Επιστημονικοί Υπολογισμοί

Εισαγωγή στη Βελτιστοποίηση

Σταμάτιος-Άγγελος Ν. Αλεξανδρόπουλος
e-mail: stalexan@ee.duth.gr

https://www.researchgate.net/profile/Stamatios_Aggelos_Alexandropoulos
https://scholar.google.gr/citations?user=mht7W_YAAAAJ&hl=el
http://cilab.math.upatras.gr

Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών & Μηχανικών Υπολογιστών
Δημοκρίτειο Πανεπιστήμιο Θράκης
Κιμμέρια 67100, Ξάνθη

12 Απριλίου 2021

Περιεχόμενα I

ΔΗΜΟΚΡΙΤΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΡΑΚΗΣ

Ορισμός (ελαχιστοποίηση χωρίς περιορισμούς)

Δεδομένης της $f : R^n \rightarrow R$, να βρεθεί το σημείο $x^e \in R^n$ στο οποίο

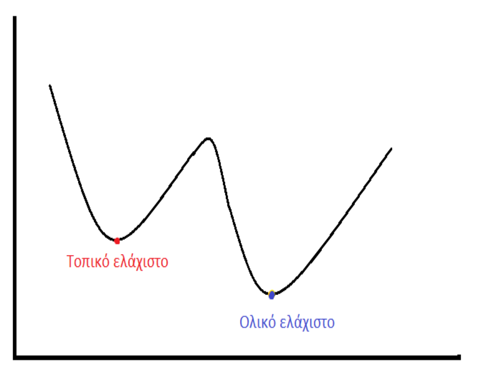
$$f(x^e) \leq f(x), \forall x \in R^n \tag{1}$$

Ορισμός (ελαχιστοποίηση χωρίς περιορισμούς)

Δεδομένης της $f : R^n \rightarrow R$, να βρεθεί το σημείο $x^e \in R^n$ στο οποίο

$$f(x^e) \leq f(x),\ \forall x \in R^n \tag{1}$$

Τοπικό - ολικό ελάχιστο



- Το/α x^e που πληρούν τη σχέση (1) ονομάζονται ελάχιστα σημεία ή ελαχιστοποιητές της αντικειμενικής συνάρτησης f.

- Το/α x^e που πληρούν τη σχέση (1) ονομάζονται ελάχιστα σημεία ή ελαχιστοποιητές της αντικειμενικής συνάρτησης f.
- Η συναρτησιακή τιμή $f(x^e)$ του ελαχιστοποιητή x^e ονομάζεται ελάχιστο της συνάρτησης.

- Τ/α x^e που πληρούν τη σχέση (1) ονομάζονται ελάχιστα σημεία ή ελαχιστοποιητές της αντικειμενικής συνάρτησης f.
- Η συναρτησιακή τιμή $f(x^e)$ του ελαχιστοποιητή x^e ονομάζεται ελάχιστο της συνάρτησης.

Ερώτηση

Εκφώνηση

Πως μπορεί να αντιμετωπιστεί το πρόβλημα της μεγιστοποίησης μιας συνάρτησης f, χρησιμοποιώντας μεθόδους ελαχιστοποίησης;

- Το/α x^e που πληρούν τη σχέση (1) ονομάζονται ελάχιστα σημεία ή ελαχιστοποιητές της αντικειμενικής συνάρτησης f.
- Η συναρτησιακή τιμή $f(x^e)$ του ελαχιστοποιητή x^e ονομάζεται ελάχιστο της συνάρτησης.

Ερώτηση

Εκφώνηση

Πως μπορεί να αντιμετωπιστεί το πρόβλημα της μεγιστοποίησης μιας συνάρτησης f, χρησιμοποιώντας μεθόδους ελαχιστοποίησης;

Λύση

Εφαρμόζουμε μια μέθοδο ελαχιστοποίησης στη συνάρτηση $-f$.

- Το/α x^e που πληρούν τη σχέση (1) ονομάζονται ελάχιστα σημεία ή ελαχιστοποιητές της αντικειμενικής συνάρτησης f.
- Η συναρτησιακή τιμή $f(x^e)$ του ελαχιστοποιητή x^e ονομάζεται ελάχιστο της συνάρτησης.

Ερώτηση

Εκφώνηση

Πως μπορεί να αντιμετωπιστεί το πρόβλημα της μεγιστοποίησης μιας συνάρτησης f, χρησιμοποιώντας μεθόδους ελαχιστοποίησης;

Λύση

Εφαρμόζουμε μια μέθοδο ελαχιστοποίησης στη συνάρτηση $-f$.

Προσοχή

Δεν υπάρχει μέθοδος που να επιτυγχάνει την καλύτερη απόδοση σε σχέση με όλες τις άλλες για οποιοδήποτε πρόβλημα.

Εύρεση λύσης - Βελτιστοποίηση (1/2)

Ερώτηση

Πως μπορεί να αντιμετωπιστεί το πρόβλημα εύρεσης ριζών μιας συνάρτησης της μορφής $F : R^n \to R^n$, χρησιμοποιώντας μεθόδους ελαχιστοποίησης της μορφής $F : R^n \to R$;

Εύρεση λύσης - Βελτιστοποίηση (1/2)

Ερώτηση

Πως μπορεί να αντιμετωπιστεί το πρόβλημα εύρεσης ριζών μιας συνάρτησης της μορφής $F : R^n \to R^n$, χρησιμοποιώντας μεθόδους ελαχιστοποίησης της μορφής $F : R^n \to R$;

- Το πρόβλημα εύρεσης ριζών μιας συνάρτησης της μορφής $F : R^n \to R^n$, αντιμετωπίζει το πρόβλημα εύρεσης κάποιου $x^* \in R^n$ ώστε

$$\begin{array}{l} f_1(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*) = 0 \\ f_2(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_n(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*) = 0 \end{array}$$

Εύρεση λύσης - Βελτιστοποίηση (1/2)

Ερώτηση

Πως μπορεί να αντιμετωπιστεί το πρόβλημα εύρεσης ριζών μιας συνάρτησης της μορφής $F : R^n \to R^n$, χρησιμοποιώντας μεθόδους ελαχιστοποίησης της μορφής $F : R^n \to R$;

