Θεωρία Πιθανοτήτων και Στατιστική

Διδάσκων: Επαμεινώνδας Διαμαντόπουλος
Επικοινωνία: epdiaman@ee.duth.gr

Θεωρία Πιθανοτήτων και Στατιστική

Η Θεωρία Πιθανοτήτων αναπτύχθηκε μέσα από την προσπάθεια του ανθρώπου να κατανοήσει στοχαστικά φαινόμενα, δηλαδή φαινόμενα που εξελίσσονται τυχαία.

Η Στατιστική αναπτύχθηκε με φυσικό τρόπο μέσα από την ανάγκη περιγραφής ενός μεγάλου πλήθους δεδομένων και την εκτίμηση της εξέλιξης τους στο χρόνο.

Με την πάροδο του χρόνου, η θεωρία πιθανοτήτων βρήκε τη φυσική της θέση ως η θεωρητική βάση πάνω στην οποία συνέχισε την ανάπτυξή της η Στατιστική.

Στόχος του μαθήματος είναι η περιγραφή των βασικών αρχών της θεωρίας πιθανοτήτων και η άμεση εφαρμογή τους στις Στατιστικές μεθόδους που υποστηρίζουν μία σύγχρονη ανάλυση δεδομένων.

Πληροφορίες για τη διεξαγωγή του μαθήματος

Διδασκαλία του μαθήματος

Το μάθημα διδάσκεται κάθε Παρασκευή για 5 διδακτικές ώρες, δηλαδή 225 λεπτά. Το πρόγραμμα διδασκαλίας θα είναι ως εξής:

09:15: Έναρξη μαθήματος

09:15 – 10:15: 1η διδακτική περίοδος (60’)

10:15 – 10:30: Διάλειμμα 15’

10:30 – 11:30: 2η διδακτική περίοδος (60’)

11:30 – 11:45: Διάλειμμα 15’

11:45 – 12:45: 3η διδακτική περίοδος (60’)

12:45 – 13:00: Διάλειμμα 15’

13:00 – 13:45: 4η διδακτική περίοδος (45’)

13:45: Λήξη μαθήματος

Διδασκαλία του μαθήματος

Την 4η διδακτική περίοδο (13:00 – 13:45) θα πραγματοποιείται από τους φοιτητές επίλυση ασκήσεων, ανάλογων με αυτών που θα έχουν επιλυθεί κατά τη διάρκεια του μαθήματος εκείνης της ημέρας.

Οι ασκήσεις αυτές θα ~~παραδίδονται~~ αποστέλλονται με την αποχώρησή του κάθε φοιτητή προς αξιολόγηση, με τα πλήρη στοιχεία τους (Ονοματεπώνυμο και Αριθμό Μητρώου).

Η διαδικασία αυτή θα επαναλαμβάνεται κάθε Παρασκευή. Η πλήρης συμμετοχή στη διαδικασία θα προσαυξήσει τον βαθμό της τελικής γραπτής εξέτασης κατά ποσοστό 10%.

Η συμμετοχή στις ασκήσεις δεν έχει τη μορφή εξέτασης. Η συνεργασία μεταξύ των φοιτητών δεν απαγορεύεται, αντίθετά είναι επιθυμητή προς διευκρίνηση σκοτεινών σημείων και βελτίωση της αμοιβαίας κατανόησης των νέων εννοιών.

Ενθαρρύνονται όλοι οι φοιτητές να συμμετάσχουν ενεργά καθώς αυτή τους η απόφαση θα τους διευκολύνει στην παρακολούθηση της ύλης του μαθήματος, η οποία εκ των πραγμάτων θα παρουσιάζεται με γρήγορο ρυθμό.

Θεωρία Πιθανοτήτων

Περιεχόμενα 1ου μαθήματος

- Πειράματα Τύχης – Δειγματοχώρος
- Πράξεις με ενδεχόμενα
- Διάγραμμα Venn
- Ξένα ενδεχόμενα
- (Κλασικός) Ορισμός της Πιθανότητας
- Κανόνες λογισμού πιθανοτήτων
- Ανεξάρτητα ενδεχόμενα
- Χώρος Πιθανοτήτων – Αξιώματα Kolmogorov
- Νόμος της ολικής πιθανότητας
- Παράδοξο Bertrand
- Απαρίθμηση – Καταμέτρηση
- Διατάξεις
- Συνδυασμοί

Γνωστικοί στόχοι 1ου μαθήματος

Στο τέλος αυτού του μαθήματος, ο φοιτητής πρέπει να είναι σε θέση :

- Να υπολογίζει πιθανότητες με χρήση του κλασικού ορισμού.
- Να γνωρίζει και να μπορεί να εφαρμόσει τις πράξεις μεταξύ των συνόλων.
- Να κρίνει πότε δύο ενδεχόμενα είναι ξένα.
- Να κρίνει πότε δύο ενδεχόμενα είναι ανεξάρτητα.
- Να γνωρίζει το νόμο της ολικής πιθανότητας και να είναι σε θέση να τον εφαρμόσει σε προβλήματα υπολογισμού.
- Να αντιλαμβάνεται την απλή αρχή καταμέτρησης ενδεχομένων.
- Να ξεχωρίζει τις έννοιες διάταξη – μετάθεση – συνδυασμός.
- Να μπορεί να υπολογίσει τις διατάξεις n αντικειμένων ανά k.
- Να μπορεί να υπολογίσει τις μεταθέσεις n αντικειμένων.
- Να μπορεί να υπολογίσει συνδυασμούς n αντικειμένων ανά k.

Πειράματα Τύχης – Δειγματοχώρος

Πείραμα τύχης (random trial) ονομάζεται κάθε διαδικασία που εκτελείται (πείραμα), ή παρατηρείται (φαινόμενο) και στην οποίο το τελικό αποτέλεσμα είναι τυχαίο (όχι γνωστό εκ των προτέρων).

Κάθε ένα από τα πιθανά εξαγόμενα ενός τυχαίου πειράματος ονομάζεται **απλό ενδεχόμενο** ή **απλό γεγονός.**

Παραδείγματα πειράματος τύχης:

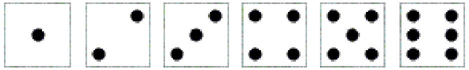
- η ρίψη ενός ζαριού. Απλά ενδεχόμενα = {1}, {2}, {3}, {4}, {5}, {6}
- το πλήθος των παιδιών που κάνει μία οικογένεια. Απλά ενδεχόμενα = {0}, {1}, ...

Δειγματοχώρος, ή **δειγματικός χώρος (sample space)** ενός πειράματος τύχης ονομάζεται το σύνολο όλων των δυνατών αποτελεσμάτων του πειράματος, δηλαδή το σύνολο όλων των απλών γεγονότων του, και συμβολίζεται με Ω. Αν με ω_i , i = 1, 2,… συμβολίσουμε τα απλά ενδεχόμενα του πειράματος τότε $\Omega = \{\omega_1 , \omega_2, \ldots,\omega_n, \ldots\}$.

Δειγματικός Χώρος

Παραδείγματα πειραμάτων τύχης και δειγματοχώρων.

1) Ρίψη ενός ζαριού και παρατηρούμε το αποτέλεσμα της ρίψης.

Πιθανά αποτελέσματα . Ω = {1, 2, 3, 4, 5, 6}.

2) Επιλογή ενός χαρτιού από μία τράπουλα. Μας ενδιαφέρει ο αριθμός του χαρτιού

Πιθανά αποτελέσματα: 2♠, 2♣, 2♦, 2♥, 3♠, 3♣, 3♦, 3♥, ..., Α♠, Α♣, Α♦, Α♥.

Δειγματοχώρος Ω = {2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J, Q, K, A}

Στο ίδιο πείραμα, αν καταγράφαμε το χρώμα του χαρτιού τότε θα ήταν Ω = {**Μ**, **Κ**}, ενώ αν μας απασχολούσε η σειρά που ανήκει το χαρτί τότε θα ήταν Ω = {♠, ♣, ♦, ♥}.

Παρατήρηση
Στο ίδιο πείραμα τύχης είναι δυνατόν να ορίζονται περισσότεροι από ένας δειγματοχώροι.

Είδη Δειγματικών Χώρων

Αν το πλήθος των απλών ενδεχομένων είναι πεπερασμένο, τότε το Ω είναι πεπερασμένο σύνολο και ο δειγματοχώρος λέγεται επίσης **πεπερασμένος**. Σε κάθε άλλη περίπτωση το Ω είναι **άπειρο.** Ένας άπειρος δειγματοχώρος μπορεί επιπλέον να διακριθεί σε **αριθμήσιμο** και **μη αριθμήσιμο**.

Παραδείγματα

1. Αν Χ = {το άθροισμα των ρίψεων δύο ζαριών}, τότε Ω = {2, 3, 4, … 12}. Ο δειγματοχώρος Ω είναι **πεπερασμένος**.

2. Αν Χ = {πλήθος αφίξεων σε ένα ταμείο supermarket σε διάστημα μίας ώρας}, τότε Ω = {0, 1, 2, … }. Ο δειγματοχώρος Ω είναι **άπειρος αριθμήσιμος**.

3. Αν Χ = {χρονική στιγμή άφιξης του 1^{ου} πελάτη στο ταμείο supermarket}, τότε Ω = (0, +∞). Ο δειγματοχώρος Ω είναι **άπειρος μη αριθμήσιμος**.

Ασκήσεις στην έννοια του δειγματικού χώρου

1. Να βρεθούν οι δειγματοχώροι των παρακάτω πειραμάτων τύχης:
α) Ρίχνονται 3 νομίσματα (όλα την ίδια στιγμή) και καταγράφονται οι άνω όψεις τους.
β) Επιλέγεται ένα άτομο μίας πόλης και καταγράφεται το πλήθος των αδελφών του.

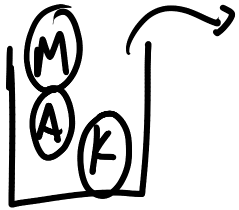
(α) $\underline{\Omega} = \{ KKK, KK\Gamma, K\Gamma K, \Gamma KK, K\Gamma\Gamma, \Gamma K\Gamma, \Gamma\Gamma K, \Gamma\Gamma\Gamma \}$

1ο 2ο 3ο

(β) $\underline{\Omega} = \{ 0, 1, 2, \ldots \}$

Ασκήσεις στην έννοια του δειγματικού χώρου

2. Ένα κουτί περιέχει μία μαύρη, μία άσπρη και μία κόκκινη σφαίρα. Επιλέγουμε τυχαία μία σφαίρα, παρατηρούμε το χρώμα της και στη συνέχεια επιλέγουμε άλλη μία **χωρίς επανατοποθέτηση** της πρώτης. Να βρεθεί ο δειγματοχώρος του πειράματος.



$\underline{\Omega} = \{MA, MK, AM, AK, KA, KM\}.$

Άλυτη

Ασκήσεις στην έννοια του δειγματικού χώρου

3. Ένα κουτί περιέχει μία μαύρη, μία άσπρη και μία κόκκινη σφαίρα. Επιλέγουμε τυχαία μία σφαίρα, παρατηρούμε το χρώμα της, **την τοποθετούμε ξανά στο κουτί** και στη συνέχεια επιλέγουμε άλλη μία. Να βρεθεί ο δειγματοχώρος του πειράματος.

$\underline{\Omega} = \{ MM, MA, MK, AA, AM, AK, KK, KA, KM \}$

Πράξεις με ενδεχόμενα

Ορισμός
Κάθε υποσύνολο του δειγματοχώρου Ω ονομάζεται **ενδεχόμενο**.

Πράξεις με ενδεχόμενα

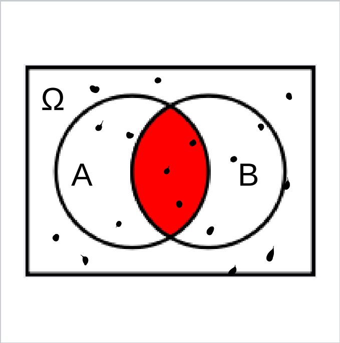
Αν Α, Β δύο ενδεχόμενα του δειγματοχώρου Ω, τότε ορίζονται τα εξής σύνολα ως πράξεις των Α ή/και Β:

- Συμπλήρωμα $A' = \{\omega \in \Omega : \omega \notin A\}$
- Ένωση $A \cup B = \{\omega \in \Omega : \omega \in A$ ή $\omega \in B\}$
- Τομή $A \cap B = \{\omega \in \Omega : \omega \in A$ και $\omega \in B\}$
- Διαφορά $B - A = \{\omega \in \Omega : \omega \in B$ και $\omega \notin A\} = B \cap A'$.
- Συμμετρική διαφορά $A \Delta B = \{\omega \in \Omega : \omega \in A - B$ ή $\omega \in B - A\} = (A - B) \cup (B - A)$.

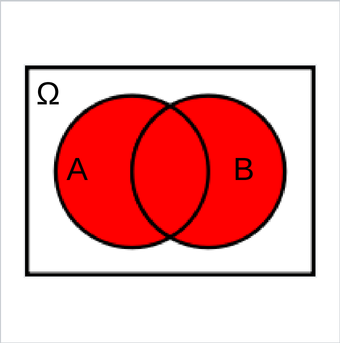
Διάγραμμα Venn

Το διάγραμμα του Venn (Venn diagram) είναι ένας πρακτικός τρόπος για να απεικονίζουμε ενδεχόμενα μέσα σε έναν δειγματοχώρο Ω. Το Ω αντιστοιχεί σε ένα ορθογώνιο μέσα στο οποίο συμβολίζονται τα ενδεχόμενα ως κύκλοι ή ελλείψεις.

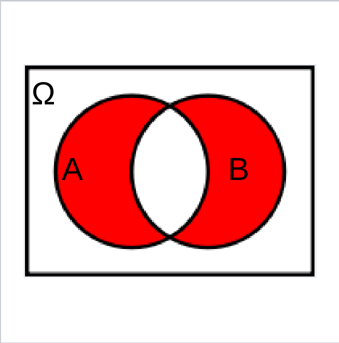
Με τον τρόπο αυτό είναι εύκολο να αναπαρασταθούν γραφικά, ενδεχόμενα που προκύπτουν ως πράξεις άλλων ενδεχομένων όπως είναι η τομή (∩), η ένωση (∪), το συμπλήρωμα (‘) , η διαφορά (-) και η συμμετρική διαφορά (Δ).



