δύο ανεξάρτητα δείγματα

Άσκηση 1

Ένας δάσκαλος θέλει να δει αν υπάρχει σημαντική διαφοροποίηση μεταξύ αγοριών και κοριτσιών στη γλώσσα. Εξετάζει τους μαθητές του (16 αγόρια και 16 κορίτσια) σε μία τυποποιημένη γραπτή δοκιμασία και βγάζει τα εξής αποτελέσματα:

Ομάδα Αγοριών: $n_1 = 16$, $x_1 = 74{,}8$, $s_1 = 6{,}8$. Ομάδα Κοριτσιών: $n_2 = 16$, $x_2 = 81{,}4$, $s_2 = 9{,}5$.

Να βρείτε αν οι δύο ομάδες διαφέρουν σημαντικά σε επίπεδο σημαντικότητας 0,05.

Λύση

$$SE_p = \sqrt{\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)\frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}} = \sqrt{\left(\frac{1}{16} + \frac{1}{16}\right)\frac{(16 - 1)6{,}8^2 + (16 - 1)9{,}5^2}{16 + 16 - 2}} = 2{,}92$$

$$t_0 = \frac{\overline{x}_1 - \overline{x}_2}{SE_p} = \frac{74{,}8 - 81{,}4}{2{,}92} = -2{,}260 \quad \text{και} \quad t = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{2{,}92} \sim t(30) = N(0,\, 1)$$

Δίπλευρος έλεγχος H_1: $\mu_1 \neq \mu_2$: $p = P(|t| > t_0) = P(|t| > 2{,}26) = 0{,}031 = 3{,}1\%$. Βρήκαμε ότι $p = 0{,}031 < 0{,}05$, άρα η στατιστική υπόθεση H_0: $\mu_1 = \mu_2$, **απορρίπτεται** έναντι της ερευνητικής υπόθεσης: H_1: $\mu_1 \neq \mu_2$. Ιδιαίτερα, συμπεραίνουμε ότι η επίδοση των κοριτσιών είναι σημαντικά διαφορετική από την επίδοση των αγοριών.

Σημείωση: Προφανώς, απορρίπτεται και ο μονόπλευρος έλεγχος, άρα μπορούμε να δηλώσουμε ότι η η επίδοση των κοριτσιών είναι σημαντικά μεγαλύτερη από την επίδοση των αγοριών

Δοκιμασία Student (t - test) για δύο ανεξάρτητα δείγματα

Άσκηση 2

Η επίδοση δειγμάτων φοιτητών δύο διαδοχικών εξαμήνων στις εξετάσεις στην Στατιστική καταγράφηκε μεταξύ και βρέθηκαν τα εξής στοιχεία: Κανονική εξέταση: $n_1 = 130$, $\bar{x}_1 = 52{,}1$, $s_1 = 11{,}1$. Επαναληπτική: $n_2 = 35$, $\bar{x}_2 = 46{,}2$, $s_2 = 16{,}7$. Να βρείτε αν οι δύο ομάδες φοιτητών διαφέρουν σημαντικά ως προς την επίδοση σε επίπεδο σημαντικότητας 0,05.

Λύση

$H_0: \mu_1 = \mu_2$

$H_1: \mu_1 \neq \mu_2$

$$t_0 = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{SE_D}, \quad SE_D = S_p^2\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} = 12.47\sqrt{\frac{1}{130} + \frac{1}{35}} = 2.376$$

$$S_p = \sqrt{\frac{34 \cdot 16.7^2 + 129 \cdot 11.1^2}{163}} = 12.47$$

$$t_0 = \frac{52.1 - 46.2}{2.376} = 2.483, \quad p = P(|t_0| > 2.483) = 0.014 < 0.05$$

$t_0 \sim t(163) \approx N(0,1)$ $\Longrightarrow$ η $H_0: \mu_1 = \mu_2$ απορρίπτεται.

Δοκιμασία Student (t - test) για δύο ανεξάρτητα δείγματα

Άσκηση 3

Σε ένα γηροκομείο με 60 ηλικιωμένους, μία ομάδα ερευνητών ανέθεσε στους μισούς (30) την φροντίδα ενός φυτού. Τριάντα ασθενείς επιλέγονται τυχαία για να συμμετάσχουν στη μελέτη. Στη συνέχεια καταγράφηκε ο αριθμός παραπόνων στη διάρκεια μίας εβδομάδας.

- Ηλικιωμένοι που φρόντιζαν ένα φυτό: M = 16,6, SD = 5,8
- Ηλικιωμένοι που δεν φρόντιζαν ένα φυτό: M = 27,1, SD = 5,6

Να βρείτε αν οι δύο ομάδες διαφέρουν σημαντικά ως προς το πλήθος παραπόνων (α = 0,05).