- Το πρόβλημα εύρεσης ριζών μιας συνάρτησης της μορφής $F : R^n \to R^n$, αντιμετωπίζει το πρόβλημα εύρεσης κάποιου $x^* \in R^n$ ώστε

$$\begin{aligned} f_1(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*) &= 0 \\ f_2(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*) &= 0 \\ \cdots\cdots&\cdots \\ f_n(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*) &= 0 \end{aligned}$$

- Ορίζουμε μια συνάρτηση

$$G(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{n} (f_i(x_1, x_2, ..., x_n))^2$$

Εύρεση λύσης - Βελτιστοποίηση (2/2)

- Εφαρμόζουμε μια μέθοδο ελαχιστοποίησης στη συνάρτηση $G(x_1, x_2, ..., x_n)$

Εύρεση λύσης - Βελτιστοποίηση (2/2)

- Εφαρμόζουμε μια μέθοδο ελαχιστοποίησης στη συνάρτηση $G(x_1, x_2, ..., x_n)$
- Το διάνυσμα $X = x_1^e, x_2^e, ..., x_n^e$ αποτελεί ελαχιστοποιητή της $G(x)$ και ταυτόχρονα ρίζα κάθε συνιστώσας f_i της F

Εύρεση λύσης - Βελτιστοποίηση (2/2)

- Εφαρμόζουμε μια μέθοδο ελαχιστοποίησης στη συνάρτηση $G(x_1, x_2, ..., x_n)$
- Το διάνυσμα $X = x_1^e, x_2^e, ..., x_n^e$ αποτελεί ελαχιστοποιητή της $G(x)$ και ταυτόχρονα ρίζα κάθε συνιστώσας f_i της F

Με βάση αυτή την προσέγγιση, μπορούν να αντιμετωπιστούν από μεθόδους βελτιστοποίησης, προβλήματα εύρεσης ριζών μιας συνάρτησης της μορφής $F : R^m \rightarrow R^l$, όπου $m \neq l$

- Οι αριθμητικές μέθοδοι βελτιστοποίησης είναι επαναληπτικές.

- Οι αριθμητικές μέθοδοι βελτιστοποίησης είναι επαναληπτικές.
- Έχουν τη μορφή:

$$x^{k+1} = x^k + \alpha_k d_k$$

όπου

1. το α_k είναι το βήμα της μεθόδου
2. το d_k η κατεύθυνση αναζήτησης του ελαχίστου

- Οι αριθμητικές μέθοδοι βελτιστοποίησης είναι επαναληπτικές.
- Έχουν τη μορφή:

$$x^{k+1} = x^k + \alpha_k d_k$$

  όπου

  1. το α_k είναι το βήμα της μεθόδου
  2. το d_k η κατεύθυνση αναζήτησης του ελαχίστου

- Ξεκινώντας από αρχικό σημείο x_0, μέσω της εκάστοτε μεθόδου, δημιουργούμε μια ακολουθία $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ η οποία αποκλίνει ή συγκλίνει στο βελτιστο.

- Οι αριθμητικές μέθοδοι βελτιστοποίησης είναι επαναληπτικές.
- Έχουν τη μορφή:

$$x^{k+1} = x^k + \alpha_k d_k$$

όπου

1. το α_k είναι το βήμα της μεθόδου
2. το d_k η κατεύθυνση αναζήτησης του ελαχίστου

- Ξεκινώντας από αρχικό σημείο x_0, μέσω της εκάστοτε μεθόδου, δημιουργούμε μια ακολουθία $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ η οποία αποκλίνει ή συγκλίνει στο βελτιστο.
- Η μέθοδος τερματίζει για τους παρακάτω λόγους
    - Έχουμε βρει το ελάχιστο με τη δεδομένη ακρίβεια που έχουμε θέσει.
    - Έχουμε φτάσει το μέγιστο πλήθος επαναλήψεων που έχουμε θέσει στην αρχή του προβλήματος.

Κριτήριο τερματισμού

- Σε κάθε περίπτωση μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε διαφορετικό κριτήριο τερματισμού ανάλογα με τις ιδιαιτερότητες της εξίσωσης της οποίας θέλουμε να βρούμε το ελάχιστο.

Κριτήριο τερματισμού

- Σε κάθε περίπτωση μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε διαφορετικό κριτήριο τερματισμού ανάλογα με τις ιδιαιτερότητες της εξίσωσης της οποίας θέλουμε να βρούμε το ελάχιστο.
- Το κριτήριο τερματισμού σχετίζεται με την ακρίβεια που θέλουμε να έχουν οι υπολογισμοί μας.

Κριτήριο τερματισμού

- Σε κάθε περίπτωση μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε διαφορετικό κριτήριο τερματισμού ανάλογα με τις ιδιαιτερότητες της εξίσωσης της οποίας θέλουμε να βρούμε το ελάχιστο.
- Το κριτήριο τερματισμού σχετίζεται με την ακρίβεια που θέλουμε να έχουν οι υπολογισμοί μας.
- Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ένα ή περισσότερα από τα παρακάτω:

$$\|x_{k+1} - x_k\| < \epsilon \qquad |f(x_{k+1}) - f(x_k)| < \epsilon$$

$$\|\nabla f(x_k)\| < \epsilon$$

$$\frac{|f(x_{k+1}) - f(x_k)|}{|f(x_k)|} < \epsilon \qquad \frac{\|x_{k+1} - x_k\|}{\|x_k\|} < \epsilon$$

Κριτήριο τερματισμού

- Σε κάθε περίπτωση μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε διαφορετικό κριτήριο τερματισμού ανάλογα με τις ιδιαιτερότητες της εξίσωσης της οποίας θέλουμε να βρούμε το ελάχιστο.
- Το κριτήριο τερματισμού σχετίζεται με την ακρίβεια που θέλουμε να έχουν οι υπολογισμοί μας.
- Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ένα ή περισσότερα από τα παρακάτω:

$$\|x_{k+1} - x_k\| < \epsilon \qquad |f(x_{k+1}) - f(x_k)| < \epsilon$$

$$\|\nabla f(x_k)\| < \epsilon$$

$$\frac{|f(x_{k+1}) - f(x_k)|}{|f(x_k)|} < \epsilon \qquad \frac{\|x_{k+1} - x_k\|}{\|x_k\|} < \epsilon$$