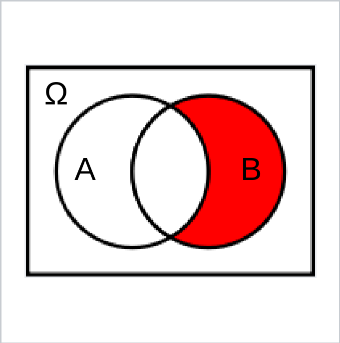
Τομή
A ∩ B



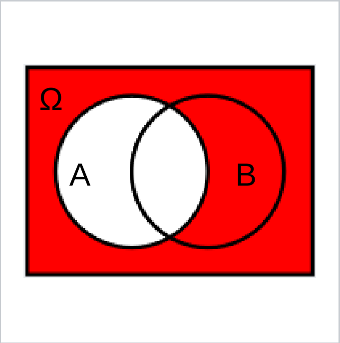
Ένωση
A ∪ B



Συμμετρική διαφορά
A Δ B

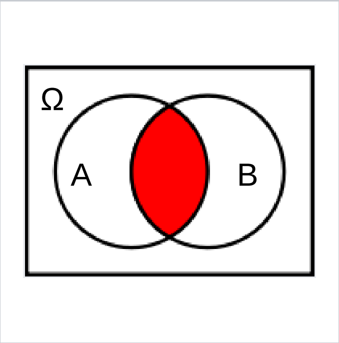


Διαφορά
B – A

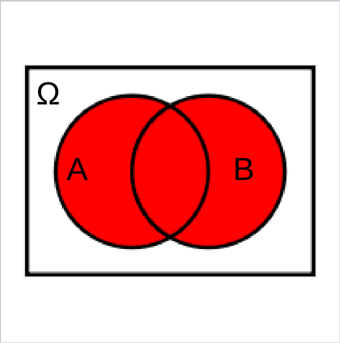


Συμπλήρωμα
A’

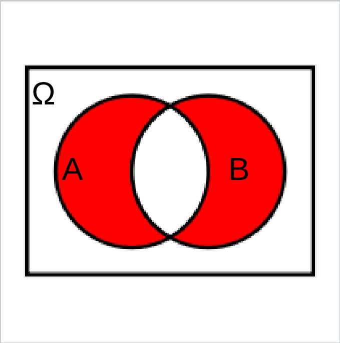
Διάγραμμα Venn



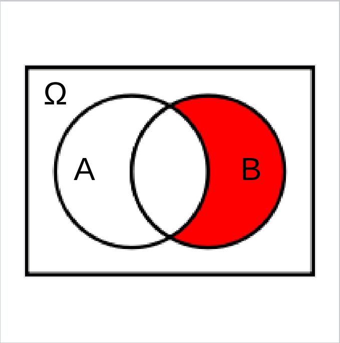
Τομή
$A \cap B$



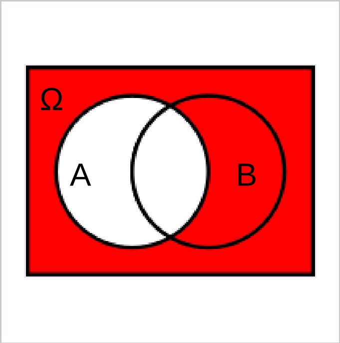
Ένωση
$A \cup B$



Συμμετρική διαφορά
$A \Delta B$



Διαφορά
$B – A$

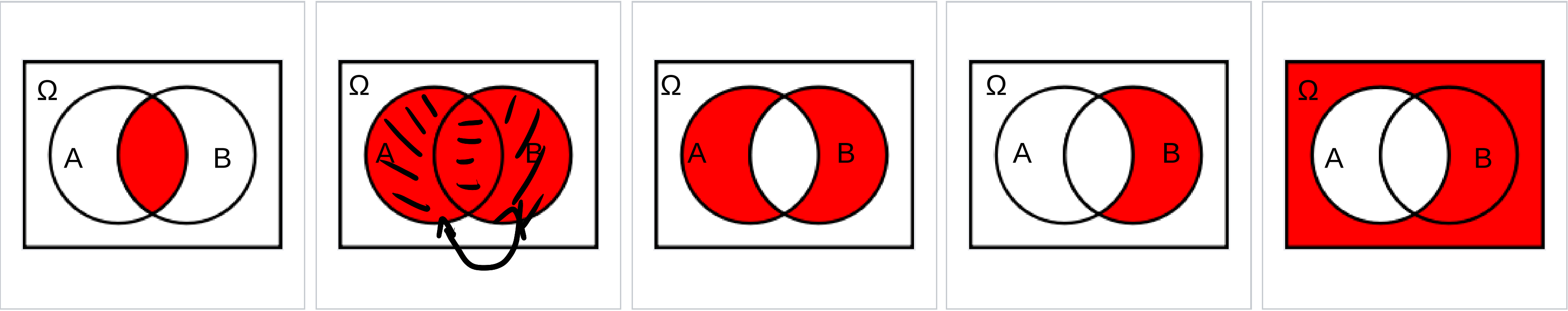


Συμπλήρωμα
$A’$

Ένα ενδεχόμενο Α λέμε ότι **συμβαίνει** όταν το αποτέλεσμα του τυχαίου πειράματος συμβεί να ανήκει στο Α. Με τον τρόπο αυτό, οι πράξεις μεταξύ των συνόλων περιγράφονται ως εξής:

- $A’$: Δεν συμβαίνει το Α
- $A \cap B$: Συμβαίνει και το Α και το Β
- $A \cap B’ = A – (A \cap B)$: Συμβαίνει το Α αλλά όχι το Β
- $A \cup B$: Συμβαίνει είτε το Α είτε το Β
- $A’ \cap B’ = (A \cup B)’$: Δεν συμβαίνει ούτε το Α, ούτε το Β
- $A \Delta B$: Συμβαίνει αποκλειστικά το Α ή το Β
- $B – A$: Συμβαίνει το Β αλλά όχι το Α

Διάγραμμα Venn



Τομή
A ∩ B

Ένωση
A ∪ B

Συμμετρική διαφορά
A Δ B

Διαφορά
B – A

Συμπλήρωμα
A’

Παρατηρούμε ότι:

- A ∪ B = (A – B) ∪ (A ∩ B) ∪ (B – A) ή
- A ∪ B = (A Δ B) ∪ (A ∩ B)

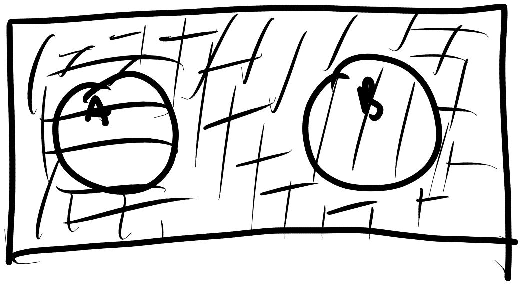
Οι παραπάνω ισότητες προσφέρουν τον διαχωρισμό της ένωσης δύο συνόλων σε δύο ή τρία ξένα μεταξύ τους σύνολα.

Ξένα ενδεχόμενα

Ορισμός
Δύο ενδεχόμενα ονομάζονται **ξένα μεταξύ τους** ή απλά **ξένα** ή **ασυμβίβαστα** (mutually exclusive ή disjoint) όταν η τομή τους είναι το κενό σύνολο:

$$A, B \text{ ξένα} \leftrightarrow A \cap B = \varnothing.$$

Σημείωση: Αν Α, Β ξένα τότε τα Α' = Ω – Α και Β' = Ω – Β δεν είναι ξένα μεταξύ τους.



Ξένα ενδεχόμενα

Παραδείγματα

1. Αν Χ = {το άθροισμα των ρίψεων δύο ζαριών}, τότε Ω = {2, 3, 4, … 12}.
Τα ενδεχόμενα

A = {το άθροισμα είναι πολλαπλάσιο του 4} και

B = {το άθροισμα είναι περιττός}

είναι ξένα μεταξύ τους.

2. Αν Χ = {πλήθος αφίξεων σε ένα ταμείο supermarket σε διάστημα μίας ώρας}, τότε Ω = {0, 1, 2, … }.

Τα ενδεχόμενα A = {X $\geq$ 4} (4 ή περισσότεροι πελάτες) και B = {X < 3} (έως 3 πελάτες) **είναι ξένα** γιατί $A \cap B = \varnothing$.

Τα ενδεχόμενα A = {X $\geq$ 4} και B = {X: πολλαπλάσιο του 3} = {X: 3, 6, 9, …} **δεν είναι ξένα** γιατί A ∩ B = {X: 6, 9, …} $\neq \varnothing$.

Ορισμός της Πιθανότητας

Ορισμός

Όταν ασχολούμαστε με τυχαία πειράματα, η **πιθανότητα (probability)** ενός ενδεχόμενου Α ορίζεται αριθμητικά ως ο λόγος του πλήθους των αποτελεσμάτων του πειράματος που ανήκουν στο Α, διαιρούμενο με τον συνολικό πλήθος όλων των αποτελεσμάτων του Ω.

$$P(A) = \frac{\text{ευνοϊκές περιπτώσεις πειράματος}}{\text{πλήθος δυνατών περιπτώσεων}}.$$

Αν P(A) = 0, τότε το ενδεχόμενο Α ονομάζεται **αδύνατο ενδεχόμενο**.

Παράδειγμα
Πείραμα: Επιλογή ενός χαρτιού από μία τράπουλα.

Ω = { 2♠, 2♣, 2♦, 2♥, 3♠, 3♣, 3♦, 3♥, ..., A♠, A♣, A♦, A♥}   (Σημείωση: Το Ω έχει 52 στοιχεία)

Ενδεχόμενο Α = {η κάρτα είναι κόκκινη}. Πιθανότητα του Α:

$$P(A) = \frac{\text{περιπτώσεις επιλογής κόκκινης κάρτας}}{\text{συνολικές περιπτώσεις}} = \frac{26}{52} = 0{,}5 = 50\%.$$

Ασκήσεις στον ορισμό

1. Να βρεθεί η πιθανότητα στη ταυτόχρονη ρίψη δύο νομισμάτων να εμφανιστούν δύο “γράμματα”.

$\underline{\Omega} = \{ ΓΓ, ΓΚ, ΚΓ, ΚΚ \}$ $\quad P(A) = \frac{1}{4} = 0{,}25.$

$A = \{ ΓΓ \}$

Ασκήσεις στον ορισμό

1. Να βρεθεί η πιθανότητα στη ταυτόχρονη ρίψη δύο νομισμάτων να εμφανιστούν δύο “γράμματα”.

Λύση

Ο δειγματοχώρος του πειράματος είναι Ω = {ΚΚ, ΚΓ, ΓΚ, ΓΓ} και η ευνοϊκή περίπτωση είναι μία, η ΓΓ. Άρα,

$$\mathrm{P}\left(\Gamma\Gamma\right) = \frac{1}{4} = 0{,}25 = 25\%.$$

Ασκήσεις στον ορισμό

2. Ρίχνουμε δύο “αμερόληπτα” ζάρια. Να βρεθεί η πιθανότητα να φέρουμε ως αποτέλεσμα δύο διαδοχικούς αριθμούς.

$\underline{\Omega} = \{(1,1), (1,2), \ldots, (1,6), (2,1), \ldots, (2,6), \ldots, (6,1), \ldots, (6,6)\}$

$A = \{(1,2), (2,1), (2,3), (3,2), (3,4), (4,3), (4,5), (5,4), (5,6), (6,5)\}$

$P(A) = \frac{10}{36} = 0{,}278.$

Ασκήσεις στον ορισμό

2. Ρίχνουμε δύο “αμερόληπτα” ζάρια. Να βρεθεί η πιθανότητα να φέρουμε ως αποτέλεσμα δύο διαδοχικούς αριθμούς.

Λύση

Εκφράζουμε το αποτέλεσμα των διαδοχικών ρίψεων ως ένα διατεταγμένο ζεύγος αριθμών από το 1 έως το 6.

Ο δειγματοχώρος του πειράματος είναι Ω = {(1, 1), (1, 2), …, (6, 5), (6, 6)} και έχει 36 στοιχεία. Από αυτά, δύο διαδοχικούς αριθμούς περιέχουν τα ζεύγη (1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5), (5, 6) και (2, 1), (3, 2), (4, 3), (5, 4), (6, 5), που είναι σε πλήθος 10. Άρα,

$$\mathrm{P}\left(\text{Αποτέλεσμα των ρίψεων είναι δύο διαδοχικοί αριθμοί}\right) = \frac{10}{36} = 0{,}278 = 27{,}8\,\%.$$

$\cancel{P(A\cap B) = P(A)P(B)}$

Ασκήσεις στον ορισμό

3. Επιλέγουμε τυχαία ένα φυσικό αριθμό. Να βρείτε:
(i) την πιθανότητα ο αριθμός αυτός να διαιρείται με το 3.
(ii) την πιθανότητα να διαιρείται με το 7.
(iii) την πιθανότητα να διαιρείται συγχρόνως με το 3 και το 7.
με το 21.

$\underline{\Omega} = \lim_{n\to+\infty} \{1,2,\dots,n\}$

$A_n = \left[\frac{n}{3}\right]$

$P(A_n) = \frac{\left[\frac{n}{3}\right]}{n}$

$\underline{\Omega} = \mathbb{N}$ (i) $A = \{3,6,9,\dots\}$ $P(A) = ;$

(i) $\underline{\Omega} = \{0, 1, 2$: πιθανά υπόλοιπα της διαίρεσης $n:3\}$

$A = \{$υπόλοιπο $= 0\}$ και $P(A) = \frac{1}{3}$.

(ii) $\underline{\Omega} = \{0,1,2,3,4,5,6\}$ $B = \{υ = 0\}$, $P(B) = \frac{1}{7}$.

(iii) $\underline{\Omega} = \{0,\dots,20\}$
$P(\Gamma) = \frac{1}{21}$.

Ασκήσεις στον ορισμό

3. Επιλέγουμε τυχαία ένα φυσικό αριθμό. Να βρείτε:
(i) την πιθανότητα ο αριθμός αυτός να διαιρείται με το 3.
(ii) την πιθανότητα να διαιρείται με το 7.
(iii) την πιθανότητα να διαιρείται συγχρόνως με το 3 και το 7.

Λύση
i) Αν επιλέξουμε ως δειγματοχώρο το Ω = {0, 1, 2, … } = N και θεωρήσουμε ως ευνοϊκές περιπτώσεις τα πολλαπλάσια του 3: {3κ, κ є N*} = {3, 6, 9, …} αντιμετωπίζουμε το πρόβλημα της αδυναμίας καταμέτρησης των ευνοϊκών και των συνολικών περιπτώσεων καθώς και τα δύο είναι άπειρα σύνολα.

Το πρόβλημα αντιμετωπίζεται αν το πείραμα οριστεί να είναι η διαίρεση με το 3 και ο δειγματοχώρος οριστεί να είναι τα πιθανά υπόλοιπα αυτής της διαίρεσης: Ω = {0, 1, 2}. Τότε, η ευνοϊκή περίπτωση είναι το υπόλοιπο να είναι 0 και

$$P\left(3 \mid X\right) = P\left(\{X = 3\kappa + \upsilon,\ \kappa \in \mathbb{Z} \text{ και } \upsilon = 0\}\right) = \frac{1}{3} = 0{,}333 = 33{,}3\,\%.$$

Ασκήσεις στον ορισμό

3. Επιλέγουμε τυχαία ένα φυσικό αριθμό. Να βρείτε:
(i) την πιθανότητα ο αριθμός αυτός να διαιρείται με το 3.
(ii) την πιθανότητα να διαιρείται με το 7.
(iii) την πιθανότητα να διαιρείται συγχρόνως με το 3 και το 7.

Λύση
ii)Ανάλογα, παρατηρούμε πως αν διαιρεθεί ένας αριθμός με το 7, τότε τα πιθανά υπόλοιπα είναι $\Omega = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ και

$$P(7 \mid X) = P(\{X = 7\kappa + \upsilon,\ \kappa \in \mathbb{Z} \text{ και } \upsilon = 0\}) = \frac{1}{7} = 0{,}143 = 14{,}3\%.$$

Ασκήσεις στον ορισμό

3. Επιλέγουμε τυχαία ένα φυσικό αριθμό. Να βρείτε:
(i) την πιθανότητα ο αριθμός αυτός να διαιρείται με το 3.
(ii) την πιθανότητα να διαιρείται με το 7.
(iii) την πιθανότητα να διαιρείται συγχρόνως με το 3 και το 7.