Λύση

$H_0: \mu_1 = \mu_2$ $\quad t_0 = \dfrac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{SE_D}$, $SE_D = S_p^2 \sqrt{\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}} = 5.7\sqrt{\dfrac{1}{30} + \dfrac{1}{30}} = 1.472$

$H_1: \mu_1 \neq \mu_2$ $\quad S_p = \sqrt{\dfrac{29 \cdot 5.8^2 + 29 \cdot 5.6^2}{58}} = 5.7$, $t_0 \sim t(58) \approx N(0,1)$

$t_0 = \dfrac{16.6 - 27.1}{1.472} = -7.133$, $\quad p = P(|t_0| > 7.133) < 0,001 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ η H_0 απορρίπτεται.

t - test για δύο δείγματα: ανομοιογενείς πληθυσμοί (Welch's t-test)

Όπως είδαμε οι απαραίτητες προϋποθέσεις για τη σωστή εφαρμογή της μεθόδου είναι

(α) η κανονικότητα της κατανομής της συνεχούς μεταβλητής που μελετούμε σε κάθε μία από τις δύο ανεξάρτητες ομάδες (ή μεγάλο μέγεθος δείγματος για κάθε μία ομάδα),

(β) η ομοιογένεια των δύο ομάδων (δηλαδή να έχουν τυπική απόκλιση που δεν διαφέρει σημαντικά).

Αν η προϋπόθεση (β) δεν τηρείται (άγνωστες διακυμάνσεις ή ελλιπής πληροφόρηση) τότε υπάρχει μία εναλλακτική εκδοχή της δοκιμασίας με αξιόπιστα αποτελέσματα. Στην περίπτωση αυτή το στατιστικό που υπολογίζεται είναι το

$$t_0 = \frac{\overline{x}_1 - \overline{x}_2}{s_c} \quad \text{και} \quad t = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{s_c} \sim t(df)$$

όπου

$$s_c = \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}} \quad \text{και} \quad df = \frac{s_c^4}{\frac{1}{n_1 - 1} \cdot \frac{s_1^4}{n_1^2} + \frac{1}{n_2 - 1} \cdot \frac{s_2^4}{n_2^2}}$$

z - test για δύο αναλογίες

z - test για δύο αναλογίες

Μελετούμε δύο ανεξάρτητες ομάδες για την παρουσία ενός χαρακτηριστικού και **θέλουμε να ελέγξουμε την υπόθεση H_0: $p_1 = p_2$ έναντι της H_1: $p_1 \neq p_2$.**

Στην περίπτωση αυτή, αποδεικνύεται ότι $\hat{p}_1 - \hat{p}_2 \sim N\left(p_1 - p_2,\, s_D^2\right)$

όπου $s_D = \sqrt{\hat{p}\left(1-\hat{p}\right)\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}$, και $\hat{p} = \frac{n_1 \hat{p}_1 + n_2 \hat{p}_2}{n_1 + n_2}$

Μετά, αρκεί να υπολογιστεί το στατιστικό

$$z_0 = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{s_D} \sim N\left(0,\, 1\right)$$

Και από αυτό να υπολογιστεί η πιθανότητα $p = P(|z| > z_0)$ ή $P(z < z_0)$ ή $P(z > z_0)$

Σημείωση: Στη βιβλιογραφία αναφέρεται και η επιλογή $s_D = \sqrt{\frac{\hat{p}_1\left(1-\hat{p}_1\right)}{n_1} + \frac{\hat{p}_2\left(1-\hat{p}_2\right)}{n_2}}$ η οποία ωστόσο θεωρείται υποδεέστερη ως προς την επίδοσή της.

Σχετικά: https://stats.stackexchange.com/questions/17195/is-there-a-reference-that-legitimises-the-use-of-the-unpooled-z-test-to-compare?rq=1

Ασκήσεις

1. Σε δείγμα 958 ανδρών βρέθηκαν 358 καπνιστές, ενώ σε δείγμα 869 γυναικών βρέθηκαν 267 καπνίστριες. Να ελεγχθεί η υπόθεση ότι το ποσοστό των καπνιστών είναι υψηλότερο στους άνδρες από ότι στις γυναίκες ($\alpha = 0{,}05$).

Ασκήσεις

2. Θέλουμε να συγκρίνουμε την απόδοση δύο φαρμάκων Α και Β για τη γρίπη. Σε δείγμα 195 ατόμων με το φάρμακο Α, παρατηρήθηκαν μειωμένα συμπτώματα σε 41 άτομα, ενώ σε δείγμα 605 ατόμων με το φάρμακο Β, παρατηρήθηκαν μειωμένα συμπτώματα σε 351 άτομα. Έχουν τα δύο φάρμακα ανάλογη απόδοση; ($\alpha = 0{,}05$).

Ασκήσεις

3. Μια έρευνα επέλεξε από 1000 άτομα σε δύο ελληνικές πόλεις Α και Β. Στη Α βρέθηκε πως το ποσοστό των ατόμων που είχαν γεννηθεί σε άλλη χώρα ήταν 6,5%, ενώ στην πόλη Β, το ποσοστό ήταν 1,7%. Να ελέγξετε την υπόθεση πως η αναλογία του πληθυσμού που έχει γεννηθεί σε άλλη χώρα είναι σημαντικά διαφορετική μεταξύ των δύο πόλεων (α = 0,05).

z - test vs δοκιμασία ανεξαρτησίας χ^2

Η δοκιμασία χ^2 είναι εξίσου αποδεκτή και έγκυρη για τον έλεγχο δύο αναλογιών στην περίπτωση όπου υπάρχει πλήρως τυχαιοποιημένη κατανομή των παρατηρήσεων στις δύο ομάδες (αυτές που έχουν το χαρακτηριστικό και αυτές που δεν το έχουν).