Το κριτήριο αυτό είναι αναγκαία συνθήκη ύπαρξης ελαχίστου, χρησιμοποιείται μόνο του ή σε συνδυασμό με κάποιο από τα υπόλοιπα

Κριτήριο τερματισμού

- Σε κάθε περίπτωση μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε διαφορετικό κριτήριο τερματισμού ανάλογα με τις ιδιαιτερότητες της εξίσωσης της οποίας θέλουμε να βρούμε το ελάχιστο.
- Το κριτήριο τερματισμού σχετίζεται με την ακρίβεια που θέλουμε να έχουν οι υπολογισμοί μας.
- Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ένα ή περισσότερα από τα παρακάτω:

$$\|x_{k+1} - x_k\| < \epsilon \qquad |f(x_{k+1}) - f(x_k)| < \epsilon$$

$$\|\nabla f(x_k)\| < \epsilon$$

$$\frac{|f(x_{k+1}) - f(x_k)|}{|f(x_k)|} < \epsilon \qquad \frac{\|x_{k+1} - x_k\|}{\|x_k\|} < \epsilon$$

  Το κριτήριο αυτό είναι αναγκαία συνθήκη ύπαρξης ελαχίστου, χρησιμοποιείται μόνο του ή σε συνδυασμό με κάποιο από τα υπόλοιπα

- Η τιμή του ϵ καθορίζεται κάθε φορά στην αρχή του προβλήματος είτε ως δεδομένο είτε από εμάς.

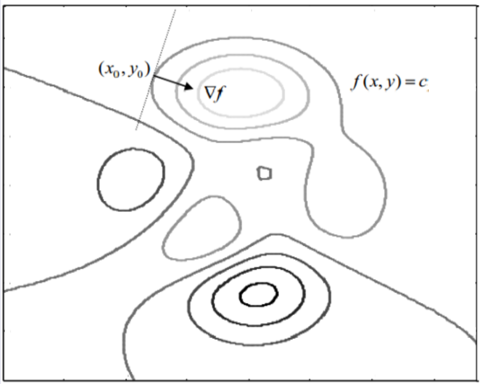
Ορισμός (κατεύθυνση μείωσης)

Έστω $f : D \subset \Re^n \to \Re$ παραγωγίσιμη συνάρτηση. Αν στο σημείο $x \in D$ υπάρχει ένα διάνυσμα d τέτοιο ώστε να ισχύει ότι

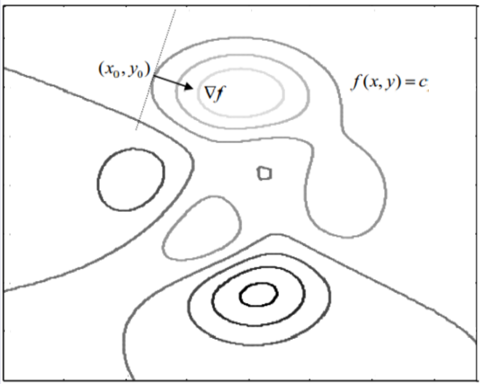
$$\langle \nabla f(x), d \rangle < 0$$

τότε το διάνυσμα d οναμάζεται κατεύθυνση μείωσης της f αναφορικά με το σημείο x.

Γεωμετρική ερμηνεία (κατεύθυνση μείωσης)



Γεωμετρική ερμηνεία (κατεύθυνση μείωσης)



Σε κάθε σημείο $X \in \Re^n$ του πεδίου ορισμού της $f(X)$, η κλίση $(\nabla f(X) \in \Re^n)$ της f είναι ένα διάνυσμα που είναι κάθετο στην ισοϋψή καμπύλη που διέρχεται από το σημείο αυτό.

Εισαγωγή

- Αντιμετωπίζει το πρόβλημα ελαχιστοποίησης συναρτήσεων

Εισαγωγή

- Αντιμετωπίζει το πρόβλημα ελαχιστοποίησης συναρτήσεων
- Σαν κατεύθυνση χρησιμοποιείται ένα διάνυσμα αντίθετο της κλίσης της αντικειμενικής συνάρτησης

Εισαγωγή

- Αντιμετωπίζει το πρόβλημα ελαχιστοποίησης συναρτήσεων
- Σαν κατεύθυνση χρησιμοποιείται ένα διάνυσμα αντίθετο της κλίσης της αντικειμενικής συνάρτησης

Το αντίθετο του διανύσματος της κλίσης, $-\nabla f(x)$, αποτελεί κατεύθυνση μείωσης.

$$\langle \nabla f(x), -\nabla f(x) \rangle =$$

Εισαγωγή

- Αντιμετωπίζει το πρόβλημα ελαχιστοποίησης συναρτήσεων
- Σαν κατεύθυνση χρησιμοποιείται ένα διάνυσμα αντίθετο της κλίσης της αντικειμενικής συνάρτησης

Το αντίθετο του διανύσματος της κλίσης, $-\nabla f(x)$, αποτελεί κατεύθυνση μείωσης.

$$\langle \nabla f(x), -\nabla f(x) \rangle = -\|\nabla f(x)\|_2^2 < 0$$

Εισαγωγή

- Αντιμετωπίζει το πρόβλημα ελαχιστοποίησης συναρτήσεων
- Σαν κατεύθυνση χρησιμοποιείται ένα διάνυσμα αντίθετο της κλίσης της αντικειμενικής συνάρτησης

Το αντίθετο του διανύσματος της κλίσης, $-\nabla f(x)$, αποτελεί κατεύθυνση μείωσης.

$$\langle \nabla f(x), -\nabla f(x) \rangle = -\|\nabla f(x)\|_2^2 < 0$$

- Η μέθοδος συγκλίνει σε ένα σημείο x^e για το οποίο ισχύει

$$\nabla f(x^e) = 0$$

Εισαγωγή

- Αντιμετωπίζει το πρόβλημα ελαχιστοποίησης συναρτήσεων
- Σαν κατεύθυνση χρησιμοποιείται ένα διάνυσμα αντίθετο της κλίσης της αντικειμενικής συνάρτησης

Το αντίθετο του διανύσματος της κλίσης, $-\nabla f(x)$, αποτελεί κατεύθυνση μείωσης.