Λύση
iii) Οι αριθμοί 3 και 7 είναι πρώτοι μεταξύ τους (Μ.Κ.Δ.(3, 7) = 1), άρα ένας αριθμός θα διαιρείται με το 3 και το 7 αν και μόνο αν διαιρείται με το $3 \cdot 7 = 21$.

Όπως και πριν, ο δειγματοχώρος είναι $\Omega = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots, 19, 20\}$ και

$$\mathrm{P}\left(21 \mid X\right) = \mathrm{P}\left(\{X = 21\kappa + \upsilon,\ \kappa \in \mathbb{Z} \text{ και } \upsilon = 0\}\right) = \frac{1}{21} = 0{,}048 = 4{,}8\%.$$

Ασκήσεις στον ορισμό

4. Δίνεται η τυχαία εξίσωση: $x^2 + κx + λ = 0$, όπου οι αριθμοί κ και λ ορίζονται από δύο διαδοχικές ρίψεις ενός ζαριού. Να βρείτε την πιθανότητα η εξίσωση αυτή να έχει ρητές ρίζες.

$N(\Omega) = 36$

$κ = 1, 2, 3, 4, 5, 6$

$λ = 1, 2, 3, 4, 5, 6.$

$$x_{1,2} = \frac{-κ \pm \sqrt{κ^2 - 4 \cdot λ}}{2}$$

$κ^2 - 4λ \geq 0$, $κ^2 - 4λ$: πλήρες τετράγωνο

Ασκήσεις στον ορισμό

4. Δίνεται η τυχαία εξίσωση: $x^2 + κx + λ = 0$, όπου οι αριθμοί κ και λ ορίζονται από δύο διαδοχικές ρίψεις ενός ζαριού. Να βρείτε την πιθανότητα η εξίσωση αυτή να έχει ρητές ρίζες.

Λύση

Υπάρχουν 36 πιθανές εξισώσεις της μορφής $x^2 + κx + λ = 0$, από την $x^2 + x + 1 = 0$, έως την $x^2 + 6x + 6 = 0$. Για να έχει μία τέτοια εξίσωση ρητές ρίζες πρέπει και αρκεί η διακρίνουσα να είναι πλήρες τετράγωνο.

κ	λ	Δ
2	1	0
3	2	1
4	3	4
4	4	0
5	4	9
6	5	16
5	6	1

Είναι $Δ = κ^2 – 4λ$, συνεπώς αρκεί να βρούμε από τους 36 συνδυασμούς κ, λ πόσοι από αυτούς αντιστοιχούν σε $Δ = α^2$. Με απλή καταμέτρηση βρίσκουμε ότι είναι οι εξής 7 συνδυασμοί: (2, 1), (3, 2), (4, 3), (4, 4), (5, 4), (6, 5) και (5, 6). Καταλήγουμε ότι:

$$P\left(κ^2 - 4λ : \text{πλήρες τετράγωνο}\right) = \frac{7}{36} = 0{,}194 = 19{,}4\%.$$

Ασκήσεις στον ορισμό

5. Σε ένα μη αμερόληπτο ζάρι οι πιθανότητες να προκύψει 1, 2, 3, 4, 5, 6 είναι αντίστοιχα

$$P(1) = P(3) = P(5) = 2P(2) = 4P(4) = 2P(6).$$

Να βρεθούν οι πιθανότητες των γεγονότων:
α) Α: “Η ένδειξη του ζαριού είναι άρτιος αριθμός”.
β) Β: “Η ένδειξη του ζαριού είναι περιττός αριθμός”.

$$P(A) = P(2 \text{ ή } 4 \text{ ή } 6) = P(2)+P(4)+P(6) = \frac{2}{17}+\frac{1}{17}+\frac{2}{17} = \frac{5}{17} = 0,294$$

$$P(1)+P(2)+P(3)+P(4)+P(5)+P(6) = 1$$

$$4P(4)+2P(4)+4P(4)+P(4)+4P(4)+2P(4) = 1 \Leftrightarrow 17P(4) = 1 \Leftrightarrow P(4) = \frac{1}{17}$$

Ασκήσεις στον ορισμό

5. Σε ένα μη αμερόληπτο ζάρι οι πιθανότητες να προκύψει 1, 2, 3, 4, 5, 6 είναι αντίστοιχα

$$P(1) = P(3) = P(5) = 2P(2) = 4P(4) = 2P(6).$$

Να βρεθούν οι πιθανότητες των γεγονότων:
α) Α: “Η ένδειξη του ζαριού είναι άρτιος αριθμός”
β) Β: “Η ένδειξη του ζαριού είναι περιττός αριθμός”

Λύση
Πρέπει να είναι $P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6) = 1$ ή

$$x + x/2 + x + x/4 + x + x/2 = 1 \text{ ή}$$

$$x = 4/17.$$

α) $P(A) = P(2) + P(4) + P(6) = 5/17$
β) $P(B) = P(1) + P(3) + P(5) = 12/17$

Ασκήσεις στον ορισμό

6. Θεωρούμε μία σειρά τριών γεννήσεων σ’ ένα μαιευτήριο. Υποθέτουμε ότι η γέννηση αγοριού είναι εξίσου πιθανή με τη γέννηση κοριτσιού. Να υπολογισθεί η πιθανότητα να γεννηθεί τουλάχιστον ένα αγόρι στις τρεις γεννήσεις.

Υπόδειξη: Υπολογίστε την πιθανότητα του συμπληρωματικού γεγονότος.

$\underline{\Omega} = \{AAA, AAK, AKA, KAA, AKK, KAK, KKA, KKK\}$

$X = \{$πλήθος A στις 3 γεννήσεις$\}$

$P(X \geq 1) = 1 - P(X<1) = 1 - P(X=0) = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}.$

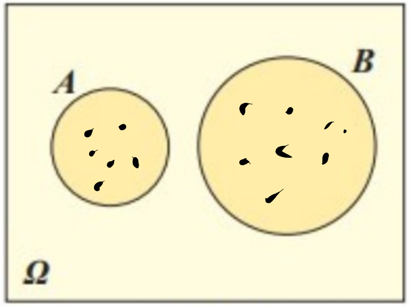
Άλυτη

Κανόνες λογισμού πιθανοτήτων

Κανόνες λογισμού πιθανοτήτων

Από τον ορισμό της πιθανότητας $P(A) = \dfrac{\text{ευνοϊκές περιπτώσεις πειράματος}}{\text{πλήθος δυνατών περιπτώσεων}} = \dfrac{N(A)}{N(\Omega)}$.

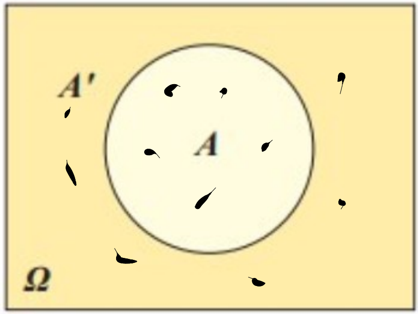
και προφανείς σχέσεις που αφορούν την καταμέτρηση των ευνοϊκών περιπτώσεων, προκύπτουν οι παρακάτω κανόνες λογισμού των πιθανοτήτων:



A ∪ B

α) Αν A, B ξένα μεταξύ τους ενδεχόμενα,
τότε $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

$N(A \cup B) = N(A) + N(B)$



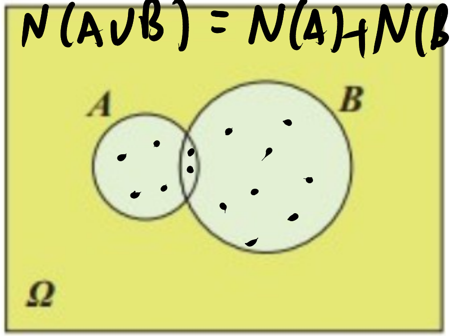
β) Αν $A \subseteq \Omega$, τότε $P(A') = 1 - P(A)$.

$N(A') = N(\Omega) - N(A)$.

Κανόνες λογισμού πιθανοτήτων

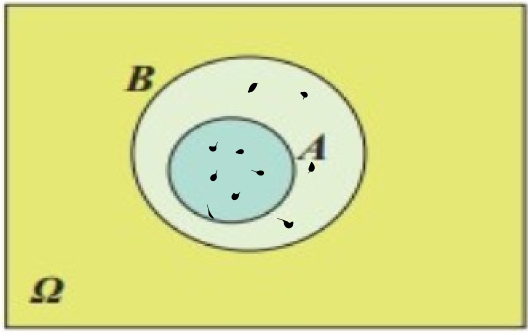
γ) Για κάθε Α, Β ⊆ Ω, είναι P(A ∪ B) = P(A) + P(B) – P(A ∩ B).

$N(A \cup B) = N(A) + N(B) - N(A \cap B)$

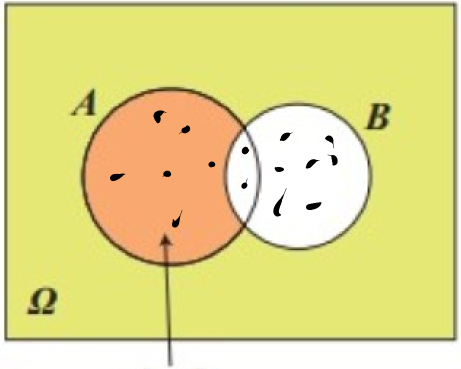


A ∪ B

δ) Αν Α ⊆ Β, τότε P(A) ≤ P(B).



ε) Για κάθε Α, Β ⊆ Ω, είναι P(A – B) = P(A) – P(A ∩ B).



A – B

$N(A - B) = N(A) - N(A \cap B)$

Παρατηρήσεις

1. Την τομή τη συμβολίζουμε και ως γινόμενο: P(AB) = P(A ∩ B).

2. Φανερά, Α, Β ξένα αν και μόνον αν P(A ∪ B) = P(A) + P(B).

3. Ο κανόνας (ε) ισοδύναμα γράφεται P(A ∩ B’) = P(A) – P(A ∩ B).

4. Προσέξτε ότι Α Δ Β = (Α – Β) ∪ (Β – Α).

Κανόνες λογισμού πιθανοτήτων

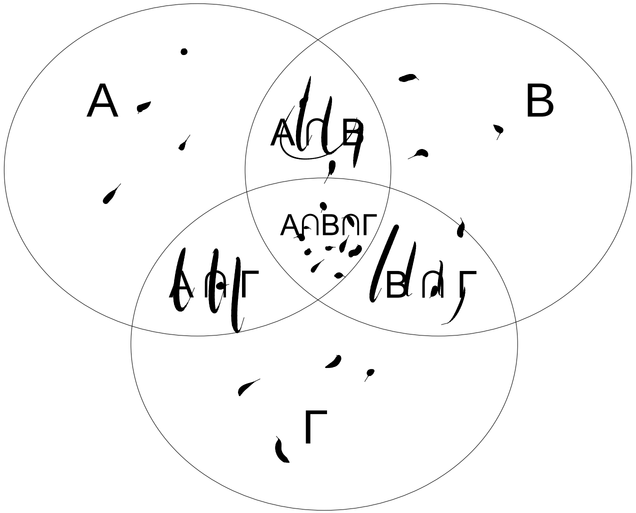
Η ιδιότητα (γ) γενικεύεται για τρία ενδεχόμενα ως εξής:

Για κάθε $A, B, \Gamma \subseteq \Omega$, είναι

$$P(A \cup B \cup \Gamma) = P(A) + P(B) + P(\Gamma) - P(A \cap B) - P(A \cap \Gamma) - P(B \cap \Gamma) + P(A \cap B \cap \Gamma).$$

Απόδειξη

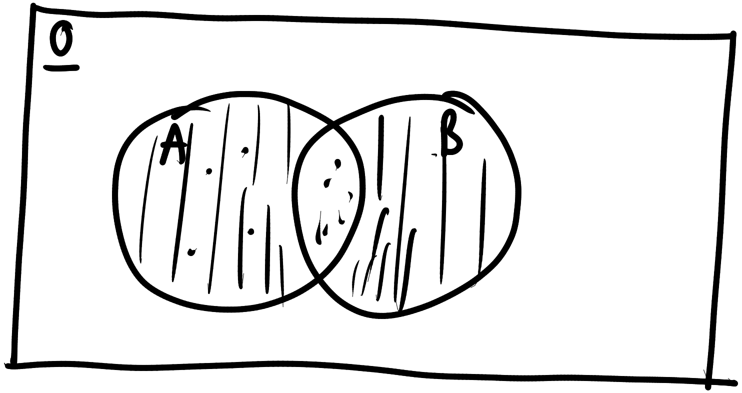
Άμεσα, από την καταμέτρηση των ευνοϊκών περιπτώσεων με τη βοήθεια του διαγράμματος Venn.



$$N(A \cup B \cup \Gamma) = N(A) + N(B) + N(\Gamma) - N(A \cap B) - N(A \cap \Gamma) - N(B \cap \Gamma) + N(A \cap B \cap \Gamma).$$

Ασκήσεις στους κανόνες λογισμού

1. Να δείξετε ότι $P(A \,\Delta\, B) = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B)$



$$A \,\Delta\, B = (A-B) \cup (B-A)$$

$$N(A \,\Delta\, B) = N(A) + N(B) - 2N(A \cap B)$$

$$P(A \,\Delta\, B) = P((A-B) \cup (B-A))$$

$$= P(A-B) + P(B-A)$$

$$= P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= P(A) + P(B) - 2P(A \cap B).$$

Άλυτη

Ασκήσεις στους κανόνες λογισμού

2. Για δύο ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω δίνονται P(A) = 0,5 , P(B) = 0,4 και P(A ∩ B) = 0,2. Να βρεθεί η πιθανότητα των ενδεχομένων:

i) Να μην πραγματοποιηθεί κανένα από τα A και B.

ii) Να πραγματοποιηθεί μόνο ένα από τα A και B.

(i) $P((A \cup B)') = 1 - P(A \cup B) = 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B) =$

$= 1 - 0{,}5 - 0{,}4 + 0{,}2 = 0{,}3.$

(ii) $P(A \Delta B) = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B)$

$= 0{,}5 + 0{,}4 - 2 \cdot 0{,}2 = 0{,}5$

Ασκήσεις στους κανόνες λογισμού

2. Για δύο ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω δίνονται $P(A) = 0{,}5$, $P(B) = 0{,}4$ και $P(A \cap B) = 0{,}2$. Να βρεθεί η πιθανότητα των ενδεχομένων:
   i) Να μην πραγματοποιηθεί κανένα από τα A και B.
   ii) Να πραγματοποιηθεί μόνο ένα από τα A και B.

Λύση

Παρατηρούμε ότι:

- "Δεν πραγματοποιείται κανένα από τα A και B" = $A' \cap B' = (A \cup B)'$ και
- "Πραγματοποιείται μόνο ένα από τα A και B" = "Συμβαίνει αποκλειστικά το A ή το B" = $A \,\Delta\, B$.