	Ομάδα 1	Ομάδα 2	Σύνολο
Ναι	n_{11}	n_{21}	$n_{11} + n_{21}$
Όχι	n_{12}	n_{22}	$n_{21} + n_{22}$
	$N_1= n_{11} + n_{12}$	$N_2= n_{21} + n_{22}$	N

Η απόδειξη είναι ανάλογη με αυτήν που ακολουθήσαμε για να δείξουμε ότι το z – test για μία αναλογία είναι ισοδύναμο με τη δοκιμασία χ^2 ως έλεγχο ομοιογένειας. Είναι ωστόσο σημαντικό να τονιστεί πως η χ^2 είναι ισοδύναμος με το z – test μόνο στην περίπτωση όπου τόσο τα αθροίσματα των στηλών όσο και αυτά των γραμμών ήταν ελεύθερα να διαφοροποιούνται κατά τη δειγματοληψία. Για το λόγο αυτό δεν είναι κατάλληλη επιλογή στην περίπτωση ενός τυχαιοποιημένου πειραματικού σχεδίου (RCT) όπου το πλήθος κάθε μίας ομάδας είναι προκαθορισμένο. Στην περίπτωση αυτή, το z-test δεν μπορεί να αντικατασταθεί από τη δοκιμασία ανεξαρτησίας χ^2, η οποία δεν αρμόζει να εφαρμοστεί σε αυτήν την περίπτωση.

Σχετικοί σύνδεσμοι:
https://stats.stackexchange.com/questions/173415/at-what-level-is-a-chi2-test-mathematically-identical-to-a-z-test-of-propo (απόδειξη)
https://stats.stackexchange.com/questions/81975/the-z-test-vs-the-chi2-test-for-comparing-the-odds-of-catching-a-cold-in-2 (αναφορά RCT)

Έλεγχος προϋποθέσεων

Έλεγχος προϋποθέσεων – F test

Δοκιμασία F για τον έλεγχο της ισότητας των τυπικών αποκλίσεων

Έστω δύο ομάδες παρατηρήσεων με πλήθος στοιχείων n, m. Η δοκιμασία F, χρησιμοποιείται για τον έλεγχο της υπόθεσης πως οι δύο ομάδες είναι ομοιογενείς ($\sigma_1 = \sigma_2$). Ελέγχεται η ισοδύναμη υπόθεση πως $\sigma^2_1 / \sigma^2_2 = 1$.

H_0: $\sigma^2_1 / \sigma^2_2 = 1$ έναντι

H_1: $\sigma^2_1 / \sigma^2_2 \neq 1$ (δίπλευρο) ή H_1: $\sigma^2_1 / \sigma^2_2 > 1$ ή H_1: $\sigma^2_1 / \sigma^2_2 < 1$ (μονόπλευρο)

Θεωρούμε την τυχαία μεταβλητή $F = \dfrac{S_1^2}{S_2^2} = \left[\dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}_1\right)\right] / \left[\dfrac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}\left(X_i - \overline{X}_2\right)\right]$

Το S^2_1, ακολουθεί τη $\chi^2(n-1)$ κατανομή, ενώ το S^2_2, ακολουθεί τη $\chi^2(m-1)$ κατανομή, άρα το στατιστικό $F = S^2_1 / S^2_2$, ακολουθεί τη $F(n-1, m-1)$ κατανομή.

Σημείωση

Προϋπόθεση για την εφαρμογή του F test είναι η κανονικότητα των κατανομών των τιμών των δύο ομάδων.

Έλεγχος προϋποθέσεων – F test

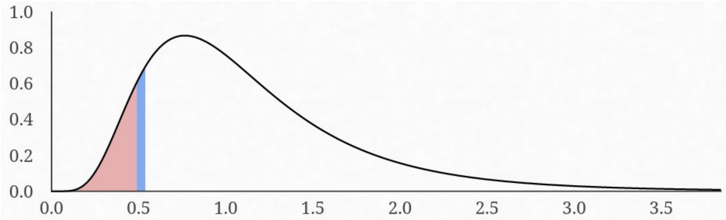
Ομάδα Αγοριών: $n_1 = 16$, $x_1 = 74,8$, $s_1 = 6,8$.
Ομάδα Κοριτσιών: $n_2 = 16$, $x_2 = 81,4$, $s_2 = 9,5$.

$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2} \sim F(15, 15)$$

Υπολογίζουμε τα στατιστικά ελέγχου: $F_0 = \frac{s_1^2}{s_2^2} = \frac{6,8^2}{9,5^2} = 0,512$ και $F_1 = \frac{s_2^2}{s_1^2} = \frac{9,5^2}{6,8^2} = 1,952$.