$$\langle \nabla f(x), -\nabla f(x) \rangle = -\|\nabla f(x)\|_2^2 < 0$$

- Η μέθοδος συγκλίνει σε ένα σημείο x^e για το οποίο ισχύει

$$\nabla f(x^e) = 0$$

- Το μειονέκτημα της μεθόδου είναι η αργή της σύγκλιση

Λειτουργία

Οι επαναλήψεις ξεκινούν από το αρχικό σημείο $X_0 \in \Re^n$ και συγκλίνουν προς το ελάχιστο μέσω της σχέσης

$$x^{k+1} = x^k - \lambda^k \nabla f(x^k), \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Λειτουργία

Οι επαναλήψεις ξεκινούν από το αρχικό σημείο $X_0 \in \Re^n$ και συγκλίνουν προς το ελάχιστο μέσω της σχέσης

$$x^{k+1} = x^k - \lambda^k \nabla f(x^k), \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

1. το λ^k είναι το μέγεθος βήματος
   Το λ^k εκφράζει τη μικρότερη μη-αρνητική τιμή της παραμέτρου λ, ώστε κάθε επόμενο σημείο να ελαχιστοποιεί τη συνάρτηση f κατά μήκος της διεύθυνσης που ορίζει η κλίση της.

Λειτουργία

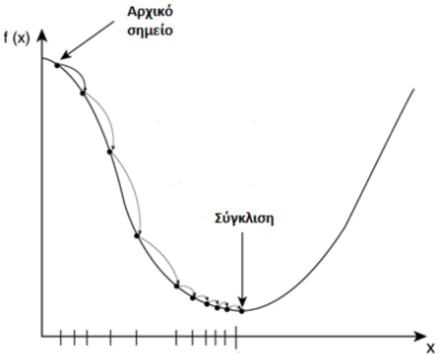
Οι επαναλήψεις ξεκινούν από το αρχικό σημείο $X_0 \in \Re^n$ και συγκλίνουν προς το ελάχιστο μέσω της σχέσης

$$x^{k+1} = x^k - \lambda^k \nabla f(x^k), \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

1. το λ^k είναι το μέγεθος βήματος
   Το λ^k εκφράζει τη μικρότερη μη-αρνητική τιμή της παραμέτρου λ, ώστε κάθε επόμενο σημείο να ελαχιστοποιεί τη συνάρτηση f κατά μήκος της διεύθυνσης που ορίζει η κλίση της.
2. το $\nabla f(x)$ εκφράζει την κλίση της αντικειμενικής συνάρτησης και ορίζεται ως

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

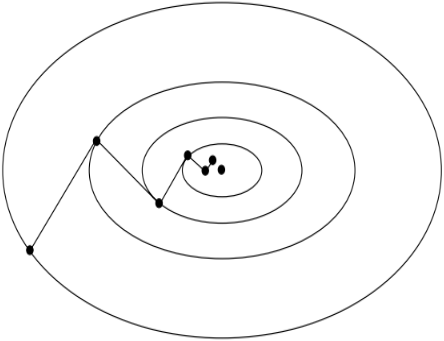
Γεωμετρική ερμηνεία της Cauchy για μια μεταβλητή



ΔΗΜΟΚΡΙΤΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΡΑΚΗΣ

Γεωμετρική ερμηνεία της Cauchy για πολλές μεταβλητές

Η αναζήτηση εκτελείται σε μικρά εγκάρσια βήματα, σχηματίζοντας μια τεθλασμένη γραμμή κατά πλάτος των ισοϋψών καμπυλών της f



Αλγόριθμος (1/2)

1. Καθορισμός εισόδων μεθόδου

Αλγόριθμος (1/2)

1. Καθορισμός εισόδων μεθόδου
   - n το πλήθος των μεταβλητών της αντικειμενικής συνάρτησης

Αλγόριθμος (1/2)

1. Καθορισμός εισόδων μεθόδου
   - n το πλήθος των μεταβλητών της αντικειμενικής συνάρτησης
   - $f(x)$ ο τύπος της συνάρτησης

Αλγόριθμος (1/2)

1. Καθορισμός εισόδων μεθόδου
   - n το πλήθος των μεταβλητών της αντικειμενικής συνάρτησης
   - $f(x)$ ο τύπος της συνάρτησης
   - $\nabla f(x)$ η κλίση της συνάρτησης

Αλγόριθμος (1/2)

1. Καθορισμός εισόδων μεθόδου
   - n το πλήθος των μεταβλητών της αντικειμενικής συνάρτησης
   - $f(x)$ ο τύπος της συνάρτησης
   - $\nabla f(x)$ η κλίση της συνάρτησης
   - x_0 η αρχική προσέγγιση της ρίζας

Αλγόριθμος (1/2)

1. Καθορισμός εισόδων μεθόδου
   - n το πλήθος των μεταβλητών της αντικειμενικής συνάρτησης
   - $f(x)$ ο τύπος της συνάρτησης
   - $\nabla f(x)$ η κλίση της συνάρτησης
   - x_0 η αρχική προσέγγιση της ρίζας
   - MIT το μέγιστο πλήθος επαναλήψεων της μεθόδου

Αλγόριθμος (1/2)

1. Καθορισμός εισόδων μεθόδου
   - n το πλήθος των μεταβλητών της αντικειμενικής συνάρτησης
   - $f(x)$ ο τύπος της συνάρτησης
   - $\nabla f(x)$ η κλίση της συνάρτησης
   - x_0 η αρχική προσέγγιση της ρίζας
   - MIT το μέγιστο πλήθος επαναλήψεων της μεθόδου
   - ϵ η ακρίβεια που θέτουμε για το κριτήριο τερματισμού

Αλγόριθμος (1/2)

1. Καθορισμός εισόδων μεθόδου
   - n το πλήθος των μεταβλητών της αντικειμενικής συνάρτησης
   - $f(x)$ ο τύπος της συνάρτησης
   - $\nabla f(x)$ η κλίση της συνάρτησης
   - x_0 η αρχική προσέγγιση της ρίζας
   - MIT το μέγιστο πλήθος επαναλήψεων της μεθόδου
   - ϵ η ακρίβεια που θέτουμε για το κριτήριο τερματισμού
   - h το μέγεθος βήματος

Αλγόριθμος (1/2)

