

Θεωρία Πιθανοτήτων και Στατιστική
Θέματα εξετάσεων Σεπτεμβρίου 2022

Θέμα 1

Το εαρινό εξάμηνο το 79,9% των εγγεγραμμένων φοιτητών συμμετείχε στη διαδικασία των ασκήσεων. Μεταξύ των φοιτητών που συμμετείχαν στις ασκήσεις, το 68,7% εξετάστηκε επιτυχώς, ενώ μεταξύ των φοιτητών που δεν συμμετείχαν στις ασκήσεις το 31% εξετάστηκε επιτυχώς. Να βρεθεί το ποσοστό των φοιτητών:

(α) που πέτυχαν στην εξέταση του μαθήματος.

(β) που συμμετείχαν στις ασκήσεις του μαθήματος, δεδομένου ότι δεν πέτυχαν στην εξέταση.

(γ) που συμμετείχαν στις ασκήσεις του μαθήματος και δεν πέτυχαν στην εξέταση.

Βαθμολογία: (α) 0,8μ

(β) 0,9μ

(γ) 0,8μ

Ενδεικτική λύση

Ορίζουμε $\Sigma = \{\text{o φοιτητής συμμετείχε στις ασκήσεις}\}$ και $E = \{\text{o φοιτητής επέτυχε στην εξέταση του μαθήματος}\}$. Είναι: $P(\Sigma) = 0,799$, $P(E | \Sigma) = 0,687$, $P(E | \Sigma') = 0,31$

(α) $P(E) = P(E | \Sigma) \cdot P(\Sigma) + P(E | \Sigma') \cdot P(\Sigma') = 0,687 \cdot 0,799 + 0,31 \cdot 0,201 = 0,611 = 61,1\%$.

(β) $P(\Sigma | E') = P(E' | \Sigma) \cdot P(\Sigma) / P(E') = [1 - P(E | \Sigma)] \cdot P(\Sigma) / P(E') = 0,313 \cdot 0,799 / 0,389 = 0,643 = 64,3\%$.

(γ) $P(\Sigma \cdot E') = P(E' \cdot \Sigma) = P(E' | \Sigma) P(\Sigma) = 0,313 \cdot 0,799 = 25\%$.

Θέμα 2

Ένας νέος αξιολογεί άλλους ανθρώπους που γνωρίζει στην καθημερινότητά του ως “συμπαθείς”, “αδιάφορους” ή “αντιπαθείς” με πιθανότητες 0,4, 0,3 και 0,3 αντίστοιχα. Αυτός ο νέος πρόκειται να διασκεδάσει με μία τυχαία παρέα συμφοιτητών του, που αποτελείται από άλλα 20 άτομα.

(α) Να δείξετε ότι το αναμενόμενο πλήθος των αντιπαθητικών ατόμων μεταξύ των 20 είναι 6 άτομα.

(β) Να βρεθεί η πιθανότητα μεταξύ των 20 ατόμων, λιγότεροι από 3 να του είναι αντιπαθείς.

(γ) Η παρέα των 21 ατόμων σκοπεύει να διασκεδάσει σε ένα παραθαλάσσιο μπαρ. Για το μέρος αυτό γνωρίζουμε ότι η εξυπηρέτηση γίνεται με ρυθμό ένα άτομο ανά 30 sec. Να βρεθεί η πιθανότητα να εξυπηρετηθεί το σύνολο της παρέας των 21 ατόμων σε χρονικό διάστημα 10 min.

Βαθμολογία: (α) 0,4μ

(β) 1,1μ

(γ) 1,0μ

Ενδεικτική λύση

Ορίζουμε Επιτυχία $E = \{\text{o άνθρωπος που γνωρίζει είναι αντιπαθητικός}\}$ με $p = 0,3$. Αν $X = \{\text{πλήθος ατόμων στους 20 που είναι αντιπαθητικοί}\}$, τότε $X \sim B(20, 0.3)$.

(α) $EX = np = 20 \cdot 0,3 = 6$ άτομα.

(β) $P(X < 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = (20 \text{ ανά } 0) 0,3^0 0,7^{20} + (20 \text{ ανά } 1) 0,3^1 0,7^{19} + (20 \text{ ανά } 2) 0,3^2 0,7^{18} = 0,7^{20} + 20 \cdot 0,3 \cdot 0,7^{19} + 190 \cdot 0,3^2 \cdot 0,7^{18} = 0,03549 = 3,5\%$.

(γ) Η εξυπηρέτηση γίνεται με ρυθμό $\lambda = 1$ άτομο ανά 30 sec ή ισοδύναμα $\lambda = 20$ άτομα ανά 10 min. Αν $Y = \{\text{πλήθος ατόμων που εξυπηρετούνται σε 10 min}\}$, τότε $Y \sim \text{Poisson}(20)$ και $P(Y = 21) = e^{-20} 20^{21}/21! = 0,0846 = 8,46\%$.

Θέμα 3

Στις εξετάσεις του Ιουνίου συμμετείχαν 144 φοιτητές από τους οποίους 89 εξετάστηκαν επιτυχώς. Στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζεται η κατανομή του τελικού βαθμού για τους 89 φοιτητές ανά διάστημα μίας βαθμολογικής μονάδας.

Βαθμός	5 – 6	6 – 7	7 – 8	8 – 9	9 – 10
Πλήθος φοιτητών	17	17	18	16	21

Ο καθηγητής ισχυρίζεται ότι ο βαθμός των επιτυχόντων φοιτητών στο μάθημα της Στατιστικής κατανέμεται ομοιόμορφα στις παραπάνω βαθμολογικές κατηγορίες. Καλείστε να ελέγξετε τον ισχυρισμό του καθηγητή με μία κατάλληλη στατιστική δοκιμασία.