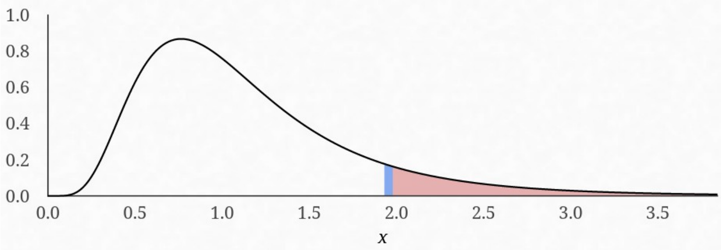
Α. Ελέγχουμε την H_0: $\sigma^2_1 / \sigma^2_2 = 1$ έναντι της H_1: $\sigma^2_1 / \sigma^2_2 < 1$ σε επίπεδο $\alpha = 0,05 / 2 = 0,025$.

$p = P(F < F_0) = P(F < 0,512) = 0,1032$



Β. Ελέγχουμε την H_0: $\sigma^2_1 / \sigma^2_2 = 1$ έναντι της H_1: $\sigma^2_1 / \sigma^2_2 > 1$ σε επίπεδο $\alpha = 0,05 / 2 = 0,025$.

$p = P(F > F_1) = P(F > 1,952) = 0,1034$.



Συμπεραίνουμε ότι οι δύο διακυμάνσεις δεν διαφοροποιούνται σημαντικά σε επίπεδο σημαντικότητας 95% (η υπόθεση H_0 δεν απορρίπτεται)

Έλεγχος προϋποθέσεων – Κατανομή τιμών

Ο έλεγχος της κατανομής από την οποία προέρχεται ένα δείγμα είναι απαραίτητος για όλες τις παραμετρικές στατιστικές δοκιμασίες. Βεβαιωνόμαστε πως μία μεταβλητή ακολουθεί κάποια θεωρητική κατανομή με τους παρακάτω τρόπους:

1. Προηγούμενες έρευνες.

2. Δειγματοληψία και παρατήρηση του ιστογράμματος και του διαγράμματος q - q.

3. Θεωρητικά επιχειρήματα που να καταδεικνύουν πως η μεταβλητή έχει τα χαρακτηριστικά που αντιστοιχούν σε μία από τις βασικές κατανομές.

4. Στατιστικοί έλεγχοι που ελέγχουν την αντίστοιχη στατιστική υπόθεση:

- Kolmogorov Smirnov
- Anderson-Darling
- Χι-τετράγωνο καλής προσαρμογής
- Shapiro-Wilk