1. Καθορισμός εισόδων μεθόδου
    - n το πλήθος των μεταβλητών της αντικειμενικής συνάρτησης
    - $f(x)$ ο τύπος της συνάρτησης
    - $\nabla f(x)$ η κλίση της συνάρτησης
    - x_0 η αρχική προσέγγιση της ρίζας
    - MIT το μέγιστο πλήθος επαναλήψεων της μεθόδου
    - ϵ η ακρίβεια που θέτουμε για το κριτήριο τερματισμού
    - h το μέγεθος βήματος
2. Θέτουμε $k = -1$

Αλγόριθμος (1/2)

1. Καθορισμός εισόδων μεθόδου
   - n το πλήθος των μεταβλητών της αντικειμενικής συνάρτησης
   - $f(x)$ ο τύπος της συνάρτησης
   - $\nabla f(x)$ η κλίση της συνάρτησης
   - x_0 η αρχική προσέγγιση της ρίζας
   - MIT το μέγιστο πλήθος επαναλήψεων της μεθόδου
   - ϵ η ακρίβεια που θέτουμε για το κριτήριο τερματισμού
   - h το μέγεθος βήματος
2. Θέτουμε $k = -1$
3. Ελέγχουμε αν $k > MIT$

   Αν δεν ισχύει, αυξάνουμε το k και συνεχίζουμε στο επόμενο βήμα, διαφορετικά πηγαίνουμε στο βήμα 6

Αλγόριθμος (1/2)

1. Καθορισμός εισόδων μεθόδου
   - n το πλήθος των μεταβλητών της αντικειμενικής συνάρτησης
   - $f(x)$ ο τύπος της συνάρτησης
   - $\nabla f(x)$ η κλίση της συνάρτησης
   - x_0 η αρχική προσέγγιση της ρίζας
   - MIT το μέγιστο πλήθος επαναλήψεων της μεθόδου
   - ϵ η ακρίβεια που θέτουμε για το κριτήριο τερματισμού
   - h το μέγεθος βήματος
2. Θέτουμε $k = -1$
3. Ελέγχουμε αν $k > MIT$
   Αν δεν ισχύει, αυξάνουμε το k και συνεχίζουμε στο επόμενο βήμα, διαφορετικά πηγαίνουμε στο βήμα 6
4. Ελέγχουμε αν $\|\nabla f(x^k)\| \leq \epsilon$
   Αν δεν ισχύει, συνεχίζουμε στο επόμενο βήμα, διαφορετικά πηγαίνουμε στο βήμα 6

Αλγόριθμος (1/2)

1. Καθορισμός εισόδων μεθόδου
   - n το πλήθος των μεταβλητών της αντικειμενικής συνάρτησης
   - $f(x)$ ο τύπος της συνάρτησης
   - $\nabla f(x)$ η κλίση της συνάρτησης
   - x_0 η αρχική προσέγγιση της ρίζας
   - MIT το μέγιστο πλήθος επαναλήψεων της μεθόδου
   - ϵ η ακρίβεια που θέτουμε για το κριτήριο τερματισμού
   - h το μέγεθος βήματος
2. Θέτουμε $k = -1$
3. Ελέγχουμε αν $k > MIT$
   Αν δεν ισχύει, αυξάνουμε το k και συνεχίζουμε στο επόμενο βήμα, διαφορετικά πηγαίνουμε στο βήμα 6
4. Ελέγχουμε αν $\|\nabla f(x^k)\| \leq \epsilon$
   Αν δεν ισχύει, συνεχίζουμε στο επόμενο βήμα, διαφορετικά πηγαίνουμε στο βήμα 6
5. Θέτουμε $x^{k+1} = x^k - h\nabla f(x^k)$ και πηγαίνουμε στο βήμα 3

Αλγόριθμος (1/2)

1. Καθορισμός εισόδων μεθόδου
   - n το πλήθος των μεταβλητών της αντικειμενικής συνάρτησης
   - $f(x)$ ο τύπος της συνάρτησης
   - $\nabla f(x)$ η κλίση της συνάρτησης
   - x_0 η αρχική προσέγγιση της ρίζας
   - MIT το μέγιστο πλήθος επαναλήψεων της μεθόδου
   - ϵ η ακρίβεια που θέτουμε για το κριτήριο τερματισμού
   - h το μέγεθος βήματος
2. Θέτουμε $k = -1$
3. Ελέγχουμε αν $k > MIT$
   Αν δεν ισχύει, αυξάνουμε το k και συνεχίζουμε στο επόμενο βήμα, διαφορετικά πηγαίνουμε στο βήμα 6
4. Ελέγχουμε αν $\|\nabla f(x^k)\| \leq \epsilon$
   Αν δεν ισχύει, συνεχίζουμε στο επόμενο βήμα, διαφορετικά πηγαίνουμε στο βήμα 6
5. Θέτουμε $x^{k+1} = x^k - h\nabla f(x^k)$ και πηγαίνουμε στο βήμα 3
6. Τερματισμός μεθόδου και επιστροφή εξόδων

Αλγόριθμος (2/2)

Έξοδοι

- k η τρέχουσα επανάληψη

Αλγόριθμος (2/2)

Έξοδοι

- k η τρέχουσα επανάληψη
- x^k η τελευταία προσέγγιση της ρίζας

Αλγόριθμος (2/2)

Έξοδοι

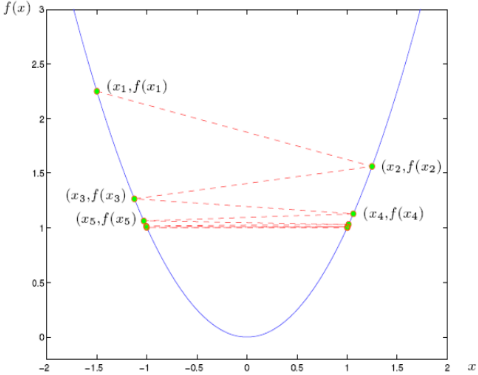
- k η τρέχουσα επανάληψη
- x^k η τελευταία προσέγγιση της ρίζας
- $f(x^k)$ η τιμή της συνάρτησης στην k επανάληψη

Αλγόριθμος (2/2)

