Επιστημονικοί Υπολογισμοί

Εισαγωγή στη Βελτιστοποίηση

Σταμάτιος-Άγγελος Ν. Αλεξανδρόπουλος
e-mail: stalexan@ee.duth.gr

https://www.researchgate.net/profile/Stamatios_Aggelos_Alexandropoulos
https://scholar.google.gr/citations?user=mht7W_YAAAAJ&hl=el
http://cilab.math.upatras.gr

Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών & Μηχανικών Υπολογιστών
Δημοκρίτειο Πανεπιστήμιο Θράκης
Κιμμέρια 67100, Ξάνθη

12 Απριλίου 2021

ΔΗΜΟΚΡΙΤΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΡΑΚΗΣ

Περιεχόμενα I

ΔΗΜΟΚΡΙΤΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΡΑΚΗΣ

Ορισμός (ελαχιστοποίηση χωρίς περιορισμούς)

Δεδομένης της $f : R^n \to R$, να βρεθεί το σημείο $x^e \in R^n$ στο οποίο

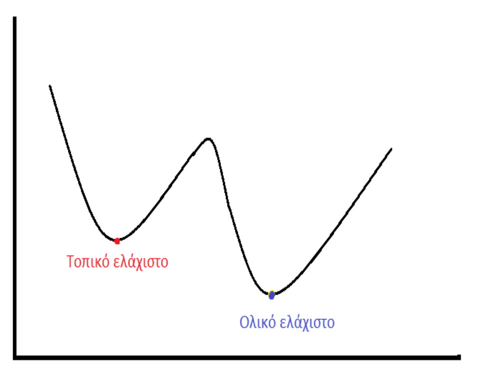
$$f(x^e) \leq f(x); \forall x \in R^n \qquad (1)$$

Ορισμός (ελαχιστοποίηση χωρίς περιορισμούς)

Δεδομένης της $f : R^n \; ! \; R$, να βρεθεί το σημείο $x^e \; 2 \; R^n$ στο οποίο

$$f(x^e) \quad f(x); \; 8x \; 2 \; R^n \tag{1}$$

Τοπικό - ολικό ελάχιστο



- Τo/α x^e που πληρούν τη σχέση (1) ονομάζονται ελάχιστα σημεία ή ελαχιστοποιητές της αντικειμενικής συνάρτησης f.

- Το/α x^e που πληρούν τη σχέση (1) ονομάζονται ελάχιστα σημεία ή ελαχιστοποιητές της αντικειμενικής συνάρτησης f.
- Η συναρτησιακή τιμή $f(x^e)$ του ελαχιστοποιητή x^e ονομάζεται ελάχιστο της συνάρτησης.

- Το/α x^e που πληρούν τη σχέση (1) ονομάζονται ελάχιστα σημεία ή ελαχιστοποιητές της αντικειμενικής συνάρτησης f.
- Η συναρτησιακή τιμή $f(x^e)$ του ελαχιστοποιητή x^e ονομάζεται ελάχιστο της συνάρτησης.

Ερώτηση

Εκφώνηση

Πως μπορεί να αντιμετωπιστεί το πρόβλημα της μεγιστοποίησης μιας συνάρτησης f, χρησιμοποιώντας μεθόδους ελαχιστοποίησης;

- Το/α x^e που πληρούν τη σχέση (1) ονομάζονται ελάχιστα σημεία ή ελαχιστοποιητές της αντικειμενικής συνάρτησης f.
- Η συναρτησιακή τιμή $f(x^e)$ του ελαχιστοποιητή x^e ονομάζεται ελάχιστο της συνάρτησης.

Ερώτηση

Εκφώνηση

Πως μπορεί να αντιμετωπιστεί το πρόβλημα της μεγιστοποίησης μιας συνάρτησης f, χρησιμοποιώντας μεθόδους ελαχιστοποίησης;

Λύση

Εφαρμόζουμε μια μέθοδο ελαχιστοποίησης στη συνάρτηση $-f$.

- Το/α x^e που πληρούν τη σχέση (1) ονομάζονται ελάχιστα σημεία ή ελαχιστοποιητές της αντικειμενικής συνάρτησης f.
- Η συναρτησιακή τιμή $f(x^e)$ του ελαχιστοποιητή x^e ονομάζεται ελάχιστο της συνάρτησης.

Ερώτηση

Εκφώνηση

Πως μπορεί να αντιμετωπιστεί το πρόβλημα της μεγιστοποίησης μιας συνάρτησης f, χρησιμοποιώντας μεθόδους ελαχιστοποίησης;

Λύση

Εφαρμόζουμε μια μέθοδο ελαχιστοποίησης στη συνάρτηση $-f$.

Προσοχή

Δεν υπάρχει μέθοδος που να επιτυγχάνει την καλύτερη απόδοση σε σχέση με όλες τις άλλες για οποιοδήποτε πρόβλημα.

Εύρεση λύσης - Βελτιστοποίηση (1/2)

Ερώτηση

Πως μπορεί να αντιμετωπιστεί το πρόβλημα εύρεσης ριζών μιας συνάρτησης της μορφής $F : R^n \; ! \; R^n$, χρησιμοποιώντας μεθόδους ελαχιστοποίησης της μορφής $F : R^n \; ! \; R$;

Εύρεση λύσης - Βελτιστοποίηση (1/2)

Ερώτηση

Πως μπορεί να αντιμετωπιστεί το πρόβλημα εύρεσης ριζών μιας συνάρτησης της μορφής $F : R^n \; ! \; R^n$, χρησιμοποιώντας μεθόδους ελαχιστοποίησης της μορφής $F : R^n \; ! \; R$;

- Το πρόβλημα εύρεσης ριζών μιας συνάρτησης της μορφής $F : R^n \; ! \; R^n$, αντιμετωπίζει το πρόβλημα εύρεσης κάποιου $x \;\; 2 \, R^n$ ώστε

$$f_1(x_1; x_2; :::; x_n) = 0$$
$$f_2(x_1; x_2; :::; x_n) = 0$$

$$f_n(x_1; x_2; :::; x_n) = 0$$

Εύρεση λύσης - Βελτιστοποίηση (1/2)

Ερώτηση

Πως μπορεί να αντιμετωπιστεί το πρόβλημα εύρεσης ριζών μιας συνάρτησης της μορφής $F : R^n \;\; ! \;\; R^n$, χρησιμοποιώντας μεθόδους ελαχιστοποίησης της μορφής $F : R^n \;\; ! \;\; R$;

- Το πρόβλημα εύρεσης ριζών μιας συνάρτησης της μορφής $F : R^n \;\; ! \;\; R^n$, αντιμετωπίζει το πρόβλημα εύρεσης κάποιου $x \;\; 2\, R^n$ ώστε

$$f_1(x_1; x_2; :::; x_n) = 0$$
$$f_2(x_1; x_2; :::; x_n) = 0$$

$$f_n(x_1; x_2; :::; x_n) = 0$$

- Ορίζουμε μια συνάρτηση

$$G(x_1; x_2; :::; x_n) = \overset{n}{\mathsf{X}}_{i=1} (f_i(x_1; x_2; :::; x_n))^2$$

Εύρεση λύσης - Βελτιστοποίηση (2/2)

- Εφαρμόζουμε μια μέθοδο ελαχιστοποίησης στη συνάρτηση $G(x_1; x_2; :::; x_n)$

Εύρεση λύσης - Βελτιστοποίηση (2/2)

- Εφαρμόζουμε μια μέθοδο ελαχιστοποίησης στη συνάρτηση $G(x_1; x_2; :::; x_n)$
- Το διάνυσμα $X = x_1^e; x_2^e; :::; x_n^e$ αποτελεί ελαχιστοποιητή της $G(x)$ και ταυτόχρονα ρίζα κάθε συνιστώσας f_i της F

Εύρεση λύσης - Βελτιστοποίηση (2/2)

- Εφαρμόζουμε μια μέθοδο ελαχιστοποίησης στη συνάρτηση $G(x_1, x_2, \ldots, x_n)$
- Το διάνυσμα $X = x_1^e, x_2^e, \ldots, x_n^e$ αποτελεί ελαχιστοποιητή της $G(x)$ και ταυτόχρονα ρίζα κάθε συνιστώσας f_i της F

Με βάση αυτή την προσέγγιση, μπορούν να αντιμετωπιστούν από μεθόδους βελτιστοποίησης, προβλήματα εύρεσης ριζών μιας συνάρτησης της μορφής $F : R^m \to R^l$, όπου $m \neq l$

- Οι αριθμητικές μέθοδοι βελτιστοποίησης είναι επαναληπτικές.

- Οι αριθμητικές μέθοδοι βελτιστοποίησης είναι επαναληπτικές.
- Έχουν τη μορφή:

$$x^{k+1} = x^k + \ {}_k d_k$$

όπου

1. to ${}_k$ eÐnai to b ma thc mejìdou
2. to d_k h kateÔjunsh anaz thshc tou elaqÐstou

- Οι αριθμητικές μέθοδοι βελτιστοποίησης είναι επαναληπτικές.
- Έχουν τη μορφή:

$$x^{k+1} = x^k + \quad {}_k d_k$$

όπου

1. to $_k$ eÐnai to b ma thc mejìdou
2. to d_k h kateÔjunsh anaz thshc tou elaqÐstou

- Ξεκινώντας από αρχικό σημείο x_0, μέσω της εκάστοτε μεθόδου, δημιουργούμε μια ακολουθία $f x_k g_{k=0}^{1}$ η οποία αποκλίνει ή συγκλίνει στο βελτιστο.

