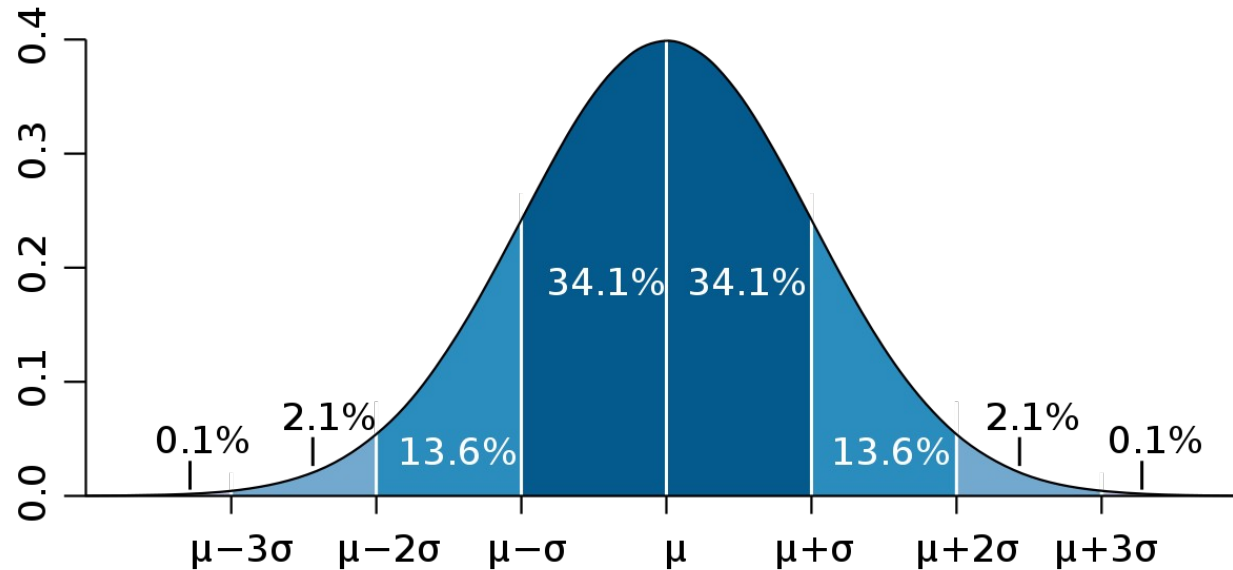


Θεωρία Πιθανοτήτων και Στατιστική



Διδάσκων: Επαμεινώνδας Διαμαντόπουλος
Επικοινωνία: epdiaman@ee.duth.gr

Κανονική Κατανομή

Κανονική Κατανομή – Συνάρτηση πυκνότητας

Η κανονική κατανομή (normal distribution) χρησιμοποιείται για να περιγραφούν τυχαίες μεταβλητές πραγματικών τιμών, οι οποίες λαμβάνουν τιμές ύστερα από την επίδραση πολλών ανεξάρτητων και αθροιστικών μεταξύ τους σφαλμάτων.

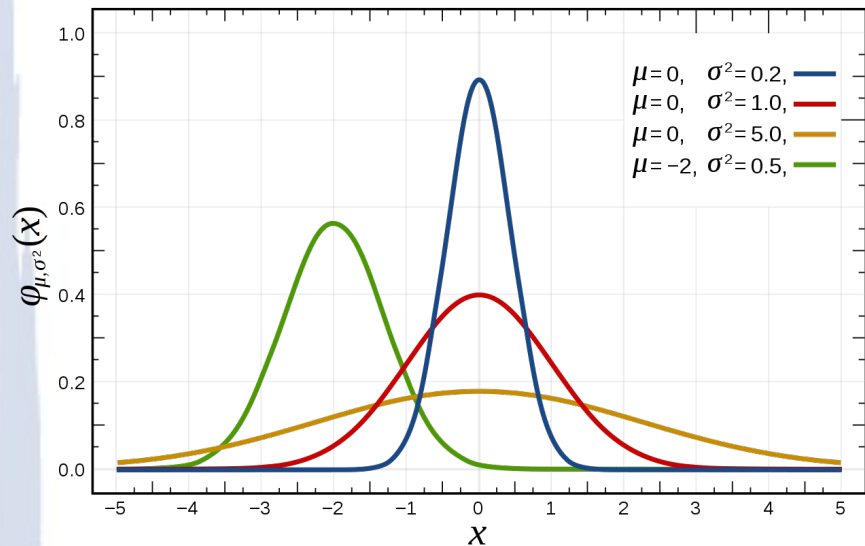
Αν $\mu \in \mathbb{R}$ και $\sigma \in (0, +\infty)$ τότε $\mathbf{X} \sim \mathbf{N}(\mu, \sigma^2)$ αν η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της X είναι η

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Σημειώσεις:

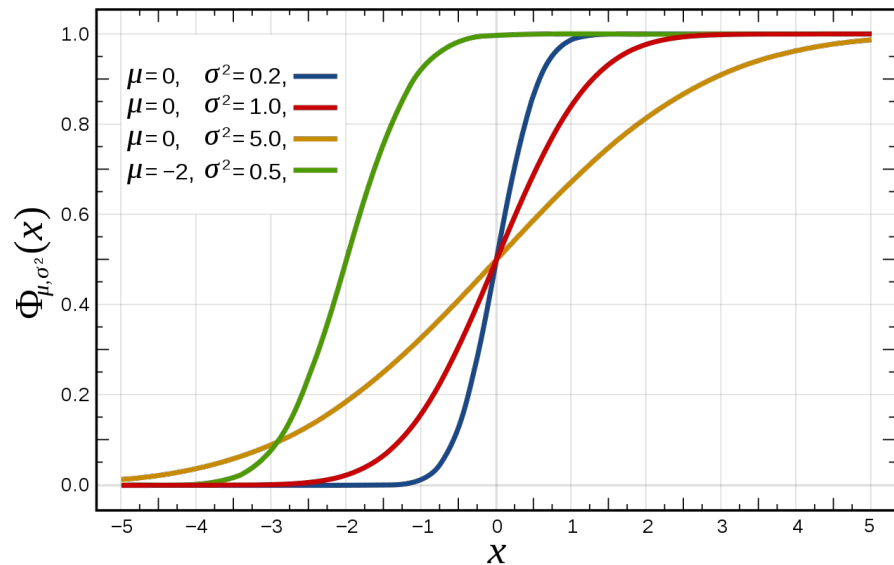
1. Η συνάρτηση κατανομής $F_X(X \leq x)$ δεν προσφέρεται σε κλειστή μορφή καθώς το ολοκλήρωμα της $f(x)$ από το $-\infty$ έως το x δεν υπολογίζεται με κάποια γνωστή μέθοδο

Κανονική Κατανομή



Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$



Συνάρτηση κατανομής

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt.$$

Κανονική Κατανομή: Γεωμετρικά Χαρακτηριστικά

$$X \sim N(\mu, \sigma^2): f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$\text{Αναμενόμενη τιμή: } E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} xe^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \mu.$$

$$\text{Διακύμανση: } \text{Var}(X) = E[(X - \mu)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \sigma^2.$$

Τυπική απόκλιση: σ .

$$\text{Συντελεστής ασυμμετρίας: } \gamma = \frac{E[(X - \mu)^3]}{\sigma^3} = \frac{1}{\sigma^3} \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^3 f(x) dx = 0. \quad \text{(απολύτως συμμετρική κατανομή γύρω από το } \mu \text{)}$$

$$\text{Συντελεστής κυρτότητας: } \alpha = \frac{E[(X - \mu)^4]}{\sigma^4} = \frac{1}{\sigma^4} \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^4 f(x) dx = 3.$$

Κανονική Κατανομή – Συνάρτηση πυκνότητας

Παραδείγματα

1. Αν $X \sim N(10, 25) = N(10, 5^2)$, τότε $f(x) = \frac{1}{5\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-10)^2}{50}}$

2. Αν $X \sim N(0, 2) = N(0, (\sqrt{2})^2)$, τότε $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

3. Αν $X \sim N(0, 1)$, τότε $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

Η περίπτωση $N(0, 1)$ είναι ιδιαίτερης σημασίας. Ονομάζεται **τυποποιημένη κανονική κατανομή** (standard normal distribution).

Κανονική Κατανομή – Συνάρτηση πυκνότητας

Παραδείγματα

1. Αν $f(x) = \frac{1}{3\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-2)^2}{18}}$, τότε $\mu = 2$ και $\sigma = 3$ ή $X \sim N(2, 3^2) = N(2, 9)$.

2. Αν $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x+1)^2}{2}}$, τότε $\mu = -1$ και $\sigma = 1$ ή $X \sim N(-1, 1^2) = N(-1, 1)$.

Κανονική Κατανομή – Συνάρτηση κατανομής

Αν $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ τότε η συνάρτηση κατανομής

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx,$$

δεν προσφέρεται σε κλειστή μορφή καθώς το συγκεκριμένο ολοκλήρωμα δεν υπολογίζεται με κάποια γνωστή μέθοδο. Για να αντιμετωπιστεί αυτό το πρόβλημα έχει καθιερωθεί μία διαδικασία σε δύο βήματα:

1^ο βήμα

Η αναγωγή της τ.μ. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ σε μία νέα τ.μ. $Z \sim N(0, 1)$.

2^ο βήμα

Η εύρεση της ζητούμενης πιθανότητας $\Phi(z) = F_Z(z) = P(Z \leq z)$ από έτοιμους πίνακες της $N(0, 1)$ που έχουν βρεθεί με αριθμητικές προσεγγιστικές μεθόδους.

Κανονική Κατανομή – Συνάρτηση κατανομής

1^ο βήμα: Αναγωγή της $N(\mu, \sigma^2)$ στη $N(0, 1)$.

Πρόταση

Αν $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ τότε $Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$.

Απόδειξη

Πράγματι, αν $x \in \mathbb{R}$, τότε $F_X(x) = P(X \leq x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2} d\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x-\mu}{\sigma}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = F_Z\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right).$$

Από την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της Z είναι φανερό ότι $Z \sim N(0, 1)$.

2ο βήμα: Εύρεση της $\Phi(z) = P(Z \leq z)$ από έτοιμους πίνακες της $N(0, 1)$

STANDARD NORMAL DISTRIBUTION: Table Values Represent AREA to the LEFT of the Z score.

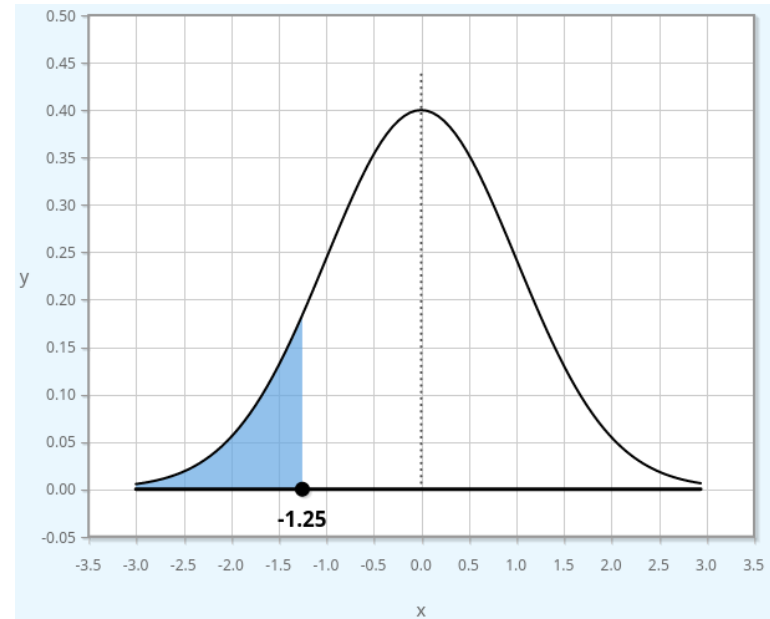
Z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
-3.9	.00005	.00005	.00004	.00004	.00004	.00004	.00004	.00004	.00003	.00003
-3.8	.00007	.00007	.00007	.00006	.00006	.00006	.00006	.00005	.00005	.00005
-3.7	.00011	.00010	.00010	.00010	.00009	.00009	.00008	.00008	.00008	.00008
-3.6	.00016	.00015	.00015	.00014	.00014	.00013	.00013	.00012	.00012	.00011
-3.5	.00023	.00022	.00022	.00021	.00020	.00019	.00019	.00018	.00017	.00017
-3.4	.00034	.00032	.00031	.00030	.00029	.00028	.00027	.00026	.00025	.00024
-3.3	.00048	.00047	.00045	.00043	.00042	.00040	.00039	.00038	.00036	.00035
-3.2	.00069	.00066	.00064	.00062	.00060	.00058	.00056	.00054	.00052	.00050
-3.1	.00097	.00094	.00090	.00087	.00084	.00082	.00079	.00076	.00074	.00071
-3.0	.00135	.00131	.00126	.00122	.00118	.00114	.00111	.00107	.00104	.00100
-2.9	.00187	.00181	.00175	.00169	.00164	.00159	.00154	.00149	.00144	.00139
-2.8	.00256	.00248	.00240	.00233	.00226	.00219	.00212	.00205	.00199	.00193
-2.7	.00347	.00336	.00326	.00317	.00307	.00298	.00289	.00280	.00272	.00264
-2.6	.00466	.00453	.00440	.00427	.00415	.00402	.00391	.00379	.00368	.00357
-2.5	.00621	.00604	.00587	.00570	.00554	.00539	.00523	.00508	.00494	.00480
-2.4	.00820	.00798	.00776	.00755	.00734	.00714	.00695	.00676	.00657	.00639
-2.3	.01072	.01044	.01017	.00990	.00964	.00939	.00914	.00889	.00866	.00842
-2.2	.01390	.01355	.01321	.01287	.01255	.01222	.01191	.01160	.01130	.01101
-2.1	.01786	.01743	.01700	.01659	.01618	.01578	.01539	.01500	.01463	.01426
-2.0	.02275	.02222	.02169	.02118	.02068	.02018	.01970	.01923	.01876	.01831
-1.9	.02872	.02807	.02743	.02680	.02619	.02559	.02500	.02442	.02385	.02330
-1.8	.03593	.03515	.03438	.03362	.03288	.03216	.03144	.03074	.03005	.02938
-1.7	.04457	.04363	.04272	.04182	.04093	.04006	.03920	.03836	.03754	.03673
-1.6	.05480	.05370	.05262	.05155	.05050	.04947	.04846	.04746	.04648	.04551
-1.5	.06681	.06552	.06426	.06301	.06178	.06057	.05938	.05821	.05705	.05592
-1.4	.08076	.07927	.07780	.07636	.07493	.07353	.07215	.07078	.06944	.06811
-1.3	.09680	.09510	.09342	.09176	.09012	.08851	.08691	.08534	.08379	.08226
-1.2	.11507	.11314	.11123	.10935	.10749	.10565	.10383	.10204	.10027	.09853
-1.1	.13567	.13350	.13136	.12924	.12714	.12507	.12302	.12100	.11900	.11702
-1.0	.15866	.15625	.15386	.15151	.14917	.14686	.14457	.14231	.14007	.13786
-0.9	.18406	.18141	.17879	.17619	.17361	.17106	.16853	.16602	.16354	.16109
-0.8	.21186	.20897	.20611	.20327	.20045	.19766	.19489	.19215	.18943	.18673
-0.7	.24196	.23885	.23576	.23270	.22965	.22663	.22363	.22065	.21770	.21476
-0.6	.27425	.27093	.26763	.26435	.26109	.25785	.25463	.25143	.24825	.24510
-0.5	.30854	.30503	.30153	.29806	.29460	.29116	.28774	.28434	.28096	.27760
-0.4	.34458	.34090	.33724	.33360	.32997	.32636	.32276	.31918	.31561	.31207
-0.3	.38209	.37828	.37448	.37070	.36693	.36317	.35942	.35569	.35197	.34827
-0.2	.42074	.41683	.41294	.40905	.40517	.40129	.39743	.39358	.38974	.38591
-0.1	.46017	.45620	.45224	.44828	.44433	.44038	.43644	.43251	.42858	.42465
-0.0	.50000	.49601	.49202	.48803	.48405	.48006	.47608	.47210	.46812	.46415

STANDARD NORMAL DISTRIBUTION: Table Values Represent AREA to the LEFT of the Z score.

Z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.50000	.50399	.50798	.51197	.51595	.51994	.52392	.52790	.53188	.53586
0.1	.53983	.54380	.54776	.55172	.55567	.55962	.56356	.56749	.57142	.57535
0.2	.57926	.58317	.58706	.59095	.59483	.59871	.60257	.60642	.61026	.61409
0.3	.61791	.62172	.62552	.62930	.63307	.63683	.64058	.64431	.64803	.65173
0.4	.65542	.65910	.66276	.66640	.67003	.67364	.67724	.68082	.68439	.68793
0.5	.69146	.69497	.69847	.70194	.70540	.70884	.71226	.71566	.71904	.72240
0.6	.72575	.72907	.73237	.73565	.73891	.74215	.74537	.74857	.75175	.75490
0.7	.75804	.76115	.76424	.76730	.77035	.77337	.77637	.77935	.78230	.78524
0.8	.78814	.79103	.79389	.79673	.79955	.80234	.80511	.80785	.81057	.81327
0.9	.81594	.81859	.82121	.82381	.82639	.82894	.83147	.83398	.83646	.83891
1.0	.84134	.84375	.84614	.84849	.85083	.85314	.85543	.85769	.85993	.86214
1.1	.86433	.86650	.86864	.87076	.87286	.87493	.87698	.87900	.88100	.88298
1.2	.88493	.88686	.88877	.89065	.89251	.89435	.89617	.89796	.89973	.90147
1.3	.90320	.90490	.90658	.90824	.90988	.91149	.91309	.91466	.91621	.91774
1.4	.91924	.92073	.92220	.92364	.92507	.92647	.92785	.92922	.93056	.93189
1.5	.93319	.93448	.93574	.93699	.93822	.93943	.94062	.94179	.94295	.94408
1.6	.94520	.94630	.94738	.94845	.94950	.95053	.95154	.95254	.95352	.95449
1.7	.95543	.95637	.95728	.95818	.95907	.95994	.96080	.96164	.96246	.96327
1.8	.96407	.96485	.96562	.96638	.96712	.96784	.96856	.96926	.96995	.97062
1.9	.97128	.97193	.97257	.97320	.97381	.97441	.97500	.97558	.97615	.97670
2.0	.97725	.97778	.97831	.97882	.97932	.97982	.98030	.98077	.98124	.98169
2.1	.98214	.98257	.98300	.98341	.98382	.98422	.98461	.98500	.98537	.98574
2.2	.98610	.98645	.98679	.98713	.98745	.98778	.98809	.98840	.98870	.98899
2.3	.98928	.98956	.98983	.99010	.99036	.99061	.99086	.99111	.99134	.99158
2.4	.99180	.99202	.99224	.99245	.99266	.99286	.99305	.99324	.99343	.99361
2.5	.99379	.99396	.99413	.99430	.99446	.99461	.99477	.99492	.99506	.99520
2.6	.99534	.99547	.99560	.99573	.99585	.99598	.99609	.99621	.99632	.99643
2.7	.99653	.99664	.99674	.99683	.99693	.99702	.99711	.99720	.99728	.99736
2.8	.99744	.99752	.99760	.99767	.99774	.99781	.99788	.99795	.99801	.99807
2.9	.99813	.99819	.99825	.99831	.99836	.99841	.99846	.99851	.99856	.99861
3.0	.99865	.99869	.99874	.99878	.99882	.99886	.99889	.99893	.99896	.99900
3.1	.99903	.99906	.99910	.99913	.99916	.99918	.99921	.99924	.99926	.99929
3.2	.99931	.99934	.99936	.99938	.99940	.99942	.99944	.99946	.99948	.99950
3.3	.99952	.99953	.99955	.99957	.99958	.99960	.99961	.99962	.99964	.99965
3.4	.99966	.99968	.99969	.99970	.99971	.99972	.99973	.99974	.99975	.99976
3.5	.99977	.99978	.99978	.99979	.99980	.99981	.99981	.99982	.99983	.99983
3.6	.99984	.99985	.99985	.99986	.99986	.99987	.99987	.99988	.99988	.99989
3.7	.99989	.99990	.99990	.99990	.99991	.99991	.99992	.99992	.99992	.99992
3.8	.99993	.99993	.99993	.99994	.99994	.99994	.99994	.99995	.99995	.99995
3.9	.99995	.99995	.99996	.99996	.99996	.99996	.99996	.99996	.99997	.99997

STANDARD NORMAL DISTRIBUTION: Table Values Represent AREA to the LEFT of the Z score.