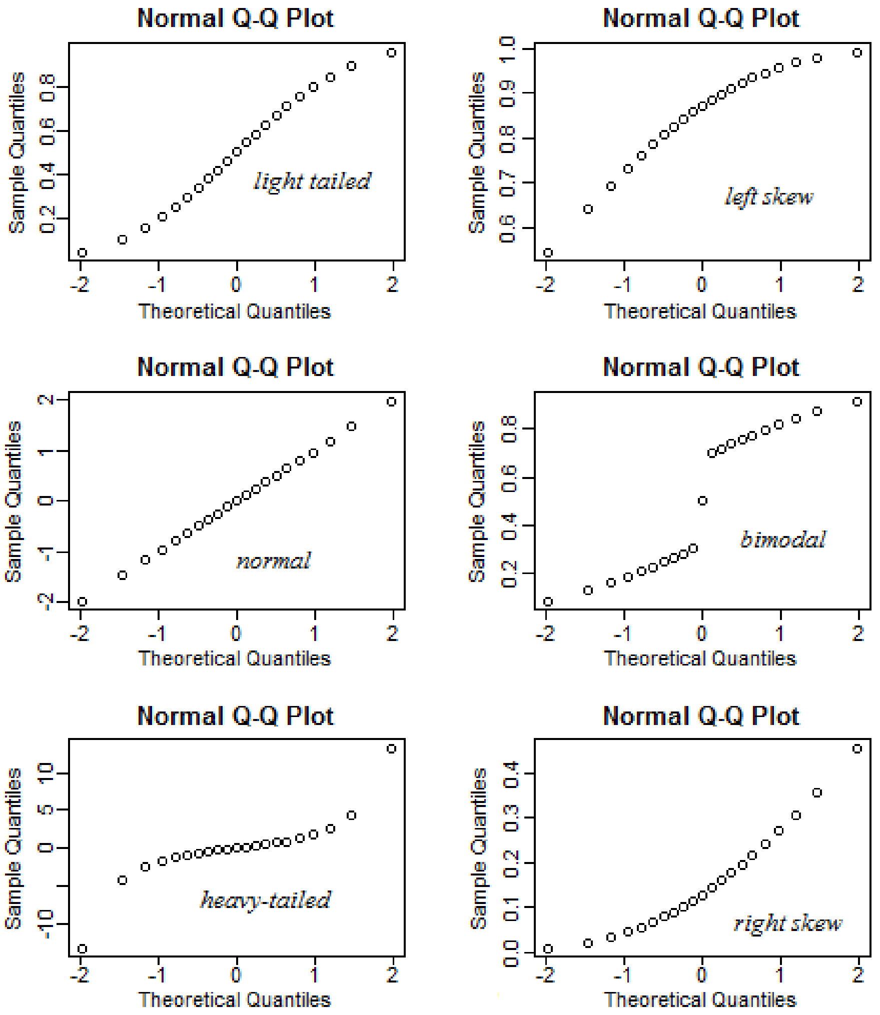
Διάγραμμα q - q

Το διάγραμμα Quantile – Quantile είναι ένα απλό διάγραμμα που προσφέρει τη δυνατότητα οπτικής επιβεβαίωσης της υπόθεσης πως το δείγμα μας ακολουθεί την κανονική (ή και όποια άλλη) κατανομή.

Τα δεδομένα σχεδιάζονται με τέτοιο τρόπο ώστε αν ακολουθούν μια θεωρητική κατανομή να πρέπει να σχηματίζουν περίπου μια ευθεία γραμμή.

Οι αποκλίσεις από αυτήν την ευθεία γραμμή υποδηλώνουν αποκλίσεις από την υποτιθέμενη κατανομή.

Ενδεικτικά στο διάγραμμα παρουσιάζεται το p – p διάγραμμα 100 τιμών που προσαρμόζονται στην κανονική κατανομή. Προσέχουμε ότι το σύνολο των σημείων δεν έχει σημαντικές αποκλίσεις από την ευθεία.



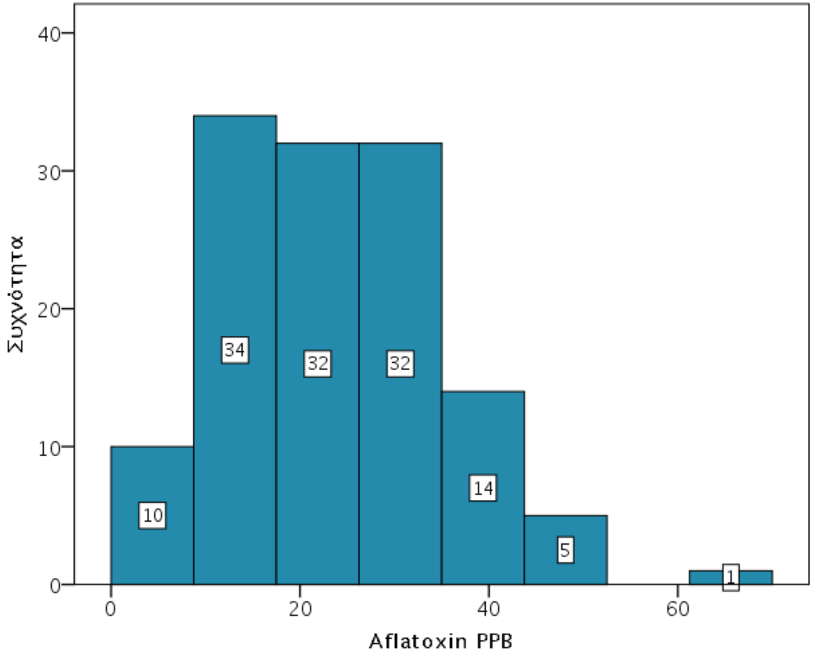
Πηγή διαγράμματος: https://stats.stackexchange.com/questions/101274/how-to-interpret-a-qq-plot/101290#101290

Συσχέτιση ιστογράμματος και q – q διαγράμματος: https://xiongge.shinyapps.io/QQplots/

Έλεγχος κανονικότητας Kolmogorov Smirnov (SPSS)

Δοκιμασία Kolmogorov Smirnov όπως υλοποιείται στο SPSS για τον έλεγχο των υποθέσεων πως ένα δείγμα ακολουθεί την κανονική ή την ομοιόμορφη κατανομή.

Έλεγχος σε 128 δείγματα από σοδιές ως προς τα επίπεδα αφλατοξίνης.



Descriptives

			Statistic	Std. Error
Aflatoxin PPB	Mean		23,8	1,0
	95% Confidence Interval for Mean	Lower Bound	21,8	
		Upper Bound	25,8	
	5% Trimmed Mean		23,2	
	Median		23,5	
	Variance		128,0	
	Std. Deviation		11,3	
	Minimum		4,0	
	Maximum		68,0	
	Range		64,0	
	Interquartile Range		16,0	
	Skewness		,7	,2
	Kurtosis		1,1	,4

Έλεγχος κανονικότητας Kolmogorov Smirnov (SPSS)

Δοκιμασία Kolmogorov Smirnov όπως υλοποιείται στο SPSS για τον έλεγχο των υποθέσεων πως ένα δείγμα ακολουθεί την κανονική ή την ομοιόμορφη κατανομή.