- Οι αριθμητικές μέθοδοι βελτιστοποίησης είναι επαναληπτικές.
- Έχουν τη μορφή:

$$x^{k+1} = x^k + \;_k d_k$$

όπου

1. to $_k$ eÐnai to b ma thc mejìdou
2. to d_k h kateÔjunsh anaz thshc tou elaqÐstou

- Ξεκινώντας από αρχικό σημείο x_0, μέσω της εκάστοτε μεθόδου, δημιουργούμε μια ακολουθία $fx_k g_{k=0}^{1}$ η οποία αποκλίνει ή συγκλίνει στο βελτιστο.
- Η μέθοδος τερματίζει για τους παρακάτω λόγους
  - 'Eqoume brei to el ˆqisto me th dedomènh akrÐbeia pou èqoume jèsei.
  - 'Eqoume f t ˆsei to mègisto pl joc epanal yewn pou èqoume jèsei sthn arq tou probl matoc.

Κριτήριο τερματισμού

- Se kˆje perÐptwsh mporoÔme na qrhsimopoi soume diaforetikì krit rio termatismoÔ anˆloga me tic idiaiterìthtec thc exÐswshc thc opoÐac jèloume na broÔme to elˆqisto.

Κριτήριο τερματισμού

- Se k^je perÐptwsh mporoÔme na qrhsimopoi soume diaforetikì krit rio termatismoÔ an^loga me tic idiaiterìthtec thc exÐswshc thc opoÐac jèloume na broÔme to el^qisto.
- To krit rio termatismoÔ sqetÐzetai me thn akrÐbeia pou jèloume na èqoun oi upologismoÐ mac.

Κριτήριο τερματισμού

- Se k^je per Ðptwsh mporoÔme na qrhsimopoi soume diaforetikì krit rio termatismoÔ an^loga me tic idiaiterìthtec thc exÐswshc thc opoÐac jèloume na broÔme to el^qisto.
- To krit rio termatismoÔ sqetÐzetai me thn akrÐbeia pou jèloume na èqoun oi upologismoÐ mac.
- MporoÔme na qrhsimopoi soume èna perissìtera apì ta parak^tw:

$$k x_{k+1} \quad x_k k < \qquad\qquad j f(x_{k+1}) \quad f(x_k) j <$$

$$k \, r f(x_k) k <$$

$$\frac{j f(x_{k+1}) \quad f(x_k) j}{j f(x_k) j} < \qquad\qquad \frac{k x_{k+1} \quad x_k k}{k x_k k} <$$

Κριτήριο τερματισμού

- Se k^ je perðptwsh mporoÔme na qrhsimopoi soume diaforetikì krit rio termatismoÔ an^ loga me tic idiaiterìthtec thc exðswshc thc opoðac jèloume na broÔme to el^ qisto.
- To krit rio termatismoÔ sqetðzetai me thn akrðbeia pou jèloume na èqoun oi upologismoð mac.
- MporoÔme na qrhsimopoi soume èna perissìtera apì ta parak^ tw:

$$kx_{k+1} \quad x_k k < \qquad\qquad jf(x_{k+1}) \quad f(x_k)j <$$

$$k\,r\,f(x_k)k <$$

$$\frac{jf(x_{k+1}) \quad f(x_k)j}{jf(x_k)j} < \qquad\qquad \frac{kx_{k+1} \quad x_k k}{kx_k k} <$$

To krit rio autì eðnai anagkaða sunj kh Ôparxhc elaqðstou, qrhsimopoieðtai mìno tou se sunduasmì me k^ poio apì ta upìloipa

Κριτήριο τερματισμού

- Se k^je per\ptwsh mporoÔme na qrhsimopoi soume diaforetikì krit rio termatismoÔ an^loga me tic idiaiterìthtec thc ex\swshc thc opo\ac jèloume na broÔme to el^qisto.
- To krit rio termatismoÔ sqet\zetai me thn akr\beia pou jèloume na èqoun oi upologismo\ mac.
- MporoÔme na qrhsimopoi soume èna perissìtera apì ta parak^tw:

$$kx_{k+1} \quad x_k k < \qquad\qquad jf(x_{k+1}) \quad f(x_k)j <$$

$$k \, r \, f(x_k)k <$$

$$\frac{jf(x_{k+1}) \quad f(x_k)j}{jf(x_k)j} < \qquad\qquad \frac{kx_{k+1} \quad x_k k}{kx_k k} <$$

To krit rio autì e\nai anagka\a sunj kh Ôparxhc elaq\stou, qrhsimopoie\tai mìno tou se sunduasmì me k^poio apì ta upìloipa

- H tim tou kajor\zetai k^je for^ sthn arq tou probl matoc e\te wc dedomèno e\te apì em^c.

ΔΗΜΟΚΡΙΤΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΡΑΚΗΣ

Ορισμός (κατεύθυνση μείωσης)

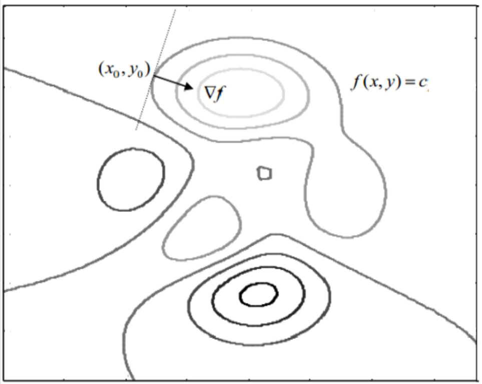
Έστω $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση. Αν στο σημείο $x \in D$ υπάρχει ένα διάνυσμα d τέτοιο ώστε να ισχύει ότι

$$\langle \nabla f(x), d \rangle < 0$$

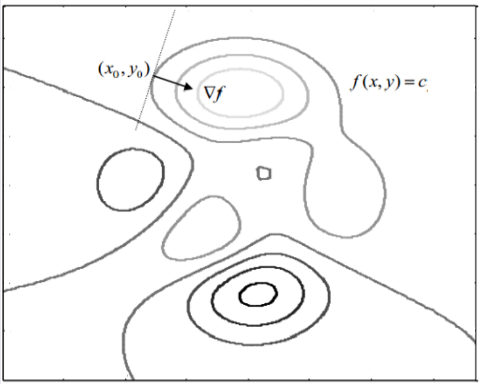
τότε το διάνυσμα d οναμάζεται κατεύθυνση μείωσης της f αναφορικά με το σημείο x.

ΔΗΜΟΚΡΙΤΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΡΑΚΗΣ

Γεωμετρική ερμηνεία (κατεύθυνση μείωσης)



Γεωμετρική ερμηνεία (κατεύθυνση μείωσης)



Σε κάθε σημείο $X \; 2 <^n$ του πεδίου ορισμού της $f(X)$, η κλίση $(r f(X) \; 2 <^n)$ της f είναι ένα διάνυσμα που είναι κάθετο στην ισοϋψή καμπύλη που διέρχεται από το σημείο αυτό.

Εισαγωγή

- Αντιμετωπίζει το πρόβλημα ελαχιστοποίησης συναρτήσεων

Εισαγωγή

- Αντιμετωπίζει το πρόβλημα ελαχιστοποίησης συναρτήσεων
- Σαν κατεύθυνση χρησιμοποιείται ένα διάνυσμα αντίθετο της κλίσης της αντικειμενικής συνάρτησης

Εισαγωγή

- Αντιμετωπίζει το πρόβλημα ελαχιστοποίησης συναρτήσεων
- Σαν κατεύθυνση χρησιμοποιείται ένα διάνυσμα αντίθετο της κλίσης της αντικειμενικής συνάρτησης

Το αντίθετο του διανύσματος της κλίσης, $r f(x)$, αποτελεί κατεύθυνση μείωσης.

$$h\, r f(x); \quad r f(x) i =$$

Εισαγωγή

- Αντιμετωπίζει το πρόβλημα ελαχιστοποίησης συναρτήσεων
- Σαν κατεύθυνση χρησιμοποιείται ένα διάνυσμα αντίθετο της κλίσης της αντικειμενικής συνάρτησης

Το αντίθετο του διανύσματος της κλίσης, $r f(x)$, αποτελεί κατεύθυνση μείωσης.

$$h\, r f(x); \quad r f(x) i = \quad k\, r f(x) k_2^2 < 0$$

Εισαγωγή

- Αντιμετωπίζει το πρόβλημα ελαχιστοποίησης συναρτήσεων
- Σαν κατεύθυνση χρησιμοποιείται ένα διάνυσμα αντίθετο της κλίσης της αντικειμενικής συνάρτησης

Το αντίθετο του διανύσματος της κλίσης, $r f(x)$, αποτελεί κατεύθυνση μείωσης.

$$h\, r f(x);\quad r f(x) i = \quad k\, r f(x) k_2^2 < 0$$

- Η μέθοδος συγκλίνει σε ένα σημείο x^e για το οποίο ισχύει

$$r f(x^e) = 0$$

Εισαγωγή

- Αντιμετωπίζει το πρόβλημα ελαχιστοποίησης συναρτήσεων
- Σαν κατεύθυνση χρησιμοποιείται ένα διάνυσμα αντίθετο της κλίσης της αντικειμενικής συνάρτησης

Το αντίθετο του διανύσματος της κλίσης, $r f(x)$, αποτελεί κατεύθυνση μείωσης.

$$h\, r f(x); \quad r f(x) i = \quad k\, r f(x) k_2^2 < 0$$

- Η μέθοδος συγκλίνει σε ένα σημείο x^e για το οποίο ισχύει

$$r f(x^e) = 0$$

- Το μειονέκτημα της μεθόδου είναι η αργή της σύγκλιση

Λειτουργία

Oi epanal yeic xekinoÔn apì to arqikì shmeÐo X_0 2 $<^n$ kai sugklÐnoun proc to el ˆqisto mèsw thc sqèshc

$$x^{k+1} = x^k \quad {}^k\, r\, f(x^k); \quad k = 0;1;2;:::$$

Λειτουργία

Oi epanal yeic xekinoÔn apì to arqikì shmeÐo X_0 2 $<^n$ kai sugklÐnoun proc to el ˆqisto mèsw thc sqèshc

$$x^{k+1} = x^k \quad {}^k r f(x^k); \quad k = 0;1;2;:::$$

1. to ^{k} eÐnai to mègejoc b matoc
   To ^{k} ekfr ˆzei th mikrìterh mh-arnhtik tim thc paramètrou ,
   ¸ste k ˆje epìmeno shmeÐo na elaqistopoieÐ th sun ˆrthsh f
   kat ˆ m koc thc dieÔjunshc pou orÐzei h klÐsh thc.