Z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
-3.9	.00005	.00005	.00004	.00004	.00004	.00004	.00004	.00004	.00003	.00003
-3.8	.00007	.00007	.00007	.00006	.00006	.00006	.00006	.00005	.00005	.00005
-3.7	.00011	.00010	.00010	.00010	.00009	.00009	.00008	.00008	.00008	.00008
-3.6	.00016	.00015	.00015	.00014	.00014	.00013	.00013	.00012	.00012	.00011
-3.5	.00023	.00022	.00022	.00021	.00020	.00019	.00019	.00018	.00017	.00017
-3.4	.00034	.00032	.00031	.00030	.00029	.00028	.00027	.00026	.00025	.00024
-3.3	.00048	.00047	.00045	.00043	.00042	.00040	.00039	.00038	.00036	.00035
-3.2	.00069	.00066	.00064	.00062	.00060	.00058	.00056	.00054	.00052	.00050
-3.1	.00097	.00094	.00090	.00087	.00084	.00082	.00079	.00076	.00074	.00071
-3.0	.00135	.00131	.00126	.00122	.00118	.00114	.00111	.00107	.00104	.00100
-2.9	.00187	.00181	.00175	.00169	.00164	.00159	.00154	.00149	.00144	.00139
-2.8	.00256	.00248	.00240	.00233	.00226	.00219	.00212	.00205	.00199	.00193
-2.7	.00347	.00336	.00326	.00317	.00307	.00298	.00289	.00280	.00272	.00264
-2.6	.00466	.00453	.00440	.00427	.00415	.00402	.00391	.00379	.00368	.00357
-2.5	.00621	.00604	.00587	.00570	.00554	.00539	.00523	.00508	.00494	.00480
-2.4	.00820	.00798	.00776	.00755	.00734	.00714	.00695	.00676	.00657	.00639
-2.3	.01072	.01044	.01017	.00990	.00964	.00939	.00914	.00889	.00866	.00842
-2.2	.01390	.01355	.01321	.01287	.01255	.01222	.01191	.01160	.01130	.01101
-2.1	.01786	.01743	.01700	.01659	.01618	.01578	.01539	.01500	.01463	.01426
-2.0	.02275	.02222	.02169	.02118	.02068	.02018	.01970	.01923	.01876	.01831
-1.9	.02872	.02807	.02743	.02680	.02619	.02559	.02500	.02442	.02385	.02330
-1.8	.03593	.03515	.03438	.03362	.03288	.03216	.03144	.03074	.03005	.02938
-1.7	.04457	.04363	.04272	.04182	.04093	.04006	.03920	.03836	.03754	.03673
-1.6	.05480	.05370	.05262	.05155	.05050	.04947	.04846	.04746	.04648	.04551
-1.5	.06681	.06552	.06426	.06301	.06178	.06057	.05938	.05821	.05705	.05592
-1.4	.08076	.07927	.07780	.07636	.07493	.07353	.07215	.07078	.06944	.06811
-1.3	.09680	.09510	.09342	.09176	.09012	.08851	.08691	.08534	.08379	.08226
-1.2	.11507	.11314	.11123	.10935	.10749	.10565	.10383	.10204	.10027	.09853
-1.1	.13567	.13350	.13136	.12924	.12714	.12507	.12302	.12100	.11900	.11702
-1.0	.15866	.15625	.15386	.15151	.14917	.14686	.14457	.14231	.14007	.13786
-0.9	.18406	.18141	.17879	.17619	.17361	.17106	.16853	.16602	.16354	.16109
-0.8	.21186	.20897	.20611	.20327	.20045	.19766	.19489	.19215	.18943	.18673
-0.7	.24196	.23885	.23576	.23270	.22965	.22663	.22363	.22065	.21770	.21476
-0.6	.27425	.27093	.26763	.26435	.26109	.25785	.25463	.25143	.24825	.24510
-0.5	.30854	.30503	.30153	.29806	.29460	.29116	.28774	.28434	.28096	.27760
-0.4	.34458	.34090	.33724	.33360	.32997	.32636	.32276	.31918	.31561	.31207
-0.3	.38209	.37828	.37448	.37070	.36693	.36317	.35942	.35569	.35197	.34827
-0.2	.42074	.41683	.41294	.40905	.40517	.40129	.39743	.39358	.38974	.38591
-0.1	.46017	.45620	.45224	.44828	.44433	.44038	.43644	.43251	.42858	.42465
-0.0	.50000	.49601	.49202	.48803	.48405	.48006	.47608	.47210	.46812	.46414



π.χ. Αν $Z \sim N(0, 1)$, να βρεθούν οι

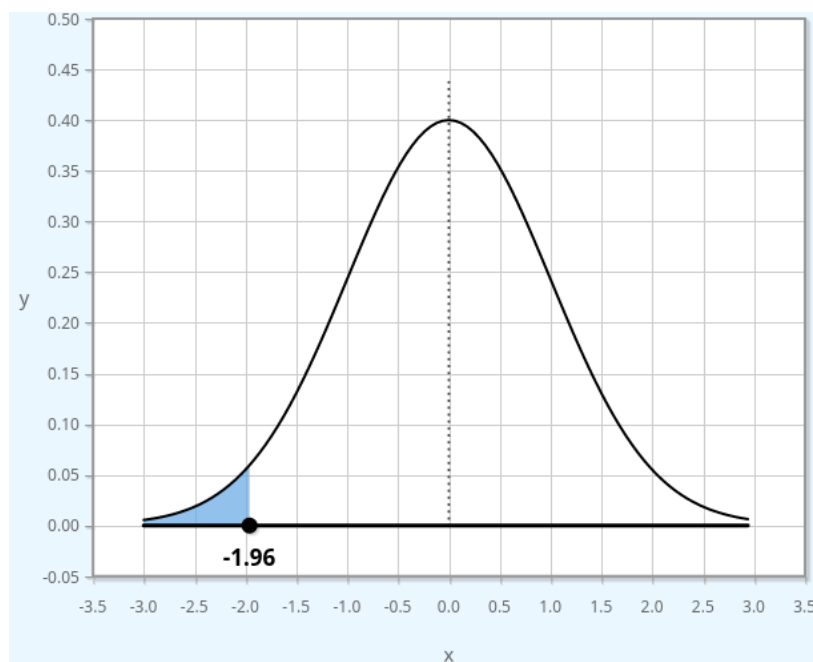
(α) $P(Z < -1,25)$

(β) $P(-1,25 < Z < 0)$

(γ) $P(Z > -1,25)$

STANDARD NORMAL DISTRIBUTION: Table Values Represent AREA to the LEFT of the Z score.

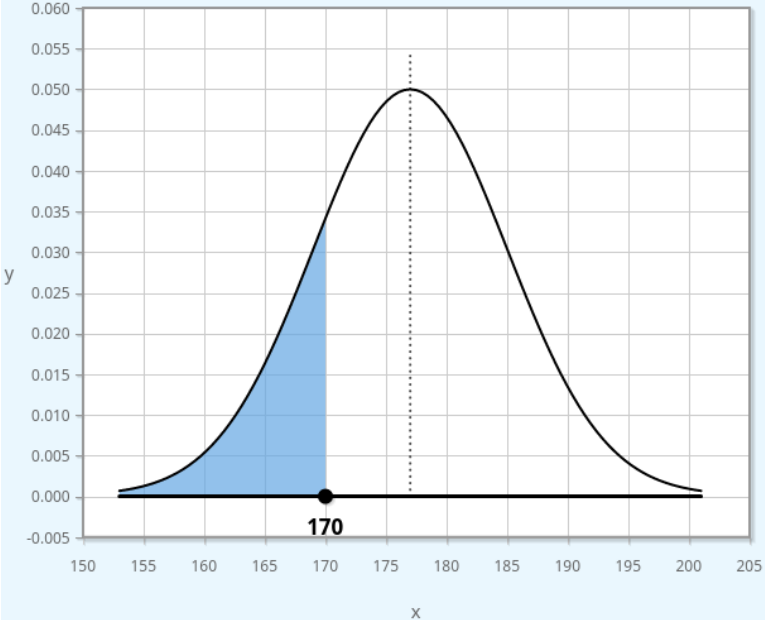
Z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
-3.9	.00005	.00005	.00004	.00004	.00004	.00004	.00004	.00004	.00003	.00003
-3.8	.00007	.00007	.00007	.00006	.00006	.00006	.00006	.00005	.00005	.00005
-3.7	.00011	.00010	.00010	.00010	.00009	.00009	.00008	.00008	.00008	.00008
-3.6	.00016	.00015	.00015	.00014	.00014	.00013	.00013	.00012	.00012	.00011
-3.5	.00023	.00022	.00022	.00021	.00020	.00019	.00019	.00018	.00017	.00017
-3.4	.00034	.00032	.00031	.00030	.00029	.00028	.00027	.00026	.00025	.00024
-3.3	.00048	.00047	.00045	.00043	.00042	.00040	.00039	.00038	.00036	.00035
-3.2	.00069	.00066	.00064	.00062	.00060	.00058	.00056	.00054	.00052	.00050
-3.1	.00097	.00094	.00090	.00087	.00084	.00082	.00079	.00076	.00074	.00071
-3.0	.00135	.00131	.00126	.00122	.00118	.00114	.00111	.00107	.00104	.00100
-2.9	.00187	.00181	.00175	.00169	.00164	.00159	.00154	.00149	.00144	.00139
-2.8	.00256	.00248	.00240	.00233	.00226	.00219	.00212	.00205	.00199	.00193
-2.7	.00347	.00336	.00326	.00317	.00307	.00298	.00289	.00280	.00272	.00264
-2.6	.00466	.00453	.00440	.00427	.00415	.00402	.00391	.00379	.00368	.00357
-2.5	.00621	.00604	.00587	.00570	.00554	.00539	.00523	.00508	.00494	.00480
-2.4	.00820	.00798	.00776	.00755	.00734	.00714	.00695	.00676	.00657	.00639
-2.3	.01072	.01044	.01017	.00990	.00964	.00939	.00914	.00889	.00866	.00842
-2.2	.01390	.01355	.01321	.01287	.01255	.01222	.01191	.01160	.01130	.01101
-2.1	.01786	.01743	.01700	.01659	.01618	.01578	.01539	.01500	.01463	.01426
-2.0	.02275	.02222	.02169	.02118	.02068	.02018	.01970	.01923	.01876	.01831
-1.9	.02872	.02807	.02743	.02680	.02619	.02559	.02500	.02442	.02385	.02330
-1.8	.03593	.03515	.03438	.03362	.03288	.03216	.03144	.03074	.03005	.02938
-1.7	.04457	.04363	.04272	.04182	.04093	.04006	.03920	.03836	.03754	.03673
-1.6	.05480	.05370	.05262	.05155	.05050	.04947	.04846	.04746	.04648	.04551
-1.5	.06681	.06552	.06426	.06301	.06178	.06057	.05938	.05821	.05705	.05592
-1.4	.08076	.07927	.07780	.07636	.07493	.07353	.07215	.07078	.06944	.06811
-1.3	.09680	.09510	.09342	.09176	.09012	.08851	.08691	.08534	.08379	.08226
-1.2	.11507	.11314	.11123	.10935	.10749	.10565	.10383	.10204	.10027	.09853
-1.1	.13567	.13350	.13136	.12924	.12714	.12507	.12302	.12100	.11900	.11702
-1.0	.15866	.15625	.15386	.15151	.14917	.14686	.14457	.14231	.14007	.13786
-0.9	.18406	.18141	.17879	.17619	.17361	.17106	.16853	.16602	.16354	.16109
-0.8	.21186	.20897	.20611	.20327	.20045	.19766	.19489	.19215	.18943	.18673
-0.7	.24196	.23885	.23576	.23270	.22965	.22663	.22363	.22065	.21770	.21476
-0.6	.27425	.27093	.26763	.26435	.26109	.25785	.25463	.25143	.24825	.24510
-0.5	.30854	.30503	.30153	.29806	.29460	.29116	.28774	.28434	.28096	.27760
-0.4	.34458	.34090	.33724	.33360	.32997	.32636	.32276	.31918	.31561	.31207
-0.3	.38209	.37828	.37448	.37070	.36693	.36317	.35942	.35569	.35197	.34827
-0.2	.42074	.41683	.41294	.40905	.40517	.40129	.39743	.39358	.38974	.38591
-0.1	.46017	.45620	.45224	.44828	.44433	.44038	.43644	.43251	.42858	.42465
-0.0	.50000	.49601	.49202	.48803	.48405	.48006	.47608	.47210	.46812	.46414



π.χ. Αν $Z \sim N(0, 1)$, να βρεθεί η $P(Z < -1,96)$

STANDARD NORMAL DISTRIBUTION: Table Values Represent AREA to the LEFT of the Z score.

Z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
-3.9	.00005	.00005	.00004	.00004	.00004	.00004	.00004	.00004	.00003	.00003
-3.8	.00007	.00007	.00007	.00006	.00006	.00006	.00006	.00005	.00005	.00005
-3.7	.00011	.00010	.00010	.00010	.00009	.00009	.00008	.00008	.00008	.00008
-3.6	.00016	.00015	.00015	.00014	.00014	.00013	.00013	.00012	.00012	.00011
-3.5	.00023	.00022	.00022	.00021	.00020	.00019	.00019	.00018	.00017	.00017
-3.4	.00034	.00032	.00031	.00030	.00029	.00028	.00027	.00026	.00025	.00024
-3.3	.00048	.00047	.00045	.00043	.00042	.00040	.00039	.00038	.00036	.00035
-3.2	.00069	.00066	.00064	.00062	.00060	.00058	.00056	.00054	.00052	.00050
-3.1	.00097	.00094	.00090	.00087	.00084	.00082	.00079	.00076	.00074	.00071
-3.0	.00135	.00131	.00126	.00122	.00118	.00114	.00111	.00107	.00104	.00100
-2.9	.00187	.00181	.00175	.00169	.00164	.00159	.00154	.00149	.00144	.00139
-2.8	.00256	.00248	.00240	.00233	.00226	.00219	.00212	.00205	.00199	.00193
-2.7	.00347	.00336	.00326	.00317	.00307	.00298	.00289	.00280	.00272	.00264
-2.6	.00466	.00453	.00440	.00427	.00415	.00402	.00391	.00379	.00368	.00357
-2.5	.00621	.00604	.00587	.00570	.00554	.00539	.00523	.00508	.00494	.00480
-2.4	.00820	.00798	.00776	.00755	.00734	.00714	.00695	.00676	.00657	.00639
-2.3	.01072	.01044	.01017	.00990	.00964	.00939	.00914	.00889	.00866	.00842
-2.2	.01390	.01355	.01321	.01287	.01255	.01222	.01191	.01160	.01130	.01101
-2.1	.01786	.01743	.01700	.01659	.01618	.01578	.01539	.01500	.01463	.01426
-2.0	.02275	.02222	.02169	.02118	.02068	.02018	.01970	.01923	.01876	.01831
-1.9	.02872	.02807	.02743	.02680	.02619	.02559	.02500	.02442	.02385	.02330
-1.8	.03593	.03515	.03438	.03362	.03288	.03216	.03144	.03074	.03005	.02938
-1.7	.04457	.04363	.04272	.04182	.04093	.04006	.03920	.03836	.03754	.03673
-1.6	.05480	.05370	.05262	.05155	.05050	.04947	.04846	.04746	.04648	.04551
-1.5	.06681	.06552	.06426	.06301	.06178	.06057	.05938	.05821	.05705	.05592
-1.4	.08076	.07927	.07780	.07636	.07493	.07353	.07215	.07078	.06944	.06811
-1.3	.09680	.09510	.09342	.09176	.09012	.08851	.08691	.08534	.08379	.08226
-1.2	.11507	.11314	.11123	.10935	.10749	.10565	.10383	.10204	.10027	.09853
-1.1	.13567	.13350	.13136	.12924	.12714	.12507	.12302	.12100	.11900	.11702
-1.0	.15866	.15625	.15386	.15151	.14917	.14686	.14457	.14231	.14007	.13786
-0.9	.18406	.18141	.17879	.17619	.17361	.17106	.16853	.16602	.16354	.16109
-0.8	.21186	.20897	.20611	.20327	.20045	.19766	.19489	.19215	.18943	.18673
-0.7	.24196	.23885	.23576	.23270	.22965	.22663	.22363	.22065	.21770	.21476
-0.6	.27425	.27093	.26763	.26435	.26109	.25785	.25463	.25143	.24825	.24510
-0.5	.30854	.30503	.30153	.29806	.29460	.29116	.28774	.28434	.28096	.27760
-0.4	.34458	.34090	.33724	.33360	.32997	.32636	.32276	.31918	.31561	.31207
-0.3	.38209	.37828	.37448	.37070	.36693	.36317	.35942	.35569	.35197	.34827
-0.2	.42074	.41683	.41294	.40905	.40517	.40129	.39743	.39358	.38974	.38591
-0.1	.46017	.45620	.45224	.44828	.44433	.44038	.43644	.43251	.42858	.42465
-0.0	.50000	.49601	.49202	.48803	.48405	.48006	.47608	.47210	.46812	.46414



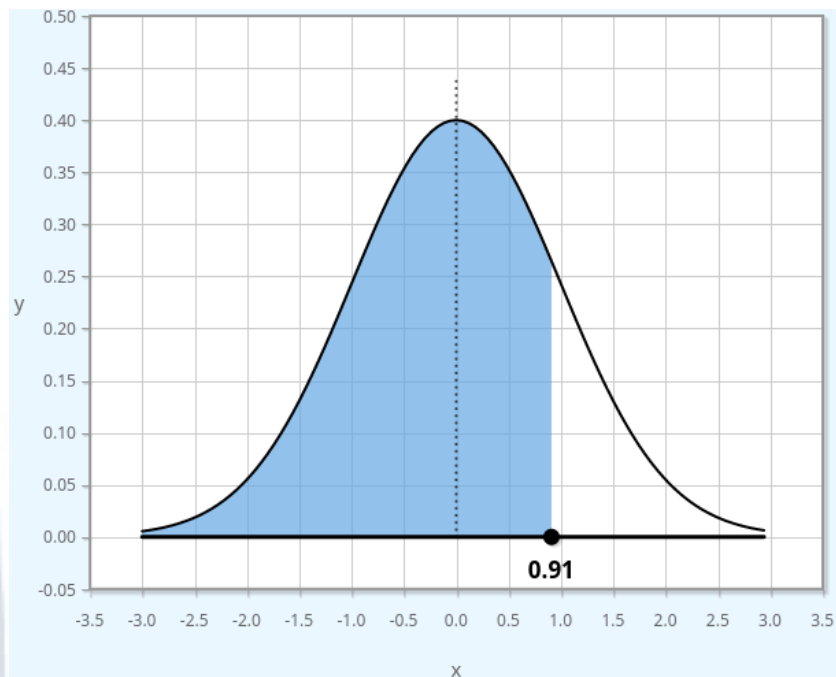
π.χ. Αν $Z \sim N(177, 8)$, να βρεθεί η $P(Z < 170)$

STANDARD NORMAL DISTRIBUTION: Table Values Represent AREA to the LEFT of the Z score.