One-Sample Kolmogorov-Smirnov Test

		Aflatoxin PPB
N		128
Normal Parameters[a,b]	Mean	23,8203
	Std. Deviation	11,31192
Most Extreme Differences	Absolute	,070
	Positive	,070
	Negative	-,040
Kolmogorov-Smirnov Z		,797
Asymp. Sig. (2-tailed)		,549

a. Test distribution is Normal.

b. Calculated from data.

Είναι p = 0,549, άρα η H_0: Το δείγμα προέρχεται από κανονικό πληθυσμό δεν απορρίπτεται σε επίπεδο σημαντικότητας 0,05 έναντι της H_1: όχι η H_0.

One-Sample Kolmogorov-Smirnov Test 2

		Aflatoxin PPB
N		128
Uniform Parameters[a,b]	Minimum	4,00
	Maximum	68,00
Most Extreme Differences	Absolute	,414
	Positive	,414
	Negative	-,016
Kolmogorov-Smirnov Z		4,685
Asymp. Sig. (2-tailed)		,000

a. Test distribution is Uniform.

b. Calculated from data.

Είναι $p < 0,001$, άρα η H_0: Το δείγμα προέρχεται από ομοιόμορφο πληθυσμό απορρίπτεται σε επίπεδο σημαντικότητας 0,05 έναντι της H_1: όχι η H_0.

Αδυναμίες των ελέγχων Kolmogorov-Smirnov και Shapiro-Wilk

Η στατιστική σημαντικότητα p οποιουδήποτε στατιστικού ελέγχου είναι αντιστρόφως ανάλογη με το μέγεθος του/των δείγματος/ων από τα οποία υπολογίστηκε.

Στα πλαίσια ενός ελέγχου κανονικότητας αυτή η ιδιαιτερότητα σημαίνει πως μία πολύ μικρή και μη ουσιαστική απόκλιση από την κανονικότητα μπορεί να προκύψει στατιστικά σημαντική αν το μέγεθος του δείγματος είναι εξαιρετικά μεγάλο ενώ μία σημαντική απόκλιση από την κανονική κατανομή μπορεί να μην ανιχνευθεί αν το μέγεθος του δείγματος είναι μικρό.

Στην πράξη, ο ερευνητής είναι καλό να διεξάγει έναν έλεγχο κανονικότητας για να τεκμηριώνει τη χρήση μίας δοκιμασίας σε κάποιον εξωτερικό παρατηρητή όπως ο αναγνώστης ενός περιοδικού στο οποίο θα δημοσιευθεί το αποτέλεσμά του ή στην διατριβή του ωστόσο θα πρέπει να έχει πείσει τον εαυτό του για την κανονικότητα της κατανομής με στέρεα θεωρητικά επιχειρήματα τα οποία θα καταδεικνύουν πως από τη φύση της η μεταβλητή ακολουθεί την κανονική κατανομή δηλαδή πως οι τιμές της επηρεάζονται από πολλά ανεξάρτητα και αθροιστικά μεταξύ τους σφάλματα.

n : o o o ---- o   1η μέτρηση $\bar{X}_1$ μ_1

o o o ---- o   2η μέτρηση $\bar{X}_2$ μ_2

$d_1 \quad d_2 \quad d_3 \quad \cdots \quad d_n$

$H_0 : \mu_1 = \mu_2$

$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$

Δοκιμασία Student (t - test) για ζεύγη παρατηρήσεων

$$d_i = x_{i1} - x_{i2} \sim N(0, s_D^2)$$

Δοκιμασία Student (t - test) για ζεύγη παρατηρήσεων

Η δοκιμασία t - test για ζεύγη παρατηρήσεων (paired samples t - test) χρησιμοποιείται όταν θέλουμε να ελέγξουμε τη μεταβολή της μέσης τιμής μεταξύ δύο μετρήσεων ύστερα από μία παρέμβαση σε μία συνεχή παράμετρο ενός πληθυσμού παρατηρώντας τι συμβαίνει σε ένα δείγμα του πληθυσμού.

Απαραίτητες προϋποθέσεις είναι

(α) η κανονικότητα της κατανομής των διαφορών των τιμών της συνεχούς μεταβλητής που μελετούμε (ή μεγάλο μέγεθος παρατηρήσεων),

(β) η απουσία ιδιαζόντων ή ακραίων παρατηρήσεων

Δοκιμασία Student (t - test) για ζεύγη παρατηρήσεων

Μέγεθος ομάδας: n

Πριν την παρέμβαση: Μέση τιμή x_1 και τυπική απόκλιση s_1.

Μετά την παρέμβαση: Μέση τιμή x_2 και τυπική απόκλιση s_2.