Λειτουργία

Oi epanal yeic xekinoÔn apì to arqikì shmeÐo X_0 2 $<^n$ kai sugklÐnoun proc to elˆqisto mèsw thc sqèshc

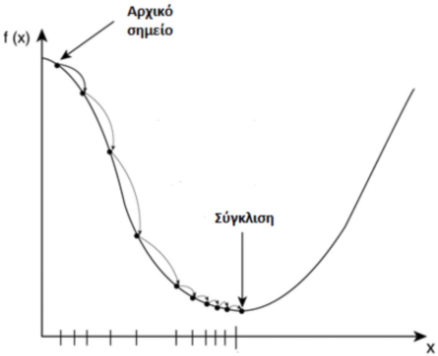
$$x^{k+1} = x^k \quad {}^k r f(x^k); \quad k = 0; 1; 2; :::$$

1. to ^{k} eÐnai to mègejoc b matoc
   To ^{k} ekfrˆzei th mikrìterh mh-arnhtik tim thc paramètrou ,
   ¸ste kˆje epìmeno shmeÐo na elaqistopoieÐ th sunˆrthsh f
   katˆ m koc thc dieÔjunshc pou orÐzei h klÐsh thc.
2. to $r f(x)$ ekfrˆzei thn klÐsh thc antikeimenik c sunˆrthshc kai orÐzetai wc

$$r f(x) = \begin{pmatrix} \frac{@f}{@x_1} \\ \frac{@f}{@x_2} \\ \vdots \\ \frac{@f}{@x_n} \end{pmatrix}$$

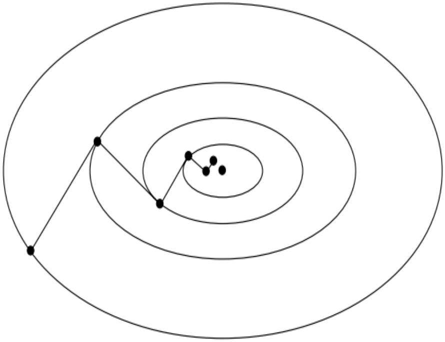
ΔΗΜΟΚΡΙΤΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΡΑΚΗΣ

Γεωμετρική ερμηνεία της Cauchy για μια μεταβλητή



Γεωμετρική ερμηνεία της Cauchy για πολλές μεταβλητές

Η αναζήτηση εκτελείται σε μικρά εγκάρσια βήματα, σχηματίζοντας μια τεθλασμένη γραμμή κατά πλάτος των ισοϋψών καμπυλών της f



Αλγόριθμος (1/2)

1. Καθορισμός εισόδων μεθόδου

Αλγόριθμος (1/2)

1. Καθορισμός εισόδων μεθόδου
   - n to pl joc twn metablht¸n thc antikeimenik c sun^rthshc

Αλγόριθμος (1/2)

1. Καθορισμός εισόδων μεθόδου
   - n to pl joc twn metablht¸n thc antikeimenik c sun^rthshc
   - $f(x)$ o tÔpoc thc sun^rthshc

Αλγόριθμος (1/2)

1. Καθορισμός εισόδων μεθόδου
    - n to pl joc twn metablht¸n thc antikeimenik c sunˆrthshc
    - $f(x)$ o tÔpoc thc sunˆrthshc
    - $r f(x)$ h klÐsh thc sunˆrthshc

Αλγόριθμος (1/2)

1. Καθορισμός εισόδων μεθόδου
   - n to pl joc twn metablht¸n thc antikeimenik c sun^rthshc
   - $f(x)$ o tÔpoc thc sun^rthshc
   - $r f(x)$ h klÐsh thc sun^rthshc
   - x_0 h arqik prosèggish thc rÐzac

Αλγόριθμος (1/2)

1. Καθορισμός εισόδων μεθόδου
   - n to pl joc twn metablht¸n thc antikeimenik c sunˆrthshc
   - $f(x)$ o tÔpoc thc sunˆrthshc
   - $r f(x)$ h klÐsh thc sunˆrthshc
   - x_0 h arqik prosèggish thc rÐzac
   - MIT to mègisto pl joc epanal yewn thc mejìdou

Αλγόριθμος (1/2)

1. Καθορισμός εισόδων μεθόδου
   - n to pl joc twn metablht¸n thc antikeimenik c sunˆrthshc
   - $f(x)$ o tÔpoc thc sunˆrthshc
   - $r f(x)$ h klÐsh thc sunˆrthshc
   - x_0 h arqik prosèggish thc rÐzac
   - MIT to mègisto pl joc epanal yewn thc mejìdou
   - h akrÐbeia pou jètoume gia to krit rio termatismoÔ

Αλγόριθμος (1/2)

1. Καθορισμός εισόδων μεθόδου
   - n to pl joc twn metablht¸n thc antikeimenik c sunˆrthshc
   - $f(x)$ o tÔpoc thc sunˆrthshc
   - $r f(x)$ h klÐsh thc sunˆrthshc
   - x_0 h arqik prosèggish thc rÐzac
   - MIT to mègisto pl joc epanal yewn thc mejìdou
   - h akrÐbeia pou jètoume gia to krit rio termatismoÔ
   - h to mègejoc b matoc

Αλγόριθμος (1/2)

1. Καθορισμός εισόδων μεθόδου
   - n to pl joc twn metablht¸n thc antikeimenik c sun^rthshc
   - $f(x)$ o tÔpoc thc sun^rthshc
   - r $f(x)$ h klÐsh thc sun^rthshc
   - x_0 h arqik prosèggish thc rÐzac
   - MIT to mègisto pl joc epanal yewn thc mejìdou
   - h akrÐbeia pou jètoume gia to krit rio termatismoÔ
   - h to mègejoc b matoc
2. Θέτουμε $k = 1$

Αλγόριθμος (1/2)

1. Καθορισμός εισόδων μεθόδου
   - n to pl joc twn metablht¸n thc antikeimenik c sunˆrthshc
   - $f(x)$ o tÔpoc thc sunˆrthshc
   - r $f(x)$ h klÐsh thc sunˆrthshc
   - x_0 h arqik prosèggish thc rÐzac
   - MIT to mègisto pl joc epanal yewn thc mejìdou
   - h akrÐbeia pou jètoume gia to krit rio termatismoÔ
   - h to mègejoc b matoc
2. Θέτουμε $k = 1$
3. Ελέγχουμε αν $k > MIT$
   Αν δεν ισχύει, αυξάνουμε το k και συνεχίζουμε στο επόμενο βήμα, διαφορετικά πηγαίνουμε στο βήμα 6

Αλγόριθμος (1/2)

1. Καθορισμός εισόδων μεθόδου
   - n to pl joc twn metablht¸n thc antikeimenik c sun^rthshc
   - $f(x)$ o tÔpoc thc sun^rthshc
   - $r f(x)$ h klÐsh thc sun^rthshc
   - x_0 h arqik prosèggish thc rÐzac
   - MIT to mègisto pl joc epanal yewn thc mejìdou
   - h akrÐbeia pou jètoume gia to krit rio termatismoÔ
   - h to mègejoc b matoc
2. Θέτουμε $k = \quad 1$
3. Ελέγχουμε αν $k > MIT$
   Αν δεν ισχύει, αυξάνουμε το k και συνεχίζουμε στο επόμενο βήμα, διαφορετικά πηγαίνουμε στο βήμα 6
4. Ελέγχουμε αν $k\, r f(x^k) k$
   Αν δεν ισχύει, συνεχίζουμε στο επόμενο βήμα, διαφορετικά πηγαίνουμε στο βήμα 6

ΔΗΜΟΚΡΙΤΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΡΑΚΗΣ

Αλγόριθμος (1/2)

1. Καθορισμός εισόδων μεθόδου
   - n to pl joc twn metablht¸n thc antikeimenik c sun^rthshc
   - $f(x)$ o tÔpoc thc sun^rthshc
   - $r f(x)$ h klÐsh thc sun^rthshc
   - x_0 h arqik prosèggish thc rÐzac
   - MIT to mègisto pl joc epanal yewn thc mej ìdou
   - h akrÐbeia pou jètoume gia to krit rio termatismoÔ
   - h to mègejoc b matoc
2. Θέτουμε $k = 1$
3. Ελέγχουμε αν $k > MIT$
   Αν δεν ισχύει, αυξάνουμε το k και συνεχίζουμε στο επόμενο βήμα, διαφορετικά πηγαίνουμε στο βήμα 6
4. Ελέγχουμε αν $k r f(x^k) k$
   Αν δεν ισχύει, συνεχίζουμε στο επόμενο βήμα, διαφορετικά πηγαίνουμε στο βήμα 6
5. Θέτουμε $x^{k+1} = x^k \quad h r f(x^k)$ και πηγαίνουμε στο βήμα 3

Αλγόριθμος (1/2)