Z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
-3.9	.00005	.00005	.00004	.00004	.00004	.00004	.00004	.00004	.00003	.00003
-3.8	.00007	.00007	.00007	.00006	.00006	.00006	.00006	.00005	.00005	.00005
-3.7	.00011	.00010	.00010	.00010	.00009	.00009	.00008	.00008	.00008	.00008
-3.6	.00016	.00015	.00015	.00014	.00014	.00013	.00013	.00012	.00012	.00011
-3.5	.00023	.00022	.00022	.00021	.00020	.00019	.00019	.00018	.00017	.00017
-3.4	.00034	.00032	.00031	.00030	.00029	.00028	.00027	.00026	.00025	.00024
-3.3	.00048	.00047	.00045	.00043	.00042	.00040	.00039	.00038	.00036	.00035
-3.2	.00069	.00066	.00064	.00062	.00060	.00058	.00056	.00054	.00052	.00050
-3.1	.00097	.00094	.00090	.00087	.00084	.00082	.00079	.00076	.00074	.00071
-3.0	.00135	.00131	.00126	.00122	.00118	.00114	.00111	.00107	.00104	.00100
-2.9	.00187	.00181	.00175	.00169	.00164	.00159	.00154	.00149	.00144	.00139
-2.8	.00256	.00248	.00240	.00233	.00226	.00219	.00212	.00205	.00199	.00193
-2.7	.00347	.00336	.00326	.00317	.00307	.00298	.00289	.00280	.00272	.00264
-2.6	.00466	.00453	.00440	.00427	.00415	.00402	.00391	.00379	.00368	.00357
-2.5	.00621	.00604	.00587	.00570	.00554	.00539	.00523	.00508	.00494	.00480
-2.4	.00820	.00798	.00776	.00755	.00734	.00714	.00695	.00676	.00657	.00639
-2.3	.01072	.01044	.01017	.00990	.00964	.00939	.00914	.00889	.00866	.00842
-2.2	.01390	.01355	.01321	.01287	.01255	.01222	.01191	.01160	.01130	.01101
-2.1	.01786	.01743	.01700	.01659	.01618	.01578	.01539	.01500	.01463	.01426
-2.0	.02275	.02222	.02169	.02118	.02068	.02018	.01970	.01923	.01876	.01831
-1.9	.02872	.02807	.02743	.02680	.02619	.02559	.02500	.02442	.02385	.02330
-1.8	.03593	.03515	.03438	.03362	.03288	.03216	.03144	.03074	.03005	.02938
-1.7	.04457	.04363	.04272	.04182	.04093	.04006	.03920	.03836	.03754	.03673
-1.6	.05480	.05370	.05262	.05155	.05050	.04947	.04846	.04746	.04648	.04551
-1.5	.06681	.06552	.06426	.06301	.06178	.06057	.05938	.05821	.05705	.05592
-1.4	.08076	.07927	.07780	.07636	.07493	.07353	.07215	.07078	.06944	.06811
-1.3	.09680	.09510	.09342	.09176	.09012	.08851	.08691	.08534	.08379	.08226
-1.2	.11507	.11314	.11123	.10935	.10749	.10565	.10383	.10204	.10027	.09853
-1.1	.13567	.13350	.13136	.12924	.12714	.12507	.12302	.12100	.11900	.11702
-1.0	.15866	.15625	.15386	.15151	.14917	.14686	.14457	.14231	.14007	.13786
-0.9	.18406	.18141	.17879	.17619	.17361	.17106	.16853	.16602	.16354	.16109
-0.8	.21186	.20897	.20611	.20327	.20045	.19766	.19489	.19215	.18943	.18673
-0.7	.24196	.23885	.23576	.23270	.22965	.22663	.22363	.22065	.21770	.21476
-0.6	.27425	.27093	.26763	.26435	.26109	.25785	.25463	.25143	.24825	.24510
-0.5	.30854	.30503	.30153	.29806	.29460	.29116	.28774	.28434	.28096	.27760
-0.4	.34458	.34090	.33724	.33360	.32997	.32636	.32276	.31918	.31561	.31207
-0.3	.38209	.37828	.37448	.37070	.36693	.36317	.35942	.35569	.35197	.34827
-0.2	.42074	.41683	.41294	.40905	.40517	.40129	.39743	.39358	.38974	.38591
-0.1	.46017	.45620	.45224	.44828	.44433	.44038	.43644	.43251	.42858	.42465
-0.0	.50000	.49601	.49202	.48803	.48405	.48006	.47608	.47210	.46812	.46414

Να βρεθεί ο αριθμός z για τον οποίον ισχύει:

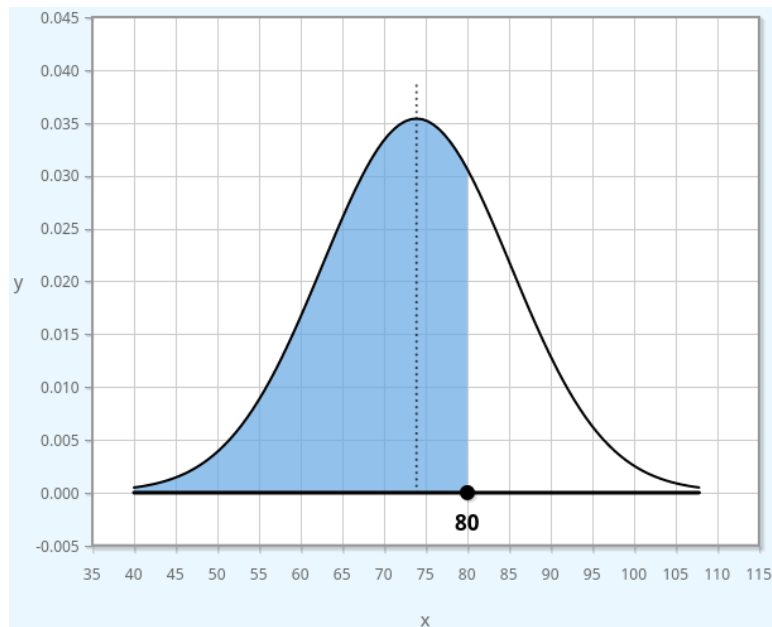
$$P(Z < z) = 0,305$$



π.χ. Αν $Z \sim N(0, 1)$, να βρεθεί η $P(Z < 0,91)$

STANDARD NORMAL DISTRIBUTION: Table Values Represent AREA to the LEFT of the Z score.

Z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.50000	.50399	.50798	.51197	.51595	.51994	.52392	.52790	.53188	.53586
0.1	.53983	.54380	.54776	.55172	.55567	.55962	.56356	.56749	.57142	.57535
0.2	.57926	.58317	.58706	.59095	.59483	.59871	.60257	.60642	.61026	.61409
0.3	.61791	.62172	.62552	.62930	.63307	.63683	.64058	.64431	.64803	.65173
0.4	.65542	.65910	.66276	.66640	.67003	.67364	.67724	.68082	.68439	.68793
0.5	.69146	.69497	.69847	.70194	.70540	.70884	.71226	.71566	.71904	.72240
0.6	.72575	.72907	.73237	.73565	.73891	.74215	.74537	.74857	.75175	.75490
0.7	.75804	.76115	.76424	.76730	.77035	.77337	.77637	.77935	.78230	.78524
0.8	.78814	.79103	.79389	.79673	.79955	.80234	.80511	.80785	.81057	.81327
0.9	.81594	.81859	.82121	.82381	.82639	.82894	.83147	.83398	.83646	.83891
1.0	.84134	.84375	.84614	.84849	.85083	.85314	.85543	.85769	.85993	.86214
1.1	.86433	.86650	.86864	.87076	.87286	.87493	.87698	.87900	.88100	.88298
1.2	.88493	.88686	.88877	.89065	.89251	.89435	.89617	.89796	.89973	.90147
1.3	.90320	.90490	.90658	.90824	.90988	.91149	.91309	.91466	.91621	.91774
1.4	.91924	.92073	.92220	.92364	.92507	.92647	.92785	.92922	.93056	.93189
1.5	.93319	.93448	.93574	.93699	.93822	.93943	.94062	.94179	.94295	.94408
1.6	.94520	.94630	.94738	.94845	.94950	.95053	.95154	.95254	.95352	.95449
1.7	.95543	.95637	.95728	.95818	.95907	.95994	.96080	.96164	.96246	.96327
1.8	.96407	.96485	.96562	.96638	.96712	.96784	.96856	.96926	.96995	.97062
1.9	.97128	.97193	.97257	.97320	.97381	.97441	.97500	.97558	.97615	.97670
2.0	.97725	.97778	.97831	.97882	.97932	.97982	.98030	.98077	.98124	.98169
2.1	.98214	.98257	.98300	.98341	.98382	.98422	.98461	.98500	.98537	.98574
2.2	.98610	.98645	.98679	.98713	.98745	.98778	.98809	.98840	.98870	.98899
2.3	.98928	.98956	.98983	.99010	.99036	.99061	.99086	.99111	.99134	.99158
2.4	.99180	.99202	.99224	.99245	.99266	.99286	.99305	.99324	.99343	.99361
2.5	.99379	.99396	.99413	.99430	.99446	.99461	.99477	.99492	.99506	.99520
2.6	.99534	.99547	.99560	.99573	.99585	.99598	.99609	.99621	.99632	.99643
2.7	.99653	.99664	.99674	.99683	.99693	.99702	.99711	.99720	.99728	.99736
2.8	.99744	.99752	.99760	.99767	.99774	.99781	.99788	.99795	.99801	.99807
2.9	.99813	.99819	.99825	.99831	.99836	.99841	.99846	.99851	.99856	.99861
3.0	.99865	.99869	.99874	.99878	.99882	.99886	.99889	.99893	.99896	.99900
3.1	.99903	.99906	.99910	.99913	.99916	.99918	.99921	.99924	.99926	.99929
3.2	.99931	.99934	.99936	.99938	.99940	.99942	.99944	.99946	.99948	.99950
3.3	.99952	.99953	.99955	.99957	.99958	.99960	.99961	.99962	.99964	.99965
3.4	.99966	.99968	.99969	.99970	.99971	.99972	.99973	.99974	.99975	.99976
3.5	.99977	.99978	.99978	.99979	.99980	.99981	.99981	.99982	.99983	.99983
3.6	.99984	.99985	.99985	.99986	.99986	.99987	.99987	.99988	.99988	.99989
3.7	.99989	.99990	.99990	.99990	.99991	.99991	.99992	.99992	.99992	.99992
3.8	.99993	.99993	.99993	.99994	.99994	.99994	.99994	.99995	.99995	.99995
3.9	.99995	.99995	.99996	.99996	.99996	.99996	.99996	.99996	.99997	.99997



Το μέσο βάρος των νέων 20 – 29 ετών ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή 73,9 kg και τυπική απόκλιση 11,3 kg.

(α) Να βρεθεί το ποσοστό των νέων με βάρος μικρότερο από 80 κιλά.

(β) Να βρεθεί το ποσοστό των νέων με βάρος μεγαλύτερο από 80 κιλά.

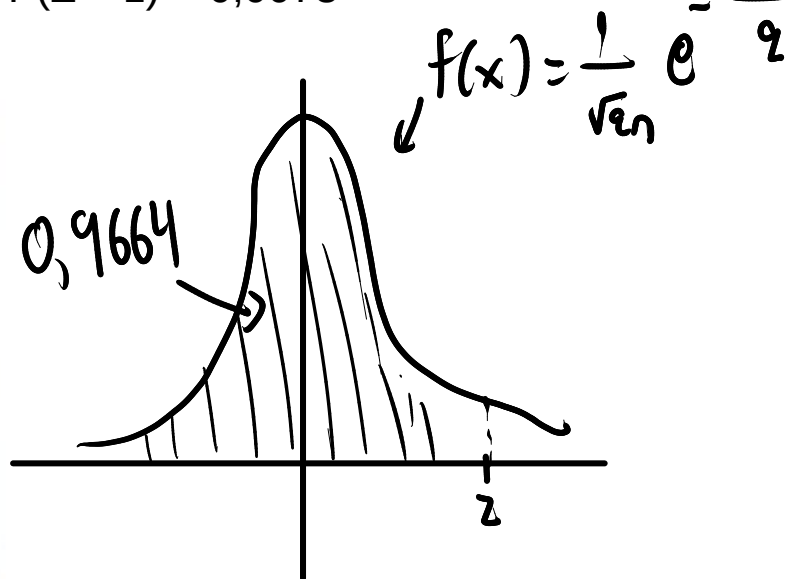
Z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.50000	.50399	.50798	.51197	.51595	.51994	.52392	.52790	.53188	.53586
0.1	.53983	.54380	.54776	.55172	.55567	.55962	.56356	.56749	.57142	.57535
0.2	.57926	.58317	.58706	.59095	.59483	.59871	.60257	.60642	.61026	.61409
0.3	.61791	.62172	.62552	.62930	.63307	.63683	.64058	.64431	.64803	.65173
0.4	.65542	.65910	.66276	.66640	.67003	.67364	.67724	.68082	.68439	.68793
0.5	.69146	.69497	.69847	.70194	.70540	.70884	.71226	.71566	.71904	.72240
0.6	.72575	.72907	.73237	.73565	.73891	.74215	.74537	.74857	.75175	.75490
0.7	.75804	.76115	.76424	.76730	.77035	.77337	.77637	.77935	.78230	.78524
0.8	.78814	.79103	.79389	.79673	.79955	.80234	.80511	.80785	.81057	.81327
0.9	.81594	.81859	.82121	.82381	.82639	.82894	.83147	.83398	.83646	.83891
1.0	.84134	.84375	.84614	.84849	.85083	.85314	.85543	.85769	.85993	.86214
1.1	.86433	.86650	.86864	.87076	.87286	.87493	.87698	.87900	.88100	.88298
1.2	.88493	.88686	.88877	.89065	.89251	.89435	.89617	.89796	.89973	.90147
1.3	.90320	.90490	.90658	.90824	.90988	.91149	.91309	.91466	.91621	.91774
1.4	.91924	.92073	.92220	.92364	.92507	.92647	.92785	.92922	.93056	.93189
1.5	.93319	.93448	.93574	.93699	.93822	.93943	.94062	.94179	.94295	.94408
1.6	.94520	.94630	.94738	.94845	.94950	.95053	.95154	.95254	.95352	.95449
1.7	.95543	.95637	.95728	.95818	.95907	.95994	.96080	.96164	.96246	.96327
1.8	.96407	.96485	.96562	.96638	.96712	.96784	.96856	.96926	.96995	.97062
1.9	.97128	.97193	.97257	.97320	.97381	.97441	.97500	.97558	.97615	.97670
2.0	.97725	.97778	.97831	.97882	.97932	.97982	.98030	.98077	.98124	.98169
2.1	.98214	.98257	.98300	.98341	.98382	.98422	.98461	.98500	.98537	.98574
2.2	.98610	.98645	.98679	.98713	.98745	.98778	.98809	.98840	.98870	.98899
2.3	.98928	.98956	.98983	.99010	.99036	.99061	.99086	.99111	.99134	.99158
2.4	.99180	.99202	.99224	.99245	.99266	.99286	.99305	.99324	.99343	.99361
2.5	.99379	.99396	.99413	.99430	.99446	.99461	.99477	.99492	.99506	.99520
2.6	.99534	.99547	.99560	.99573	.99585	.99598	.99609	.99621	.99632	.99643
2.7	.99653	.99664	.99674	.99683	.99693	.99702	.99711	.99720	.99728	.99736
2.8	.99744	.99752	.99760	.99767	.99774	.99781	.99788	.99795	.99801	.99807
2.9	.99813	.99819	.99825	.99831	.99836	.99841	.99846	.99851	.99856	.99861
3.0	.99865	.99869	.99874	.99878	.99882	.99886	.99889	.99893	.99896	.99900
3.1	.99903	.99906	.99910	.99913	.99916	.99918	.99921	.99924	.99926	.99929
3.2	.99931	.99934	.99936	.99938	.99940	.99942	.99944	.99946	.99948	.99950
3.3	.99952	.99953	.99955	.99957	.99958	.99960	.99961	.99962	.99964	.99965
3.4	.99966	.99968	.99969	.99970	.99971	.99972	.99973	.99974	.99975	.99976
3.5	.99977	.99978	.99978	.99979	.99980	.99981	.99981	.99982	.99983	.99983
3.6	.99984	.99985	.99985	.99986	.99986	.99987	.99987	.99988	.99988	.99989
3.7	.99989	.99990	.99990	.99990	.99991	.99991	.99992	.99992	.99992	.99992
3.8	.99993	.99993	.99993	.99994	.99994	.99994	.99994	.99995	.99995	.99995
3.9	.99995	.99995	.99996	.99996	.99996	.99996	.99996	.99996	.99997	.99997

$$Z \sim N(0, 1)$$

Να βρεθεί ο αριθμός z για τον οποίον ισχύει:

$$(\alpha) \ P(\underline{Z} \leq \underline{z}) = 0.9664 \quad ; \quad \phi(z) = 0.9664$$

$$(\beta) P(Z > z) = 0,0078$$



$$\Phi(z) = 0,9664 \Rightarrow z = 1,83$$

STANDARD NORMAL DISTRIBUTION: Table Values Represent AREA to the LEFT of the Z score.