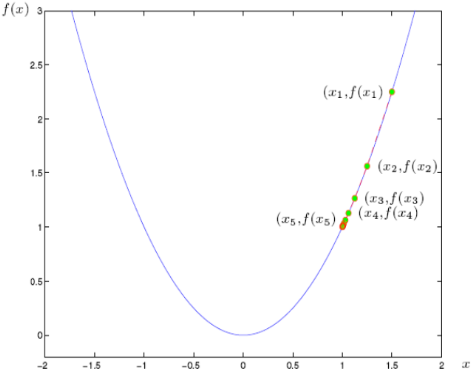
Έξοδοι

- k η τρέχουσα επανάληψη
- x^k η τελευταία προσέγγιση της ρίζας
- $f(x^k)$ η τιμή της συνάρτησης στην k επανάληψη
- $\nabla f(x^k)$ η τρέχουσα τιμή της κλίσης

Μεγάλο βήμα για την Cauchy



Μικρό βήμα για την Cauchy



Εισαγωγή

- Αντιμετωπίζει το πρόβλημα ελαχιστοποίησης συναρτήσεων χωρίς περιορισμούς

$$\min_{x \in R^n} f(x), \quad f : R^n \to R$$

Εισαγωγή

- Αντιμετωπίζει το πρόβλημα ελαχιστοποίησης συναρτήσεων χωρίς περιορισμούς

$$\min_{x \in R^n} f(x), \quad f : R^n \to R$$

- Αποτελεί τροποποίηση της μεθόδου του Cauchy

Εισαγωγή

- Αντιμετωπίζει το πρόβλημα ελαχιστοποίησης συναρτήσεων χωρίς περιορισμούς

$$\min_{x \in R^n} f(x), \quad f : R^n \to R$$

- Αποτελεί τροποποίηση της μεθόδου του Cauchy
- Χρησιμοποιεί μεταβλητό βήμα

Εισαγωγή

- Αντιμετωπίζει το πρόβλημα ελαχιστοποίησης συναρτήσεων χωρίς περιορισμούς

$$\min_{x \in R^n} f(x), \quad f : R^n \to R$$

- Αποτελεί τροποποίηση της μεθόδου του Cauchy
- Χρησιμοποιεί μεταβλητό βήμα
- Δεν απαιτεί τον υπολογισμό της σταθεράς Lipschitz

Επαναληπτικό σχήμα - σύγκλιση μεθόδου

- Έστω η_0 ένας αυθαίρετα επιλεγμένος θετικός αριθμός

Επαναληπτικό σχήμα - σύγκλιση μεθόδου

- Έστω η_0 ένας αυθαίρετα επιλεγμένος θετικός αριθμός
- Η ακολουθία των σημείων $\{x^k\}_0^\infty$ που ορίζονται από τη σχέση

$$x^{k+1} = x^k - \eta_{m_k} \nabla f(x^k), \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Επαναληπτικό σχήμα - σύγκλιση μεθόδου

- Έστω η_0 ένας αυθαίρετα επιλεγμένος θετικός αριθμός
- Η ακολουθία των σημείων $\{x^k\}_0^\infty$ που ορίζονται από τη σχέση

$$x^{k+1} = x^k - \eta_{m_k} \nabla f(x^k), \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

- Όπου m_k είναι ο μικρότερος θετικός ακέραιος για τον οποίο ισχύει ότι

$$f(x^k - \eta_{m_k} \nabla f(x^k)) - f(x^k) \leq -\frac{1}{2} \eta_{m_k} \|\nabla f(x^k)\|^2$$

Επαναληπτικό σχήμα - σύγκλιση μεθόδου

- Έστω η_0 ένας αυθαίρετα επιλεγμένος θετικός αριθμός
- Η ακολουθία των σημείων $\{x^k\}_0^\infty$ που ορίζονται από τη σχέση

$$x^{k+1} = x^k - \eta_{m_k} \nabla f(x^k), \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

- Όπου m_k είναι ο μικρότερος θετικός ακέραιος για τον οποίο ισχύει ότι

$$f(x^k - \eta_{m_k} \nabla f(x^k)) - f(x^k) \leq -\frac{1}{2} \eta_{m_k} \|\nabla f(x^k)\|^2$$

- Και, επιπλέον

$$\eta_m = \frac{\eta_0}{2^{m-1}}$$

Επαναληπτικό σχήμα - σύγκλιση μεθόδου

- Έστω η_0 ένας αυθαίρετα επιλεγμένος θετικός αριθμός
- Η ακολουθία των σημείων $\{x^k\}_0^\infty$ που ορίζονται από τη σχέση

$$x^{k+1} = x^k - \eta_{m_k} \nabla f(x^k), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

- Όπου m_k είναι ο μικρότερος θετικός ακέραιος για τον οποίο ισχύει ότι

$$f(x^k - \eta_{m_k} \nabla f(x^k)) - f(x^k) \leq -\frac{1}{2} \eta_{m_k} \|\nabla f(x^k)\|^2$$

- Και, επιπλέον

$$\eta_m = \frac{\eta_0}{2^{m-1}}$$

- Συγκλίνει στο σημείο x^* που ελαχιστοποιεί την αντικειμενική συνάρτηση f.

Συνθήκη επαρκούς ελάττωσης του Armijo

$$f(x_k + \alpha p_k) \leq f(x_k) + c_0 \alpha \nabla f(x_k)^T p_k$$

όπου c_0 είναι μία σταθερά η οποία ανήκει στο διάστημα $(0, 1)$.

Συνθήκη επαρκούς ελάττωσης του Armijo

$$f(x_k + \alpha p_k) \leq f(x_k) + c_0 \alpha \nabla f(x_k)^T p_k$$

όπου c_0 είναι μία σταθερά η οποία ανήκει στο διάστημα $(0, 1)$.

- Θέτουμε $\phi(\alpha) = f(x_k + \alpha p_k)$ και $l(\alpha) = f(x_k) + c_0 \alpha \nabla f(x_k)^T p_k$

Συνθήκη επαρκούς ελάττωσης του Armijo

$$f(x_k + \alpha p_k) \leq f(x_k) + c_0 \alpha \nabla f(x_k)^T p_k$$

όπου c_0 είναι μία σταθερά η οποία ανήκει στο διάστημα $(0, 1)$.