1. Καθορισμός εισόδων μεθόδου
   - n to pl joc twn metablht¸n thc antikeimenik c sun^rthshc
   - $f(x)$ o tÔpoc thc sun^rthshc
   - $r f(x)$ h klÐsh thc sun^rthshc
   - x_0 h arqik prosèggish thc rÐzac
   - MIT to mègisto pl joc epanal yewn thc mejìdou
   - h akrÐbeia pou jètoume gia to krit rio termatismoÔ
   - h to mègejoc b matoc
2. Θέτουμε $k = \quad 1$
3. Ελέγχουμε αν $k > MIT$
   Αν δεν ισχύει, αυξάνουμε το k και συνεχίζουμε στο επόμενο βήμα, διαφορετικά πηγαίνουμε στο βήμα 6
4. Ελέγχουμε αν $k\, r f(x^k) k$
   Αν δεν ισχύει, συνεχίζουμε στο επόμενο βήμα, διαφορετικά πηγαίνουμε στο βήμα 6
5. Θέτουμε $x^{k+1} = x^k \quad h\, r f(x^k)$ και πηγαίνουμε στο βήμα 3
6. Τερματισμός μεθόδου και επιστροφή εξόδων

Αλγόριθμος (2/2)

Έξοδοι

- k η τρέχουσα επανάληψη

Αλγόριθμος (2/2)

Έξοδοι

- k η τρέχουσα επανάληψη
- x^k η τελευταία προσέγγιση της ρίζας

Αλγόριθμος (2/2)

Έξοδοι

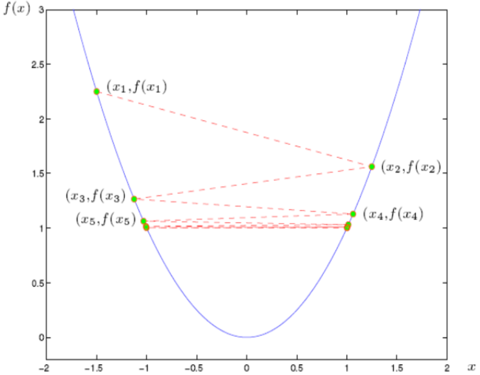
- k η τρέχουσα επανάληψη
- x^k η τελευταία προσέγγιση της ρίζας
- $f(x^k)$ η τιμή της συνάρτησης στην k επανάληψη

Αλγόριθμος (2/2)

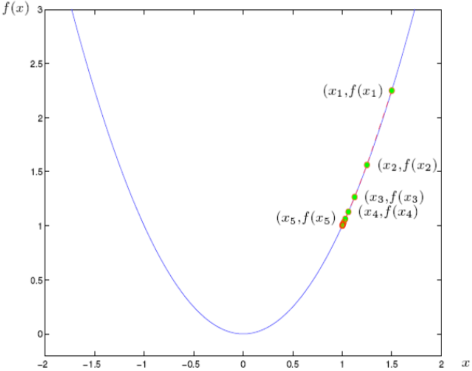
Έξοδοι

- k η τρέχουσα επανάληψη
- x^k η τελευταία προσέγγιση της ρίζας
- $f(x^k)$ η τιμή της συνάρτησης στην k επανάληψη
- $r\,f(x^k)$ η τρέχουσα τιμή της κλίσης

Μεγάλο βήμα για την Cauchy



Μικρό βήμα για την Cauchy



Εισαγωγή

- Αντιμετωπίζει το πρόβλημα ελαχιστοποίησης συναρτήσεων χωρίς περιορισμούς

$$\min_{x 2 R^n} f(x); \quad f : R^n \; ! \; R$$

Εισαγωγή

- Αντιμετωπίζει το πρόβλημα ελαχιστοποίησης συναρτήσεων χωρίς περιορισμούς

$$\min_{x \in R^n} f(x), \quad f : R^n \to R$$

- Αποτελεί τροποποίηση της μεθόδου του Cauchy

Εισαγωγή

- Αντιμετωπίζει το πρόβλημα ελαχιστοποίησης συναρτήσεων χωρίς περιορισμούς

$$\min_{x \in R^n} f(x); \quad f : R^n \to R$$

- Αποτελεί τροποποίηση της μεθόδου του Cauchy
- Χρησιμοποιεί μεταβλητό βήμα

Εισαγωγή

- Αντιμετωπίζει το πρόβλημα ελαχιστοποίησης συναρτήσεων χωρίς περιορισμούς

$$\min_{x \in R^n} f(x); \quad f : R^n \to R$$

- Αποτελεί τροποποίηση της μεθόδου του Cauchy
- Χρησιμοποιεί μεταβλητό βήμα
- Δεν απαιτεί τον υπολογισμό της σταθεράς Lipschitz

Επαναληπτικό σχήμα - σύγκλιση μεθόδου

- Έστω $_0$ ένας αυθαίρετα επιλεγμένος θετικός αριθμός

Επαναληπτικό σχήμα - σύγκλιση μεθόδου

- Έστω $\;_0$ ένας αυθαίρετα επιλεγμένος θετικός αριθμός
- Η ακολουθία των σημείων $fx^k g_0^1$ που ορίζονται από τη σχέση

$$x^{k+1} = x^k \quad {}_{m_k}\, r\, f(x^k); \quad k = 0; 1; 2; :::$$

Epanalhptikì sq ma - sÔgklish mejìdou

'Estw $_0$ ènac aujaÐreta epilegmènoc jetikìc arijmìc

H akoloujÐa twn shmeÐwn $f x^k g_0^1$ pou orÐzontai apì th sqèsh

$$x^{k+1} = x^k \qquad m_k r \;\; f(x^k); \qquad k = 0;1;2;:::$$

'Opou m_k eÐnai o mikrìteroc jetikìc akèraioc gia ton opoÐo isqÔei ìti

$$f(x^k \qquad m_k r \;\; f(x^k)) \qquad f(x^k) \qquad \frac{1}{2} \; m_k kr \;\; f(x^k)k^2$$

Epanalhptikì sq ma - sÔgklish mejìdou

'Estw $_0$ ènac aujaÐreta epilegmènoc jetikìc arijmìc

H akolouj Ða twn shmeÐwn $f x^k g_0^1$ pou orÐzontai apì th sqèsh

$$x^{k+1} = x^k \quad {}_{m_k} r \; f(x^k); \quad k = 0;1;2;:::$$

'Opou m_k eÐnai o mikrìteroc jetikìc akèraioc gia ton opoÐo isqÔei ìti

$$f(x^k \quad {}_{m_k} r \; f(x^k)) \quad f(x^k) \quad \frac{1}{2} \; {}_{m_k} kr \; f(x^k)k^2$$

Kai, epiplèon

$$m = \frac{0}{2^m \;\; 1}$$

Epanalhptikì sq ma - sÔgklish mejìdou

'Estw $_0$ ènac aujaÐreta epilegmènoc jetikìc arijmìc

H akoloujÐa twn shmeÐwn $\{x^k\}_0^1$ pou orÐzontai apì th sqèsh

$$x^{k+1} = x^k \qquad {}_{m_k} r \;\; f(x^k); \qquad k = 0;1;2;:::$$

'Opou m_k eÐnai o mikrìteroc jetikìc akèraioc gia ton opoÐo isqÔei ìti

$$f(x^k \qquad {}_{m_k} r \;\; f(x^k)) \qquad f(x^k) \qquad \frac{1}{2} \; {}_{m_k} kr \;\; f(x^k)k^2$$

Kai, epiplèon

$$_m = \frac{0}{2^{m \quad 1}}$$

SugklÐnei sto shmeÐo x pou elaqistopoieÐ thn antikeimenik sunˆrthsh f .

Sunj kh eparkoÔc el˜ttwshc tou Armijo

$$f(x_k + \quad p_k) \quad f(x_k) + c_0 \;\; r\, f(x_k)^T p_k$$

ìpou c_0 eÐnai mÐa stajer˜ h opoÐa an kei sto di˜sthma $(0;1)$.

Sunj kh eparkoÔc el ttwshc tou Armijo

$$f(x_k + \ p_k) \quad f(x_k) + c_0 \ r \ f(x_k)^T p_k$$

ìpou c_0 eÐnai mÐa stajer h opoÐa an kei sto di sthma $(0;1)$.

Jètoume $(\ ) = f(x_k + \ p_k)$ kai $l(\ ) = f(x_k) + c_0 \ r \ f(x_k)^T p_k$

Sunj kh eparkoÔc elˆttwshc tou Armijo

$$f(x_k + \quad p_k) \quad f(x_k) + c_0 \ \ r \ f(x_k)^T p_k$$

ìpou c_0 eÐnai mÐa stajerˆ h opoÐa an kei sto diˆsthma (0; 1).

Jètoume $(\ ) = f(x_k + \quad p_k)$ kai $l(\ ) = f(x_k) + c_0 \ \ r \ f(x_k)^T p_k$

H sunˆrthsh $l(\ )$ eÐnai grammik kai èqei arnhtik klÐsh

Sunj kh eparkoÔc el˜ttwshc tou Armijo

$$f(x_k + \quad p_k) \quad f(x_k) + c_0 \quad r \; f(x_k)^T p_k$$

ìpou c_0 eÐnai mÐa stajer˜ h opoÐa an kei sto di˜sthma $(0; 1)$.

Jètoume $(\quad) = f(x_k + \quad p_k)$ kai $l(\quad) = f(x_k) + c_0 \quad r \; f(x_k)^T p_k$

H sun˜rthsh $l(\quad)$ eÐnai grammik kai èqei arnhtik klÐsh

H arqik h anÐswsh, gÐnetai $(\quad) \quad l(\quad)$

Sunj kh eparkoÔc el^ttwshc tou Armijo

$$f(x_k + \quad p_k) \quad f(x_k) + c_0 \quad r \ f(x_k)^T p_k$$

ìpou c_0 eÐnai mÐa stajer^ h opoÐa an kei sto di^sthma $(0; 1)$.