Z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.50000	.50399	.50798	.51197	.51595	.51994	.52392	.52790	.53188	.53586
0.1	.53983	.54380	.54776	.55172	.55567	.55962	.56356	.56749	.57142	.57535
0.2	.57926	.58317	.58706	.59095	.59483	.59871	.60257	.60642	.61026	.61409
0.3	.61791	.62172	.62552	.62930	.63307	.63683	.64058	.64431	.64803	.65173
0.4	.65542	.65910	.66276	.66640	.67003	.67364	.67724	.68082	.68439	.68793
0.5	.69146	.69497	.69847	.70194	.70540	.70884	.71226	.71566	.71904	.72240
0.6	.72575	.72907	.73237	.73565	.73891	.74215	.74537	.74857	.75175	.75490
0.7	.75804	.76115	.76424	.76730	.77035	.77337	.77637	.77935	.78230	.78524
0.8	.78814	.79103	.79389	.79673	.79955	.80234	.80511	.80785	.81057	.81327
0.9	.81594	.81859	.82121	.82381	.82639	.82894	.83147	.83398	.83646	.83891
1.0	.84134	.84375	.84614	.84849	.85083	.85314	.85543	.85769	.85993	.86214
1.1	.86433	.86650	.86864	.87076	.87286	.87493	.87698	.87900	.88100	.88298
1.2	.88493	.88686	.88877	.89065	.89251	.89435	.89617	.89796	.89973	.90147
1.3	.90320	.90490	.90658	.90824	.90988	.91149	.91309	.91466	.91621	.91774
1.4	.91924	.92073	.92220	.92364	.92507	.92647	.92785	.92922	.93056	.93189
1.5	.93319	.93448	.93574	.93699	.93822	.93943	.94062	.94179	.94295	.94408
1.6	.94520	.94630	.94738	.94845	.94950	.95053	.95154	.95254	.95352	.95449
1.7	.95543	.95637	.95728	.95818	.95907	.95994	.96080	.96164	.96246	.96327
1.8	.96407	.96485	.96562	.96638	.96712	.96784	.96856	.96926	.96995	.97062
1.9	.97128	.97193	.97257	.97320	.97381	.97441	.97500	.97558	.97615	.97670
2.0	.97725	.97778	.97831	.97882	.97932	.97982	.98030	.98077	.98124	.98169
2.1	.98214	.98257	.98300	.98341	.98382	.98422	.98461	.98500	.98537	.98574
2.2	.98610	.98645	.98679	.98713	.98745	.98778	.98809	.98840	.98870	.98899
2.3	.98928	.98956	.98983	.99010	.99036	.99061	.99086	.99111	.99134	.99158
2.4	.99180	.99202	.99224	.99245	.99266	.99286	.99305	.99324	.99343	.99361
2.5	.99379	.99396	.99413	.99430	.99446	.99461	.99477	.99492	.99506	.99520
2.6	.99534	.99547	.99560	.99573	.99585	.99598	.99609	.99621	.99632	.99643
2.7	.99653	.99664	.99674	.99683	.99693	.99702	.99711	.99720	.99728	.99736
2.8	.99744	.99752	.99760	.99767	.99774	.99781	.99788	.99795	.99801	.99807
2.9	.99813	.99819	.99825	.99831	.99836	.99841	.99846	.99851	.99856	.99861
3.0	.99865	.99869	.99874	.99878	.99882	.99886	.99889	.99893	.99896	.99900
3.1	.99903	.99906	.99910	.99913	.99916	.99918	.99921	.99924	.99926	.99929
3.2	.99931	.99934	.99936	.99938	.99940	.99942	.99944	.99946	.99948	.99950
3.3	.99952	.99953	.99955	.99957	.99958	.99960	.99961	.99962	.99964	.99965
3.4	.99966	.99968	.99969	.99970	.99971	.99972	.99973	.99974	.99975	.99976
3.5	.99977	.99978	.99978	.99979	.99980	.99981	.99981	.99982	.99983	.99983
3.6	.99984	.99985	.99985	.99986	.99986	.99987	.99987	.99988	.99988	.99989
3.7	.99989	.99990	.99990	.99990	.99991	.99991	.99992	.99992	.99992	.99992
3.8	.99993	.99993	.99993	.99994	.99994	.99994	.99994	.99995	.99995	.99995
3.9	.99995	.99995	.99996	.99996	.99996	.99996	.99996	.99996	.99997	.99997

Συμμετρίες της κανονικής κατανομής

Η συμμετρία της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας της $N(0, 1)$, επιτρέπει τη χρήση μόνο του μισού πίνακα τιμών. Συνήθως, αξιοποιείται το “θετικό” του μέρος, δηλαδή αυτό που περιέχει τις τιμές $\Phi(z) = P(Z \leq z)$, για $0,5 \leq z \leq 3,49$.

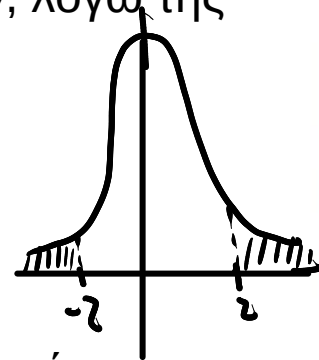
Για τον υπολογισμό πιθανοτήτων που $P(Z \leq z)$ με αρνητικό z , μπορεί να αξιοποιηθεί η σχέση:

$$\Phi(-z) = 1 - \Phi(z) \quad \text{ή} \quad \Phi(z) + \Phi(-z) = 1$$

Πράγματι, $\Phi(z) = P(Z \leq z) = 1 - P(Z > z) = 1 - P(Z < -z) = 1 - \Phi(-z)$. Επιπλέον, λόγω της συμμετρίας γύρω από το 0, είναι φανερό ότι:

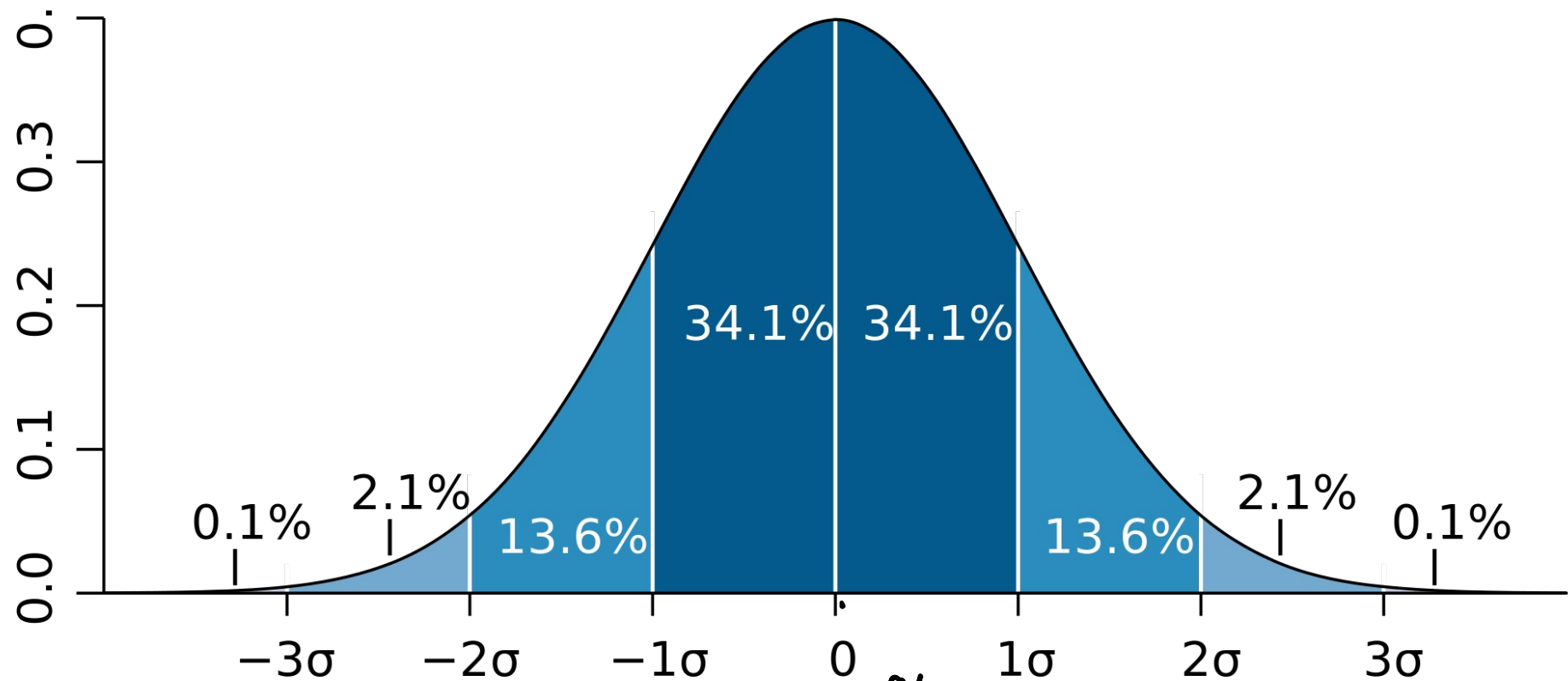
$$P(0 < Z < z) = P(Z < z) - P(Z < 0) = \Phi(z) - \frac{1}{2}.$$

$$P(-z < Z < z) = P(Z < z) - P(Z < -z) = \Phi(z) - \Phi(-z) = 2\Phi(z) - 1.$$



Με τις παραπάνω σχέσεις και την δυνατότητα αναγωγής οποιασδήποτε κανονικής κατανομής στη $N(0, 1)$ είναι δυνατό να αντιμετωπιστούν όλα τα προβλήματα που αφορούν κανονική κατανομή.

$N(0,1)$



..... 68,2%

95%
99%

Κανονική Κατανομή – Συνάρτηση κατανομής

Υπολογισμός πιθανοτήτων με υπολογιστή:

Αν $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, τότε:

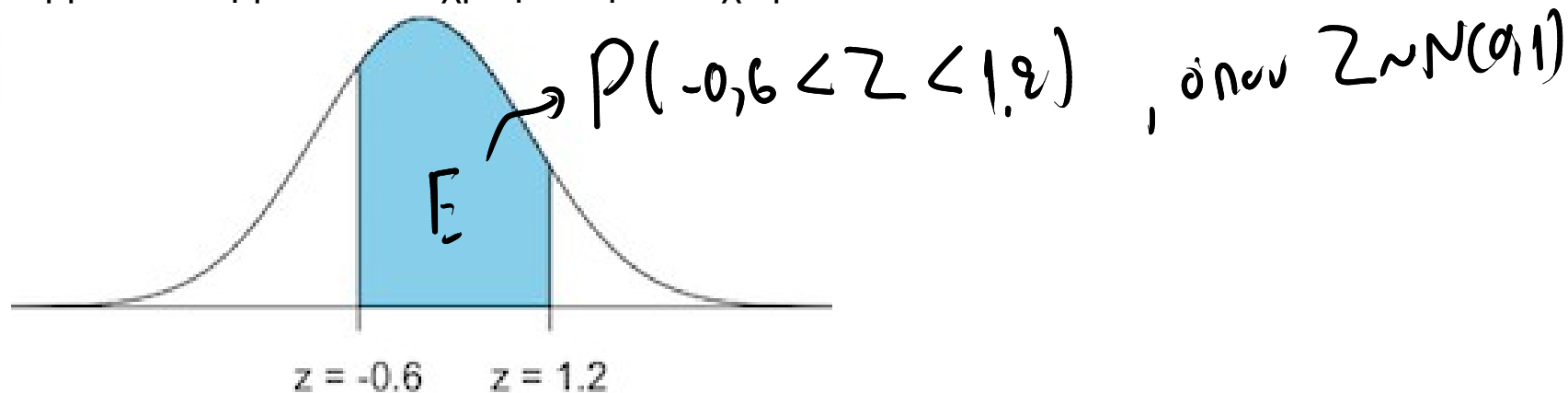
- MS Excel ή LibreOffice Calc: $F_X(x) = P(X \leq x) = \text{NORM.DIST}(z; \mu; \sigma; 1)$
- Γλώσσα R: $F_X(x) = P(X \leq x) = \text{pnorm}(x, \mu, \sigma)$
- Octave (ή Matlab): $\text{normcdf}(x, \mu, \sigma)$

(στο Octave πρώτα πρέπει να φορτωθεί η αντίστοιχη βιβλιοθήκη: `pkg load statistics`)

Ασκήσεις στην Κανονική Κατανομή

1. Στο σχήμα παρουσιάζεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

Να βρεθεί το εμβαδόν του χρωματισμένου χωρίου

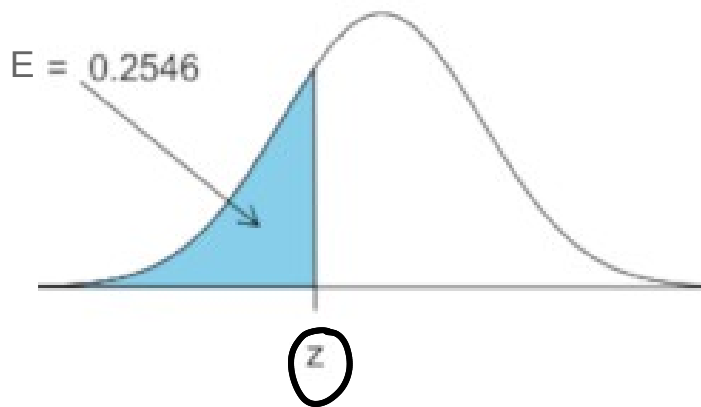


$$E = \int_{-0.6}^{1.2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = P(-0.6 < Z < 1.2) = \Phi(1.2) - \Phi(-0.6) =$$
$$= \Phi(1.2) - 1 + \Phi(0.6) = 0.88493 - 1 + 0.72575 = 0.61068$$

Ασκήσεις στην Κανονική Κατανομή

2. Στο σχήμα παρουσιάζεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

Να βρεθεί ο αριθμός z που εμφανίζεται στο διάγραμμα..



$$\int_{-\infty}^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 0,2546 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \Phi(z) = 0,2546 \Leftrightarrow$$

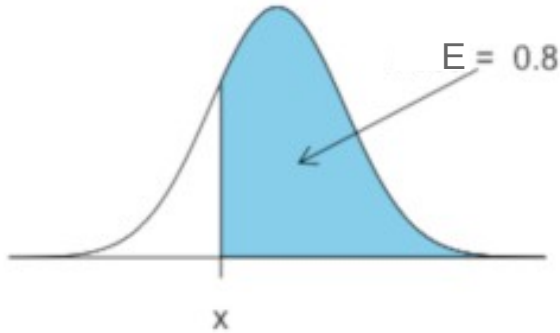
$$\Leftrightarrow 1 - \Phi(-z) = 0,2546 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \Phi(-z) = 0,7454 \Leftrightarrow -z = 0,66 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z = -0,66.$$

Ασκήσεις στην Κανονική Κατανομή

3. Στο σχήμα παρουσιάζεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \frac{1}{15\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-100)^2}{450}}$.
Να βρεθεί ο αριθμός x που εμφανίζεται στο διάγραμμα.



$$f(x) = \frac{1}{15\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-100)^2}{450}} \quad \sigma. \kappa. \kappa.$$

$$X \sim N(100, 15^2)$$

$$X \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$x = ? \text{ ώστε } P(X > x) = 0.8 \Leftrightarrow P(X < x) = 0.2$$

$$\Rightarrow P\left(\frac{X-100}{15} < \frac{x-100}{15}\right) = 0.2 \Leftrightarrow$$

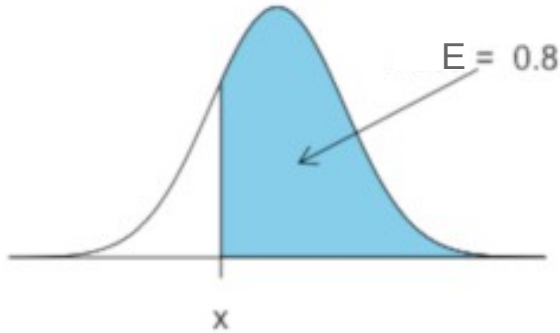
$$\Leftrightarrow \Phi\left(\frac{x-100}{15}\right) = 0.2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \Phi\left(\frac{100-x}{15}\right) = 0.8$$

Ασκήσεις στην Κανονική Κατανομή

3. Στο σχήμα παρουσιάζεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \frac{1}{15\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-100)^2}{450}}$

Να βρεθεί ο αριθμός x που εμφανίζεται στο διάγραμμα.



(συνέχεια)

$$\Rightarrow \frac{100-x}{15} = 0,84 \Leftrightarrow 100-x = 15 \cdot 0,84$$

$$\Leftrightarrow x = 100 - 15 \cdot 0,84 = 87,4.$$

Ασκήσεις στην Κανονική Κατανομή

4. Ο μέσος χρόνος που περνάει ένα άτομο στο ζωολογικό κήπο της Θεσσαλονίκης είναι 96 λεπτά. Η τυπική απόκλιση είναι 17 λεπτά. Υποθέτουμε ότι ο χρόνος είναι κανονικά κατανομημένος. Να βρεθεί το ποσοστό των επισκεπτών που αφιερώνουν (α) τουλάχιστον 120 λεπτά, (β) το πολύ 80 λεπτά στην επίσκεψή τους.

$$\mu = 96, \quad \sigma = 17. \quad \begin{matrix} \vdots \\ X \sim N(96, 17^2) \end{matrix}$$

$$\begin{aligned} \text{(α)} \quad P(X > 120) &= 1 - P(X < 120) = 1 - P\left(\frac{X - 96}{17} < \frac{120 - 96}{17}\right) = \\ &= 1 - P(Z < 1,41) = 1 - 0,92073 = 0,07927 \approx 8\% \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(β)} \quad P(X \leq 80) &= P\left(\frac{X - 96}{17} < \frac{80 - 96}{17}\right) = P(Z < -0,94) = 1 - P(Z < 0,94) \\ &= 1 - 0,82639 = 0,17361. \end{aligned}$$

Προσέγγιση της Διωνυμικής και της
κατανομής Poisson από την Κανονική

Προσέγγιση της Διωνυμικής από την Κανονική

Αποδεικνύεται ότι:

$1-p$
↓

Αν $X \sim B(n, p)$, $n > 30$ και $np > 5$, $nq > 5$ τότε $X \approx N(np, npq)$, $q = 1 - p$.

Αν $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$ και $\lambda > 20$, τότε $X \approx N(\lambda, \lambda)$ ($\mu = \sigma^2 = \lambda$).

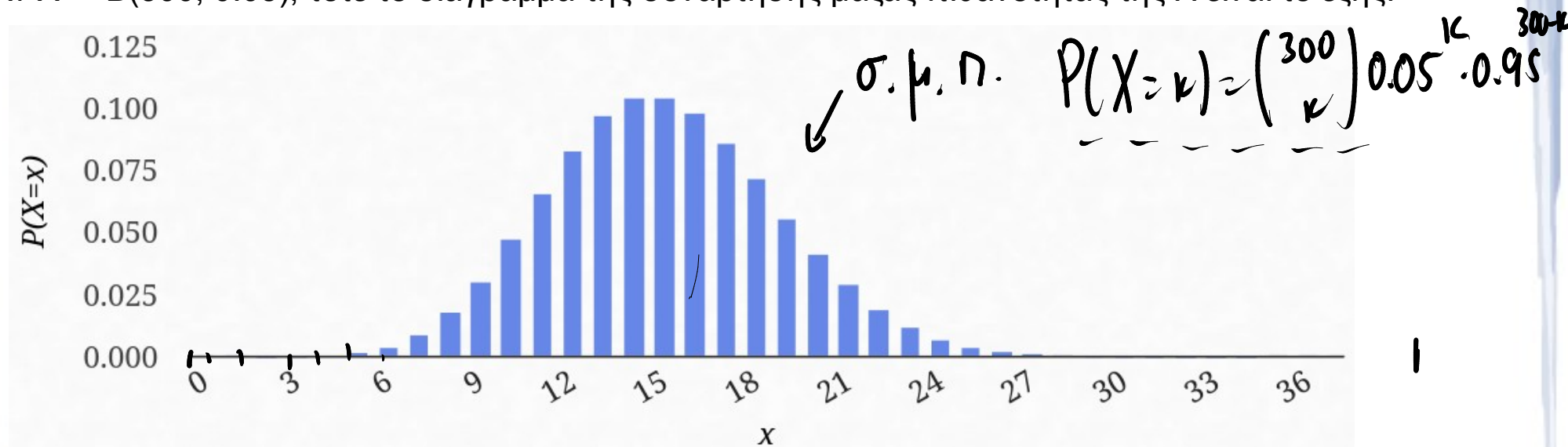
Στους τελικούς υπολογισμούς, έχει καθιερωθεί η εξής προσαρμογή ως μία πρακτική που δίνει καλύτερα προσεγγιστικά αποτελέσματα (continuity correction factor):

- $P_B(X \leq \alpha) = P_N(X < \alpha + \frac{1}{2})$, $P_P(X \leq \alpha) = P_N(X < \alpha + \frac{1}{2})$,
- $P_B(X \geq \alpha) = P_N(X > \alpha - \frac{1}{2})$, $P_P(X \geq \alpha) = P_N(X > \alpha - \frac{1}{2})$,
- $P_B(X = \alpha) = P_P(X = \alpha) = P_N(\alpha - \frac{1}{2} < X < \alpha + \frac{1}{2})$.