- Θέτουμε $\phi(\alpha) = f(x_k + \alpha p_k)$ και $l(\alpha) = f(x_k) + c_0 \alpha \nabla f(x_k)^T p_k$
- Η συνάρτηση $l(\alpha)$ είναι γραμμική και έχει αρνητική κλίση

Συνθήκη επαρκούς ελάττωσης του Armijo

$$f(x_k + \alpha p_k) \leq f(x_k) + c_0 \alpha \nabla f(x_k)^T p_k$$

όπου c_0 είναι μία σταθερά η οποία ανήκει στο διάστημα $(0, 1)$.

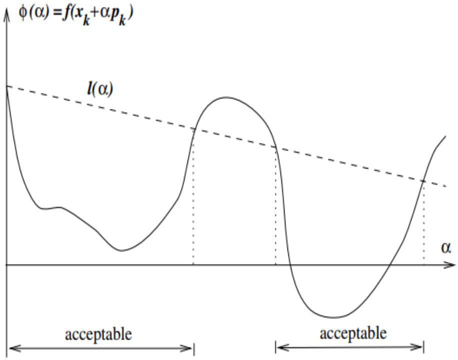
- Θέτουμε $\phi(\alpha) = f(x_k + \alpha p_k)$ και $l(\alpha) = f(x_k) + c_0 \alpha \nabla f(x_k)^T p_k$
- Η συνάρτηση $l(\alpha)$ είναι γραμμική και έχει αρνητική κλίση
- Η αρχική η ανίσωση, γίνεται $\phi(\alpha) \leq l(\alpha)$

Συνθήκη επαρκούς ελάττωσης του Armijo

$$f(x_k + \alpha p_k) \leq f(x_k) + c_0 \alpha \nabla f(x_k)^T p_k$$

όπου c_0 είναι μία σταθερά η οποία ανήκει στο διάστημα $(0, 1)$.

- Θέτουμε $\phi(\alpha) = f(x_k + \alpha p_k)$ και $l(\alpha) = f(x_k) + c_0 \alpha \nabla f(x_k)^T p_k$
- Η συνάρτηση $l(\alpha)$ είναι γραμμική και έχει αρνητική κλίση
- Η αρχική η ανίσωση, γίνεται $\phi(\alpha) \leq l(\alpha)$



Αλγόριθμος (1/2)

- Είσοδοι

Αλγόριθμος (1/2)

- Είσοδοι
  - n το πλήθος των μεταβλητών της αντικειμενικής συνάρτησης

Αλγόριθμος (1/2)

- Είσοδοι
  - n το πλήθος των μεταβλητών της αντικειμενικής συνάρτησης
  - $f(x)$ ο τύπος της συνάρτησης

Αλγόριθμος (1/2)

- Είσοδοι
  - n το πλήθος των μεταβλητών της αντικειμενικής συνάρτησης
  - $f(x)$ ο τύπος της συνάρτησης
  - $\nabla f(x)$ η κλίση της συνάρτησης

Αλγόριθμος (1/2)

- Είσοδοι
  - n το πλήθος των μεταβλητών της αντικειμενικής συνάρτησης
  - $f(x)$ ο τύπος της συνάρτησης
  - $\nabla f(x)$ η κλίση της συνάρτησης
  - x_0 η αρχική προσέγγιση της ρίζας

Αλγόριθμος (1/2)

- Είσοδοι
  - n το πλήθος των μεταβλητών της αντικειμενικής συνάρτησης
  - $f(x)$ ο τύπος της συνάρτησης
  - $\nabla f(x)$ η κλίση της συνάρτησης
  - x_0 η αρχική προσέγγιση της ρίζας
  - MIT το μέγιστο πλήθος επαναλήψεων της μεθόδου

Αλγόριθμος (1/2)

- Είσοδοι
  - n το πλήθος των μεταβλητών της αντικειμενικής συνάρτησης
  - $f(x)$ ο τύπος της συνάρτησης
  - $\nabla f(x)$ η κλίση της συνάρτησης
  - x_0 η αρχική προσέγγιση της ρίζας
  - MIT το μέγιστο πλήθος επαναλήψεων της μεθόδου
  - ϵ η ακρίβεια που θέτουμε για το κριτήριο τερματισμού

Αλγόριθμος (1/2)

- Είσοδοι
  - n το πλήθος των μεταβλητών της αντικειμενικής συνάρτησης
  - $f(x)$ ο τύπος της συνάρτησης
  - $\nabla f(x)$ η κλίση της συνάρτησης
  - x_0 η αρχική προσέγγιση της ρίζας
  - MIT το μέγιστο πλήθος επαναλήψεων της μεθόδου
  - ϵ η ακρίβεια που θέτουμε για το κριτήριο τερματισμού
  - η_0 η αρχική τιμή του μεγέθους βήματος

Αλγόριθμος (1/2)

- Είσοδοι
  - n το πλήθος των μεταβλητών της αντικειμενικής συνάρτησης
  - $f(x)$ ο τύπος της συνάρτησης
  - $\nabla f(x)$ η κλίση της συνάρτησης
  - x_0 η αρχική προσέγγιση της ρίζας
  - MIT το μέγιστο πλήθος επαναλήψεων της μεθόδου
  - ϵ η ακρίβεια που θέτουμε για το κριτήριο τερματισμού
  - η_0 η αρχική τιμή του μεγέθους βήματος
- Έξοδοι

Αλγόριθμος (1/2)

- Είσοδοι
  - n το πλήθος των μεταβλητών της αντικειμενικής συνάρτησης
  - $f(x)$ ο τύπος της συνάρτησης
  - $\nabla f(x)$ η κλίση της συνάρτησης
  - x_0 η αρχική προσέγγιση της ρίζας
  - MIT το μέγιστο πλήθος επαναλήψεων της μεθόδου
  - ϵ η ακρίβεια που θέτουμε για το κριτήριο τερματισμού
  - η_0 η αρχική τιμή του μεγέθους βήματος
- Έξοδοι
  - k η τρέχουσα επανάληψη

Αλγόριθμος (1/2)

- Είσοδοι
  - n το πλήθος των μεταβλητών της αντικειμενικής συνάρτησης
  - $f(x)$ ο τύπος της συνάρτησης
  - $\nabla f(x)$ η κλίση της συνάρτησης
  - x_0 η αρχική προσέγγιση της ρίζας
  - MIT το μέγιστο πλήθος επαναλήψεων της μεθόδου
  - ϵ η ακρίβεια που θέτουμε για το κριτήριο τερματισμού
  - η_0 η αρχική τιμή του μεγέθους βήματος
- Έξοδοι
  - k η τρέχουσα επανάληψη
  - x^k η τελευταία προσέγγιση της ρίζας