- Jètoume $(\quad) = f(x_k + \quad p_k)$ kai $l(\quad) = f(x_k) + c_0 \quad r \ f(x_k)^T p_k$
- H sun^rthsh $l(\quad)$ eÐnai grammik kai èqei arnhtik klÐsh
- H arqik h anÐswsh, gÐnetai $(\quad) \quad l(\quad)$

Algìrijmoc (1/2)

EÐsodoi

Algìrijmoc (1/2)

EÐsodoi

n to pl joc twn metablht¸n thc antikeimenik c sun˜rthshc

Algìrijmoc (1/2)

EÐsodoi

n to pl joc twn metablht¸n thc antikeimenik c sun˜rthshc
f (x) o tÔpoc thc sun˜rthshc

Algìrijmoc (1/2)

EÐsodoi

- n to pl joc twn metablht¸n thc antikeimenik c sunˆrthshc
- f (x) o tÔpoc thc sunˆrthshc
- r f (x) h klÐsh thc sunˆrthshc

Algìrijmoc (1/2)

EÐsodoi

- n to pl joc twn metablht¸n thc antikeimenik c sunˆrthshc
- $f(x)$ o tÔpoc thc sunˆrthshc
- r $f(x)$ h klÐsh thc sunˆrthshc
- x_0 h arqik prosèggish thc rÐzac

Algìrijmoc (1/2)

EÐsodoi

- n to pl joc twn metablht¸n thc antikeimenik c sunˆrthshc
- f (x) o tÔpoc thc sunˆrthshc
- r f (x) h klÐsh thc sunˆrthshc
- x_0 h arqik prosèggish thc rÐzac
- MIT to mègisto pl joc epanal yewn thc mejìdou

Algìrijmoc (1/2)

EÐsodoi

- n to pl joc twn metablht¸n thc antikeimenik c sunˆrthshc
- f (x) o tÔpoc thc sunˆrthshc
- r f (x) h klÐsh thc sunˆrthshc
- x_0 h arqik prosèggish thc rÐzac
- MIT to mègisto pl joc epanal yewn thc mejìdou
- h akrÐbeia pou jètoume gia to krit rio termatismoÔ

Algìrijmoc (1/2)

EÐsodoi

n to pl joc twn metablht¸n thc antikeimenik c sunˆrthshc
f (x) o tÔpoc thc sunˆrthshc
r f (x) h klÐsh thc sunˆrthshc
x_0 h arqik prosèggish thc rÐzac
MIT to mègisto pl joc epanal yewn thc mejìdou
h akrÐbeia pou jètoume gia to krit rio termatismoÔ
$_0$ h arqik tim tou megèjouc b matoc

Algìrijmoc (1/2)

EÐsodoi

- n to pl joc twn metablht¸n thc antikeimenik c sunˆrthshc
- f (x) o tÔpoc thc sunˆrthshc
- r f (x) h klÐsh thc sunˆrthshc
- x_0 h arqik prosèggish thc rÐzac
- MIT to mègisto pl joc epanal yewn thc mejìdou
- h akrÐbeia pou jètoume gia to krit rio termatismoÔ
- $_0$ h arqik tim tou megèjouc b matoc

'Exodoi

Algìrijmoc (1/2)

EÐsodoi

- n to pl joc twn metablht¸n thc antikeimenik c sunˆrthshc
- f (x) o tÔpoc thc sunˆrthshc
- r f (x) h klÐsh thc sunˆrthshc
- x_0 h arqik prosèggish thc rÐzac
- MIT to mègisto pl joc epanal yewn thc mejìdou
- h akrÐbeia pou jètoume gia to krit rio termatismoÔ
- $_0$ h arqik tim tou megèjouc b matoc

'Exodoi

- k h trèqousa epanˆlhyh

Algìrijmoc (1/2)

EÐsodoi

- n to pl joc twn metablht¸n thc antikeimenik c sun˜rthshc
- f (x) o tÔpoc thc sun˜rthshc
- r f (x) h klÐsh thc sun˜rthshc
- x_0 h arqik prosèggish thc rÐzac
- MIT to mègisto pl joc epanal yewn thc mejìdou
- h akrÐbeia pou jètoume gia to krit rio termatismoÔ
- $_0$ h arqik tim tou megèjouc b matoc

'Exodoi

- k h trèqousa epan˜lhyh
- x^k h teleutaÐa prosèggish thc rÐzac

Algìrijmoc (1/2)

EÐsodoi

- n to pl joc twn metablht¸n thc antikeimenik c sunˆrthshc
- $f(x)$ o tÔpoc thc sunˆrthshc
- r $f(x)$ h klÐsh thc sunˆrthshc
- x_0 h arqik prosèggish thc rÐzac
- MIT to mègisto pl joc epanal yewn thc mejìdou
- h akrÐbeia pou jètoume gia to krit rio termatismoÔ
- $_0$ h arqik tim tou megèjouc b matoc

'Exodoi

- k h trèqousa epanˆlhyh
- x^k h teleutaÐa prosèggish thc rÐzac
- $f(x^k)$ h tim thc sunˆrthshc sthn k epanˆlhyh

Algìrijmoc (1/2)

EÐsodoi

- n to pl joc twn metablht¸n thc antikeimenik c sunˆrthshc
- f (x) o tÔpoc thc sunˆrthshc
- r f (x) h klÐsh thc sunˆrthshc
- x_0 h arqik prosèggish thc rÐzac
- MIT to mègisto pl joc epanal yewn thc mejìdou
- h akrÐbeia pou jètoume gia to krit rio termatismoÔ
- $_0$ h arqik tim tou megèjouc b matoc

'Exodoi

- k h trèqousa epanˆlhyh
- x^k h teleutaÐa prosèggish thc rÐzac
- $f(x^k)$ h tim thc sunˆrthshc sthn k epanˆlhyh
- kr $f(x^k)$k h trèqousa tim thc stˆjmhc

Algìrijmoc (2/2)

Kajorismìc eisìdwn mejìdou

Algìrijmoc (2/2)

Kajorismìc eisìdwn mejìdou

Jètoume $k = 1$

Algìrijmoc (2/2)

Kajorismìc eisìdwn mejìdou

Jètoume $k = 1$

Elègqoume an $k >$ MIT

An den isqÔei, aux^noume to k, jètoume $= {}_0$, $m = 1$ kai suneqÐzoume sto epìmeno b ma, diaforetik^ phgaÐnoume sto b ma 8

Algìrijmoc (2/2)

Kajorismìc eisìdwn mejìdou

Jètoume $k = \quad 1$

Elègqoume an $k >$ MIT

An den isqÔei, aux^noume to k, jètoume $= \quad {}_0$, $m = 1$ kai suneqÐzoume sto epìmeno b ma, diaforetik^ phgaÐnoume sto b ma 8

Elègqoume an $kr \ f(x^k)k$

An den isqÔei, suneqÐzoume sto epìmeno b ma, diaforetik^ phgaÐnoume sto b ma 8

Algìrijmoc (2/2)

Kajorismìc eisìdwn mejìdou

Jètoume $k = \quad 1$

Elègqoume an $k > MIT$

An den isqÔei, aux^noume to k, jètoume $= \quad {}_0$, $m = 1$ kai suneqÐzoume sto epìmeno b ma, diaforetik^ phgaÐnoume sto b ma 8

Elègqoume an $kr \; f(x^k)k$

An den isqÔei, suneqÐzoume sto epìmeno b ma, diaforetik^ phgaÐnoume sto b ma 8

An isqÔei $f(x^k \quad {}_{m_k} r \; f(x^k)) \quad f(x^k) \quad \frac{}{2} kr \; f(x^k)k^2$, phgaÐnoume sto b ma 7, diaforetik^ suneqÐzoume sto epìmeno b ma

Algìrijmoc (2/2)

Kajorismìc eisìdwn mejìdou

Jètoume $k = 1$

Elègqoume an $k >$ MIT

An den isqÔei, auxˆnoume to k, jètoume $= {}_0$, $m = 1$ kai suneqÐzoume sto epìmeno b ma, diaforetikˆ phgaÐnoume sto b ma 8

Elègqoume an $kr\ f(x^k)k$

An den isqÔei, suneqÐzoume sto epìmeno b ma, diaforetikˆ phgaÐnoume sto b ma 8

An isqÔei $f(x^k \quad {}_{m_k} r\ f(x^k)) \quad f(x^k) \quad \frac{}{2} kr\ f(x^k)k^2$, phgaÐnoume sto b ma 7, diaforetikˆ suneqÐzoume sto epìmeno b ma

Jètoume $m = m + 1$, $= \frac{0}{2}$ kai phgaÐnoume sto b ma 5

Algìrijmoc (2/2)

1. Kajorismìc eisìdwn mejìdou
2. Jètoume $k = 1$
3. Elègqoume an $k >$ MIT
4. An den isqÔei, aux^noume to k, jètoume $= {}_0$, $m = 1$ kai suneqÐzoume sto epìmeno b ma, diaforetik^ phgaÐnoume sto b ma 8
5. Elègqoume an $\| r f(x^k) \|$
6. An den isqÔei, suneqÐzoume sto epìmeno b ma, diaforetik^ phgaÐnoume sto b ma 8
7. An isqÔei $f(x^k \;\; {}_{m_k} r f(x^k)) \;\; f(x^k) \;\; \frac{}{2} \| r f(x^k) \|^2$, phgaÐnoume sto b ma 7, diaforetik^ suneqÐzoume sto epìmeno b ma
8. Jètoume $m = m + 1$, $= \frac{0}{2}$ kai phgaÐnoume sto b ma 5
9. Jètoume $x^{k+1} = x^k \;\; r f(x^k)$ kai phgaÐnoume sto b ma 3

Algìrijmoc (2/2)

1. Kajorismìc eisìdwn mejìdou
2. Jètoume $k = 1$
3. Elègqoume an $k >$ MIT
4. An den isqÔei, auxˆnoume to k, jètoume $= {}_0$, $m = 1$ kai suneqÐzoume sto epìmeno b ma, diaforetikˆ phgaÐnoume sto b ma 8
5. Elègqoume an $kr\ f(x^k)k$
6. An den isqÔei, suneqÐzoume sto epìmeno b ma, diaforetikˆ phgaÐnoume sto b ma 8
7. An isqÔei $f(x^k \quad {}_{m_k} r\ f(x^k)) \quad f(x^k) \quad \frac{}{2} kr\ f(x^k)k^2$, phgaÐnoume sto b ma 7, diaforetikˆ suneqÐzoume sto epìmeno b ma
8. Jètoume $m = m + 1$, $= \frac{0}{2}$ kai phgaÐnoume sto b ma 5
9. Jètoume $x^{k+1} = x^k \quad r\ f(x^k)$ kai phgaÐnoume sto b ma 3
10. Termatismìc mejìdou kai epistrof exìdwn

Eisgwg

AntimetwpÐzei to prìblhma elaqistopoÐhshc sunart sewn.