Προσέγγιση της $B(n, p)$ από την $N(np, npq)$

Παράδειγμα 1

Αν $X \sim B(300, 0.05)$, τότε το διάγραμμα της συνάρτησης μάζας πιθανότητας της X είναι το εξής:

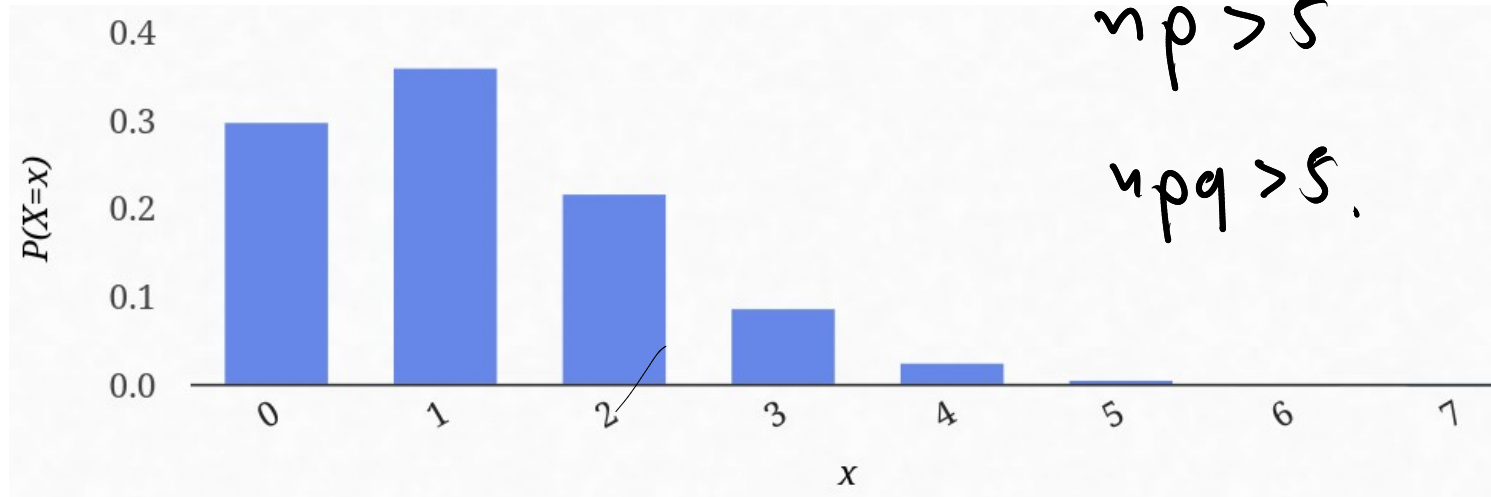


Παρατηρούμε ότι $np = 15$, $nq = 285$ και η προσέγγιση $X \approx N(15, 14.25) = N(15, 3.77^2)$, είναι μία αξιοπρεπής προσαρμογή της διωνυμικής κατανομής.

Προσέγγιση της $B(n, p)$ από την $N(np, npq)$

Παράδειγμα 2

Αν $X \sim B(300, 0.004)$, τότε το διάγραμμα της συνάρτησης μάζας πιθανότητας της X είναι το εξής:

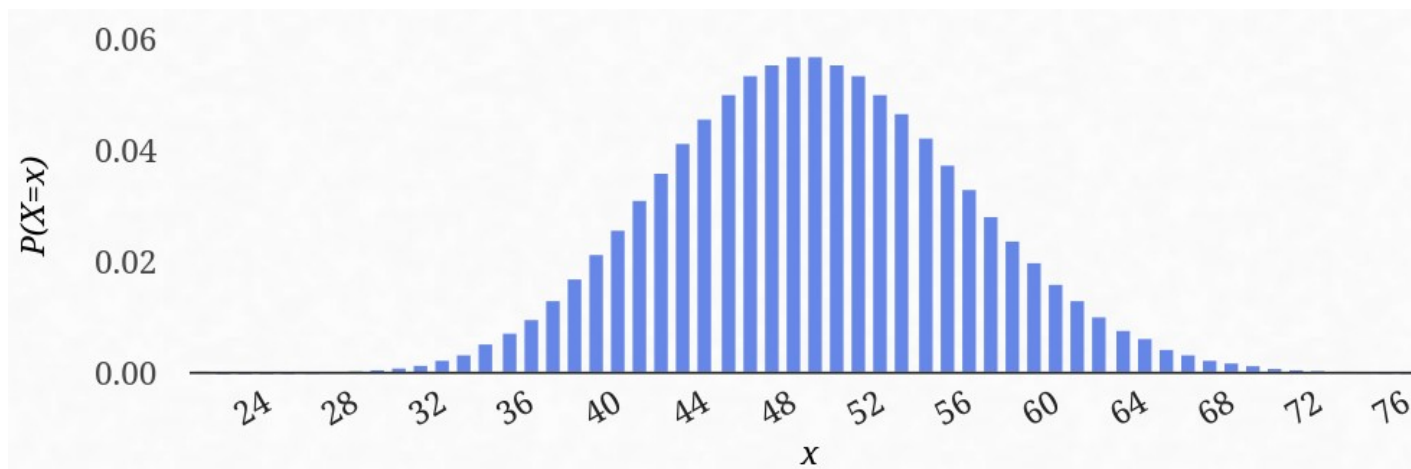


Παρατηρούμε ότι $np = 1,2$, $nq = 298,8$ και η προσέγγιση $X \approx N(1.2, 1.195) = N(1.2, 1.093^2)$, δεν είναι καλή προσαρμογή της διωνυμικής κατανομής.

Προσέγγιση της $P(\lambda)$ από την $N(\lambda, \lambda)$

Παράδειγμα 1

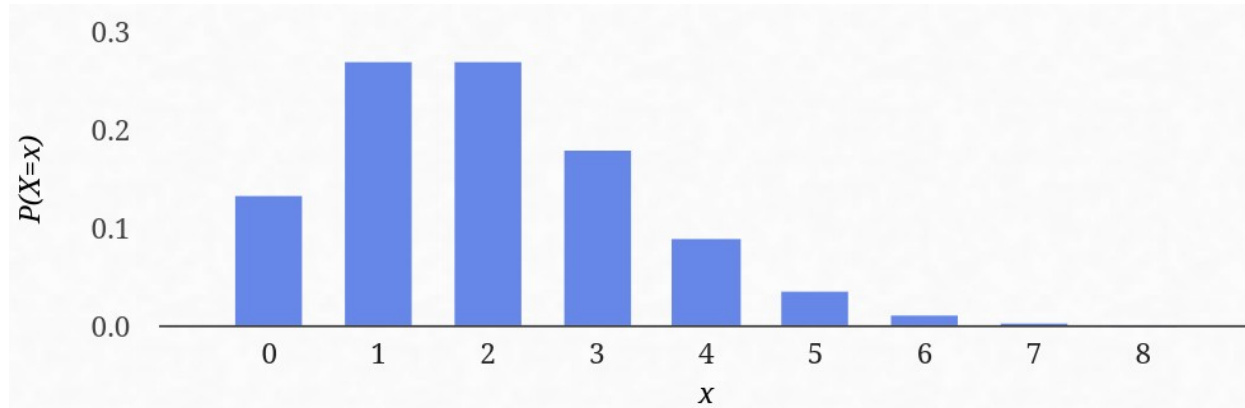
Αν $X \sim \text{Poisson}(49)$, τότε η προσέγγιση $X \sim N(49, 49) = N(49, 7^2)$ είναι ικανοποιητική.



Προσέγγιση της $P(\lambda)$ από την $N(\lambda, \lambda)$

Παράδειγμα 2

Αν $X \sim \text{Poisson}(2)$, τότε η προσέγγιση $X \sim N(2, 2) = N(2, 1.4^2)$ δεν είναι καλή (δεξιά ασύμμετρη κατανομή).



Ασκήσεις

1. Από προηγούμενες έρευνες γνωρίζουμε ότι το 5% ενός τύπου ολοκληρωμένων κυκλωμάτων σταματούν να λειτουργούν μετά τον πρώτο χρόνο. Αγοράζουμε μία μεγάλη παρτίδα από 300 τέτοια ολοκληρωμένα κυκλώματα. Να βρεθούν οι πιθανότητες:

(α) τουλάχιστον 50 από τα 300 να σταματήσουν να λειτουργούν μετά τον πρώτο χρόνο.

(β) το πολύ 20 από τα 300 να σταματήσουν να λειτουργούν μετά τον πρώτο χρόνο.

(γ) λιγότερα από 10 στα 300 να σταματήσουν να λειτουργούν μετά τον πρώτο χρόνο.

(δ) ακριβώς 45 στα 300 να σταματήσουν να λειτουργούν μετά τον πρώτο χρόνο.

Πιθανότητα αποτυχίας $p = 0,05$

$X = \{\text{ολύθως κυκλωμάτων που σταματούν μετά τον πρώτο χρόνο}\}$

$X \sim B(300, 0,05)$ (α) $P(X \geq 50) = ?$

$$X \sim B(300, 0.05) \quad n=300, p=0.05$$

$$B(n, p) \approx N(np, npq)$$

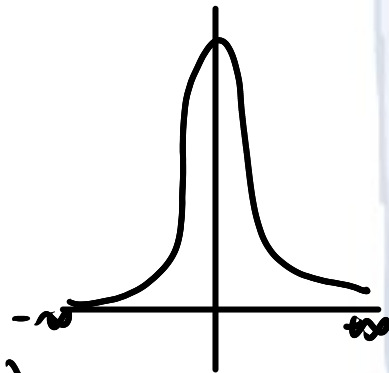
$$n \cdot p = 15 > 5$$

$$n \cdot p \cdot q = 300 \cdot 0.05 \cdot 0.95 = 14.25 > 5.$$

$$\text{Apq, } X \sim B(300, 0.05) \approx N(15, 14.25)$$

$$(a) P_B(X > 50) = P_N(X > 50 - \frac{1}{2}) = P_N(X > 49.5) =$$

$$= P\left(\frac{X - 15}{\sqrt{14.25}} > \frac{49.5 - 15}{\sqrt{14.25}}\right) = P(Z > 9.14) = 0.$$



$$(b) P_B(X \leq 20) \approx P_N(X \leq 20 + \frac{1}{2}) = P(X \leq 20.5)$$

$$\approx P(Z \leq \frac{20.5 - 15}{\sqrt{14.25}}) = P(Z \leq 1.46) = 0.92785 \approx 93\%$$

$$(c) P_B(X < 10) = \dots$$

$$(d) P_B(X=45) = \binom{300}{45} \cdot 0.05^{45} \cdot 0.95^{300-45} \approx P_N(44.5 < X < 45.5)$$

$$\lambda = 50 > 30 \Rightarrow P_{\text{Poisson}}(\lambda) \approx N(\lambda, \lambda) \quad \text{h} \quad P(50) \approx N(50, 50)$$

Ασκήσεις

2. Γνωρίζουμε ότι τα αυτοκίνητα φτάνουν σε ένα χώρο στάθμευσης με ρυθμό 50 ανά ώρα. Υποθέτουμε ότι οι αφίξεις των Ι.Χ. είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους. Να βρεθεί η πιθανότητα την επόμενη ώρα ο αριθμός των αυτοκινήτων που φτάνουν σε αυτό το πάρκινγκ να είναι μεταξύ 54 και 62.

$$X = \{\text{αφίξεις Ι.Χ. σε μια ώρα}\} \sim P_{\text{Poisson}}(50), \quad P(X=k) = e^{-50} \cdot \frac{50^k}{k!}$$

$$P_p(54 \leq X \leq 62) = P_p(X=54) + P_p(X=55) + \dots + P_p(X=62)$$

$$\begin{aligned} P_p(54 \leq X \leq 62) &\approx P_N(53.5 \leq X \leq 62.5) = P_Z\left(\frac{53.5 - 50}{\sqrt{50}} \leq Z \leq \frac{62.5 - 50}{\sqrt{50}}\right) \\ &= P_Z(0.49 \leq Z \leq 1.77) = \Phi(1.77) - \Phi(0.49) = 0.96164 - 0.68763 = 0.274 \end{aligned}$$

$$B(500, 0.46) \approx N(230, 124.9) \quad \text{Ασκήσεις}$$

3. Σε μια πόλη, το 46% των κατοίκων ψήφισε τον νυν δήμαρχο. Λαμβάνεται ένα τυχαίο δείγμα 500 κατοίκων. Να βρεθεί η πιθανότητα, τουλάχιστον 250 από αυτούς να έχουν ψηφίσει τον νυν δήμαρχο.

$$X = \{\text{ηλίκους ψηφοφόρων στους 500}\} \sim B(500, 0.46)$$

$$\begin{aligned} P_B(X \geq 250) &= P_N\left(X \geq 250 - \frac{1}{2}\right) = P_N(X \geq 249.5) = \\ &= P_N\left(Z \geq \frac{249.5 - 230}{\sqrt{124.9}}\right) = P_N(Z \geq 1.75) = \\ &= 1 - \Phi(1.75) = 1 - 0.95994 = 0.04 = 4\%. \end{aligned}$$

$$n=500, \quad p=0.46, \quad n \cdot p = 230 > 5, \quad n \cdot p \cdot q = 124.9 > 5$$

Ασκήσεις

4. Ο αριθμός σεισμών με μέγεθος τουλάχιστον 4,5 βαθμών της Κλίμακας Ρίχτερ και με επίκεντρο σε απόσταση 40 χιλιομέτρων από το κέντρο της Θεσσαλονίκης ακολουθεί μια κατανομή Poisson με μέσο όρο 6,5 σεισμοί τη δεκαετία. Ποια είναι η πιθανότητα να σημειωθούν τουλάχιστον 2 τέτοιοι σεισμοί τον επόμενο χρόνο;

Ασκήσεις

5. Ένα εργοστάσιο κατασκευάζει κατά μέσο όρο 10.000 ολοκληρωμένα κυκλώματα την ημέρα και η παραγωγή κάθε μίας ημέρας είναι ανεξάρτητη από τις άλλες.

(α) Να βρεθεί η πιθανότητα σε μία ημέρα να κατασκευαστούν περισσότερα από 10.200 κυκλώματα.

(β) Να βρεθεί το αναμενόμενο πλήθος ημερών σε ένα έτος στις οποίες θα κατασκευαστούν περισσότερα από 10.200 κυκλώματα.

Γενική δυνατότητα προσέγγισης μίας διακριτής κατανομής από την κανονική

Αναδεικνύεται με φυσικό τρόπο το ερώτημα:

Εκτός από τη διωνυμική και την Poisson, ποιες άλλες κατανομές μπορούν να προσεγγιστούν από την κανονική;

Η απάντηση είναι απλή: Όταν η τυχαία μεταβλητή που μας ενδιαφέρει ορίζεται ή μπορεί να θεωρηθεί ως ένα άθροισμα επιμέρους τυχαίων μεταβλητών που είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους με ανάλογα γεωμετρικά χαρακτηριστικά στις κατανομές τους (αναμενόμενη τιμή και τυπική απόκλιση). Αυτό, είναι κάτι που συμβαίνει στις δύο κατανομές που είδαμε:

- Αν $X \sim B(n, p)$, τότε η X μπορεί να θεωρηθεί ως $X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$, όπου X_i είναι οι n επιμέρους Bernoulli δοκιμές με $EX_i = p$ και $\text{Var}X_i = p(1 - p)$, $i = 1, 2, \dots, n$.
- Αν $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$, τότε η X μπορεί να θεωρηθεί ως άθροισμα $X = X_1 + X_2 + \dots + X_{[\lambda]}$, όπου $X_i \sim \text{Poisson}(1)$, με $EX_i = 1$ και $\text{Var}X_i = 1$, $i = 1, 2, \dots, [\lambda]$, ($[\lambda]$:ακέραιο μέρος του λ).

Γενική δυνατότητα προσέγγισης μίας διακριτής κατανομής από την κανονική

Αν $X_1 + X_2 + \dots + X_n$ είναι τ.μ. ανεξάρτητες μεταξύ τους με ανάλογα γεωμετρικά χαρακτηριστικά στις κατανομές τους (αναμενόμενη τιμή και τυπική απόκλιση), τότε το θεώρημα που εξασφαλίζει την γνώση της κατανομής του $Y = X_1 + X_2 + \dots + X_n$, είναι το περίφημο **Κεντρικό Οριακό Θεώρημα (Central Limit Theorem – CLT)**. Αυτό έχει πολλές εκδοχές ως προς τις αναγκαίες προϋποθέσεις. Αυτή που ταιριάζει στους σκοπούς μας είναι η εξής:

Κεντρικό Οριακό Θεώρημα

Αν $X_1, X_2, \dots, X_n$ είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές, με ίσες αναμενόμενες τιμές μ και ίσες πεπερασμένες διακυμάνσεις σ^2 και

$$Y = X_1 + X_2 + \dots + X_n,$$

τότε $(Y - n \cdot \mu) / (n^{1/2} \sigma) \sim N(0, 1)$ ή ισοδύναμα $Y \sim N(n \cdot \mu, n \cdot \sigma^2)$, καθώς $n \rightarrow \infty$.

Κάποιες ακόμα ενδιαφέρουσες κατανομές
συνεχών τυχαίων μεταβλητών

Κατανομή Γάμμα

Κατανομή Γάμμα

Ενδεικτικό παράδειγμα – γέννεση κατανομής

Γεγονότα συμβαίνουν ανεξάρτητα μεταξύ τους με ρυθμό λ συμβάντα / μονάδα χρόνου,

Αν $T_k = \{\text{χρόνος που απαιτείται για να γίνουν } \underline{k} \text{ γεγονότα}\}$, τότε να βρεθεί η συνάρτηση κατανομής και η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τ.μ. T_k .

$$P(T_k > t) = P(\{ \text{στο } (0, t] \text{ το πολύ } k-1 \text{ συμβάντα} \})$$

$$Y = \{ \text{συμβάντα στο } (0, t] \} \sim \text{Poisson}(\lambda t)$$

$$F(T_k > t) = \sum_{i=0}^{k-1} P(Y=i) = \sum_{i=0}^{k-1} e^{-\lambda t} \cdot \frac{(\lambda t)^i}{i!} \Rightarrow F(T_k < t) = 1 - \sum_{i=0}^{k-1} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^i}{i!}$$

Κατανομή Γάμμα

Ενδεικτικό παράδειγμα – γέννεση κατανομής

Γεγονότα συμβαίνουν ανεξάρτητα μεταξύ τους με ρυθμό λ συμβάντα / μονάδα χρόνου.

Αν $T_k = \{\text{χρόνος που απαιτείται για να γίνουν } k \text{ γεγονότα}\}$, τότε να βρεθεί η συνάρτηση κατανομής και η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τ.μ. T_k .

$$\sigma.κ.: F_{T_k}(x) = 1 - e^{-\lambda x} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(\lambda x)^j}{j!}, \quad x > 0. \quad \sigma.π.π.: f(x) = \frac{\lambda e^{-\lambda x} (\lambda x)^{k-1}}{(k-1)!}, \quad x > 0.$$

Γράφουμε $T_k \sim \text{Γάμμα}(k, \lambda)$. Δηλαδή,

Εάν οι αφίξεις γεγονότων ακολουθούν μια διαδικασία Poisson με ρυθμό λ , τότε ο χρόνος αναμονής μέχρι τις k αφίξεις ακολουθεί την κατανομή $\Gamma(k, \lambda)$.