(α) Να αναφέρετε τη δοκιμασία και να καταγράψετε την μηδενική και την εναλλακτική της υπόθεση.

(β) Να βρείτε αν η κατανομή των βαθμών είναι συμβατή με τον τον ισχυρισμό του καθηγητή ($\alpha = 0,05$).

Σημείωση: Δίνεται ότι αν $\chi^2 \sim \chi^2(4)$, τότε $P(\chi^2 > 0,831) = 0,934$.

Βαθμολογία: (α) 0,2μ

(β) 1,8μ

Ενδεικτική λύση

(α) Θα εφαρμόσουμε τη δοκιμασία χι-τετράγωνο ως έλεγχο ομοιογένειας.

Μηδενική υπόθεση: $H_0: p_{5-6} = p_{6-7} = p_{7-8} = p_{8-9} = p_{9-10} (= 0,2)$.

Εναλλακτική υπόθεση: H_1 : όχι η H_0 .

(β) Υπολογίζουμε $\chi_0^2 = \sum_{i=1}^5 \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} = 0,831$ και γνωρίζουμε ότι $\chi^2 \sim \chi^2(5 - 1) = \chi^2(4)$. Η

πιθανότητα να είχαμε παρατηρήσει μία τέτοια τιμή δεδομένης της H_0 είναι $p = P(\chi^2 > \chi_0^2) = P(\chi^2 > 0,831) = 0,934 > \alpha = 0,05$, άρα η H_0 δεν απορρίπτεται, δηλαδή η κατανομή των βαθμών είναι συμβατή με τον τον ισχυρισμό του καθηγητή.

Θέμα 4. Τυχαίο δείγμα 10 φοιτητών του προηγούμενου εξαμήνου ελέγχθηκε ως προς τις συμμετοχές του στις ασκήσεις του μαθήματος (Συμμετοχές) και ως προς τον τελικό βαθμό της εξέτασης (Βαθμός). Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στον παρακάτω πίνακα:

Φοιτητής	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Συμμετοχές	9	8	7	6	7	6	5	5	4	3
Βαθμός	8	10	5	5	2	7	3	3	3	4

- (α) Να βρεθεί η συνδιακύμανση του πλήθους συμμετοχών και του βαθμού.
 (β) Να βρεθεί ο συντελεστής συσχέτισης του πλήθους συμμετοχών και του βαθμού.
 (γ) Να βρεθεί γραμμικό μοντέλο πρόβλεψης του βαθμού των εξετάσεων από τις συμμετοχές στις ασκήσεις.
 (δ) Να γίνει διάγραμμα διασποράς των τιμών στο οποίο να εμφανιστεί και η ευθεία γραμμικής παλινδρόμησης.
 (ε) Να βρεθεί η αναμενόμενη αύξηση στο βαθμό των εξετάσεων για κάθε μία επιπλέον συμμετοχή στις ασκήσεις.

Βαθμολογία: (α) 0,6μ (β) 0,8μ (γ) 0,8μ (δ) 0,6 (ε) 0,2

Ενδεικτική λύση

(α) Αν X : Συμμετοχές και Y : Βαθμός, τότε $\bar{x} = 6, \bar{y} = 5$, και

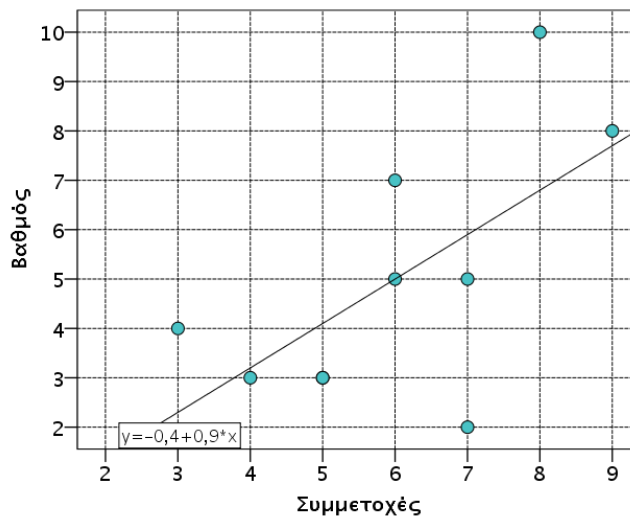
$$s_{XY}^2 = \frac{1}{9} \sum_{i=1}^{10} (x_i - 6)(y_i - 5) = 3.$$

(β) $s_x^2 = \frac{1}{9} \sum_{i=1}^{10} (x_i - 6)^2 = 3,33, s_y^2 = \frac{1}{9} \sum_{i=1}^{10} (y_i - 5)^2 = 6,67$ και $r_{XY} = \frac{s_{XY}^2}{s_x \cdot s_y} = 0,636.$

(γ) $\hat{b} = \frac{s_{XY}^2}{s_x^2} = r_{XY} \frac{s_y}{s_x} = 0,9$ και $\hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x} = -0,4.$ Η εξίσωση της ευθείας γραμμικής παλινδρόμησης του βαθμού πάνω στις συμμετοχές είναι η

$$\text{Βαθμός} = 0,9 \cdot \text{Συμμετοχές} - 0,4$$

(δ)



(ε) Από την εξίσωση, συμπεραίνουμε ότι για κάθε μία μονάδα αύξηση στις συμμετοχές αναμένεται αύξηση 0,9 στο βαθμό της εξέτασης.