Eisgwg

AntimetwpÐzei to pròblhma elaqistopoÐhshc sunart sewn.

QrhsimopoieÐ mèqri kai deÔterec parag¸gouc.

Eisgwg

Antimetwp Ðzei to prìblhma elaqistopoÐhshc sunart sewn.

QrhsimopoieÐ mèqri kai deÔterec parag¸gouc.

'Eqei kalÔtera apotelèsmata apì th mèjodoc tou Cauchy an to arqikì shmeÐo brÐsketai kont¸ sto el¸qisto.

Eisgwg

Antimetwpðzei to prìblhma elaqistopoÐhshc sunart sewn.

QrhsimopoieÐ mèqri kai deÔterec parag¸gouc.

'Eqei kalÔtera apotelèsmata apì th mèjodoc tou Cauchy an to arqikì shmeÐo brÐsketai kont sto el qisto.

QrhsimopoieÐtai ìtan

to pl joc twn metablht¸n tou probl matoc den eÐnai polÔ meg lo

Eisgwg

- AntimetwpÐzei to prìblhma elaqistopoÐhshc sunart sewn.
- QrhsimopoieÐ mèqri kai deÔterec parag¸gouc.
- 'Eqei kalÔtera apotelèsmata apì th mèjodoc tou Cauchy an to arqikì shmeÐo brÐsketai kontˆ sto elˆqisto.
- QrhsimopoieÐtai ìtan
  - to pl joc twn metablht¸n tou probl matoc den eÐnai polÔ megˆlo
  - h klÐsh r $f(x^k)$ kai to Essianì mhtr¸o r $^2 f(x^k)$ thc antikeimenik c sunˆrthshc eÐnai gnwstˆ kai dÐnontai analutikˆ

Eisgwg

Perigr^fetai apì ton tÔpo

$$x^{k+1} = x^k - \alpha^k \nabla^2 f(x^k)^{-1} \nabla f(x^k); \quad k = 0; 1; 2; \ldots$$

ìpou $\nabla^2 f$ eÐnai to Essianì mhtr¸o kai perigr^fetai wc

$$\nabla^2 f = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

Genik filosofÐa

Kataskeuˆzoume mia tetragwnik prosèggish thc antikeimenik c sunˆrthshc pou èqei Ðdiec sunarthsiakèc timèc sthn pr¸th kai deÔterh parˆgwgo me thn antikeimenik mac sunˆrthsh.

Genik filosofÐa

Kataskeu˘zoume mia tetragwnik prosèggish thc antikeimenik c sun˘rthshc pou èqei Ðdiec sunarthsiakèc timèc sthn pr¸th kai deÔterh par˘gwgo me thn antikeimenik mac sun˘rthsh.

Me dedomèno èna arqikì shmeÐo, elaqistopoioÔme th nèa sun˘rthsh antÐ gia thn antikeimenik .

Genik filosofÐa

Kataskeu˜zoume mia tetragwnik prosèggish thc antikeimenik c sun˜rthshc pou èqei Ðdiec sunarthsiakèc timèc sthn pr¸th kai deÔterh par˜gwgo me thn antikeimenik mac sun˜rthsh.

Me dedomèno èna arqikì shmeÐo, elaqistopoioÔme th nèa sun˜rthsh antÐ gia thn antikeimenik .

Epilègoume to shmeÐo pou elaqistopoieÐ thn tetragwnik sun˜rthsh kai to paÐrnoume wc arqikì shmeÐo sthn epìmenh epan˜lhyh

Genik filosofÐa

Kataskeu˜zoume mia tetragwnik proseggish thc antikeimenik c sun˜rthshc pou èqei Ðdiec sunarthsiakèc timèc sthn pr¸th kai deÔterh par˜gwgo me thn antikeimenik mac sun˜rthsh.

Me dedomèno èna arqikì shmeÐo, elaqistopoioÔme th nèa sun˜rthsh antÐ gia thn antikeimenik .

Epilègoume to shmeÐo pou elaqistopoieÐ thn tetragwnik sun˜rthsh kai to paÐrnoume wc arqikì shmeÐo sthn epìmenh epan˜lhyh

SuneqÐzoume omoÐwc mèqri na energopoihjeÐ to krit rio termatismoÔ pou efarmìsame

Kataskeu thc mejìdou (1/2)

Apì to anˆptugma Taylor paÐrnoume mia tetragwnik prosèggish thc sunˆrthshc f

$$g(x^k + d) \simeq f(x^k) + d^T \nabla f(x^k) + \frac{1}{2} d^T \nabla^2 f(x^k) d$$

Kataskeu thc mejìdou (1/2)

Apì to anˆptugma Taylor paÐrnoume mia tetragwnik prosèggish thc sunˆrthshc f

$$g(x^k + d) \; ' \; f(x^k) + d^T r \, f(x^k) + \frac{1}{2} d^T r^2 f(x^k) d$$

An to Essianì mhtr¸o eÐnai jetikˆ orismèno, tìte mporoÔme na broÔme thn kateÔjunsh anaz thshc tou Newton.

Kataskeu thc mejìdou (1/2)

Apì to an˘ptugma Taylor paÐrnoume mia tetragwnik prosèggish thc sun˘rthshc f

$$g(x^k + d) \; ' \; f(x^k) + d^T r \, f(x^k) + \frac{1}{2} d^T r^2 f(x^k) d$$

An to Essianì mhtr¸o eÐnai jetik˘ orismèno, tìte mporoÔme na broÔme thn kateÔjunsh anaz thshc tou Newton.

Orismìc

'Ena mhtr¸o kaleÐtai jetik˘ orismèno ìtan isqÔei k˘ti apì ta parak˘tw:

- Gia k˘je di˘nusma $x \neq 0$ isqÔei $x^T A x > 0$.
- 'Ola ta kÔria upomhtr¸a (p˘nw arister˘) $A[i = 1; i = 1]; i = 1; 2; \quad ; n$ èqoun jetikèc orÐzousec.

Kataskeu thc mejìdou (1/2)

Apì to anˆptugma Taylor paÐrnoume mia tetragwnik prosèggish thc sunˆrthshc f

$$g(x^k + d) ' \quad f(x^k) + d^T r \; f(x^k) + \frac{1}{2} d^T r \; {}^2 f(x^k) d$$

An to Essianì mhtr¸o eÐnai jetikˆ orismèno, tìte mporoÔme na broÔme thn kateÔjunsh anaz thshc tou Newton.

Orismìc

'Ena mhtr¸o kaleÐtai jetikˆ orismèno ìtan isqÔei kˆti apì ta parakˆtw:

- Gia kˆje diˆnusma $x \neq 0$ isqÔei $x^T A x > 0$.
- 'Ola ta kÔria upomhtr¸a (pˆnw aristerˆ) $A[i = 1; i = 1]; i = 1; 2; \quad ; n$ èqoun jetikèc orÐzousec.

AntÐ gia to elˆqisto thc f, ja anazht soume to elˆqisto thc g

Kataskeu thc mejìdou (1/2)

Apì to an˘ptugma Taylor paÐrnoume mia tetragwnik prosèggish thc sun˘rthshc f

$$g(x^k + d) \simeq f(x^k) + d^T \nabla f(x^k) + \frac{1}{2} d^T \nabla^2 f(x^k) d$$

An to Essianì mhtr¸o eÐnai jetik˘ orismèno, tìte mporoÔme na broÔme thn kateÔjunsh anaz thshc tou Newton.

Orismìc

'Ena mhtr¸o kaleÐtai jetik˘ orismèno ìtan isqÔei k˘ti apì ta parak˘tw:

Gia k˘je di˘nusma $x \neq 0$ isqÔei $x^T A x > 0$.

'Ola ta kÔria upomhtr¸a (p˘nw arister˘) $A[i = 1; i = 1]; i = 1; 2; \ldots; n$ èqoun jetikèc orÐzousec.

AntÐ gia to el˘qisto thc f, ja anazht soume to el˘qisto thc g. MhdenÐzontac thn pr¸th par˘gwgo gia na p˘roume ta krÐsima shmeÐa thc sun˘rthshc, èqoume:

$$g'(x) = 0$$

Kataskeu thc mejìdou (1/2)

Apì to an˘ptugma Taylor paÐrnoume mia tetragwnik prosèggish thc sun˘rthshc f

$$g(x^k + d) ' \ f(x^k) + d^T r \ f(x^k) + \frac{1}{2} d^T r \ ^2 f(x^k) d$$

An to Essianì mhtr¸o eÐnai jetik˘ orismèno, tìte mporoÔme na broÔme thn kateÔjunsh anaz thshc tou Newton.

Orismìc

'Ena mhtr¸o kaleÐtai jetik˘ orismèno ìtan isqÔei k˘ti apì ta parak˘tw:

Gia k˘je di˘nusma $x \neq 0$ isqÔei $x^T Ax > 0$.

'Ola ta kÔria upomhtr¸a (p˘nw arister˘) $A[i = 1; i = 1]; i = 1; 2; \ ; n$ èqoun jetikèc orÐzousec.