Υπολογίζουμε:

(i) P("Δεν πραγματοποιείται κανένα από τα A και B") $= P((A \cup B)') = 1 - P(A \cup B)$

$$= 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B)$$

$$= 1 - 0{,}5 - 0{,}4 + 0{,}2 = 0{,}3 = 30\%$$

(ii) P("Πραγματοποιείται μόνο ένα από τα A και B") $= P(A \,\Delta\, B)$

$$= P((A - B) \cup (B - A))$$

$$= P(A - B) + P(B - A)$$

$$= P(A) + P(B) - 2P(A \cap B)$$

$$= 0{,}5 + 0{,}4 - 2 \cdot 0{,}2 = 0{,}5 = 50\%.$$

Ασκήσεις στους κανόνες λογισμού

3. Το 60% των μαθητών μιας πόλης έχουν κινητό τηλέφωνο. Το 40% έχουν ηλεκτρονικό υπολογιστή (Η.Υ.) και το 25% και τα δύο. Αν επιλέξουμε τυχαία ένα μαθητή της πόλης αυτής, να βρείτε τις πιθανότητες ο μαθητής αυτός:
(i) να έχει μόνο ένα από τα δύο.
(ii) να μην έχει κανένα από τα δύο.
(iii) να έχει το πολύ ένα από τα δύο.

$P(K)=0,6$. $P(HY)=0,4$. $P(K\cap HY)=0,25$.

(i) $P(K \,\Delta\, HY) = P(K)+P(HY)-2P(K\cap HY) = 0,6+0,4-2\cdot 0,25 = 0,5$

(ii) $P((K\cup HY)') = 1-P(K\cup HY) = 1-P(K)-P(HY)+P(K\cap HY) = 0,25$

(iii) $P((K\Delta HY)\cup(K\cup HY)') = P(K\Delta HY)+P((K\cup HY)') = 0,75$.

Ασκήσεις στους κανόνες λογισμού

3. Το 60% των μαθητών μιας πόλης έχουν κινητό τηλέφωνο. Το 40% έχουν ηλεκτρονικό υπολογιστή (Η.Υ.) και το 25% και τα δύο. Αν επιλέξουμε τυχαία ένα μαθητή της πόλης αυτής, να βρείτε τις πιθανότητες ο μαθητής αυτός:
(i) να έχει μόνο ένα από τα δύο.
(ii) να μην έχει κανένα από τα δύο.
(iii) να έχει το πολύ ένα από τα δύο.

Λύση
Αν A = {Ο μαθητής έχει κινητό τηλέφωνο} και B = {Ο μαθητής έχει Η.Υ.}, τότε $P(A) = 0{,}6$, $P(B) = 0{,}4$ και $P(A \cap B) = 0{,}25$. Επιπλέον:

"Ο μαθητής έχει ένα μόνο από τα δύο" = "Συμβαίνει αποκλειστικά το A ή το B"
$= A \,\Delta\, B = A - B \cup B - A$.

"Ο μαθητής δεν έχει κανένα από τα δύο" = "Ούτε το A, ούτε το B" = $A' \cap B' = (A \cup B)'$

"Ο μαθητής έχει το πολύ ένα από τα δύο" = "Κανένα ή μόνο το A ή μόνο το B" = $(A \cup B)' \cup A \,\Delta\, B$

Ασκήσεις στους κανόνες λογισμού

Λύση

Υπολογίζουμε:

i) P(“Ο μαθητής έχει ένα μόνο από τα δύο”) $= P(A \,\Delta\, B)$

$= P((A - B) \cup (B - A))$

$= P(A - B) + P(B - A)$

$= P(A) + P(B) - 2P(A \cap B)$

$= 0{,}6 + 0{,}4 - 2\cdot 0{,}25 = 0{,}5 = 50\%.$

ii) P(“Ο μαθητής δεν έχει κανένα από τα δύο”) $= P((A \cup B)')$

$= 1 - P(A \cup B)$

$= 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B)$

$= 1 - 0{,}6 - 0{,}4 + 0{,}25 = 0{,}25 = 25\%.$

Ασκήσεις στους κανόνες λογισμού

Λύση

iii) P(“Ο μαθητής έχει το πολύ ένα από τα δύο”) $= P((A \cup B)' \cup A \,\Delta\, B)$

$= P((A \cup B)') + P(A \,\Delta\, B)$

$= 0{,}25 + 0{,}5 = 0{,}75 = 75\%$.

Σημείωση
Εναλλακτικά, για το (iii) μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι

“Ο μαθητής έχει το πολύ ένα από τα δύο” = Συμπλήρωμα του “Ο μαθητής δεν έχει κανένα” = $(A \cap B)'$

και να υπολογίσουμε

P(“Ο μαθητής έχει το πολύ ένα από τα δύο”) $= P((A \cap B)') = 1 - P(A \cap B) = 1 - 0{,}25 = 0{,}75$.

Ασκήσεις στους κανόνες λογισμού

4. Αν $\dfrac{P(A)}{P(A')} = \dfrac{3}{4}$, να βρείτε την πιθανότητα P(A).

$$\frac{P(A)}{1-P(A)} = \frac{3}{4}$$

Ασκήσεις στους κανόνες λογισμού

4. Αν $\frac{P(A)}{P(A')} = \frac{3}{4}$, να βρείτε την πιθανότητα P(A).

Λύση

$$\frac{P(A)}{P(A')} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \frac{P(A)}{1 - P(A)} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow P(A) = \frac{3}{7}.$$

Ασκήσεις στους κανόνες λογισμού

5. Αν P(A) = 0,3, P(B) = 0,4, P(A ∩ B) = 0,2, να βρεθεί η P((A ∩ B’) ∪ (A’ ∩ B)).

$A \cap B' = A - B$

$A' \cap B = B \cap A' = B - A$

$(A \cap B') \cup (A' \cap B) = A \Delta B$

Ασκήσεις στους κανόνες λογισμού

5. Αν $P(A) = 0,3$, $P(B) = 0,4$, $P(A \cap B) = 0,2$, να βρεθεί η $P((A \cap B') \cup (A' \cap B))$.

Λύση

$$\begin{aligned} P((A \cap B') \cup (A' \cap B)) &= P(A \cap B') + P(A' \cap B) – P((A \cap B') \cap (A' \cap B)) \\ &= P(A – (A \cap B)) + P(B – (A \cap B)) – P(\varnothing) \\ &= P(A) – P(A \cap B) + P(B) – P(A \cap B) – 0 \\ &= 0,3 + 0,4 – 2 \cdot 0,2 = 0,3. \end{aligned}$$

Σημείωση: Εναλλακτικά, μπορεί κάποιος να προσέξει ότι

$P((A \cap B') \cup (A' \cap B)) = P((A \cap B') \cup (B \cap A')) = P((A - B) \cup (B - A')) = P(A \,\Delta\, B) = P(A) + P(B) – 2P(A \cap B) = 0,3.$

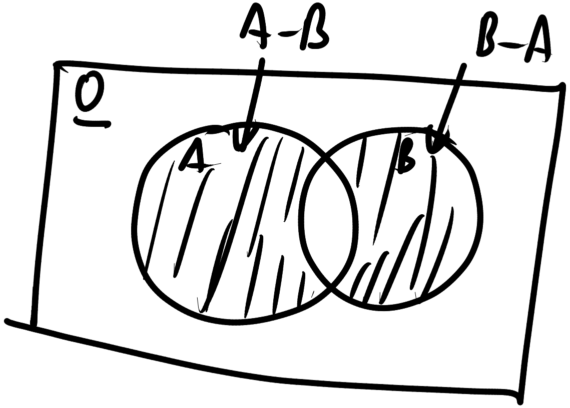
Ασκήσεις στους κανόνες λογισμού

6. Το 60% των φοιτητών εξετάζεται επιτυχώς στο μάθημα Α, το 50% εξετάζεται επιτυχώς στο μάθημα Β και το 35% εξετάζεται επιτυχώς και στα δύο μαθήματα. Να βρεθούν τα ποσοστά επιτυχίας:

α) Σε ένα τουλάχιστον από τα δύο μαθήματα.

β) Σε κανένα από τα δύο μαθήματα.

γ) Σε ένα ακριβώς από τα δύο μαθήματα.



$P(A)=0,6$, $P(B)=0,5$, $P(AB)=0,35$.

(α) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0,75$

(β) $P(A'\cap B')=P((A\cup B)')=1-0,75=0,25$

(γ) $P(A\Delta B)=P(A)+P(B)-2P(AB)=0,4$.

Ασκήσεις στους κανόνες λογισμού

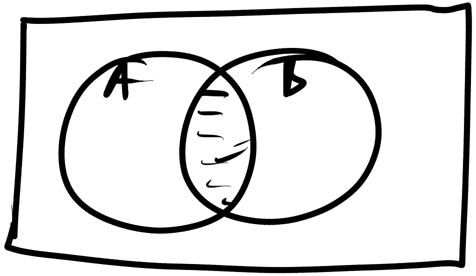
6. Το 60% των φοιτητών εξετάζεται επιτυχώς στο μάθημα Α, το 50% εξετάζεται επιτυχώς στο μάθημα Β και το 35% εξετάζεται επιτυχώς και στα δύο μαθήματα. Να βρεθούν τα ποσοστά επιτυχίας:
α) Σε ένα τουλάχιστον από τα δύο μαθήματα.
β) Σε κανένα από τα δύο μαθήματα.
γ) Σε ένα ακριβώς από τα δύο μαθήματα.

Λύση
(α) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) – P(A \cap B) = 0{,}6 + 0{,}5 – 0{,}35 = 0{,}75 = 75\%$.
(β) $P(A' \cap B') = P((A \cup B)') = 1 – P(A \cup B) = 1 – 0{,}75 = 0{,}25 = 25\%$.
(γ) $P(A \Delta B) = P(A) + P(B) – 2P(A \cap B) = 0{,}6 + 0{,}5 – 2\cdot 0{,}35 = 0{,}4 = 40\%$.

Ασκήσεις στους κανόνες λογισμού

7. Αν για δύο ενδεχόμενα ενός δειγματοχώρου Ω, γνωρίζουμε ότι P(A) = 0,8 και P(B) = 0,4, να αποδειχθεί ότι:

$$0{,}2 \le P(A \cap B) \le 0{,}4$$



$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cup B) = 1{,}2 - P(A \cap B)$$

$$P(A \cap B) = 1{,}2 - P(A \cup B) \geq 1{,}2 - 1 = 0{,}2.$$

$$A \cap B \subseteq B \Rightarrow P(A \cap B) \le P(B) = 0{,}4.$$

Ασκήσεις στους κανόνες λογισμού

7. Αν για δύο ενδεχόμενα ενός δειγματοχώρου Ω, γνωρίζουμε ότι $P(A) = 0{,}8$ και $P(B) = 0{,}4$, να αποδειχθεί ότι:

$$0{,}2 \leq P(A \cap B) \leq 0{,}4$$

Λύση

Καθώς, $A \cap B \subseteq B$ θα είναι $P(A \cap B) \leq P(B) = 0{,}4$. Επιπλέον,

$$P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A \cup B) \leq 1 \text{ ή}$$
$$0{,}8 + 0{,}4 - P(A \cap B) \leq 1 \text{ ή}$$
$$0{,}8 + 0{,}4 - 1 \leq P(A \cap B) \text{ ή}$$
$$0{,}2 \leq P(A \cap B).$$

Ασκήσεις στους κανόνες λογισμού

8. Έστω τα ενδεχόμενα Α και Β του ίδιου δειγματικού χώρου με $P(A) = 1/3$, $P(B) = 1/4$ και $P(A \cup B) = 5/12$.

α) Να υπολογίσετε την πιθανότητα της τομής $A \cap B$.

β) Είναι τα ενδεχόμενα Α και Β ξένα μεταξύ τους;

γ) Να υπολογίσετε την πιθανότητα να πραγματοποιείται μόνο το Α και όχι το Β.

Ασκήσεις στους κανόνες λογισμού

8. Έστω τα ενδεχόμενα Α και Β του ίδιου δειγματικού χώρου με $P(A) = 1/3$, $P(B) = 1/4$ και $P(A \cup B) = 5/12$.
α) Να υπολογίσετε την πιθανότητα της τομής $A \cap B$.
β) Είναι τα ενδεχόμενα Α και Β ξένα μεταξύ τους;
γ) Να υπολογίσετε την πιθανότητα να πραγματοποιείται μόνο το Α και όχι το Β.

Λύση
α) $P(A) + P(B) – P(A \cap B) = P(A \cup B)$ άρα $P(A \cap B) = P(A) + P(B) – P(A \cup B)$ ή
$P(A \cap B) = 1/3 + 1/4 – 5/12 = 1/6$.

β) $P(A \cap B) = 1/6 > 0$, άρα $A \cap B \neq \varnothing$ και τα Α, Β δεν είναι ξένα μεταξύ τους.

γ) $P(A \cap B') = P(A – B) = P(A) – P(A \cap B) = 1/3 – 1/6 = 1/6$.

Ασκήσεις στους κανόνες λογισμού

9. Αν Α και Β είναι δύο ξένα μεταξύ τους ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω με $P(A) = \lambda^2$ και $P(B) = 7\lambda^2 - 6\lambda + 2$, να αποδείξετε ότι $\frac{1}{4} \leq \lambda \leq \frac{1}{2}$.

Ασκήσεις στους κανόνες λογισμού

9. Αν A και B είναι δύο ξένα μεταξύ τους ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω με $P(A) = λ^2$ και $P(B) = 7λ^2 – 6λ + 2$, να αποδείξετε ότι $¼ \leq λ \leq ½$.

Λύση

Είναι $0 \leq P(A), P(B) \leq 1$, από όπου παίρνουμε $λ^2 \leq 1$ (ή $|λ| \leq 1$) και $0 \leq 7λ^2 – 6λ + 2 \leq 1$.

Από τη διπλή ανισότητα παίρνουμε

- $0 \leq 7λ^2 – 6λ + 2$: $Δ_1 = 36 – 56 = -20 < 0$ και $λ \geq 0$, και
- $7λ^2 – 6λ + 1 \leq 0$: $Δ_2 = 36 – 28 = 8$, και $λ \in [(6 – 8^{½})/ 14, (6 + 8^{½})/ 14]$, εκτίμηση που είναι λιγότερο ακριβής από τη ζητούμενη.

Μία ακόμα εκτίμηση μπορούμε να πάρουμε αξιοποιώντας την πληροφορία πως τα A, B είναι ξένα μεταξύ τους, οπότε $P(A) + P(B) = P(A \cup B) \leq 1$ ή $8λ^2 – 6λ + 2 \leq 1$ ή

$8λ^2 – 6λ + 1 \leq 0$: $Δ_3 = 36 – 32 = 4$, και $λ \in [¼, ½]$ που είναι η ζητούμενη εκτίμηση.

Ασκήσεις στους κανόνες λογισμού

10. Σε μια εταιρεία το 20% των εργαζομένων της ανήκει στις ευπαθείς ομάδες, το 60% έχει υποβληθεί σε έλεγχο της νόσου COVID-19 και το 15% ανήκει στις ευπαθείς ομάδες και έχει υποβληθεί σε έλεγχο της νόσου COVID-19. Επιλέγουμε τυχαία έναν εργαζόμενο της εταιρείας. Να βρείτε την πιθανότητα των παρακάτω ενδεχομένων :

Α : «να ανήκει στις ευπαθείς ομάδες ή να έχει υποβληθεί σε έλεγχο της νόσου COVID-19.»

Β: «να ανήκει στις ευπαθείς ομάδες και να ΜΗΝ έχει υποβληθεί σε έλεγχο της νόσου COVID-19.»

Γ : «να ΜΗΝ ανήκει στις ευπαθείς ομάδες ΚΑΙ να ΜΗΝ έχει υποβληθεί σε έλεγχο της νόσου COVID-19.»