Ελέγχουμε τη στατιστική υπόθεση

$$H_0: \mu_1 = \mu_2,$$

έναντι της ερευνητικής υπόθεσης:

$$H_1: \mu_1 \neq \mu_2 \text{ (δίπλευρος) ή } H_1: \mu_1 < \mu_2 \text{ ή } H_1: \mu_1 > \mu_2 \text{ (μονόπλευρος)}$$

Θεωρούμε την τυχαία μεταβλητή $X = X_1 - X_2$. Με την υπόθεση πως η μηδενική υπόθεση H_0: $\mu_1 = \mu_2$, είναι αληθής και πως δεν μεταβάλλεται η διακύμανση πριν και μετά, έχουμε:

$$\bar{X} = \bar{X}_1 - \bar{X}_2 \sim N\left(0, \frac{\sigma_D^2}{n}\right)$$

όπου σ_D είναι η διακύμανση των διαφορών των τιμών. Στη συνέχεια:

$$\bar{X}_1 - \bar{X}_2 \sim N\left(0, \sigma_D^2\right) \Leftrightarrow \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sigma_D/\sqrt{n}} \sim N(0, 1)$$

Δοκιμασία Student (t - test) για ζεύγη παρατηρήσεων

Καταλήγουμε, ότι:
$$\frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{\sigma_D/\sqrt{n}} \sim N(0,1) \Leftrightarrow \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{s_D/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$$

Από το σημείο αυτό, η διαδικασία ακολουθεί τα ίδια βήματα με το t-test για ένα δείγμα.
Καθώς
$$t_0 = \frac{\overline{x}_1 - \overline{x}_2}{s_D/\sqrt{n}} \quad \text{και} \quad t = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{s_D/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$$
αρκεί να υπολογίσουμε την πιθανότητα να παίρναμε μία σημαντικά διαφορετική τιμή από το t_0, για το στατιστικό t αν η υπόθεση H_0: $\mu_1 = \mu_2$, ήταν αληθής.

- Μονόπλευρος έλεγχος H_0: $\mu_1 \geq \mu_2$ έναντι H_1: $\mu_1 < \mu_2$: $p = P(t < t_0)$.
- Μονόπλευρος έλεγχος H_0: $\mu_1 \leq \mu_2$ έναντι H_1: $\mu_1 > \mu_2$: $p = P(t > t_0)$.
- Δίπλευρος έλεγχος H_0: $\mu_1 = \mu_2$ έναντι H_1: $\mu_1 \neq \mu_2$: $p = P(t < |t_0|)$.

Συγκρίνοντας το p με το επίπεδο απόρριψης α, καταλήγουμε και στο αντίστοιχο ερευνητικό συμπέρασμα.

Δοκιμασία Student (t - test) για ζεύγη παρατηρήσεων

Παράδειγμα

Με σκοπό την αξιολόγηση μίας δίαιτας ως προς τη μείωση του βάρους όσων την εφαρμόζουν, επιλέχθηκαν 16 ενήλικες εθελοντές οι οποίοι την ακολούθησαν πιστά για 6 μήνες. Το βάρος μετρήθηκε στην αρχή και στο τέλος της διαδικασίας και τα αποτελέσματα ήταν τα εξής:

Πριν:89.8, 107.5, 105.7, 81.2, 99.3, 76.7, 100.7, 75.7, 90.3, 105.7, 81.2, 71.7, 71.2, 98, 116.6,68.5

Μετά: 87.1, 102.1, 102.5, 78, 97.1, 73, 95.3, 73, 87.5, 102.5, 78.5, 69.9, 64.9, 93.4, 112.9, 63.5

Να βρεθεί αν η δίαιτα επηρέασε το βάρος των εθελοντών σε επίπεδο σημαντικότητας 0,05.

$n=16$

d : 2.7, 5.4, 3.2, 3.2, 2.2, 3.7, 5.4, 2.7, 2.8, 3.2, 2.7, 1.8, 6.3, 4.6, 3.7, 5.

$\bar{d} = 3.6625$, $s_d^2 = 1.696$, $s_d = 1.302$

$H_0: \mu_1 = \mu_2$

$H_1: \mu_1 \neq \mu_2$

$\bar{d} \sim N\left(0, \frac{s_d^2}{16}\right) \Rightarrow \frac{\bar{d}}{s_d/\sqrt{16}} \sim t(15)$, $t_0 = \frac{3.6625}{1.302/4} = 11.24$, $p<0.001$

Δοκιμασία Student (t - test) για ζεύγη παρατηρήσεων

Παράδειγμα

Με σκοπό την αξιολόγηση μίας δίαιτας ως προς τη μείωση του βάρους όσων την εφαρμόζουν, επιλέχθηκαν 16 ενήλικες εθελοντές οι οποίοι την ακολούθησαν πιστά για 6 μήνες. Το βάρος μετρήθηκε στην αρχή και στο τέλος της διαδικασίας και τα αποτελέσματα ήταν τα εξής:

Πριν:89.8, 107.5, 105.7, 81.2, 99.3, 76.7, 100.7, 75.7, 90.3, 105.7, 81.2, 71.7, 71.2, 98, 116.6,68.5

Μετά: 87.1, 102.1, 102.5, 78, 97.1, 73, 95.3, 73, 87.5, 102.5, 78.5, 69.9, 64.9, 93.4, 112.9, 63.5

Να βρεθεί αν η δίαιτα επηρέασε το βάρος των εθελοντών σε επίπεδο σημαντικότητας 0,05.