Κατανομή Γάμμα

Παράδειγμα

Όταν ο Γιάννης πάει για ψάρεμα, ψαρεύει κατά μέσο όρο ένα ψάρι ανά 30 λεπτά. Να βρεθεί η πιθανότητα θα χρειαστεί να περιμένει 2 έως 4 ώρες για να πιάσει 4 ψάρια.

$$\lambda = 2 \text{ ψάρια / h} \quad | \quad T_4 = \{ \text{χρόνος μέχρι να πιάσει 4 ψάρια} \}$$

$$T_4 \sim \Gamma(4, 2) \quad , \quad P(2 < T_4 < 4) = F(4) - F(2) =$$
$$F(x) = 1 - \sum_{i=0}^3 e^{-2x} \cdot \frac{(2x)^i}{i!} \quad | \quad = \left[1 - \sum_{i=0}^3 e^{-8} \cdot \frac{8^i}{i!} \right] - \left[1 - \sum_{i=0}^3 e^{-4} \cdot \frac{4^i}{i!} \right]$$

Κατανομή Γάμμα

Παράδειγμα

Όταν ο Γιάννης πάει για ψάρεμα, ψαρεύει κατά μέσο όρο ένα ψάρι ανά 30 λεπτά. Να βρεθεί η πιθανότητα θα χρειαστεί να περιμένει 2 έως 4 ώρες για να πιάσει 4 ψάρια.

Λύση

Το πλήθος X των επιτυχιών του Γιάννη, ακολουθεί κατανομή Poisson με $\lambda = 2$ ψάρια / ώρα.

Άρα, ο χρόνος T_4 μέχρι τις 4 επιτυχίες, ακολουθεί τη Γάμμα κατανομή $\Gamma(4, 2)$.

$$\text{σ.κ.: } F_{T_4}(x) = 1 - e^{-\lambda x} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(\lambda x)^j}{j!} = 1 - e^{-2x} \sum_{j=0}^3 \frac{(2x)^j}{j!}, \quad x > 0.$$

$$P(2 \leq T_4 \leq 4) = P(T_4 \leq 4) - P(T_4 \leq 2) = F_{T_4}(4) - F_{T_4}(2) = 0,4335 - 0,0424 = 0,3911 = 39,11 \, \%.$$

Κατανομή Γάμμα

Με την ονομασία “κατανομή γάμμα” περιγράφεται μία οικογένεια συνεχών κατανομών πιθανοτήτων με δύο παραμέτρους. Η εκθετική κατανομή, η κατανομή Erlang και η κατανομή χι-τετράγωνο είναι ειδικές περιπτώσεις της κατανομής γάμμα. Στη βιβλιογραφία εμφανίζεται με δύο μορφές. Η μία είναι η Γάμμα(k, λ) [= Γάμμα(α, β) στη βιβλιογραφία] ενώ η άλλη είναι η Γάμμα(k, θ) = Γάμμα($k, 1/\lambda$).

$$\sigma.π.π. \quad X \sim \text{Γάμμα}(k, \lambda): f(x) = \frac{\lambda e^{-\lambda x} (\lambda x)^{k-1}}{\Gamma(k)}, \quad X \sim \text{Γάμμα}(k, \theta): f(x) = \frac{x^{k-1} e^{-x/\theta}}{\theta^k \Gamma(k)}, \quad x > 0.$$

Αν η παράμετρος k είναι φυσικός αριθμός, τότε η συνάρτηση κατανομής προσδιορίζεται σε κλειστή μορφή ως εξής:

$$\sigma.κ. \quad X \sim \text{Γάμμα}(k, \lambda): F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(\lambda x)^j}{j!}, \quad X \sim \text{Γάμμα}(k, \theta): F_X(x) = 1 - e^{-x/\theta} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{j!} \left(\frac{x}{\theta}\right)^j, \quad x > 0.$$

$$\text{Σημείωση: } \Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt, \quad \Re(z) > 0.$$

Κατανομή Γάμμα και συνάρτηση Γάμμα

Με την ονομασία “συνάρτηση γάμμα” περιγράφεται η ειδική συνάρτηση

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt, \operatorname{Re}(z) > 0.$$

Εύκολα προκύπτει ότι $\Gamma(1) = 1$, ενώ με κατά παράγοντες ολοκλήρωση αποδεικνύεται ότι

$$\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z).$$

Από τα παραπάνω, με επαγωγή βρίσκουμε

$$\Gamma(n) = (n - 1)!, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

Μία ακόμα σημαντική σχέση είναι ο τύπος του Euler

$$\Gamma(z)\Gamma(1 - z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}, \quad z \notin \mathbb{Z}.$$

Ειδικότερα, για $z = \frac{1}{2}$ υπολογίζουμε $\Gamma(\frac{1}{2})^2 = \pi$ ή $\Gamma(\frac{1}{2}) = \pi^{\frac{1}{2}}$.

Κατανομή Γάμμα

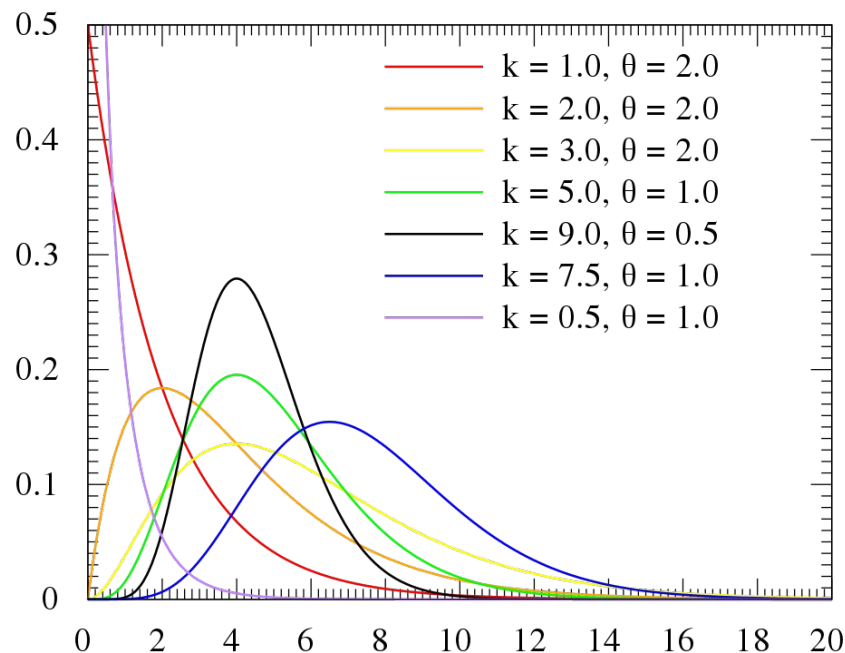
$$X \sim \text{Γάμμα}(k, \theta): f(x) = \frac{x^{k-1} e^{-x/\theta}}{\theta^k \Gamma(k)}, x > 0, \text{ όπου } \Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt, \Re(z) > 0.$$

$$\text{Γεωμετρικά χαρακτηριστικά: } E(X) = k\theta, \text{ Var}(X) = k\theta^2, E(X^n) = \theta^n \frac{\Gamma(n+k)}{\Gamma(k)}, \gamma = \frac{2}{\sqrt{k}}$$

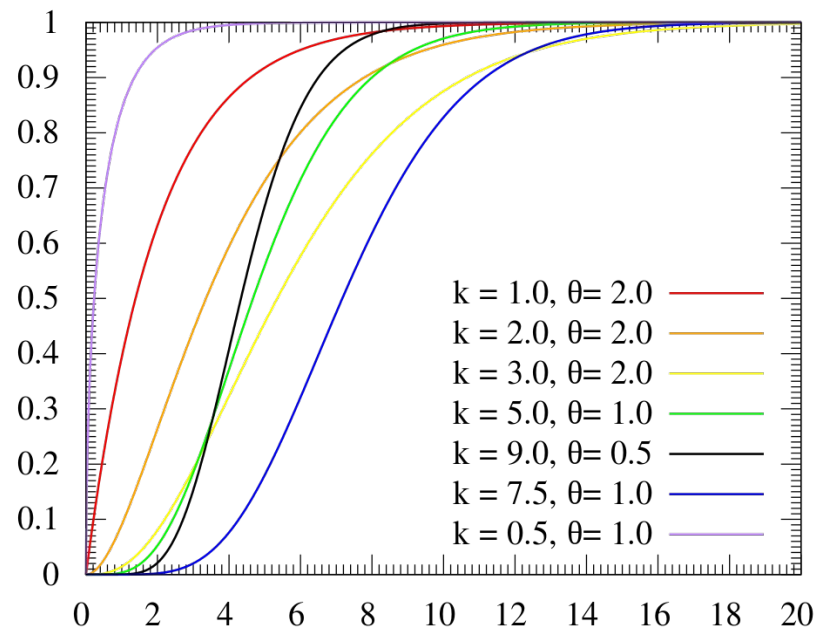
Οι κατανομές γάμμα εμφανίζονται συχνά σε μοντέλα που χρησιμοποιούνται στη μηχανική (όπως ο χρόνος μέχρι την αστοχία του εξοπλισμού και τα επίπεδα φορτίου για τηλεπικοινωνιακές υπηρεσίες), στη μετεωρολογία (βροχόπτωση) και στα ασφαλιστικά μαθηματικά (ασφαλιστικές απαιτήσεις και αδυναμία αποπληρωμής δανείων) για τα οποία οι μεταβλητές είναι πάντα θετικές και η κατανομή χαρακτηρίζεται από ασυμμετρία.

Επίσης, μπορεί να θεωρηθεί ότι είναι το συνεχές ανάλογο της αρνητικής διωνυμικής κατανομής.

Κατανομή Γάμμα(k, θ)



$$f(x) = \frac{x^{k-1} e^{-x/\theta}}{\theta^k \Gamma(k)}, \quad x > 0.$$



$$F(x) = \frac{1}{\theta^k \Gamma(k)} \int_0^x t^{k-1} e^{-t/\theta} dt, \quad x > 0.$$

Κατανομή Γάμμα

Παρατηρήσεις

1. Αν $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ είναι μια ακολουθία ανεξάρτητων $\text{Exp}(\lambda)$ τυχαίων μεταβλητών, τότε η

$$Y = X_1 + X_2 + \dots + X_n,$$

είναι μια τυχαία μεταβλητή με κατανομή Γάμμα(n, λ).

2. Αν το n είναι μεγάλο, τότε το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα διασφαλίζει ότι η κατανομή γάμμα μπορεί να προσεγγιστεί από την κανονική κατανομή $N(n \cdot \lambda, n \cdot \lambda^2)$, δηλαδή

$$\text{Γάμμα}(n, \lambda) \approx N(n \cdot \lambda, n \cdot \lambda^2)$$

Κατανομή Γάμμα

Παράδειγμα

Στο ταμείο του μάρκετ, βρίσκουμε μία ουρά με δύο άτομα μπροστά μας. Εκείνη τη στιγμή έρχεται η ταμίας και αρχίζει να εξυπηρετεί τον πρώτο πελάτη. Γνωρίζουμε ότι η ταμίας εξυπηρετεί τους πελάτες με ρυθμό 3 πελάτες / λεπτό. Ποια είναι η πιθανότητα ότι θα περιμένουμε περισσότερο από 1,5 λεπτό;

Λύση

Κατανομή Γάμμα

Παράδειγμα

Στο ταμείο του μάρκετ, βρίσκουμε μία ουρά με δύο άτομα μπροστά μας. Εκείνη τη στιγμή έρχεται η ταμίας και αρχίζει να εξυπηρετεί τον πρώτο πελάτη. Γνωρίζουμε ότι η ταμίας εξυπηρετεί τους πελάτες με ρυθμό 3 πελάτες / λεπτό. Ποια είναι η πιθανότητα ότι θα περιμένουμε περισσότερο από 1,5 λεπτό;

Λύση

Αν $X = \{\text{πλήθος πελατών που εξυπηρετούνται στο 1 λεπτό}\}$ τότε $X \sim \text{Poisson}(3)$. Αν $T = \{\text{χρόνος μέχρι να εξυπηρετηθούν 2 πελάτες}\}$, τότε $T \sim \text{Γάμμα}(2, 3)$ και

$$F_T(1,5) = 1 - e^{-3 \cdot 1,5} \sum_{j=0}^{2-1} \frac{(3 \cdot 1,5)^j}{j!}, = 1 - e^{-4,5} (1 + 4,5) = 1 - 5,5 e^{-4,5}.$$

Συμπεραίνουμε ότι: $P(T > 1,5) = 1 - P(T \leq 1,5) = 5,5 e^{-4,5} = 0,061 = 6,1\%$.

Σημείωση: Ο ρυθμός εξυπηρέτησης θα μπορούσε να εκφραστεί στο 1,5 λεπτό ή ακόμα και σε sec. Η συνθήκη $T > 1,5$ θα διαμορφωνόταν αντίστοιχα $T > 1$ ή $T > 90$. Σε κάθε περίπτωση, το τελικό αποτέλεσμα θα ήταν το ίδιο.

Κατανομή χι-τετράγωνο ($\chi^2(n)$)

$$\Gamma(n/2, 1/2) = \chi^2(n) \quad \checkmark \text{ βαθμοί ελευθερίας}$$

Επιλέγοντας $\lambda = 1/2$ και $k = n/2$, παίρνουμε την ειδική περίπτωση της κατανομής Γάμμα με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

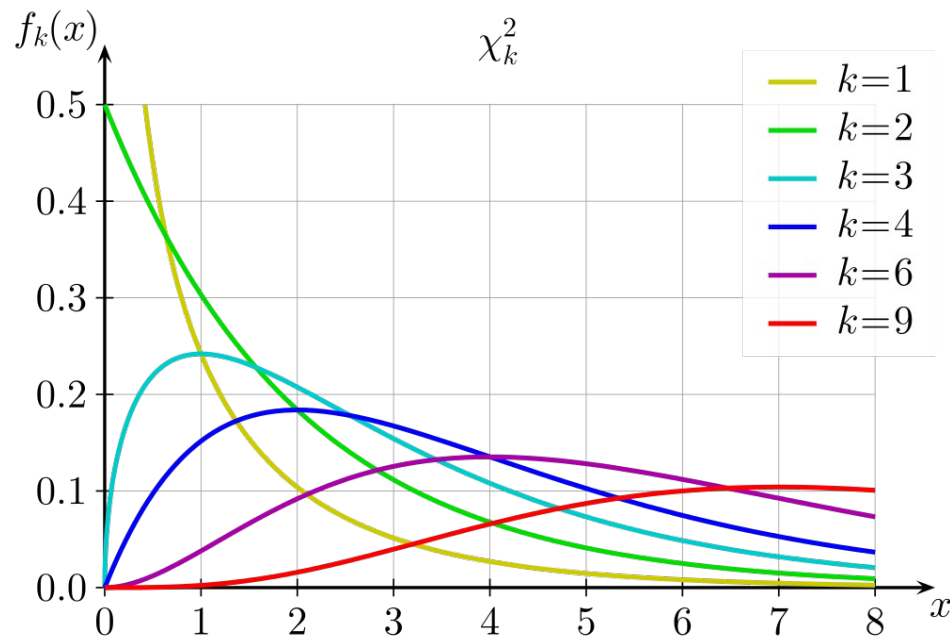
$$f_x(x) = \frac{e^{-x/2} x^{n/2-1}}{2^{n/2} \Gamma(n/2)}, \quad x > 0.$$

Καθώς το $n/2$ δεν είναι εν γένει ακέραιος, δεν είναι δυνατός ο υπολογισμός της συνάρτησης κατανομής στην γενική περίπτωση. Η κατανομή $\Gamma(n/2, 1/2) = \chi^2(n)$ έχει μεγάλη αξία εφαρμογής στη Στατιστική, ονομάζεται **κατανομή χι-τετράγωνο με n βαθμούς ελευθερίας** (chi square distribution with n degrees of freedom) και συμβολίζεται $\chi^2(n)$ ή χ^2_n ή $c^2(n)$ ή $x^2(n)$. Η ιδιαίτερη σημασία της προκύπτει από το:

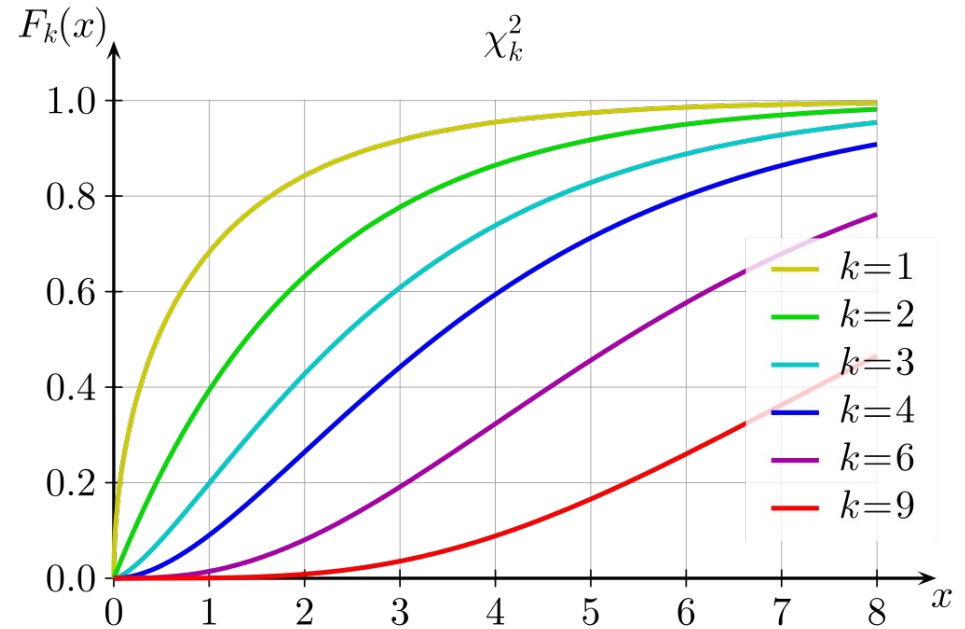
Θεώρημα

Αν $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$ είναι ανεξάρτητες τ.μ. με κατανομή $N(0, 1)$, τότε η τυχαία μεταβλητή $Q = Z_1^2 + Z_2^2 + \dots + Z_n^2$ ακολουθεί την κατανομή $\chi^2(n)$ (δηλαδή $Q \sim \chi^2(n)$).

Κατανομή $\chi^2(n)$



$$f_x(x) = \frac{e^{-x/2} x^{k/2-1}}{2^{k/2} \Gamma(k/2)}, \quad x > 0.$$



$$F_x(x) = \frac{1}{2^{k/2} \Gamma(k/2)} \int_0^x e^{-t/2} t^{k/2-1} dt, \quad x > 0.$$

Ειδικές περιπτώσεις $\chi^2(1)$ και $\chi^2(2)$

Επιλέγοντας $n = 1$, παίρνουμε την ειδική περίπτωση $\chi^2(1)$ ($=\Gamma(1/2, 1/2)$) της κατανομής χι-τετράγωνο με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f_x(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^{-x/2}, \quad x > 0,$$

Επιλέγοντας $n = 2$, παίρνουμε την ειδική περίπτωση $\chi^2(2)$ ($=\Gamma(1, 1/2)$) της κατανομής χι-τετράγωνο με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f_x(x) = \frac{1}{2} e^{-x/2}, \quad x > 0,$$

και συνάρτηση κατανομής $F_x(x) = 1 - e^{-x/2}$, $x > 0$. Παρατηρούμε ότι

$$\chi^2(2) = \text{Exp}(1/2)$$

Ειδικές περιπτώσεις $\chi^2(1)$ και $\chi^2(2)$

Άσκηση (Το Θεώρημα για $n = 1$).