$P(E)=0,2$

$P(C)=0,6$

$P(E\cap C)=0,15$

$P(A)=P(E\cup C)=P(E)+P(C)-P(E\cap C)=0,65$

$P(B)=P(E\cap C')=P(E-C)=P(E)-P(E\cap C)$

$=0,2-0,15=0,05.$

$P(\Gamma)=P(E'\cap C')=P((E\cup C)')=1-P(E\cup C)=0,35.$

Άλυτη

Ασκήσεις στους κανόνες λογισμού

11. Ρίχνουμε δύο ζάρια και έστω Ω το σύνολο των δυνατών αποτελεσμάτων:

$$\Omega = \{(x, y): x, y \in N \text{ και } 1 \leq x, y \leq 6\}. = \{(1,1), \ldots, (6,6)\}$$

Θεωρούμε τα ενδεχόμενα του Ω, Α = {x + y = 7} και Β = {x = 6 ή y = 6}.

α) Να καταγραφούν τα απλά ενδεχόμενα Α και Β.

β) Να βρεθούν οι P(A), P(B).

γ) Να καταγραφούν τα ενδεχόμενα Α', Α ∩ Β, Α ∪ Β, Α Δ Β, Β – Α.

δ) Να βρεθούν οι πιθανότητες P(A'), P(A ∩ B), P(A ∪ B), P(A Δ B), P(B – A).

(α) $A = \{(1,6),(6,1),(2,5),(5,2),(3,4),(4,3)\} : N(A) = 6 \Rightarrow P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

$B = \{(6,1),(6,2),\ldots,(6,6),(1,6),(2,6),\ldots,(5,6)\} : N(B) = 11 \Rightarrow P(B) = \frac{11}{36}.$

Ανεξάρτητα ενδεχόμενα

Ανεξάρτητα ενδεχόμενα

Ορισμός
Δύο (μη κενά) ενδεχόμενα A, B ονομάζονται **ανεξάρτητα** (independent) αν η πραγματοποίηση ή μη του ενός δεν συσχετίζεται με την πραγματοποίηση ή μη του άλλου.

Παρατηρούμε ότι αν δύο ενδεχόμενα A, B, είναι εξαρτημένα, τότε η υλοποίηση του A θα μεταβάλλει την πιθανότητα να συμβεί το B. Ισοδύναμα, ανάλογα με το αν συμβαίνει ή όχι το A θα μεταβάλλεται το πλήθος των ευνοϊκών περιπτώσεων για να συμβεί το B.

Αντίστροφα, αν τα A, B είναι ανεξάρτητα τότε θα πρέπει το πλήθος των ευνοϊκών περιπτώσεων να συμβούν και τα δύο (A ∩ B) να είναι ίσο με το γινόμενο των επιμέρους ευνοϊκών περιπτώσεων. Συμπεραίνουμε ότι:

$$\textbf{A, B ανεξάρτητα} \leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Ανεξάρτητα ενδεχόμενα

Πρόταση
Αν A, B ανεξάρτητα, τότε θα είναι ανεξάρτητα και τα $A' = \Omega - A$, $B' = \Omega - B$.
Απόδειξη

$$\begin{aligned} P(A' \cap B') = P((A \cup B)') &= 1 - P(A \cup B) \\ &= 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B) \\ &= 1 - P(A) - P(B) + P(A)\cdot P(B) \\ &= (1 - P(A))\cdot(1 - P(B)) \\ &= P(A') \cdot P(B') \end{aligned}$$

Ανεξάρτητα vs Ξένα ενδεχόμενα

Τα ανεξάρτητα ενδεχόμενα δεν πρέπει να συγχέονται με τα ασυμβίβαστα (ξένα) ενδεχόμενα. Οι δύο αυτοί προσδιορισμοί βρίσκουν το νόημά τους σε διαφορετικά πλαίσια αναφοράς.

Δύο ξένα μεταξύ τους ενδεχόμενα ($A \cap B = \emptyset \rightarrow P(A \cap B) = 0$) δεν μπορεί να είναι ανεξάρτητα ($P(A \cap B) = 0$ αλλά $P(A) \cdot P(B) \neq 0$) ενώ δύο ανεξάρτητα μεταξύ τους ενδεχόμενα δεν μπορεί να είναι ξένα.

Σημείωση: Ο παραπάνω ισχυρισμός ισχύει με προϋπόθεση τα γεγονότα να μην είναι αδύνατα.

Παράδειγμα ξένων μεταξύ τους ενδεχομένων

Πείραμα: Ρίχνω ένα κέρμα και ορίζω

A = {“Κορώνα”} και B = {“Γράμματα”}.

Προφανώς, $A \cap B = \emptyset$, δηλαδή τα A, B είναι ξένα μεταξύ τους.

Παράδειγμα ανεξάρτητων μεταξύ τους ενδεχομένων

Πείραμα: Ρίχνω ένα κέρμα δύο φορές και ορίζω

A = {“Κορώνα στην 1^{η} ρίψη”} και B = {“Κορώνα στη 2^{η} ρίψη”}.

Προφανώς, η μία ρίψη δεν επηρεάζει την επόμενη, άρα τα A, B είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους και $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{4}$.

Ανεξάρτητα vs Ξένα ενδεχόμενα

Ανεξάρτητα ενδεχόμενα

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) – P(A \cap B)$

A, B ανεξάρτητα → A', B' ανεξάρτητα.

Ξένα ενδεχόμενα

$P(A \cap B) = 0$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

A, B ξένα → A', B' όχι ξένα.

Ασκήσεις στα ανεξάρτητα ενδεχόμενα

1. Μία μηχανή λειτουργεί εφόσον και τα τρία εξαρτήματά της Α , Β , Γ λειτουργούν κανονικά. Η πιθανότητα για τη μηχανή να παρουσιάσει βλάβη στο διάστημα ενός χρόνου στο εξάρτημα Α είναι 0,05, στο εξάρτημα Β είναι 0,1 και στο εξάρτημα Γ είναι 0,08, ενώ γνωρίζουμε πως οι βλάβες στα εξαρτήματα εμφανίζονται ανεξάρτητα η μία με την άλλη. Να βρεθεί η πιθανότητα η μηχανή να σταματήσει να λειτουργεί πριν το τέλος του χρόνου.

$P(A)=0,05$

$P(B)=0,1$

$P(\Gamma)=0,08$

$$P(A\cup B\cup \Gamma)=P(A)+P(B)+P(\Gamma)-P(A\cap B)-P(A\cap\Gamma)-P(B\cap\Gamma)+P(A\cap B\cap\Gamma)=$$

$$=0,05+0,1+0,08-0,05\cdot 0,1-0,05\cdot 0,08-0,1\cdot 0,08+0,05\cdot 0,1\cdot 0,08$$

$=$

Ασκήσεις στα ανεξάρτητα ενδεχόμενα

1. Μία μηχανή λειτουργεί εφόσον και τα τρία εξαρτήματά της Α , Β , Γ λειτουργούν κανονικά. Η πιθανότητα για τη μηχανή να παρουσιάσει βλάβη στο διάστημα ενός χρόνου στο εξάρτημα Α είναι 0,05, στο εξάρτημα Β είναι 0,1 και στο εξάρτημα Γ είναι 0,08, ενώ γνωρίζουμε πως οι βλάβες στα εξαρτήματα εμφανίζονται ανεξάρτητα η μία με την άλλη. Να βρεθεί η πιθανότητα η μηχανή να σταματήσει να λειτουργεί πριν το τέλος του χρόνου.

Λύση

Η μηχανή σταματάει να λειτουργεί αν κάποιο από τα 3 εξαρτήματά της παρουσιάζει βλάβη. Συνεπώς, αναζητούμε την πιθανότητα

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup \Gamma) &= P(A) + P(B) + P(\Gamma) - P(A \cap B) - P(A \cap \Gamma) - P(B \cap \Gamma) + P(A \cap B \cap \Gamma) \\ &= P(A) + P(B) + P(\Gamma) - P(A)\cdot P(B) - P(A)\cdot P(\Gamma) - P(B)\cdot P(\Gamma) + P(A)\cdot P(B)\cdot P(\Gamma) \\ &= 0{,}05 + 0{,}1 + 0{,}08 - 0{,}05\cdot 0{,}1 - 0{,}05\cdot 0{,}08 - 0{,}1\cdot 0{,}08 + 0{,}05\cdot 0{,}1\cdot 0{,}08 \\ &= 0{,}23 - 0{,}005 - 0{,}004 - 0{,}008 + 0{,}0004 \\ &= 0{,}2134 \\ &= 21{,}34\%. \end{aligned}$$

Ασκήσεις στα ανεξάρτητα ενδεχόμενα

2. Τέσσερα μηχανήματα Α , Β , Γ και Δ λειτουργούν ανεξάρτητα. Η πιθανότητα μία δεδομένη στιγμή να λειτουργούν είναι αντίστοιχα 60%, 50%, 70% και 80%.
α) Ποια η πιθανότητα σε δοσμένη στιγμή να λειτουργούν όλες οι μηχανές;
β) Ποια η πιθανότητα να μη λειτουργεί καμία μηχανή;

$P(A)=0,6$, $P(B)=0,5$, $P(\Gamma)=0,7$, $P(\Delta)=0,8$

(α)

$P(AB\Gamma\Delta)=P(A)\cdot P(B)\cdot P(\Gamma)\cdot P(\Delta)=\ldots$

(β) $P(A'\cap B'\cap \Gamma'\cap \Delta')=P(A')\,P(B')\,P(\Gamma')\,P(\Delta')=$

$=(1-P(A))\cdot(1-P(B))\cdot(1-P(\Gamma))\cdot(1-P(\Delta))=\ldots$

Ασκήσεις στα ανεξάρτητα ενδεχόμενα

2. Τέσσερα μηχανήματα Α , Β , Γ και Δ λειτουργούν ανεξάρτητα. Η πιθανότητα μία δεδομένη στιγμή να λειτουργούν είναι αντίστοιχα 60%, 50%, 70% και 80%.
α) Ποια η πιθανότητα σε δοσμένη στιγμή να λειτουργούν όλες οι μηχανές;
β) Ποια η πιθανότητα να μη λειτουργεί καμία μηχανή;

Λύση

α) $P(A \cap B \cap \Gamma \cap \Delta) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(\Gamma) \cdot P(\Delta)$
$= 0{,}6 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}8$
$= 0{,}168 = 16{,}8\%$.

β) $P(A' \cap B' \cap \Gamma' \cap \Delta') = P(A') \cdot P(B') \cdot P(\Gamma') \cdot P(\Delta')$
$= 0{,}4 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}2$
$= 0{,}012 = 1{,}2\%$.

Σημείωση: Η (σωστή) επιλογή $P(A' \cap B' \cap \Gamma' \cap \Delta') = P((A \cup B \cup \Gamma \cup \Delta)') = 1 - P(A \cup B \cup \Gamma \cup \Delta) = \ldots$ φανερά είναι περισσότερο επίπονη.

Ασκήσεις στα ανεξάρτητα ενδεχόμενα

3. Η πιθανότητα να είναι ελαττωματικό ένα ανταλλακτικό είναι 0,1. Κάθε ανταλλακτικό είναι ελαττωματικό ανεξάρτητα από τα άλλα.
α) Ποια η πιθανότητα δύο ανταλλακτικά εκλεγμένα τυχαία να είναι ελαττωματικά;
β) Ποια η πιθανότητα μεταξύ 5 ανταλλακτικών το ένα τουλάχιστον να είναι καλό;
γ) Με πόσα ανταλλακτικά θα πρέπει να εφοδιαστεί κανείς ώστε με πιθανότητα μεγαλύτερη του 0,99 να βρει τουλάχιστον ένα καλό;

Λύση

α) $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2) = 0{,}1 \cdot 0{,}1 = 0{,}01 = 1\%$

β) $P(A_1' \cup A_2' \cup A_3' \cup A_4' \cup A_5') = P((A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5)') = 1 - P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5)$

$= 1 - 0{,}1^5 = 0{,}99999 = 99{,}9\%.$

γ) $P(\text{τουλάχιστον 1 καλό στα n}) = 1 - 0{,}1^n > 0{,}99$ ή $n > \ln 0{,}01 / \ln 0{,}1 = 2.$

Ασκήσεις στα ανεξάρτητα ενδεχόμενα

4. Δύο παίκτες Α και Β παίζουν ένα παιχνίδι ρίχνοντας ένα ζάρι διαδοχικά. Κερδίζει αυτός που θα φέρει πρώτος 4 και ο παίκτης Α ρίχνει πρώτος. Να βρείτε την πιθανότητα να νικήσει κάθε ένας από τους παίκτες.

$E_i = \{ \text{έρχεται 4 στην } i \text{ ρίψη} \}$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n = \frac{1}{1-\lambda}, \; |\lambda|<1.$$

$$P(\text{κερδίζει ο A}) = P(E_1 \cup E_1' E_2' E_3 \cup E_1' E_2' E_3' E_4' E_5 \cup \cdots)$$

$$= P(E_1) + P(E_1' E_2' E_3) + \cdots$$

$$= \frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^2 \cdot \frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^4 \cdot \frac{1}{6} + \cdots = \frac{1}{6} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^{2n} = \frac{1}{6} \frac{1}{1-\frac{25}{36}} =$$

$= 6/11.$

Ασκήσεις στα ανεξάρτητα ενδεχόμενα

4. Δύο παίκτες Α και Β παίζουν ένα παιχνίδι ρίχνοντας ένα ζάρι διαδοχικά. Κερδίζει αυτός που θα φέρει πρώτος 4 και ο παίκτης Α ρίχνει πρώτος. Να βρείτε την πιθανότητα να νικήσει κάθε ένας από τους παίκτες.

Λύση

Φανερά, κάθε ρίψη είναι ανεξάρτητη από όσες έχουν προηγηθεί. Επιπλέον, σε κάθε έναν γύρο, για κάθε παίκτη, η πιθανότητα νίκης (Ν) είναι 1/6 και η πιθανότητα ήττας (Η) είναι 5/6. Η πιθανότητα να νικήσει ο Α είναι

$$
\begin{aligned}
P(A) &= P(N \cup (H \cap H \cap N) \cup (H \cap H \cap H \cap H \cap N) \cup \ldots.) \\
&= P(N) + P(H \cap H \cap N) + P(H \cap H \cap H \cap H \cap N) + \ldots. \\
&= P(N) + P(H)^2 \cdot P(N) + P(H)^4 \cdot P(N) + \ldots. \\
&= P(N) \cdot (1 + P(H)^2 + P(H)^4 + \ldots) \\
&= P(N) / [1 - P(H)^2] = 1 / 6 \cdot 1 / (1 - 25/36) = 6/11.
\end{aligned}
$$

Άρα, ο Α νικάει στο παιχνίδι με πιθανότητα 6/11 = 54,5% και ο Β με πιθανότητα 1 – P(A) = 45,5%.