Λύση

Οι διαφορές του βάρους πριν και μετά τη δίαιτα είναι

-2.7 -5.4 -3.2 -3.2 -2.2 -3.7 -5.4 -2.7 -2.8 -3.2 -2.7 -1.8 -6.3 -4.6 -3.7 -5.0

Η μέση τιμή των διαφορών είναι -3,663 Kg με τυπική απόκλιση 1,302 Kg. Υπολογίζουμε:

$$t_0 = \frac{\overline{x}_1 - \overline{x}_2}{s_D/\sqrt{n}} = \frac{-3,663}{1,302/\sqrt{16}} = -11,253 \quad \text{και} \quad t \sim t(15)$$

Μονόπλευρος έλεγχος H_1: $\mu_1 < \mu_2$: $p = P(t < t_0) = P(t < -11,253) = 1,039 \cdot 10^{-8} < 0,001$.

Συμπέρασμα: Η στατιστική υπόθεση H_0 απορρίπτεται ($p < 0,001$). Η δίαιτα μειώνει σημαντικά το βάρος όσων την ακολουθούν σε επίπεδο σημαντικότητας 0,05.

Δοκιμασία Student (t - test) για ζεύγη παρατηρήσεων

Κώδικας R για την επαλήθευση των υπολογισμών

```
weight1 = c(89.8, 107.5, 105.7, 81.2, 99.3, 76.7, 100.7, 75.7, 90.3, 105.7, 81.2, 71.7, 71.2, 98,
116.6, 68.5)
weight2 = c(87.1, 102.1, 102.5, 78, 97.1, 73, 95.3, 73, 87.5, 102.5, 78.5, 69.9, 64.9, 93.4, 112.9,
63.5)

diff = weight2 - weight1

mean(diff)
sd(diff)

t.test(weight1, weight2, paired = TRUE)
```

Δοκιμασία Student (t - test) για ζεύγη παρατηρήσεων

Άσκηση 1

Ένας καθηγητής θέλει να συγκρίνει τη δυσκολία δύο θεμάτων. Για το λόγο αυτό, εξετάζει την ίδια ομάδα από 50 φοιτητές και στα δύο θέματα και καταγράφει τις βαθμολογίες. Βρίσκει:

Εξέταση 1: Μέση επίδοση 78,1, Τυπική απόκλιση 12,7

Εξέταση 2: Μέση επίδοση 79,5, Τυπική απόκλιση 9,1

Διαφορά εξετάσεων 1 και 2: Μέση διαφορά 1,4 βαθμοί με τυπική απόκλιση 0,2 βαθμοί.

Να βρεθεί αν υπάρχει σημαντική διαφορά στη δυσκολία των θεμάτων σε επίπεδο εμπιστοσύνης 95%.

$\bar{d} = 1.4$, $s_d = 0.2$ $\quad t_0 = \frac{\bar{d}}{s_d/\sqrt{50}} = \frac{1.4}{0.2/\sqrt{50}} = 49{,}5$, $t_0 \sim t(49)$

$p = P(|t_0| > 49.5) < 0.001 \Rightarrow$ η $H_0: \mu_1 = \mu_2$ απορρίπτεται

Δοκιμασία Student (t - test) για ζεύγη παρατηρήσεων

Άσκηση 2

Ένας ερευνητής υποθέτει ότι η ηλεκτρική διέγερση μία ορισμένης περιοχής του εγκεφάλου σε αρουραίους θα έχει ως αποτέλεσμα τη μείωση της πρόσληψης τροφής ~~σε αρουραίους~~. Τριάντα (30) αρουραίοι υποβάλλονται σε χειρουργική επέμβαση και ένα ηλεκτρόδιο εμφυτεύεται στο κατάλληλο σημείο. Μετά από μια περίοδο ανάρρωσης δέκα ημερών, οι αρουραίοι ελέγχονται για τον αριθμό των κομματιών σοκολάτας που καταναλώθηκαν κατά τη διάρκεια μιας χρονικής περιόδου 10 λεπτών, τόσο με όσο και χωρίς ηλεκτρική διέγερση. Βρέθηκε ότι:

Κατανάλωση χωρίς διέγερση: Μέσο πλήθος 8,6 με τυπική απόκλιση 1,3
Κατανάλωση με διέγερση: Μέσο πλήθος 7,6 με τυπική απόκλιση 1,2.

Διαφορά καταναλώσεων: Μέση διαφορά: 1 με τυπική απόκλιση [illegible]. 1.8

Να βρείτε αν υπάρχει σημαντική διαφορά στην ποσότητα τροφής σε επίπεδο εμπιστοσύνης 95%.

$\bar{d} = 1,\ s_d = 0.8,$ $\quad t_0 = \frac{\bar{d}}{s_d/\sqrt{30}} = \frac{1}{1.8/\sqrt{30}} = 3.04.$

$t_0 \sim t(29),\ p = P(|t_0| > 3.04) = 0.005 < 0.05 \Rightarrow$ η $H_0: \mu_1 = \mu_2$ απορρίπτεται

Συνοψίζοντας...