Να αποδειχθεί ότι αν $Z \sim N(0, 1)$, τότε $Z^2 \sim \chi^2(1)$ (δηλαδή $f_{Z^2}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^{-x/2}$, $x > 0$)

$$Z \sim N(0, 1) \Rightarrow f_Z(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, x \in \mathbb{R}.$$

$$F_{Z^2}(z) = P(Z^2 \leq z) = P(-\sqrt{z} \leq Z \leq \sqrt{z}) = \Phi(\sqrt{z}) - \Phi(-\sqrt{z})$$

$$\begin{aligned} f_{Z^2}(z) &= [\Phi(\sqrt{z})]' - [\Phi(-\sqrt{z})]' = \Phi'(\sqrt{z}) \cdot (\sqrt{z})' - \Phi'(-\sqrt{z}) \cdot (-\sqrt{z})' \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z}{2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{z}} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z}{2}} \cdot \left(-\frac{1}{2\sqrt{z}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi z}} \cdot e^{-\frac{z}{2}}, z > 0. \end{aligned}$$

Κατανομή Βήτα

Κατανομή Βήτα

Στη θεωρία πιθανοτήτων και στη στατιστική, η κατανομή βήτα (beta) είναι μια οικογένεια συνεχών κατανομών πιθανοτήτων που ορίζονται στο διάστημα $[0, 1]$, περιγράφονται από δύο θετικές παραμέτρους σχήματος, α και β , οι οποίες προσδιορίζουν και το σχήμα της κατανομής.

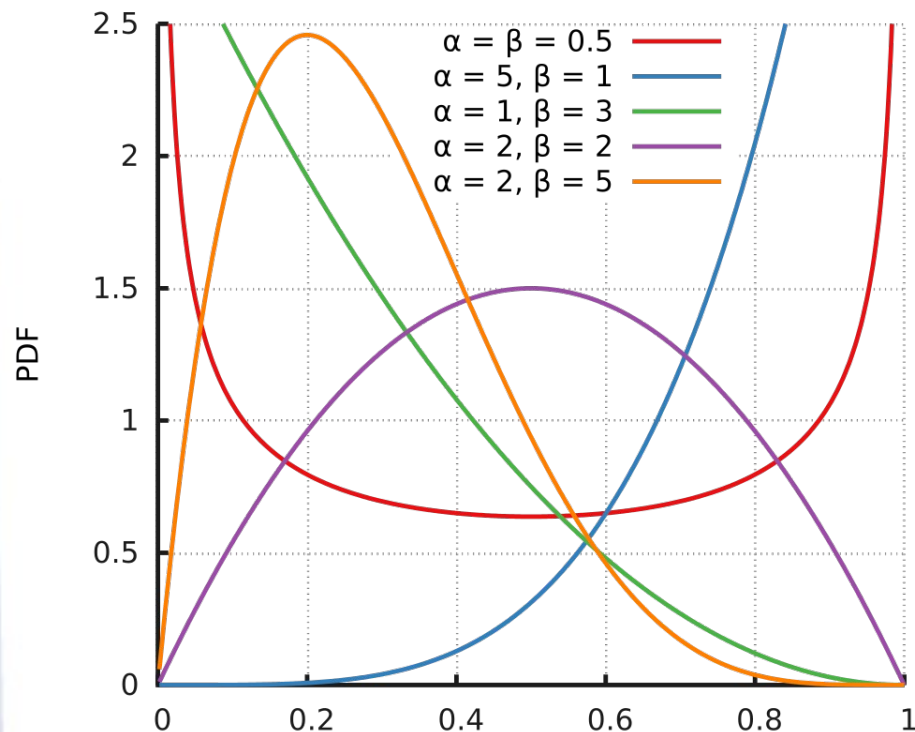
$$\text{Αν } X \sim B(\alpha, \beta) \text{ τότε } f(x) = \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha) \cdot \Gamma(\beta)} x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} = \frac{1}{B(\alpha, \beta)} x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1}$$

$$\text{Ειδική συνάρτηση } B(z_1, z_2) = \int_0^1 t^{z_1-1} (1-t)^{z_2-1} dt, \Re(z_1) > 0, \Re(z_2) > 0.$$

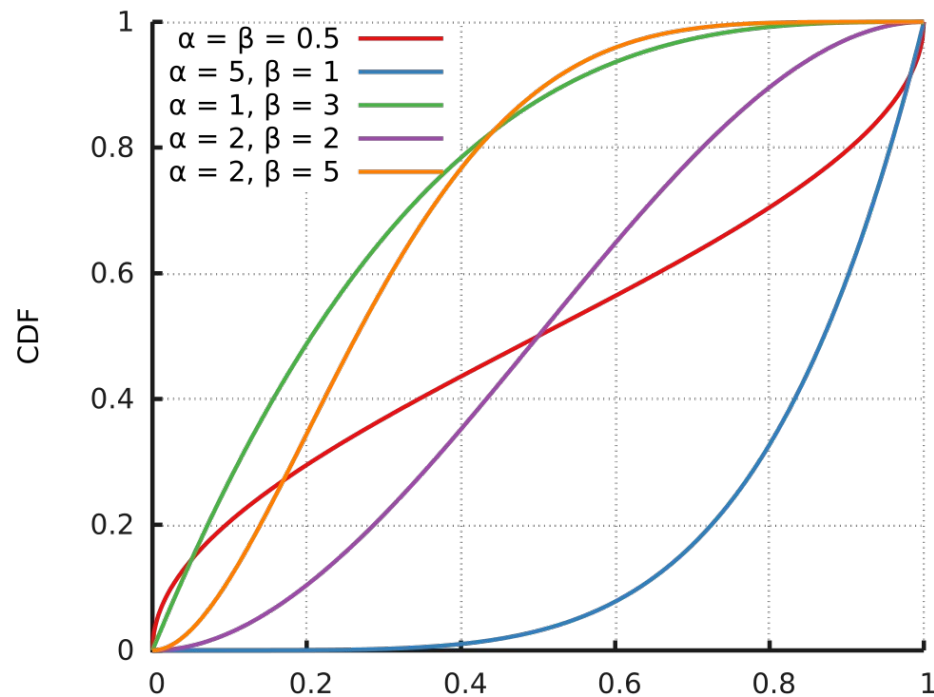
Γεωμετρικά χαρακτηριστικά:

$$X \sim B(\alpha, \beta) \rightarrow E(X) = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}, \text{Var}(X) = \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2(\alpha + \beta + 1)}$$

Κατανομή Βήτα



$$f(x) = \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha) \cdot \Gamma(\beta)} x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1}, x \in [0, 1]$$



$$F(x) = \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha) \cdot \Gamma(\beta)} \int_0^x t^{\alpha-1} (1-t)^{\beta-1} dt, x \in [0, 1]$$

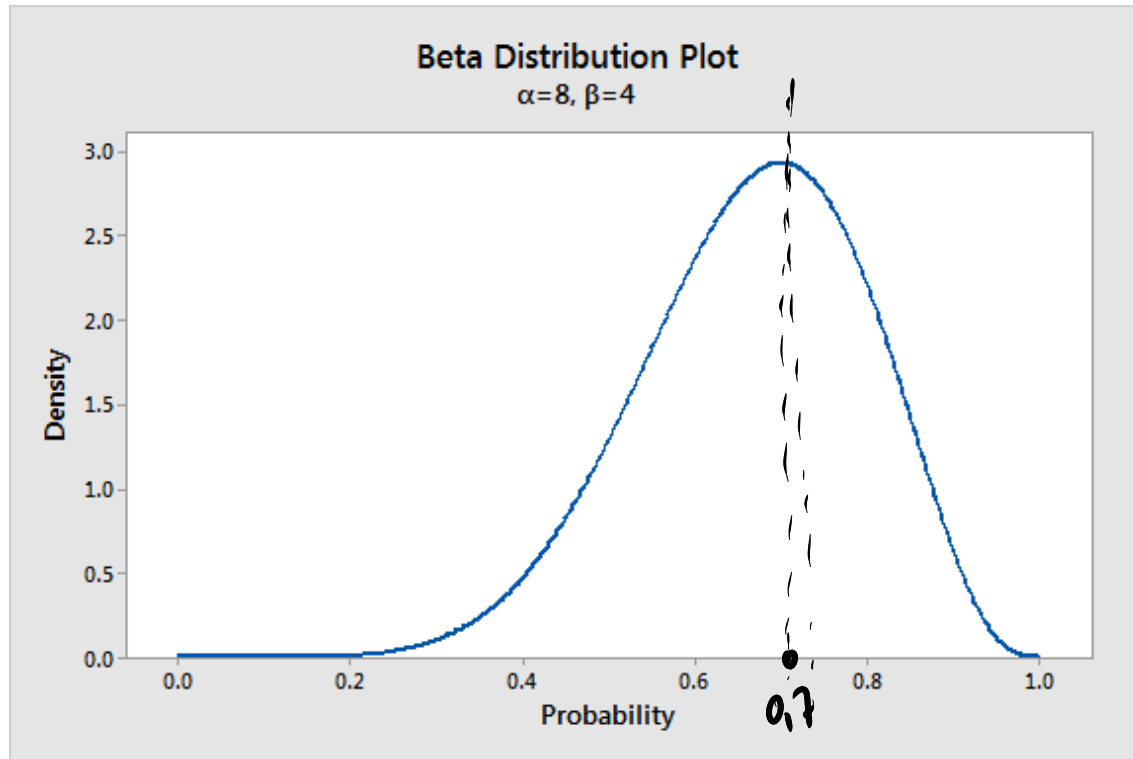
Κατανομή Βήτα

Η κατανομή Βήτα έχει τη δυνατότητα να αποτελέσει μοντέλο για τις πιθανότητες μίας άγνωστης κατανομής.

Για παράδειγμα, αν ένα πείραμα εξελίσσεται με δύο πιθανά αποτελέσματα αλλά δεν είναι γνωστή η πιθανότητα της επιτυχίας, τότε η εκτέλεση ενός περιορισμένου πλήθους πειραμάτων, η κατανομή Βήτα θα μπορούσε να προσφέρει ένα πιθανοθεωρητικό μοντέλο πρόβλεψης για την τιμή αυτής της πιθανότητας.

Παράδειγμα

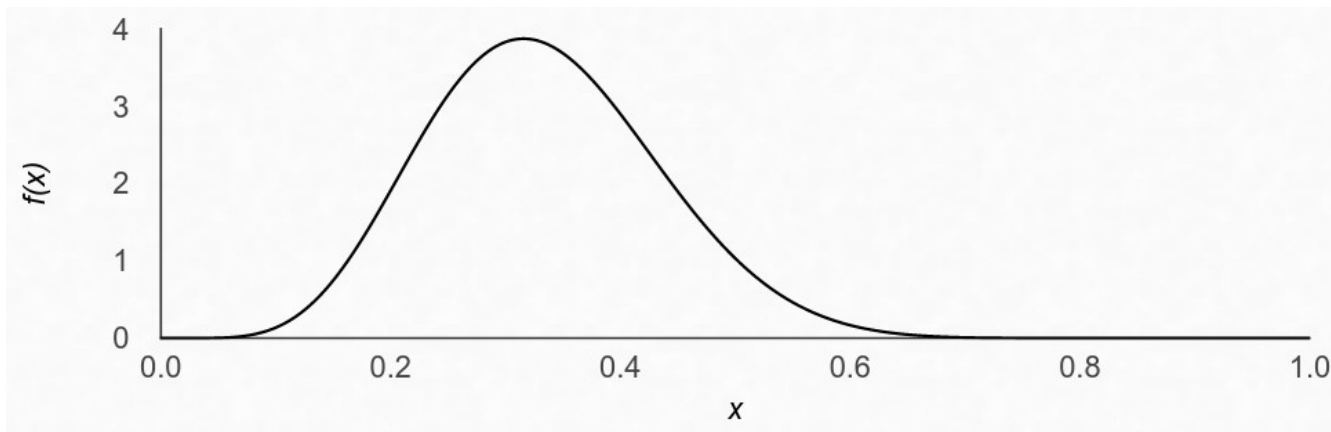
Σε $n = 10$ αγώνες η ομάδα Α νίκησε την ομάδα Β σε $k = 7$ από αυτούς. Εμείς, ενδιαφερόμαστε να βρούμε την κατανομή της πραγματικής πιθανότητας με την οποία η ομάδα Α νικάει την ομάδα Β. Αυτή η κατανομή μοντελοποιείται από την κατανομή $B(\alpha, \beta)$ όπου $\alpha = k + 1 = 8$ και $\beta = n - k + 1 = 4$.



Κατανομή Βήτα

Η κατανομή Βήτα εμφανίζεται επίσης ως η κατάλληλη κατανομή σε περίπτωση διάταξης τυχαίων τιμών από την ομοιόμορφη κατανομή $U(0,1)$. Πιο συγκεκριμένα, αν $U_1, \dots, U_n$ είναι n ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές, καθεμία από τις οποίες έχει την $U(0,1)$ κατανομή και $U_{(1)}, \dots, U_{(n)}$ είναι οι αντίστοιχες ταξινομημένες τιμές (δηλαδή $U_{(1)} = \min(U_1, \dots, U_n) < U_{(2)} < \dots < U_{(n)} = \max(U_1, \dots, U_n)$), τότε μπορεί να αποδειχθεί ότι $U_{(k)} \sim \text{Βήτα}(k, n + 1 - k)$, $k = 1, \dots, n$.

Για παράδειγμα, αν επιλέξουμε τυχαία 20 αριθμούς από την $U(0, 1)$, τότε η θέση του 7^{ου} στη σειρά στοιχείου έχει την κατανομή Βήτα(7, 14)



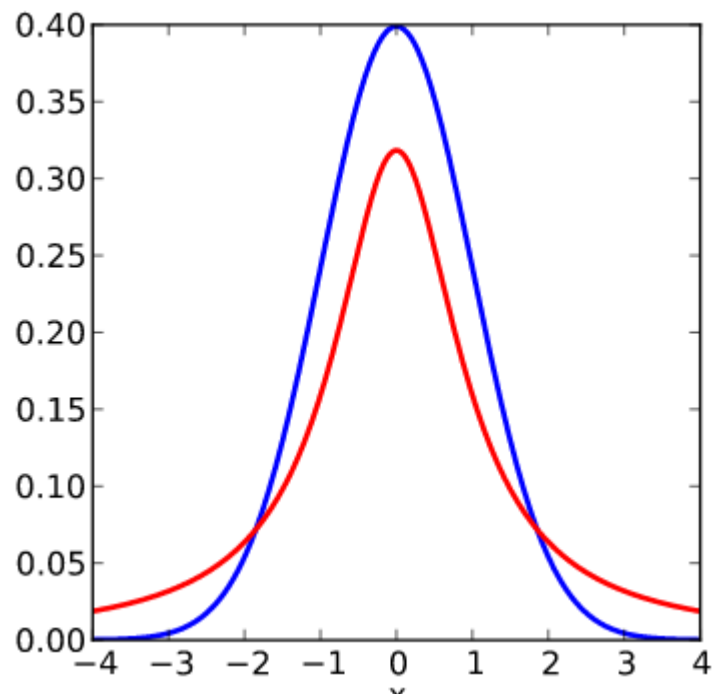
Κατανομή Student με n β.ε. (ή κατανομή $t(n)$)

Κατανομή Student με n β.ε. (ή κατανομή t(n))

Η κατανομή Student αποτελεί μία προσαρμογή της κανονικής κατανομής ως προς την ταχύτητα με την οποία μειώνεται η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας καθώς η τιμή απομακρύνεται από την αναμενόμενη τιμή.

Η προσαρμογή αυτή θεωρείται απαραίτητη στις μεθόδους της επαγωγικής στατιστικής, όταν μελετώνται μικρά δείγματα ($N < 30$). Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της t(n) είναι:

$$f_n(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-(n+1)/2}$$



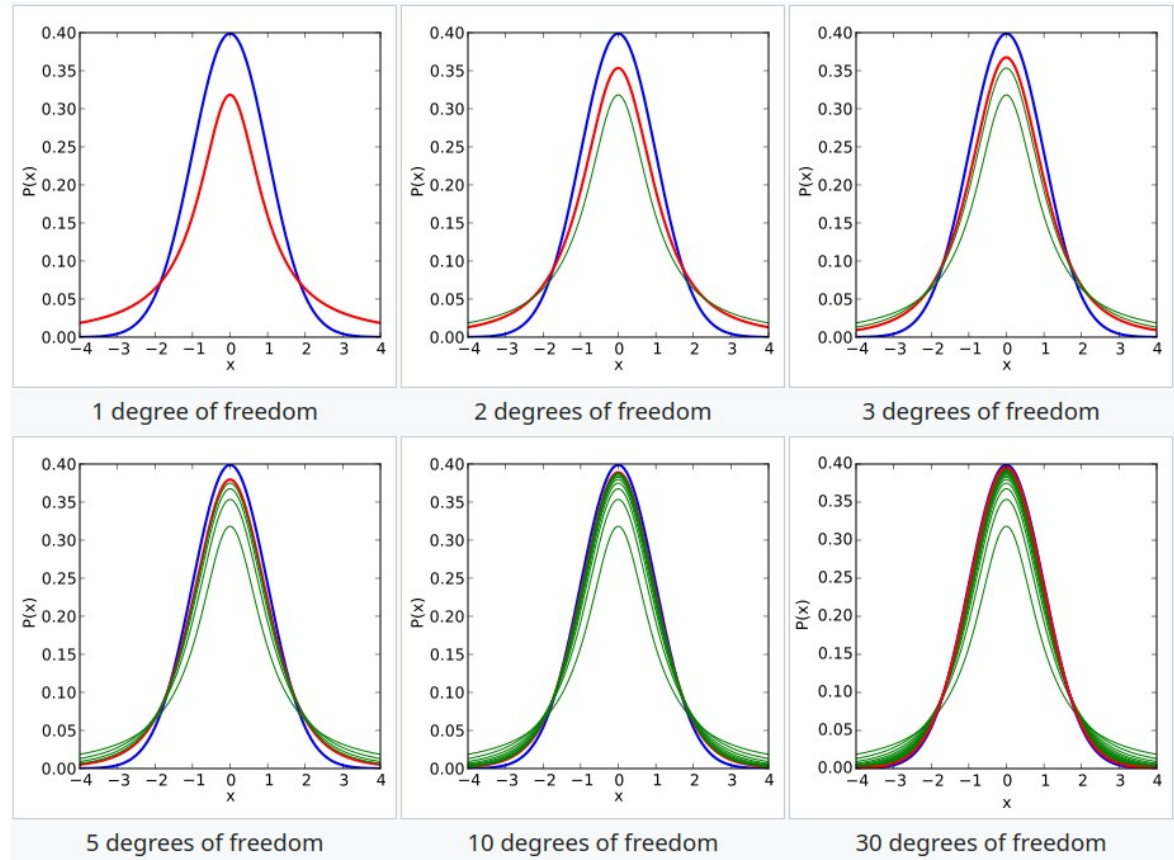
Αποδεικνύεται ότι:
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-(n+1)/2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Δηλαδή, στην πράξη, αν

$X \sim t(n)$ με $n > 30$, μπορούμε να

δεχθούμε ότι προσεγγιστικά

είναι $X \sim N(0, 1)$.