Νόμος της ολικής πιθανότητας

Νόμος της ολικής πιθανότητας

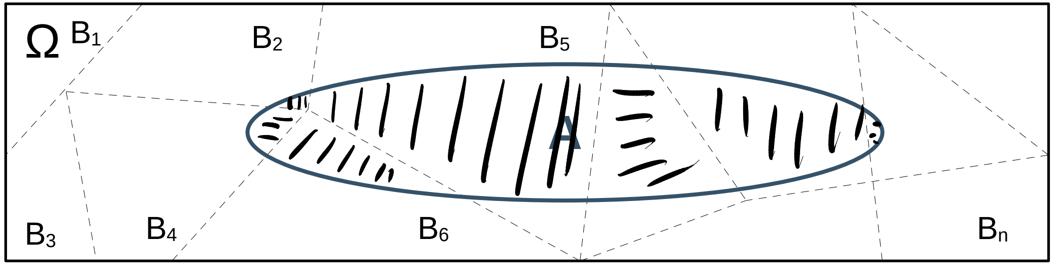
Έστω B_i, i = 1, 2, … είναι μία διαμέριση του δειγματοχώρου Ω, που αποτελείται από ξένα μεταξύ τους σύνολα, δηλαδή

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \Omega \text{ και } B_i \cap B_j = \emptyset,\ i \neq j.$$

Αν $A \subseteq \Omega$, ένα οποιοδήποτε ενδεχόμενο, τότε φανερά, τα σύνολα $A \cap B_i$, i = 1, 2, … θα είναι ξένα μεταξύ τους και η ένωσή τους θα συνιστά το σύνολο A. Συμπεραίνουμε ότι:

$$P(A) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A \cap B_n)$$

Ο παραπάνω τύπος είναι γνωστός και ως **Νόμος της Ολικής Πιθανότητας (Law of total probability).**



Νόμος της ολικής πιθανότητας

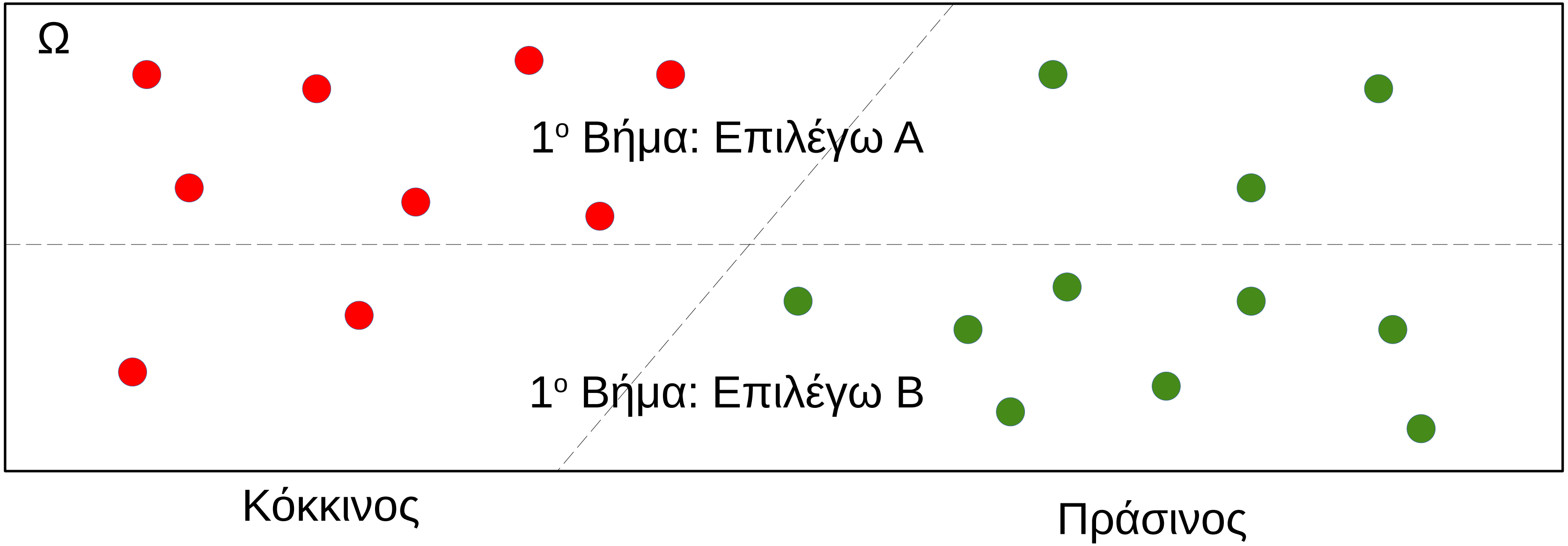
Παρατήρηση

Αν επιπλέον το $A \subseteq \Omega$ είναι ανεξάρτητο με τα B_i, $i = 1, 2, \dots$ τότε:

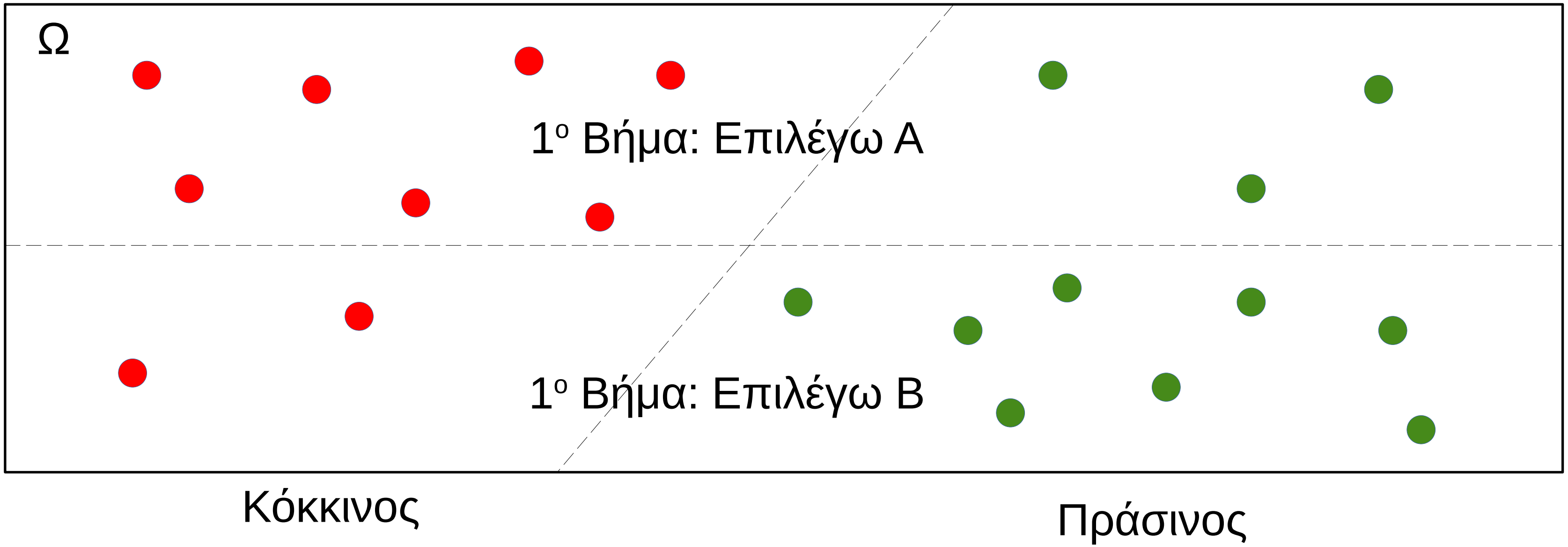
$$P(A) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A \cap B_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A \text{ δεδομένου του } B_n) \cdot P(B_n)$$

Νόμος της ολικής πιθανότητας

Παράδειγμα
Έχουμε μπροστά μας δύο σάκους τον Α και τον Β. Ο Α έχει 7 κόκκινους και 3 πράσινους βόλους, ενώ ο Β έχει 2 κόκκινους και 8 πράσινους βόλους. Ρίχνω ένα ζάρι. Αν έρθει 1 ή 2 διαλέγω το Α ενώ αν έρθει 3, 4, 5, 6 διαλέγω τον Β. Από τον σάκο επιλέγουμε τυχαία ένα βόλο. Να βρεθεί η πιθανότητα αυτός να είναι πράσινος.



Νόμος της ολικής πιθανότητας

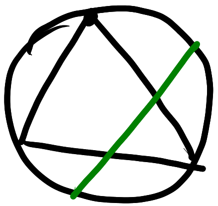


P(Π) = P(Π ∩ Επιλέγω Α) + P(Π ∩ Επιλέγω Β)
= P(Επιλέγω Α)P(Π δεδομένου του Α) + P(Επιλέγω Β)P(Π δεδομένου του Β)
= $2/6 \cdot 0{,}3 + 4/6 \cdot 0{,}8$
= $0{,}1 + 0{,}53$
= $0{,}63 = 63\%$.

Παράδοξο Bertrand

Παράδοξο Bertrand

Το παράδοξο Bertrand είναι ένα πρόβλημα που εισήχθηκε από τον Joseph Bertrand το 1889, ως ένα ιδιαίτερο παράδειγμα που καταδεικνύει την αναγκαιότητα αυστηρού προσδιορισμού του δειγματοχώρου ενός πειράματος, ως προϋπόθεση για τον αξιόπιστο υπολογισμό πιθανοτήτων.



Το πρόβλημα είναι το εξής:

Θεωρήστε ένα ισόπλευρο τρίγωνο εγγεγραμμένο σε κύκλο.
Αν επιλέξουμε τυχαία μία χορδή του κύκλου, ποια είναι η πιθανότητα η χορδή να είναι μεγαλύτερη από την πλευρά του τριγώνου;

Ερώτηση: Τι δεν είναι απολύτως ξεκάθαρο στην εκφώνηση του προβλήματος;

Παράδοξο Bertrand

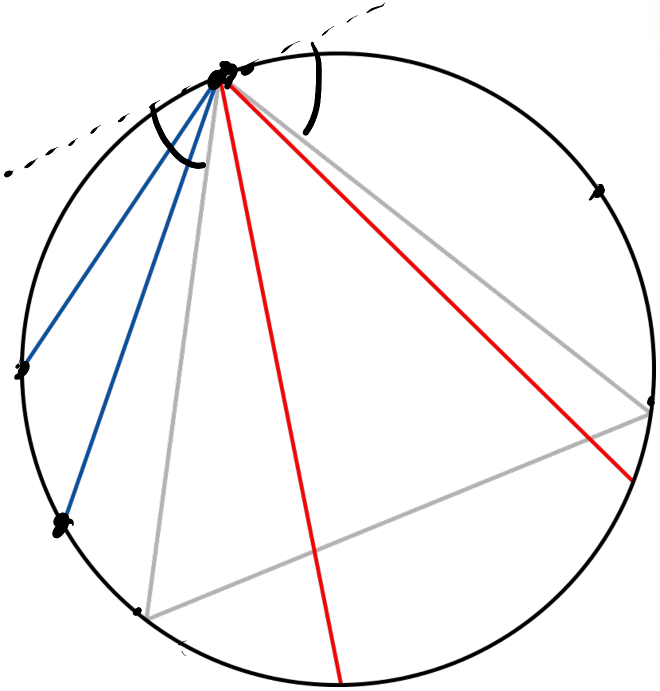
Ο Bertrand έλυσε το πρόβλημα με τρεις διαφορετικούς τρόπους, όλοι τους φαινομενικά σωστοί, κάθε ένας από τους οποίους οδηγεί και σε διαφορετικό αποτέλεσμα.

1ος τρόπος
Επιλέγουμε δύο τυχαία σημεία στην περιφέρεια του κύκλου και σχεδιάζουμε τη χορδή που τα ενώνει.

Τοποθετούμε το ισόπλευρο τρίγωνο με τρόπο τέτοιο ώστε η κορυφή του να συμπίπτει με ένα από τα τελικά σημεία της χορδής.

Παρατηρούμε ότι εάν το άλλο τελικό σημείο της χορδής βρίσκεται στο τόξο μεταξύ των ακραίων σημείων της πλευράς του τριγώνου απέναντι από το πρώτο σημείο, η χορδή είναι μεγαλύτερη από μια πλευρά του τριγώνου.

Το μήκος του τόξου είναι το ένα τρίτο της περιφέρειας του κύκλου, επομένως **η πιθανότητα μια τυχαία χορδή να είναι μεγαλύτερη από μια πλευρά του εγγεγραμμένου τριγώνου είναι 1/3.**



Παράδοξο Bertrand

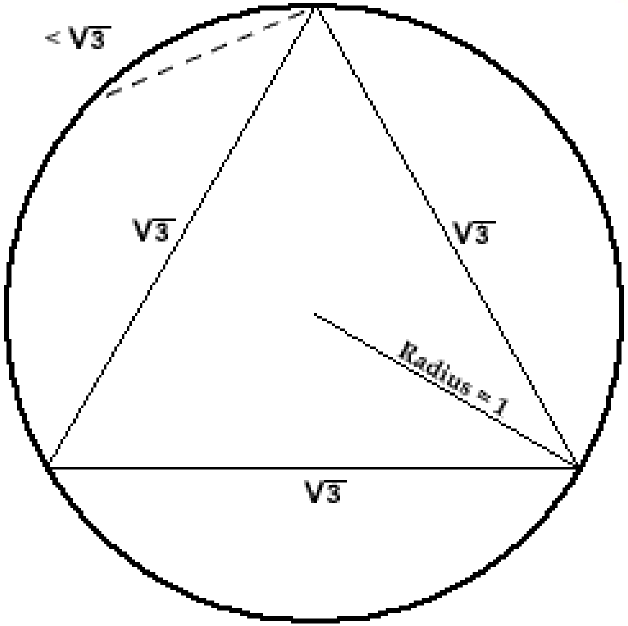
Ο Bertrand έλυσε το πρόβλημα με τρεις διαφορετικούς τρόπους, όλοι τους φαινομενικά σωστοί, κάθε ένας από τους οποίους οδηγεί και σε διαφορετικό αποτέλεσμα.

1ος τρόπος
Επιλέγουμε δύο τυχαία σημεία στην περιφέρεια του κύκλου και σχεδιάζουμε τη χορδή που τα ενώνει.

Τοποθετούμε το ισόπλευρο τρίγωνο με τρόπο τέτοιο ώστε η κορυφή του να συμπίπτει με ένα από τα τελικά σημεία της χορδής.

Παρατηρούμε ότι εάν το άλλο τελικό σημείο της χορδής βρίσκεται στο τόξο μεταξύ των ακραίων σημείων της πλευράς του τριγώνου απέναντι από το πρώτο σημείο, η χορδή είναι μεγαλύτερη από μια πλευρά του τριγώνου.

Το μήκος του τόξου είναι το ένα τρίτο της περιφέρειας του κύκλου, επομένως **η πιθανότητα μια τυχαία χορδή να είναι μεγαλύτερη από μια πλευρά του εγγεγραμμένου τριγώνου είναι 1/3.**



Παράδοξο Bertrand

Ο Bertrand έλυσε το πρόβλημα με τρεις διαφορετικούς τρόπους, όλοι τους φαινομενικά σωστοί, κάθε ένας από τους οποίους οδηγεί και σε διαφορετικό αποτέλεσμα.

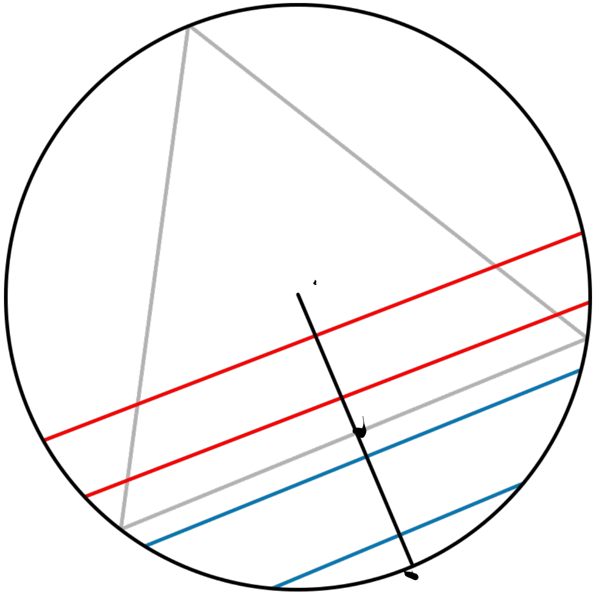
2ος τρόπος
Επιλέγουμε μια ακτίνα του κύκλου.