AntÐ gia to el˘qisto thc f, ja anazht soume to el˘qisto thc g MhdenÐzontac thn pr¸th par˘gwgo gia na p˘roume ta krÐsima shmeÐa thc sun˘rthshc, èqoume:

$$g^0(x) = 0 \ ) \ r \ f(x^k) + r \ ^2 f(x^k) d = 0$$

Kataskeu thc mejìdou (2/2)

H kateÔjunsh anaz thshc tou Newton prokÔptei wc

$$r\ ^2 f(x^k) d = r\ f(x^k)$$

Kataskeu thc mejìdou (2/2)

H kateÔjunsh anaz thshc tou Newton prokÔptei wc

$$r^{2}f(x^{k})d = r \quad f(x^{k}) \quad) \quad d = (r^{2}f(x^{k}))^{1} r \; f(x^{k})$$

Kataskeu thc mejìdou (2/2)

H kateÔjunsh anaz thshc tou Newton prokÔptei wc

$$r\ ^2f(x^k)d = r\ f(x^k)\quad)\quad d = (r\ ^2f(x^k))\ ^1r\ f(x^k)$$

Pìrisma

An to Essianì mhtr¸o $r\ ^2f(x^k)$ eÐnai jetikˆ orismèno, tìte h kateÔjunsh anaz thshc tou Newton apoteleÐ kateÔjunsh meÐwshc.

Kataskeu thc mejìdou (2/2)

H kateÔjunsh anaz thshc tou Newton prokÔptei wc

$$r\ ^{2}f(x^{k})d = \ r \ \ f(x^{k}) \ \ ) \qquad d = \ \ (r\ ^{2}f(x^{k}))\ ^{1}r\ \ f(x^{k})$$

Pìrisma

An to Essianì mhtr¸o $r\ ^{2}f(x^{k})$ eÐnai jetik¨ orismèno, tìte h kateÔjunsh anaz thshc tou Newton apoteleÐ kateÔjunsh meÐwshc.

H nèa prosèggish upologÐzetai mèsw thc sqèshc

$$x^{k+1} = x^{k} \qquad {}^{k}r\ ^{2}f(x^{k})\ ^{1}r\ \ f(x^{k}); \quad k = 0; 1; 2; :::$$

Kataskeu thc mejìdou (2/2)

H kateÔjunsh anaz thshc tou Newton prokÔptei wc

$$r\ {}^2 f(x^k)d = \ r \quad f(x^k) \quad) \qquad d = \ (r\ {}^2 f(x^k)) \ {}^1 r\ \ f(x^k)$$

Pìrisma

An to Essianì mhtr¸o r ^{2}f (x^k) eÐnai jetikˆ orismèno, tìte h kateÔjunsh anaz thshc tou Newton apoteleÐ kateÔjunsh meÐwshc.

H nèa prosèggish upologÐzetai mèsw thc sqèshc

$$x^{k+1} = x^k \qquad {}^k r\ {}^2 f(x^k) \ {}^1 r\ \ f(x^k); \quad k = 0;1;2;:::$$

Klassik morf Newton (^{k} = 1)

$$x^{k+1} = x^k \ \ r \quad {}^2 f(x^k) \ {}^1 r\ \ f(x^k); \quad k = 0;1;2;:::$$

Algìrijmoc (1/2)

EÐsodoi

Algìrijmoc (1/2)

EÐsodoi

n to pl joc twn metablht¸n thc antikeimenik c sun˘rthshc

Algìrijmoc (1/2)

EÐsodoi

n to pl joc twn metablht¸n thc antikeimenik c sun˘rthshc

f (x) o tÔpoc thc sun˘rthshc

Algìrijmoc (1/2)

EÐsodoi

n to pl joc twn metablht¸n thc antikeimenik c sun˘rthshc

f (x) o tÔpoc thc sun˘rthshc

r f (x) h klÐsh thc sun˘rthshc

Algìrijmoc (1/2)

EÐsodoi

n to pl joc twn metablht¸n thc antikeimenik c sunˆrthshc

$f(x)$ o tÔpoc thc sunˆrthshc

r $f(x)$ h klÐsh thc sunˆrthshc

x_0 h arqik prosèggish thc rÐzac

Algìrijmoc (1/2)

EÐsodoi

- n to pl joc twn metablht¸n thc antikeimenik c sunˆrthshc
- f (x) o tÔpoc thc sunˆrthshc
- r f (x) h klÐsh thc sunˆrthshc
- x_0 h arqik prosèggish thc rÐzac
- MIT to mègisto pl joc epanal yewn thc mejìdou

Algìrijmoc (1/2)

EÐsodoi

- n to pl joc twn metablht¸n thc antikeimenik c sunˆrthshc
- f (x) o tÔpoc thc sunˆrthshc
- r f (x) h klÐsh thc sunˆrthshc
- x_0 h arqik prosèggish thc rÐzac
- MIT to mègisto pl joc epanal yewn thc mejìdou
- $_1$ h akrÐbeia pou jètoume gia th nìrma thc klÐshc

Algìrijmoc (1/2)

EĐsodoi

n to pl joc twn metablht¸n thc antikeimenik c sunˆrthshc

f (x) o tÔpoc thc sunˆrthshc

r f (x) h klĐsh thc sunˆrthshc

x_0 h arqik prosèggish thc rĐzac

MIT to mègisto pl joc epanal yewn thc mejìdou

$_1$ h akrĐbeia pou jètoume gia th nìrma thc klĐshc

$_2$ h akrĐbeia pou jètoume gia th nìrma duo diadoqik¸n proseggĐsewn

Algìrijmoc (1/2)

EÐsodoi

- n to pl joc twn metablht¸n thc antikeimenik c sunˆrthshc
- $f(x)$ o tÔpoc thc sunˆrthshc
- r $f(x)$ h klÐsh thc sunˆrthshc
- x_0 h arqik prosèggish thc rÐzac
- MIT to mègisto pl joc epanal yewn thc mejìdou
- $_1$ h akrÐbeia pou jètoume gia th nìrma thc klÐshc
- $_2$ h akrÐbeia pou jètoume gia th nìrma duo diadoqik¸n proseggÐsewn
- r $^2f(x)$ to Essianì mhtr¸o thc sunˆrthshc

Algìrijmoc (1/2)

EÐsodoi

- n to pl joc twn metablht¸n thc antikeimenik c sunˆrthshc
- f (x) o tÔpoc thc sunˆrthshc
- r f (x) h klÐsh thc sunˆrthshc
- x_0 h arqik prosèggish thc rÐzac
- MIT to mègisto pl joc epanal yewn thc mejìdou
- $_1$ h akrÐbeia pou jètoume gia th nìrma thc klÐshc
- $_2$ h akrÐbeia pou jètoume gia th nìrma duo diadoqik¸n proseggÐsewn
- r ^{2}f (x) to Essianì mhtr¸o thc sunˆrthshc

'Exodoi

Algìrijmoc (1/2)

EÐsodoi

n to pl joc twn metablht¸n thc antikeimenik c sunˆrthshc
f (x) o tÔpoc thc sunˆrthshc
r f (x) h klÐsh thc sunˆrthshc
x_0 h arqik prosèggish thc rÐzac
MIT to mègisto pl joc epanal yewn thc mejìdou
$_1$ h akrÐbeia pou jètoume gia th nìrma thc klÐshc
$_2$ h akrÐbeia pou jètoume gia th nìrma duo diadoqik¸n proseggÐsewn
r ^{2}f (x) to Essianì mhtr¸o thc sunˆrthshc

'Exodoi

k h trèqousa epanˆlhyh

Algìrijmoc (1/2)

EÐsodoi

- n to pl joc twn metablht¸n thc antikeimenik c sunˆrthshc
- f (x) o tÔpoc thc sunˆrthshc
- r f (x) h klÐsh thc sunˆrthshc
- x_0 h arqik prosèggish thc rÐzac
- MIT to mègisto pl joc epanal yewn thc mejìdou
- $_1$ h akrÐbeia pou jètoume gia th nìrma thc klÐshc
- $_2$ h akrÐbeia pou jètoume gia th nìrma duo diadoqik¸n proseggÐsewn
- r ^{2}f (x) to Essianì mhtr¸o thc sunˆrthshc

'Exodoi

- k h trèqousa epanˆlhyh
- x^k h teleutaÐa prosèggish thc rÐzac

Algìrijmoc (1/2)

EÐsodoi

n to pl joc twn metablht¸n thc antikeimenik c sunˆrthshc
f (x) o tÔpoc thc sunˆrthshc
r f (x) h klÐsh thc sunˆrthshc
x_0 h arqik prosèggish thc rÐzac
MIT to mègisto pl joc epanal yewn thc mejìdou
$_1$ h akrÐbeia pou jètoume gia th nìrma thc klÐshc
$_2$ h akrÐbeia pou jètoume gia th nìrma duo diadoqik¸n proseggÐsewn
r ^{2}f (x) to Essianì mhtr¸o thc sunˆrthshc

'Exodoi

k h trèqousa epan˜lhyh
x^k h teleutaÐa prosèggish thc rÐzac
f (x^k) h tim thc sun˜rthshc sthn k epan˜lhyh

Algìrijmoc (1/2)

EÐsodoi

- n to pl joc twn metablht¸n thc antikeimenik c sun^rthshc
- f (x) o tÔpoc thc sun^rthshc
- r f (x) h klÐsh thc sun^rthshc
- x_0 h arqik prosèggish thc rÐzac
- MIT to mègisto pl joc epanal yewn thc mejìdou
- $_1$ h akrÐbeia pou jètoume gia th nìrma thc klÐshc
- $_2$ h akrÐbeia pou jètoume gia th nìrma duo diadoqik¸n proseggÐsewn
- r ^{2}f (x) to Essianì mhtr¸o thc sun^rthshc

'Exodoi

- k h trèqousa epan^lhyh
- x^k h teleutaÐa prosèggish thc rÐzac
- f (x^k) h tim thc sun^rthshc sthn k epan^lhyh
- kr f (x^k)k h trèqousa tim thc nìrmac thc klÐshc
- r ^{2}f (x^k) h trèqousa tim tou EssianoÔ mhtr¸ou