Κατανομή $F(n_1, n_2)$

Κατανομή $F(n_1, n_2)$

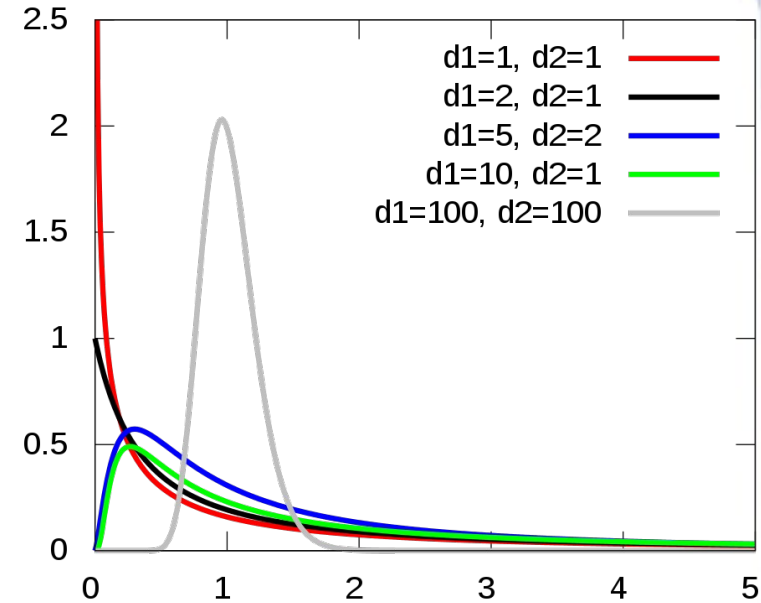
Η κατανομή F είναι αυτή που ακολουθεί μία μεταβλητή που ορίζεται ως ο λόγος δύο άλλων μεταβλητών που ακολουθούν κατανομή χ^2 . Εμφανίζεται στον έλεγχο ισότητας διακυμάνσεων αλλά και στη ανάλυση διακύμανσης (ANOVA) σε όλες τις παραλλαγές της.

Αν $X_1 \sim \chi^2(d_1)$ και $X_2 \sim \chi^2(d_2)$ τότε

$$Y = X_1 / X_2 \sim F(d_1, d_2).$$

Αποδεικνύεται ότι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της $Y \sim F(d_1, d_2)$ είναι η εξής:

$$f_{d_1, d_2}(x) = \frac{1}{B\left(\frac{d_1}{2}, \frac{d_2}{2}\right)} \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^{d_1/2} x^{d_1/2 - 1} \left(1 + \frac{d_1}{d_2} x\right)^{-(d_1 + d_2)/2}.$$



Κατανομή Cauchy

$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{1+x^2} dx$: Δεν ορίζεται. Κατανομή Cauchy

Η κατανομή Cauchy(x_0, γ) είναι η οικογένεια κατανομών με σ.π.π

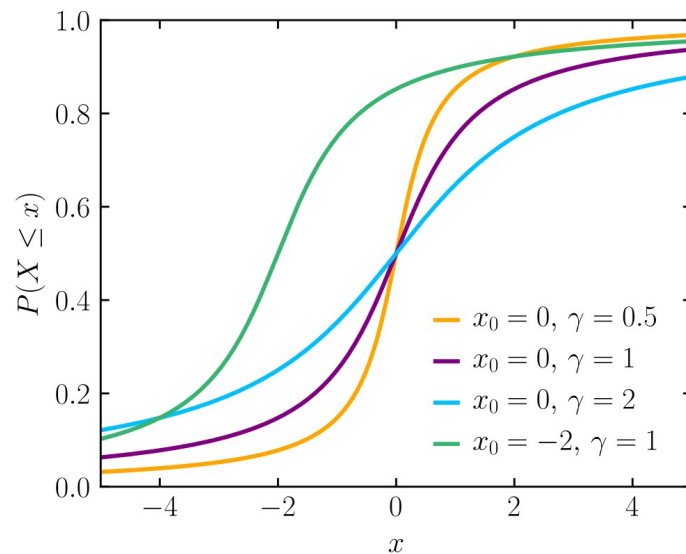
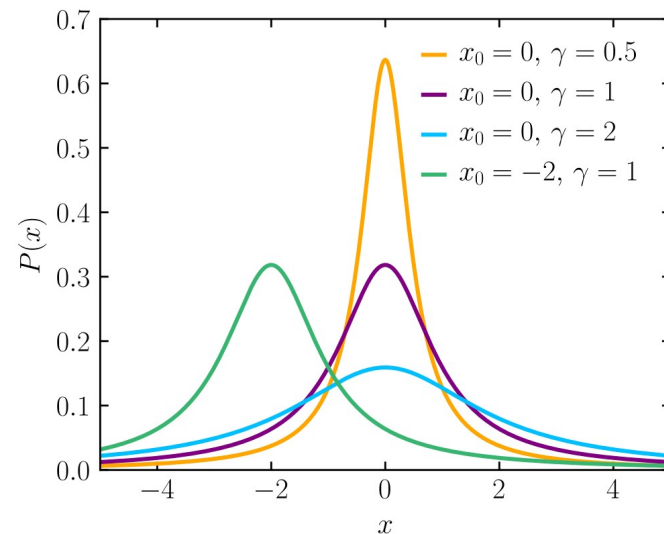
$$f_{x_0, \gamma}(x) = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\gamma}{(x - x_0)^2 + \gamma^2} \right].$$

Αν $Z = X / Y$, με $X, Y \sim N(0, 1)$, αποδεικνύεται ότι $Z \sim \text{Cauchy}(0, 1)$:
$$f_Z(x) = \frac{1}{\pi(1 + x^2)}.$$

Η κατανομή Cauchy είναι ιδιόμορφη κατανομή υπό την έννοια πως δεν μπορούν να υπολογιστούν για αυτήν γεωμετρικά χαρακτηριστικά όπως τα $E[X]$, $\text{Var}X$, γ , α .

Εφαρμογές:

1. Προσεγγίζει τη συνάρτηση Dirac καθώς $\gamma \rightarrow 0$.
2. Κατανομή αποστάσεων σε ευθύγραμμο τμήμα κεκλιμένο σε τυχαία γωνία.
3. Στη Φυσική είναι γνωστή ως κατανομή Lorentz.
4. Ειδική περίπτωση της κατανομής Student για $n = 2$.



Συναρτήσεις Τυχαίων Μεταβλητών

$E X = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$ Συναρτήσεις Τυχαίων Μεταβλητών

Παράδειγμα

Αν x είναι η ταχύτητα ενός Ι.Χ. στον αυτοκινητόδρομο, τότε η απόσταση που διανύει από τη στιγμή που πατιέται το φρένο μέχρι τη στιγμή που σταματάει δίνεται από τη συνάρτηση

$$g(x) = 0,008 \cdot x^2$$

Σε μια συγκεκριμένη μελέτη η κατανομή των ταχυτήτων των αυτοκινήτων (km/h) κατά την έναρξη του φρεναρίσματος προσδιορίστηκε εμπειρικά να είναι η $U(100, 140)$. Ποια είναι η αναμενόμενη τιμή της απόστασης ακινητοποίησης;

$$E(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot f_X(x) dx = \int_{100}^{140} 0,008 x^2 \cdot \frac{1}{40} dx = \frac{0,008}{40} \frac{x^3}{3} \Big|_{100}^{140}$$

$$X \sim U(100, 140)$$

$$f_X(x) = \frac{1}{140-100}, x \in [100, 140]$$

$$= \frac{0,008}{120} [140^3 - 100^3] = 116,3 \text{ m.}$$

Συναρτήσεις Τυχαίων Μεταβλητών

Παράδειγμα

Αν x είναι η ταχύτητα ενός Ι.Χ. στον αυτοκινητόδρομο, τότε η απόσταση που διανύει από τη στιγμή που πατιέται το φρένο μέχρι τη στιγμή που σταματάει δίνεται από τη συνάρτηση

$$g(x) = 0,008 \cdot x^2$$

Σε μια συγκεκριμένη μελέτη η κατανομή των ταχυτήτων των αυτοκινήτων (km/h) κατά την έναρξη του φρεναρίσματος προσδιορίστηκε εμπειρικά να είναι η $U(100, 140)$. Ποια είναι η αναμενόμενη τιμή της απόστασης ακινητοποίησης;

Λύση

Είναι $X \sim U(100, 140)$. Αν $Y = g(X)$ η τυχαία μεταβλητή της απόστασης, τότε

$$E(Y) = E(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x) dx = \int_{100}^{140} 0,008 x^2 \frac{1}{140 - 100} dx = \frac{0,008}{40} \cdot \left[\frac{x^3}{3} \right]_{100}^{140} = 116,3 \text{ m}$$

Αναμενόμενη τιμή $Y = g(X)$

Στο προηγούμενο παράδειγμα βρήκαμε ότι $E(g(X)) = 116,3 \text{ m}$.

Παρατηρούμε ότι $E(X) = (100 + 140) / 2 = 120$ και ότι $g(E(X)) = 0,008 \cdot 120^2 = 115,2 \text{ m}$, δηλαδή ότι

$$\underline{g(E(X)) \neq E(g(X))}.$$

Η παρατήρηση αυτή δεν είναι τυχαία. Αποδεικνύεται ότι η μοναδική περίπτωση όπου με βεβαιότητα αντιμετωπίζεται η αναμενόμενη τιμή με μία συνάρτηση $g(X)$ είναι στην περίπτωση όπου η $g(x)$ είναι γραμμική, δηλαδή της μορφής $g(x) = ax + \beta$.

Συνεπώς, σε όλες τις άλλες περιπτώσεις, καταφεύγουμε στον ορισμό:

$$E(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)dx, \text{ αν } X: \text{συνεχής}.$$

$$E(g(X)) = \sum_x g(x)f_X(x)dx, \text{ αν } X: \text{διακριτή}.$$

Συνάρτηση μάζας πιθανότητας διακριτής $Y = g(X)$

Γενικότερα, αν $Y = g(X)$ και R είναι το εύρος τιμών της X , τότε το εύρος τιμών της Y είναι το σύνολο

$$\{g(X), X \in R\}.$$

Αν η X είναι διακριτή τότε η συνάρτηση μάζας πιθανότητας της Y είναι

$$f_Y(y) = P(Y = y) = P(g(X) = y) = \sum_{x: g(x) = y} P(X = x) = \sum_{x: g(x) = y} f_X(x)$$

Στην περίπτωση αυτή, η αναμενόμενη τιμή και η διακύμανση της Y είναι αντίστοιχα:

$$E(Y) = E(g(X)) = \sum_x g(x) \cdot f_X(x)$$

$$\text{Var}(Y) = \text{Var}(g(X)) = \sum_x (g(x) - \mu_Y)^2 \cdot f_X(x)$$

Συνάρτηση μάζας πιθανότητας διακριτής $Y = g(X)$

Άσκηση 1

Αν X διακριτή τ.μ. με $P(X = k) = 1/5$, $k = -1, 0, 1, 2, 3$, να βρεθεί η σ.μ.π. της $Y = |X|$.

$$P(Y = k), k = 0, 1, 2, 3.$$

$$P(Y = 0) = P(|X| = 0) = P(X = 0) = \frac{1}{5}.$$

$$P(Y = 1) = P(|X| = 1) = P(X = -1) + P(X = 1) = \frac{2}{5}$$

$$P(Y = 2) = P(|X| = 2) = P(X = 2) = \frac{1}{5}$$

$$P(Y = 3) = P(X = 3) = \frac{1}{5}.$$

Συνάρτηση μάζας πιθανότητας διακριτής $Y = g(X)$

Άσκηση 2

Αν X διακριτή τ.μ. με $P(X = k) = 1/5$, $k = 0, \pi/4, \pi/2, 3\pi/4, \pi$, να βρεθεί η αναμενόμενη τιμή της $Y = \sin(X)$.

$$\begin{aligned} E(\sin(X)) &= \sum_k \sin(k) \cdot P(X=k) = \cancel{\sin 0} \cdot \frac{1}{5} + \sin \frac{\pi}{4} \cdot \frac{1}{5} + \cancel{\sin \frac{\pi}{2}} \cdot \frac{1}{5} + \\ &\quad + \cancel{\sin \frac{3\pi}{4}} \cdot \frac{1}{5} + \cancel{\sin \pi} \cdot \frac{1}{5} = \\ &= 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{\sqrt{2}+1}{5} \end{aligned}$$

$$X \sim \text{Exp}(\lambda) \Rightarrow P(X > x) = e^{-\lambda x}$$

Συνάρτηση κατανομής $Y = g(X)$

Παράδειγμα 1

Αν $X \sim \text{Exp}(\lambda)$, τότε να βρεθεί η συνάρτηση κατανομής της $Y = 1/X$. $\in (0, +\infty)$ για $X \in [0, +\infty)$

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P\left(\frac{1}{X} \leq y\right) = P\left(X \geq \frac{1}{y}\right) = e^{-\frac{\lambda}{y}}.$$

Συνάρτηση κατανομής $Y = g(X)$

Παράδειγμα 1

Αν $X \sim \text{Exp}(\lambda)$, τότε να βρεθεί η συνάρτηση κατανομής της $Y = 1/X$.

Λύση

Για $X = 0$, η Y δεν ορίζεται ενώ για $X \in (0, +\infty)$, η συνάρτηση $Y = 1/X$ είναι γνησίως φθίνουσα.

$$F_Y(x) = P(Y \leq x) = P(1/X \leq x) = P(X \geq 1/x) = 1 - P(X \leq 1/x) = e^{-\lambda/x}.$$

Παραγωγίζοντας, μπορούμε να βρούμε και τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της Y :

$$f_Y(x) = (F_Y(x))' = e^{-\lambda/x} \cdot (-\lambda/x)' = -\lambda e^{-\lambda/x} / x^2.$$

Σημείωση

Η τ.μ. Y ονομάζεται **αντίστροφη εκθετική κατανομή** (inverse exponential distribution) και βρίσκει εφαρμογές στα συστήματα ασύρματης επικοινωνίας φθίνουσας ισχύος (fading wireless communication systems)

$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$, $x \geq 0$. Συνάρτηση κατανομής $Y = g(X)$

Άσκηση 1

Αν $X \sim \text{Exp}(\lambda)$, τότε να βρεθεί η συνάρτηση κατανομής και η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της $Y = X^3$. $Y \in [0, \infty)$.

Λύση

Υπόδειξη

Πρώτα βρείτε τις πιθανές τιμές της Y . Στη συνέχεια, εκφράστε την $P(Y \leq y)$ από την F_X .

$$F_Y = P(Y \leq y) = P(X^3 \leq y) = P(X \leq \sqrt[3]{y}) = 1 - e^{-\lambda \sqrt[3]{y}}$$

$$y \geq 0 \mid f_Y(y) = F'_Y(y) = \left(1 - e^{-\lambda \sqrt[3]{y}}\right)' = e^{-\lambda \sqrt[3]{y}} \cdot (-\lambda) \cdot y^{-\frac{2}{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{y}} \\ = \frac{\lambda}{3} y^{-\frac{2}{3}} \cdot e^{-\lambda \sqrt[3]{y}}$$

Συνάρτηση κατανομής $Y = g(X)$

Άσκηση 2

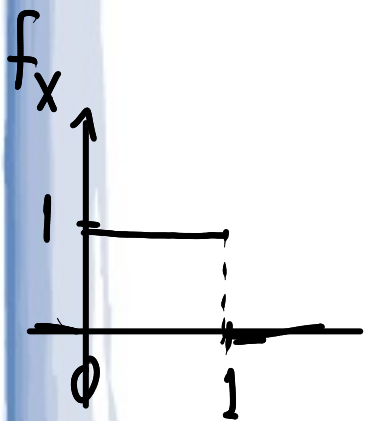
Αν $X \sim U(0, 1)$, τότε να βρεθούν η $E(Y)$, η σ.κ. F_Y και η σ.π.π. f_Y της τ.μ. $Y = e^X$.

Λύση

Υπόδειξη

Πρώτα βρείτε τις πιθανές τιμές της Y . Στη συνέχεια, εκφράστε την $P(Y \leq y)$ από την F_X

$$X \sim U(0, 1) \cdot Y = e^X \in [1, e].$$



$$E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} e^x \cdot f_X(x) dx = \int_0^1 e^x dx = e^x \Big|_0^1 = e - 1.$$

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(e^X \leq y) = P(X \leq \ln y) = F_X(\ln y)$$

$$= \frac{\ln y - 0}{1 - 0} = \ln y, \quad y \in [1, e].$$

$$\cdot f_Y(y) = F_Y'(y) = (\ln y)' = \frac{1}{y}, \quad y \in [1, e].$$

Συνάρτηση κατανομής $Y = g(X)$

$$F(x) = 1 - e^{-x}$$

Άσκηση 3

Να αποδείξετε ότι αν η τ.μ. $X \sim U(0,1)$ τότε η $Y = -\ln X$ ακολουθεί την $\text{Exp}(1)$.

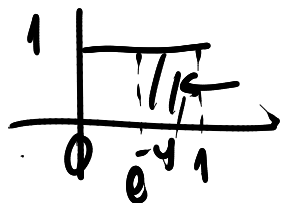
Υπόδειξη

Πρώτα βρείτε τις πιθανές τιμές της Y . Στη συνέχεια, εκφράστε την $P(Y \leq y)$ από την F_X .

$$X \sim U(0,1) \quad Y = -\ln X \in [0, +\infty), \quad y \geq 0$$

$$\begin{aligned} 0 &\leq X \leq 1 \\ -\infty &\leq \ln X \leq 0 \\ 0 &\leq -\ln X \leq +\infty \\ 0 &\leq Y \leq +\infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y \leq y) = P(-\ln X \leq y) = P(\ln X \geq -y) \\ &= P(X \geq e^{-y}) = 1 - e^{-y} = \text{σ. κ. της } \text{Exp}(1). \end{aligned}$$



$$\Rightarrow Y \sim \text{Exp}(1).$$

Συνάρτηση κατανομής $Y = g(X)$

Στη γενική περίπτωση μίας συνάρτησης συνεχούς μεταβλητής ισχύει το εξής:

Θεώρημα

Αν X είναι μία συνεχής τυχαία μεταβλητή, $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι μία μονότονη και συνεχώς διαφορίσιμη συνάρτηση, τότε η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της $Y = \underline{g(X)}$, είναι η

$$f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y)) \left| \frac{d}{dy} g^{-1}(y) \right|$$

Απόδειξη

g αύξουσα:

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(\underline{g(X) \leq y}) = P(\underline{X \leq g^{-1}(y)}) = F_X(g^{-1}(y)) \Rightarrow f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y)) \frac{d}{dy} g^{-1}(y)$$

g φθίνουσα:

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(\underline{g(X) \leq y}) = P(\underline{X \geq g^{-1}(y)}) = 1 - F_X(g^{-1}(y)) \Rightarrow f_Y(y) = -f_X(g^{-1}(y)) \frac{d}{dy} g^{-1}(y) = f_X(g^{-1}(y)) \left| \frac{d}{dy} g^{-1}(y) \right|$$

Συνάρτηση κατανομής $Y = g(X)$

Παράδειγμα

Αν $X \sim U(0,1)$ τότε για να βρούμε την σ.π.π της $Y = -\ln X$, έχουμε:

$$g(x) = -\ln x, g'(x) = -1/x < 0, x \in (0, 1) \rightarrow g: \text{φθίνουσα.}$$

Είναι $g^{-1}(y) = e^{-y}$, $(g^{-1}(y))' = (e^{-y})' = -e^{-y}$, και:

$$f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y)) \left| \frac{d}{dy} g^{-1}(y) \right| = e^{-y} \Rightarrow Y \sim \text{Exp}(1)$$

Συνάρτηση κατανομής $Y = g(X)$

Άσκηση

Αν $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ τότε να βρεθεί η σ.π.π της $Z = (X - \mu)/\sigma$.