Επιλέγουμε ένα σημείο στην ακτίνα και κατασκευάζουμε τη χορδή μέσα από αυτό το σημείο και κάθετα στην ακτίνα.

Τοποθετούμε το τρίγωνο έτσι ώστε μια πλευρά του να είναι κάθετη στην ακτίνα.

Η χορδή είναι μεγαλύτερη από μια πλευρά του τριγώνου εάν το επιλεγμένο σημείο είναι πιο κοντά στο κέντρο του κύκλου από το σημείο όπου η πλευρά του τριγώνου τέμνει την ακτίνα.

Η πλευρά του τριγώνου διχοτομεί την ακτίνα, επομένως **η πιθανότητα μια τυχαία χορδή να είναι μεγαλύτερη από μια πλευρά του εγγεγραμμένου τριγώνου είναι 1/2.**



Παράδοξο Bertrand

Ο Bertrand έλυσε το πρόβλημα με τρεις διαφορετικούς τρόπους, όλοι τους φαινομενικά σωστοί, κάθε ένας από τους οποίους οδηγεί και σε διαφορετικό αποτέλεσμα.

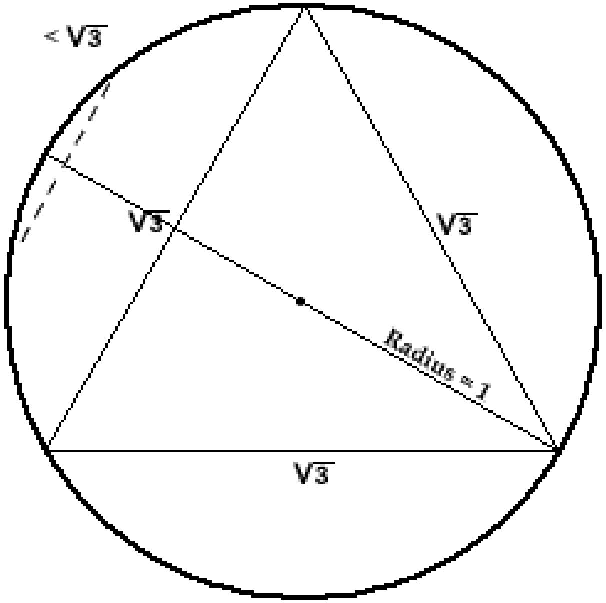
2ος τρόπος
Επιλέγουμε μια ακτίνα του κύκλου.

Επιλέγουμε ένα σημείο στην ακτίνα και κατασκευάζουμε τη χορδή μέσα από αυτό το σημείο και κάθετα στην ακτίνα.

Τοποθετούμε το τρίγωνο έτσι ώστε μια πλευρά του να είναι κάθετη στην ακτίνα.

Η χορδή είναι μεγαλύτερη από μια πλευρά του τριγώνου εάν το επιλεγμένο σημείο είναι πιο κοντά στο κέντρο του κύκλου από το σημείο όπου η πλευρά του τριγώνου τέμνει την ακτίνα.

Η πλευρά του τριγώνου διχοτομεί την ακτίνα, επομένως **η πιθανότητα μια τυχαία χορδή να είναι μεγαλύτερη από μια πλευρά του εγγεγραμμένου τριγώνου είναι 1/2.**



Παράδοξο Bertrand

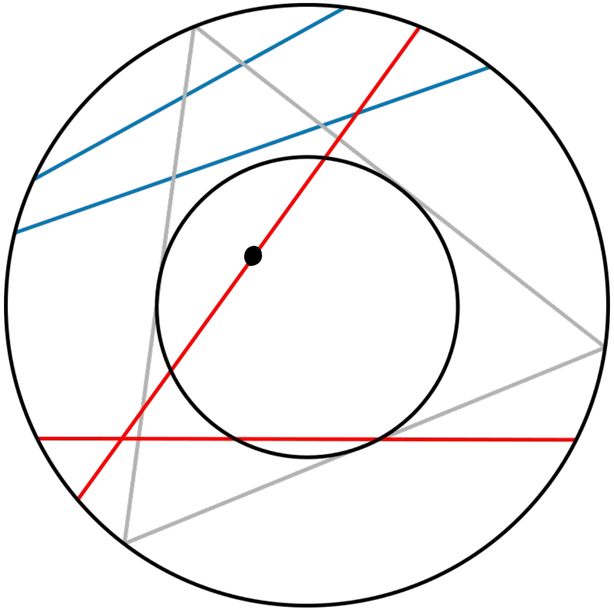
Ο Bertrand έλυσε το πρόβλημα με τρεις διαφορετικούς τρόπους, όλοι τους φαινομενικά σωστοί, κάθε ένας από τους οποίους οδηγεί και σε διαφορετικό αποτέλεσμα.

3ος τρόπος
Επιλέγουμε ένα σημείο οπουδήποτε μέσα στον κύκλο.

Κατασκευάζουμε μια χορδή με το επιλεγμένο σημείο ως μέσο.

Η χορδή είναι μεγαλύτερη από μια πλευρά του εγγεγραμμένου τριγώνου εάν το επιλεγμένο σημείο βρίσκεται στο εσωτερικό δίσκου ακτίνας 1/2 της ακτίνας του κύκλου.

Το εμβαδόν του δίσκου είναι το ένα τέταρτο του εμβαδού του κύκλου, άρα **η πιθανότητα μια τυχαία χορδή να είναι μεγαλύτερη από μια πλευρά του εγγεγραμμένου τριγώνου είναι 1/4.**



Παράδοξο Bertrand

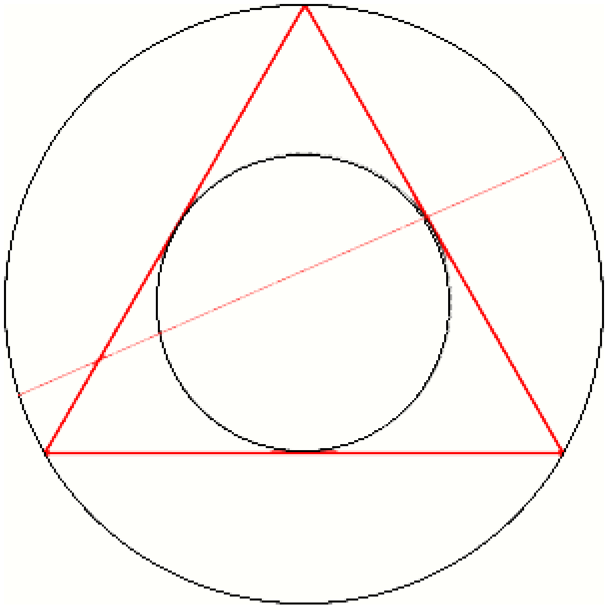
Ο Bertrand έλυσε το πρόβλημα με τρεις διαφορετικούς τρόπους, όλοι τους φαινομενικά σωστοί, κάθε ένας από τους οποίους οδηγεί και σε διαφορετικό αποτέλεσμα.

3ος τρόπος
Επιλέγουμε ένα σημείο οπουδήποτε μέσα στον κύκλο.

Κατασκευάζουμε μια χορδή με το επιλεγμένο σημείο ως μέσο.

Η χορδή είναι μεγαλύτερη από μια πλευρά του εγγεγραμμένου τριγώνου εάν το επιλεγμένο σημείο βρίσκεται στο εσωτερικό δίσκου ακτίνας 1/2 της ακτίνας του κύκλου.

Το εμβαδόν του δίσκου είναι το ένα τέταρτο του εμβαδού του κύκλου, άρα **η πιθανότητα μια τυχαία χορδή να είναι μεγαλύτερη από μια πλευρά του εγγεγραμμένου τριγώνου είναι 1/4.**



Παράδοξο Bertrand

Ο λόγος για τον οποίο προκύπτουν διαφορετικά αποτελέσματα είναι πως ο προσδιορισμός της χορδής γίνεται με διαφορετικό τρόπο κάθε φορά, γεγονός που οδηγεί και σε διαφορετικό δειγματοχώρο και κατ’ επέκταση διαφορετικό υπολογισμό πιθανότητας.

Με άλλα λόγια, το πρόβλημα του Bertrand με τον τρόπο που τίθεται δεν είναι καλώς ορισμένο, καθώς απουσιάζει η ακριβής περιγραφή του τρόπου με τον οποίο λαμβάνεται η χορδή.

Παράδοξα όπως αυτό, ώθησαν τον Kolmogorov στον προσδιορισμό των αξιωμάτων της θεωρίας Πιθανοτήτων που προσέφεραν μία αυστηρότερη θεωρητική θεμελίωση στην οποία δεν μπορούσαν πλέον να εμφανιστούν τέτοιου είδους παράδοξα.

Σημείωση: Μία καλή σύνοψη μπορεί να βρεθεί στην εισαγωγή του http://mpla.math.uoa.gr/media/theses/msc/Anagnostopoulos_Ch.pdf

Χώρος Πιθανοτήτων (Αξιώματα Kolmogorov)

Χώρος Πιθανοτήτων

Σε κάθε τυχαίο πείραμα, ο κανόνας με τον οποίο υπολογίζεται η πιθανότητα ενός ενδεχομένου $A \subseteq \Omega$,

$$P(A) = \frac{\text{ευνοϊκές περιπτώσεις πειράματος}}{\text{πλήθος δυνατών περιπτώσεων}},$$

αντιστοιχίζει έναν αριθμό μεταξύ 0 και 1 στο Α.

Παρατηρούμε ότι για κάθε ομάδα ξένων μεταξύ τους ενδεχομένων, το πλήθος των ευνοϊκών περιπτώσεων για την ένωση είναι το άθροισμα των ευνοϊκών περιπτώσεων των επιμέρους ενδεχομένων, γεγονός που υποδεικνύει την αθροιστική ιδιότητα για τις αντίστοιχες πιθανότητες.

Βασισμένος στα παραπάνω χαρακτηριστικά της πιθανότητας, ο Andrey Kolmogorov, το 1933, όρισε και καθιέρωσε την έννοια του χώρου πιθανοτήτων ως τη μαθηματική έννοια που υποστηρίζει και χρησιμοποιείται έκτοτε για τη συστηματική μελέτη των πιθανοτήτων.

Χώρος Πιθανοτήτων

Ορισμός
Χώρος πιθανοτήτων ονομάζεται κάθε τριάδα (Ω, *F*, P) για την οποία ισχύουν τα εξής:
α) Το σύνολο Ω εκφράζει το δειγματοχώρο ενός τυχαίου πειράματος.

β) Το σύνολο *F* περιέχει όλα τα δυνατά ενδεχόμενα που μας απασχολούν, δηλαδή όλα τα υποσύνολα του Ω.

γ) Η P είναι η συνάρτηση πιθανότητας, η οποία αντιστοιχεί έναν αριθμό μεταξύ 0 και 1 σε κάθε ενδεχόμενο του *F*. Επιπλέον, δεχόμαστε ότι η συνάρτηση P ικανοποιεί τις εξής ιδιότητες (αξιώματα Kolmogorov)

i) Για κάθε A є *F*, P(A) є R και $P(A) \geq 0$.
ii) $P(\Omega) = 1$.
iii) Αν A_1, A_2, … є *F*, είναι *ξένα μεταξύ τους* ενδεχόμενα ($A_i \cap B_j = \varnothing$), τότε

$$P\left(\cup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P\left(A_n\right)$$

Χώρος Πιθανοτήτων

Παρατηρήσεις

1. Από τα τρία αξιώματα της πιθανότητας αποδεικνύονται οι εξής ιδιότητες.
   α) $P(\varnothing) = 0$.
   β) Αν $A \subseteq B$, τότε $P(A) \leq P(B)$.
   γ) Για κάθε A, $P(A') = 1 - P(A)$.
   δ) Για κάθε A, B є F, είναι $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Σημείωση: Αν τα A και B είναι ξένα τότε $P(A \cap B) = P(\varnothing) = 0$ και η ιδιότητα (δ) αποτελεί ειδική περίπτωση του αξιώματος (iii)

2. Στον ορισμό του χώρου πιθανοτήτων, το σύνολο των ενδεχομένων *F*, έχει τελικά τις ιδιότητες
i) $\varnothing$ є *F*.
ii) Για κάθε A, είναι A’ є *F*.
iii) Αν A_1, A_2, … є *F*, είναι *ξένα μεταξύ τους* ενδεχόμενα, τότε $P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$

Κάθε ομάδα συνόλων με τις παραπάνω ιδιότητες ονομάζεται σ – άλγεβρα. Η ύπαρξη του *F* στον ορισμό του χώρου πιθανότητας διασφαλίζει πως δεν θα υπάρχει ασάφεια σχετικά με το αν ένα σύνολο θεωρείται έγκυρο ενδεχόμενο ή όχι.

Απαρίθμηση – Καταμέτρηση

Απαρίθμηση – Καταμέτρηση

Το πρόβλημα που λύσαμε στην εισαγωγή:

“Να βρεθεί η πιθανότητα στη ρίψη δύο νομισμάτων να εμφανιστούν δύο “γράμματα”.”,

ήταν ένα εύκολο πρόβλημα καθώς εύκολα μετρήσαμε τόσο τις ευνοϊκές (1) όσο και τις συνολικές εκδοχές (4) του πειράματος.

Η εκδοχή του ίδιου προβλήματος όμως, με περισσότερα νομίσματα:

“Να βρεθεί η πιθανότητα στη ρίψη 30 νομισμάτων να εμφανιστούν 7 “γράμματα”.”,

δεν είναι το ίδιο εύκολη.

Αναδεικνύεται η αναγκαιότητα χρήσης μεθόδων απαρίθμησης ή καταμέτρησης περιπτώσεων. Αυτό είναι το αντικείμενο της **Συνδυαστικής**.

Βασική αρχή απαρίθμησης

Έστω ότι μια διαδικασία πραγματοποιείται σε ν διαδοχικές και ανεξάρτητες φάσεις $φ_1$, $φ_2$, ..., $φ_ν$. Αν η φάση $φ_1$ πραγματοποιείται με $κ_1$ τρόπους και για καθέναν από αυτούς η φάση $φ_2$ πραγματοποιείται με $κ_2$ τρόπους, ..., και για καθέναν από όλους αυτούς τους τρόπους η φάση $φ_ν$ πραγματοποιείται με $κ_ν$ τρόπους, τότε η διαδικασία αυτή μπορεί να πραγματοποιηθεί με $κ_1 \cdot κ_2 \cdot ... \cdot κ_ν$ τρόπους.

Παράδειγμα εφαρμογής της βασικής αρχής απαρίθμησης
Ένας κωδικός δύο ψηφίων αποτελείται από ένα γράμμα (24 επιλογές) και έναν αριθμό (10 επιλογές). Να βρεθεί το πλήθος των κωδικών που μπορεί να σχηματιστούν.