Algìrijmoc (2/2)

Kajorismìc eisìdwn mejìdou

Algìrijmoc (2/2)

Kajorismìc eisìdwn mejìdou

Jètoume k = 1

Algìrijmoc (2/2)

Kajorismìc eisìdwn mejìdou

Jètoume $k = 1$

Elègqoume an $k > MIT$, an den isqÔei, auxˆnoume tok kai suneqÐzoume sto epìmeno b ma, diaforetikˆ phgaÐnoume sto b ma 9

Algìrijmoc (2/2)

Kajorismìc eisìdwn mejìdou

Jètoume $k = 1$

Elègqoume an $k > MIT$, an den isqÔei, auxˆnoume tok kai suneqÐzoume sto epìmeno b ma, diaforetikˆ phgaÐnoume sto b ma 9

Elègqoume an $\|\nabla f(x^k)\| \leq \epsilon_1$, an den isqÔei, suneqÐzoume sto epìmeno b ma, diaforetikˆ phgaÐnoume sto b ma 9

Algìrijmoc (2/2)

Kajorismìc eisìdwn mejìdou

Jètoume $k = 1$

Elègqoume an $k > MIT$, an den isqÔei, aux^noume tok kai suneqÐzoume sto epìmeno b ma, diaforetik^ phgaÐnoume sto b ma 9

Elègqoume an $kr\ f(x^k)k \quad _1$, an den isqÔei, suneqÐzoume sto epìmeno b ma, diaforetik^ phgaÐnoume sto b ma 9

UpologÐzoume thn kateÔjunsh meÐwshc tou Newton epilÔontac to grammikì sÔsthma $r^2 f(x^k) d_N^k = r \quad f(x^k)$ kai suneqÐzoume sto epìmeno b ma

Algìrijmoc (2/2)

Kajorismìc eisìdwn mejìdou

Jètoume $k = 1$

Elègqoume an $k >$ MIT , an den isqÔei, auxˆnoume tok kai suneqÐzoume sto epìmeno b ma, diaforetikˆ phgaÐnoume sto b ma 9

Elègqoume an $kr f(x^k)k$ $_1$, an den isqÔei, suneqÐzoume sto epìmeno b ma, diaforetikˆ phgaÐnoume sto b ma 9

UpologÐzoume thn kateÔjunsh meÐwshc tou Newton epilÔontac to grammikì sÔsthma $r^2 f(x^k) d_N^k = r f(x^k)$ kai suneqÐzoume sto epìmeno b ma

EkteloÔme mia eujÔgrammh anaz thsh katˆ th dieÔjunsh d_N^k prokeimènou na brejeÐ èna epijumhtì m koc b matoc ^{k} kai phgaÐnoume sto epìmeno b ma

Algìrijmoc (2/2)

Kajorismìc eisìdwn mejìdou

Jètoume $k = 1$

Elègqoume an $k > MIT$, an den isqÔei, aux˘noume tok kai suneqÐzoume sto epìmeno b ma, diaforetik˘ phgaÐnoume sto b ma 9

Elègqoume an $kr\ f(x^k)k \quad {}_1$, an den isqÔei, suneqÐzoume sto epìmeno b ma, diaforetik˘ phgaÐnoume sto b ma 9

UpologÐzoume thn kateÔjunsh meÐwshc tou Newton epilÔontac to grammikì sÔsthma $r\ ^2 f(x^k) d_N^k = r\ f(x^k)$ kai suneqÐzoume sto epìmeno b ma

EkteloÔme mia eujÔgrammh anaz thsh kat˘ th dieÔjunsh d_N^k prokeimènou na brejeÐ èna epijumhtì m koc b matoc ^{k} kai phgaÐnoume sto epìmeno b ma

Jètoume $x^{k+1} = x^k + {}^k d_N^k$ kai phgaÐnoume sto epìmeno b ma

Algìrijmoc (2/2)

- Kajorismìc eisìdwn mejìdou
- Jètoume $k = \quad 1$
- Elègqoume an $k >$ MIT , an den isqÔei, aux^noume tok kai suneqÐzoume sto epìmeno b ma, diaforetik^ phgaÐnoume sto b ma 9
- Elègqoume an $kr \;\; f(x^k)k \quad {}_1$, an den isqÔei, suneqÐzoume sto epìmeno b ma, diaforetik^ phgaÐnoume sto b ma 9
- UpologÐzoume thn kateÔjunsh meÐwshc tou Newton epilÔontac to grammikì sÔsthma $r \;\; {}^2 f(x^k) d_N^k = \;\; r \;\; f(x^k)$ kai suneqÐzoume sto epìmeno b ma
- EkteloÔme mia eujÔgrammh anaz thsh kat^ th dieÔjunsh d_N^k prokeimènou na brejeÐ èna epijumhtì m koc b matoc ^{k} kai phgaÐnoume sto epìmeno b ma
- Jètoume $x^{k+1} = x^k + \;\; {}^k d_N^k$ kai phgaÐnoume sto epìmeno b ma
- Elègqoume an $kx^{k+1} \quad x^k k \quad {}_2$, an den isqÔei, suneqÐzoume sto epìmeno b ma, diaforetik^ phgaÐnoume sto b ma 3

Algìrijmoc (2/2)

Kajorismìc eisìdwn mejìdou

Jètoume $k = \quad 1$

Elègqoume an $k > MIT$, an den isqÔei, aux^noume tok kai suneqÐzoume sto epìmeno b ma, diaforetik^ phgaÐnoume sto b ma 9

Elègqoume an $kr \; f(x^k)k \qquad _1$, an den isqÔei, suneqÐzoume sto epìmeno b ma, diaforetik^ phgaÐnoume sto b ma 9

UpologÐzoume thn kateÔjunsh meÐwshc tou Newton epilÔontac to grammikì sÔsthma $r \; ^2 f(x^k) d_N^k = \; r \quad f(x^k)$ kai suneqÐzoume sto epìmeno b ma

EkteloÔme mia eujÔgrammh anaz thsh kat^ th dieÔjunsh d_N^k prokeimènou na brejeÐ èna epijumhtì m koc b matoc ^{k} kai phgaÐnoume sto epìmeno b ma

Jètoume $x^{k+1} = x^k + \quad ^k d_N^k$ kai phgaÐnoume sto epìmeno b ma

Elègqoume an $kx^{k+1} \quad x^k k \qquad _2$, an den isqÔei, suneqÐzoume sto epìmeno b ma, diaforetik^ phgaÐnoume sto b ma 3

Termatismìc mejìdou kai epistrof exìdwn

BibliografÐa - Anaforèc

Grabbˆnhc G., EpisthmonikoÐ upologismoÐ: Upologistikèc mèjodoi kai majhmatikì logismikì, PapaswthrÐou, 2013.

AkrÐbhc G.D., Dougˆlhc B.A., Eisagwg sthn arijmhtik anˆlush, Panepisthmiakèc ekdìseic Kr thc, Hrˆkleio, 1997.

Braqˆthc M.N., Arijmhtik anˆlush: Eisagwg , Ekdìseic Kleidˆrijmoc, Aj na, 2011.

Braqˆthc M.N., Arijmhtik Anˆlush: Uperbatikèc Exis¸seic, Ekdìseic Kleidˆrijmoc, Aj na, 2012.

Nikìlaoc Misurl c. Arijmhtik Anˆlush: Mia Algorijmik Prosèggish. Ekdìseic: Ekdotik EKPA 2017. EÔdoxoc Arijmhtik Anˆlush

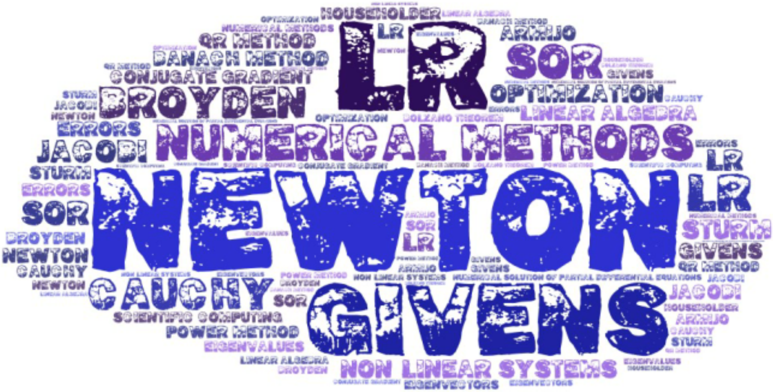
Βιβλιογραφία - Αναφορές

- Gerald, Curtis F, Applied numerical analysis. Pearson Education India, 2004.
- Atkinson, Kendall E, An introduction to numerical analysis. John wiley & sons, 2008.
- Burden, Richard L and Faires, J Douglas, Numerical Analysis, Brooks, Cole, Belmont, CA, 1997.
- Phillips, George M and Taylor, Peter J, Theory and applications of numerical analysis. Elsevier, 1996.
- Davis, Philip J and Rabinowitz, Philip, Methods of numerical integration. Courier Corporation, 2007.

Βιβλιογραφία - Αναφορές

- Herniter, Marc E, Programming in MATLAB. Brooks/Cole Publishing Co., 2000.
- Wolfram, Stephen and others, The MATHEMATICA® book, version 4. Cambridge university press, 1999.
- Gene H. Golub, Charles F. Van Loan, Jewrþa kai Upologismoþ Mhtr¸wn, Ekdìseic Pedþo, 2015.
- L. Trefethen, D. Bau, Numerical Linear Algebra, SIAM 1997.
- B. Dougal c, D. NoÔtsoc, A. Qatzhd moc, Arijmhtik Grammik 'Algebra, Panepisthmiakèc shmei¸seic, Panepist mio Iwannþwn.

Σας ευχαριστώ πολύ για την προσοχή σας!



ΔΗΜΟΚΡΙΤΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΡΑΚΗΣ