ΔΗΜΟΚΡΙΤΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΡΑΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ & ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

Εξ αποστάσεως εξεταστική: Σεπτεμβρίου
Μάθημα: Επιστημονικοί Υπολογισμοί
Διδάσκων: Σ.-Α.Ν. Αλεξανδρόπουλος — Ξάνθη : 14 / 09 / 2021

---

1. (10%) Δίνεται το παρακάτω πρόβλημα:

Δεδομένης μιας συνεχώς παραγωγίσιμης συνάρτησης $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, να βρεθεί ένα $x^* \in \mathbb{R}^n$, για το οποίο ισχύει η σχέση $f(x^*) \leq f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$.

Ποιά ή ποιές από τις ακόλουθες αριθμητικές μεθόδους θα επιλέγατε για την επίλυση του παραπάνω προβλήματος:

α)Cauchy β)Armijo γ)Ελαχιστοποίησης Newton
δ) Fletcher-Reeves ε)Broyden στ)Καμία από τις παραπάνω

Να αιτιολογήσετε αναλυτικά την επιλογή που θα κάνετε.

---

2. (50%) Να χαρακτηρίσετε τους παρακάτω ισχυρισμούς ως Σωστό (Σ) / Λάθος (Λ) και να αιτιολογήσετε αναλυτικά τις απαντήσεις σας:

(α) Αν x είναι μια μη-τετριμμένη λύση του συστήματος $Ax = 0$, τότε κάθε συνιστώσα του διανύσματος x είναι μη μηδενική.

(β) Αν $\text{rank}(A_{m\times n}) = m$, τότε οι στήλες του μητρώου A είναι γραμμικά ανεξάρτητες.

(γ) Η μέθοδος ελαχιστοποίησης του **Cauchy**, με επαναληπτικό σχήμα $x_{n+1} = x_n - \eta\nabla f(x_n)$, οπου η ένα μικρό μέγεθος βήματος, δε δύναται να εφαρμοστεί για την εύρεση ριζών μιας συνεχούς παραγωγίσιμης συνάρτησης της μορφης $F_n = (f_1, f_2, \ldots, f_n) : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

(δ) Αν A είναι ένα μητρώο διάστασης 3×3 με ιδιοτιμές τις $\lambda = 1, 1, 2$, τότε το μητρώο A είναι πάντοτε μη διαγωνοποιήσιμο.

(ε) Η μέθοδος του **Newton** δε δύναται να εφαρμοστεί για την εύρεση σταθερών σημείων μιας συνεχούς συνάρτησης $F_n = (f_1, f_2, \ldots, f_n) : D_n \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

(στ) Ικανή συνθήκη για να αποτελεί ένα σημείο $x^* \in D_n \subset \mathbb{R}^n$ ελαχιστοποιητή μιας αντικειμενικής συνάρτησης $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ χωρίς περιορισμούς είναι η $\nabla f(x^*) = 0$.

(ζ) Αν ένα μητρώο A είναι αντιστρέψιμο, τότε είναι και διαγωνοποιήσιμο.

(η) Η εξίσωση $1.2x^3 + 2x^2 - 20x - 10 = 0$ έχει μία ρίζα στο διάστημα $(-4, -3)$.

(ϑ) Το επαναληπτικό σχήμα, για την εύρεση μιας λύσης της εξίσωσης $x = e^{-x}$, χρησιμοποιώντας τη μέθοδο Newton-Raphson διαμορφώνεται ως $x_{n+1} = x_n - e^{-x_n}$.

(ι) Αν A είναι ένα τετραγωνικό μητρώο, τότε $\text{rank}(A) = \text{rank}(A^2)$.

---

3. (15%) Να εφαρμόσετε μια αριθμητική μέθοδο της επιλογής σας, ώστε να προσεγγίσετε το σημείο τομής της αλυσοειδούς καμπύλης και της έλλειψης που δίνονται παρακάτω:

$$f_1(x, y) = y - \frac{1}{2}(e^{x/2} + e^{(-x)/2}) = 0$$
$$f_2(x, y) = 9x^2 + 25y^2 - 225 = 0$$

Να προσδιορίσετε το σημείο τομής των καμπυλών που βρίσκεται στο πρώτο τεταρτιμόριο και εντοπίζεται στο σύνολο $D_2 = [0, 6] \times [0, 6]$, με ακρίβεια 4 δ.ψ. Ελέγξτε εάν η αρχική εκτίμηση που επιλέξατε συγκλίνει στη λύση και επεξηγήστε αναλυτικά την απάντησή σας.

---

4. (15%) Με χρήση της μεθόδου δυνάμεως να προσεγγίσετε τη μεγαλύτερη ιδιοτιμή του μητρώου

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ -2 & 8 & 1 \\ 2 & 4 & -4 \end{pmatrix}$$

χρησιμοποιώντας ως αρχική εκτίμηση για το διάνυσμα x, την τιμή $x^{(0)} = (1, 1, 1)^\top$. Πότε προσφεύγουμε στην εφαρμογή της συγκεκριμένης μεθόδου;

---

5. (10%) Χρησιμοποιώντας την παραγοντοποίηση QR, να παραγοντοποιήσετε το ακόλουθο μητρώο A σε ενα ορθογώνιο μητρώο Q και ένα άνω τριγωνικό μητρώο R:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -7 & 2 \\ 4 & -5 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

[Σημείωση: Η παραγοντοποίηση απαιτεί μόνο δύο βήματα. Θα χρειαστεί να υπολογίσετε τον πίνακα Householder]

Δικαιολογήστε λεπτομερώς τις απαντήσεις σας και τα συμπεράσματά σας.

Κ Α Λ Η   Δ Υ Ν Α Μ Η