Λύση
Η διαδικασία της επιλογής του κωδικού πραγματοποιείται σε 2 φάσεις που μπορούν να θεωρηθούν διαδοχικές, δηλαδή στοχαστικά ανεξάρτητες. Η $1^η$ υλοποιείται με 24 τρόπους και για κάθε μία από αυτές η $2^η$ υλοποιείται με 10 τρόπους. Συμπεραίνουμε ότι η επιλογή του κωδικού πραγματοποιείται με

$$24 \cdot 10 = 240 \text{ τρόπους.}$$

Απαρίθμηση – Καταμέτρηση

Εφαρμόζοντας τη βασική αρχή απαρίθμησης, έχουμε τη δυνατότητα να μετρούμε εύκολα με χρήση απλών τύπων τις περιπτώσεις όπου κάποια αντικείμενα

α) διατάσσονται στη σειρά ανά ομάδες ορισμένου πλήθους

β) μετατίθενται μεταξύ τους (ισοδύναμο με τη διάταξη του συνόλου των στοιχείων)

γ) συνδυάζονται μεταξύ τους ανά ομάδες ορισμένου πλήθους

Παραδείγματα
α) **Διάταξη** του συνόλου {α, β, γ} ανά δύο: {α, β}, {β, α}, {α, γ}, {γ, α}, {β, γ}, {γ, β} : 6

β) **Μεταθέσεις** του συνόλου {α, β, γ}:
{α, β, γ}, {α, γ, β}, {γ, α, β}, {β, α, γ}, {β, γ, α}, {γ, β, α} : 6

γ) **Συνδυασμοί** του συνόλου {α, β, γ} ανά δύο: {α, β}, {β, α}, {α, γ} : 3

Σημείωση: Στη διάταξη και στη μετάθεση η σειρά των στοιχείων έχει σημασία. Αντίθετα, στους συνδυασμούς δεν μας ενδιαφέρει.

Μεταθέσεις

Ορισμός
Μετάθεση (permutation) των n στοιχείων ενός συνόλου Α, λέγεται καθένας από τους διαφορετικούς τρόπους με τους οποίους μπορούμε να βάλουμε τα στοιχεία του Α σε μια σειρά. Το πλήθος των μεταθέσεων των n στοιχείων, συμβολίζεται με $(n)_n$.

Παράδειγμα
Το σύνολο των μεταθέσεων του συνόλου {α, β, γ} είναι το εξής:

{ {α, β, γ}, {α, γ, β}, {β, α, γ}, {β, γ, α}, {γ, β, α}, {γ, α, β}}.

Παρατηρούμε ότι $(3)_3 = 6$. Πράγματι, η πρώτη θέση μπορεί να συμπληρωθεί με 3 τρόπους (α ή β ή γ), η δεύτερη που ακολουθεί την πρώτη με τους εναπομείναντες 2 και η τρίτη τελευταία με μόνο 1 τρόπο (το στοιχείο που απέμεινε). Τα τρία βήματα είναι ανεξάρτητα το ένα με το άλλο, άρα αρκεί να πολλαπλασιάσουμε τις εκδοχές του 1ου, του 2ου και του 3ου βήματος για να βρούμε το συνολικό πλήθος 6.

Μεταθέσεις

Με την ίδια μεθοδολογία μπορούμε γενικότερα να δείξουμε ότι:

Το σύνολο των μεταθέσεων (permutations) n στοιχείων είναι $(n)_n = n!$

Παράδειγμα
Με πόσους τρόπους μπορούν να καθίσουν 10 φοιτητές στη σειρά;

Λύση
Το πλήθος των πιθανών μεταθέσεων είναι

$$(10)_{10} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3.628.800$$

τρόποι.

Μεταθέσεις

Πιο ιδιαίτερη είναι η περίπτωση όπου μεταξύ των n στοιχείων υπάρχουν κάποια που είναι ίδια μεταξύ τους.

Παράδειγμα: Οι μεταθέσεις των {A, B, B} είναι
{A, B, B}, {A, B, B}, {B, A, B}, {B, B, A}, {B, A, B}, {B, B, A}, ή
{A, B, B}, {A, B, B}, {B, A, B}, {B, B, A}, {B, A, B}, {B, B, A},
από τις οποίες οι διακεκριμένες μεταξύ τους είναι 3:

{A, B, B}, {B, A, B}, {B, B, A}

Παρατηρούμε, ότι για να υπολογίσουμε το 3 αρκεί να διαιρέσουμε το σύνολο όλων των μεταθέσεων (3! = 6) με το 2 που είναι το πλήθος των όμοιων μεταθέσεων που αντιστοιχούν στην ομάδα των δύο “B”.

Μεταθέσεις

Γενικότερα, αν s είναι τα ίδια στοιχεία μεταξύ των n, παρατηρούμε ότι, μεταξύ των n! διαφορετικών μεταθέσεων θα υπάρχουν s! όμοιες μεταθέσεις. Συνεπώς, αν θέλουμε να μετρήσουμε το πλήθος των διακριτών μεταθέσεων θα πρέπει να διαιρέσουμε το n! με το s!.

Στην ακόμα γενικότερη περίπτωση που έχουμε πολλές ομάδες όμοιων στοιχείων, αποδεικνύεται ότι:

Το πλήθος των μεταθέσεων n αντικειμένων που αποτελούνται από m ομάδες s_1, s_2, …, s_m στοιχείων ($n = s_1 + s_2 + \ldots + s_m$) είναι

$$\frac{n!}{s_1! \cdot s_2! \cdot \ldots \cdot s_m!}$$

Μεταθέσεις

Παράδειγμα
Δίνεται η λέξη «ΠΑΝΔΗΜΙΑ».
α) Πόσοι αναγραμματισμοί της λέξης υπάρχουν; Δεν χρειάζεται η λέξη να βγάζει νόημα.
β) Αν η λέξη ξεκινάει από Π και τελειώνει σε Α, πόσες τέτοιες λέξεις μπορούμε να σχηματίσουμε;

(α) $\{1\times \Pi,\ 2\times A,\ 1\times N,\ 1\times \Delta,\ 1\times H,\ 1\times M,\ 1\times I\}$

$\Pi\ A_2\ A_1\ N\ \Delta\ H\ M\ I$

$\Pi\ A_1\ A_2\ N\ \Delta\ H\ M\ I \ : \ 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1$

_ _ A _ A _ _

_ _ _ _ _ A A

$$\frac{8!}{2} = \frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot \cancel{2}\cdot 1}{\cancel{2}}$$

Μεταθέσεις

Παράδειγμα
Δίνεται η λέξη «ΠΑΝΔΗΜΙΑ».
α) Πόσοι αναγραμματισμοί της λέξης υπάρχουν; Δεν χρειάζεται η λέξη να βγάζει νόημα.
β) Αν η λέξη ξεκινάει από Π και τελειώνει σε Α, πόσες τέτοιες λέξεις μπορούμε να σχηματίσουμε;

Λύση
(α) Αναζητούμε τις μεταθέσεις των γραμμάτων {“Π”, “Α”, “Ν”, “Δ”, “Η”, “Μ”, “Ι”, “Α”}. Παρατηρούμε, πως από τα 8 γράμματα της λέξης, το “Α” παρουσιάζεται 2 φορές και τα άλλα γράμματα από 1 φορά. Οι δυνατοί αναγραμματισμοί της λέξης είναι:

$$\frac{8!}{2!} = \frac{40.320}{2} = 20.160$$

(β) Η λέξη είναι της μορφής Π _ _ _ _ _ _ Α, όπου οι 6 θέσεις που απομένουν συμπληρώνονται από τα γράμματα {“Α”, “Ν”, “Δ”, “Η”, “Μ”, “Ι”}, τα οποία εμφανίζονται από 1 φορά.

Άρα, υπάρχουν 6! = 720 διαφορετικές λέξεις αυτής της μορφής.

Διατάξεις

Ορισμός
Διάταξη (permutation) των n στοιχείων ενός συνόλου A ανά k, με k ≤ n , λέγεται καθένας από τους διαφορετικούς τρόπους με τους οποίους μπορούμε να πάρουμε k διαφορετικά στοιχεία του A και να τα βάλουμε σε μια σειρά. Το πλήθος των διατάξεων των n στοιχείων ανά k, χωρίς δυνατότητα επανάληψης συμβολίζεται με P(n, k).

Παράδειγμα
Το σύνολο των διατάξεων του συνόλου {α, β, γ} ανά δύο, χωρίς δυνατότητα επανάληψης στοιχείων, είναι το εξής:

{ {α, β}, {β, α}, {α, γ}, {γ, α}, {β, γ}, {γ, β}}.

$3 \cdot 2 = 6.$

Παρατηρούμε ότι P(3, 2) = 6. Πράγματι, η πρώτη θέση μπορεί να συμπληρωθεί με 3 τρόπους (α ή β ή γ), ενώ η δεύτερη που ακολουθεί την πρώτη με τους εναπομείναντες 2. Τα δύο βήματα είναι ανεξάρτητα το ένα με το άλλο, άρα αρκεί να πολλαπλασιάσουμε τις εκδοχές του 1ου και του 2ου βήματος για να βρούμε το συνολικό πλήθος 6.

Διατάξεις

Με την ίδια μεθοδολογία μπορούμε γενικότερα να δείξουμε ότι:

Το σύνολο των διατάξεων (permutations)
n στοιχείων ανά k, χωρίς επανάληψη, είναι

$$\mathbf{P(n, k) = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}}.$$

Σημείωση: Οι διατάξεις στη βιβλιογραφία συμβολίζονται και ${}^{n}P_{k}$ ή ${}_{n}P_{k}$ ή P^{n}_{k} ή Δ^{n}_{k} ή $(n)_{k}$.

Διατάξεις

Αν υπάρχει δυνατότητα επανάληψης των στοιχείων του, τότε το σύνολο των διατάξεων του συνόλου {α, β, γ} ανά δύο είναι το εξής:

{ {α, α}, {α, β}, {β, α}, {β, β}, {α, γ}, {γ, α}, {β, γ}, {γ, β}, {γ, γ}}.

Παρατηρούμε ότι έχει 9 στοιχεία. Πράγματι, η $1^η$ θέση μπορεί να συμπληρωθεί με 3 τρόπους (α ή β ή γ) και η $2^η$ θέση συμπληρώνεται ανεξάρτητα από την $1^η$, άρα αρκεί να πολλαπλασιάσουμε τις εκδοχές του $1^{ου}$ και του $2^{ου}$ βήματος για να βρούμε το συνολικό πλήθος 9. Με την ίδια μεθοδολογία μπορούμε γενικότερα να δείξουμε ότι:

Το σύνολο των διατάξεων (permutations)
n στοιχείων ανά k, με επανάληψη,
είναι $n \cdot n \cdot \ldots \cdot n = n^k$.

Σημείωση: Οι διατάξεις με επανάληψη δεν έχουν συγκεκριμένο συμβολισμό.

Ασκήσεις στις διατάξεις

1. Τρία αδέλφια έχουν διαθέσιμα 4 tablet. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούν να τα χρησιμοποιήσουν;

$T_1 \quad T_2 \quad T_3 \quad T_4$

$$\underline{4} \cdot \underline{3} \cdot \underline{2} = 24$$

Ασκήσεις στις διατάξεις

1. Τρία αδέλφια έχουν διαθέσιμα 4 tablet. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούν να τα χρησιμοποιήσουν;

Λύση
Αναζητούμε το πλήθος των διατάξεων των 4 tablet ανά 3. Είναι $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ τρόποι.

Ασκήσεις στις διατάξεις

2. Επιλέγουμε με τυχαίο τρόπο ένα 4ψήφιο κωδικό (με αριθμούς). Ποια είναι η πιθανότητα αυτός να έχει όλα τα ψηφία του διαφορετικά;

$A = \{$όλα τα ψηφία διαφορετικά$\}$ $\quad \underline{\Omega} = \{0000, \ldots, 9999\}, \; N(\underline{\Omega}) = 10.000$

$$N(A) = P(10,4) = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7$$

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{\cancel{10} \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{10.00\cancel{0}}$$

Ασκήσεις στις διατάξεις

2. Επιλέγουμε με τυχαίο τρόπο ένα 4ψήφιο κωδικό (με αριθμούς). Ποια είναι η πιθανότητα αυτός να έχει όλα τα ψηφία του διαφορετικά;

Λύση
Για κάθε μία θέση του κωδικού υπάρχουν 10 δυνατές επιλογές (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9). Άρα, το συνολικό πλήθος των πιθανών κωδικών είναι $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10.000$.

Το πλήθος των κωδικών με διαφορετικά ψηφία υπολογίζεται από τις διατάξεις των 10 ψηφίων ανά 4, δηλαδή είναι ίσο με $10!/6! = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5.040$.

Συμπεραίνουμε, ότι:

P(“Όλα τα ψηφία του κωδικού είναι διαφορετικά”) = 5.040 / 10.000 = 0,504 = 50,4%.

Ασκήσεις στις διατάξεις

3. Σε μία αίθουσα βρίσκονται 20 άτομα. Ποια η πιθανότητα να υπάρχουν τουλάχιστον δύο με την ίδια ημέρα γενεθλίων;

$P($τουλάχιστον 2 με ίδια ημέρα γενέθλια$) =$

$= 1 - P($όλοι έχουν σε διαφορετική ημέρα γενέθλια$)$

$$= 1 - \frac{P(365, 20)}{365^{20}}$$

Ασκήσεις στις διατάξεις

3. Σε μία αίθουσα βρίσκονται 20 άτομα. Ποια η πιθανότητα να υπάρχουν τουλάχιστον δύο με την ίδια ημέρα γενεθλίων;

Λύση

Οι συνολικοί τρόποι με τους οποίους μπορεί να έχουν γεννηθεί 20 άτομα στις 365 ημέρες του χρόνου είναι 365^{20}. Έστω Α: “υπάρχουν τουλάχιστον δύο άτομα στα 20 με την ίδια ημέρα γενεθλίων”. Θα υπολογίσουμε την πιθανότητα του συμπληρωματικού γεγονότος:

Α’: “Όλα τα άτομα έχουν γενέθλια σε διαφορετική ημέρα”

Το πλήθος των ευνοϊκών περιπτώσεων του Α’ είναι όσες και οι επιλογές 20άδων με διαφορετικά στοιχεία από τις 365 ημέρες, δηλαδή οι διατάξεις των 365 ημερών ανά 20 στοιχεία: 365!/(365–20)!. Καταλήγουμε ότι:

$$P(A') = 365! / [(365 – 20)!\ 365^{20}] = 0{,}589,$$

από όπου συνάγουμε ότι **P(A) = 0,411 = 41,1%.**

Δηλαδή: Ασυμπτωτικά, για κάθε 100 παρέες των 20 ατόμων περιμένουμε στις 41 από αυτές να υπάρχουν τουλάχιστον 2 μέλη με ίδια ημέρα γενεθλίων.

Ασκήσεις στις διατάξεις

4. Ένας επισκέπτης επιθυμεί να επισκεφθεί τις 8 περιοχές ενός αρχαιολογικού χώρου. Πρέπει να ξεκινήσει από μία συγκεκριμένη περιοχή, αλλά μπορεί να επισκεφθεί τις υπόλοιπες 7 περιοχές με όποια σειρά θέλει. Πόσες διαφορετικές διαδρομές μπορεί να χρησιμοποιήσει ο επισκέπτης κατά την περιήγηση στον αρχαιολογικό χώρο;

7!

1 _ _ _ _ _ _ _ _

Άλυτη