Αλγόριθμος (1/2)

- Είσοδοι
  - n το πλήθος των μεταβλητών της αντικειμενικής συνάρτησης
  - $f(x)$ ο τύπος της συνάρτησης
  - $\nabla f(x)$ η κλίση της συνάρτησης
  - x_0 η αρχική προσέγγιση της ρίζας
  - MIT το μέγιστο πλήθος επαναλήψεων της μεθόδου
  - ϵ η ακρίβεια που θέτουμε για το κριτήριο τερματισμού
  - η_0 η αρχική τιμή του μεγέθους βήματος
- Έξοδοι
  - k η τρέχουσα επανάληψη
  - x^k η τελευταία προσέγγιση της ρίζας
  - $f(x^k)$ η τιμή της συνάρτησης στην k επανάληψη

Αλγόριθμος (1/2)

- Είσοδοι
  - n το πλήθος των μεταβλητών της αντικειμενικής συνάρτησης
  - $f(x)$ ο τύπος της συνάρτησης
  - $\nabla f(x)$ η κλίση της συνάρτησης
  - x_0 η αρχική προσέγγιση της ρίζας
  - MIT το μέγιστο πλήθος επαναλήψεων της μεθόδου
  - ϵ η ακρίβεια που θέτουμε για το κριτήριο τερματισμού
  - η_0 η αρχική τιμή του μεγέθους βήματος
- Έξοδοι
  - k η τρέχουσα επανάληψη
  - x^k η τελευταία προσέγγιση της ρίζας
  - $f(x^k)$ η τιμή της συνάρτησης στην k επανάληψη
  - $\|\nabla f(x^k)\|$ η τρέχουσα τιμή της στάθμης

Αλγόριθμος (2/2)

1. Καθορισμός εισόδων μεθόδου

Αλγόριθμος (2/2)

1. Καθορισμός εισόδων μεθόδου
2. Θέτουμε $k = -1$

Αλγόριθμος (2/2)

1. Καθορισμός εισόδων μεθόδου
2. Θέτουμε $k = -1$
3. Ελέγχουμε αν $k > MIT$
   Αν δεν ισχύει, αυξάνουμε το k, θέτουμε $\eta = \eta_0$, $m = 1$ και συνεχίζουμε στο επόμενο βήμα, διαφορετικά πηγαίνουμε στο βήμα 8

Αλγόριθμος (2/2)

1. Καθορισμός εισόδων μεθόδου
2. Θέτουμε $k = -1$
3. Ελέγχουμε αν $k > MIT$
   Αν δεν ισχύει, αυξάνουμε το k, θέτουμε $\eta = \eta_0$, $m = 1$ και συνεχίζουμε στο επόμενο βήμα, διαφορετικά πηγαίνουμε στο βήμα 8
4. Ελέγχουμε αν $\|\nabla f(x^k)\| \leq \epsilon$
   Αν δεν ισχύει, συνεχίζουμε στο επόμενο βήμα, διαφορετικά πηγαίνουμε στο βήμα 8

Αλγόριθμος (2/2)

1. Καθορισμός εισόδων μεθόδου
2. Θέτουμε $k = -1$
3. Ελέγχουμε αν $k > MIT$
   Αν δεν ισχύει, αυξάνουμε το k, θέτουμε $\eta = \eta_0$, $m = 1$ και συνεχίζουμε στο επόμενο βήμα, διαφορετικά πηγαίνουμε στο βήμα 8
4. Ελέγχουμε αν $\|\nabla f(x^k)\| \leq \epsilon$
   Αν δεν ισχύει, συνεχίζουμε στο επόμενο βήμα, διαφορετικά πηγαίνουμε στο βήμα 8
5. Αν ισχύει $f(x^k - \eta_{m_k} \nabla f(x^k)) - f(x^k) \leq -\frac{\eta}{2}\|\nabla f(x^k)\|^2$, πηγαίνουμε στο βήμα 7, διαφορετικά συνεχίζουμε στο επόμενο βήμα

Αλγόριθμος (2/2)

1. Καθορισμός εισόδων μεθόδου
2. Θέτουμε $k = -1$
3. Ελέγχουμε αν $k > MIT$
   Αν δεν ισχύει, αυξάνουμε το k, θέτουμε $\eta = \eta_0$, $m = 1$ και συνεχίζουμε στο επόμενο βήμα, διαφορετικά πηγαίνουμε στο βήμα 8
4. Ελέγχουμε αν $\|\nabla f(x^k)\| \leq \epsilon$
   Αν δεν ισχύει, συνεχίζουμε στο επόμενο βήμα, διαφορετικά πηγαίνουμε στο βήμα 8
5. Αν ισχύει $f(x^k - \eta_{m_k} \nabla f(x^k)) - f(x^k) \leq -\frac{\eta}{2} \|\nabla f(x^k)\|^2$, πηγαίνουμε στο βήμα 7, διαφορετικά συνεχίζουμε στο επόμενο βήμα
6. Θέτουμε $m = m + 1$, $\eta = \frac{\eta_0}{2}$ και πηγαίνουμε στο βήμα 5

Αλγόριθμος (2/2)

1. Καθορισμός εισόδων μεθόδου
2. Θέτουμε $k = -1$
3. Ελέγχουμε αν $k > MIT$
   Αν δεν ισχύει, αυξάνουμε το k, θέτουμε $\eta = \eta_0$, $m = 1$ και συνεχίζουμε στο επόμενο βήμα, διαφορετικά πηγαίνουμε στο βήμα 8
4. Ελέγχουμε αν $\|\nabla f(x^k)\| \leq \epsilon$
   Αν δεν ισχύει, συνεχίζουμε στο επόμενο βήμα, διαφορετικά πηγαίνουμε στο βήμα 8
5. Αν ισχύει $f(x^k - \eta_{m_k} \nabla f(x^k)) - f(x^k) \leq -\frac{\eta}{2} \|\nabla f(x^k)\|^2$, πηγαίνουμε στο βήμα 7, διαφορετικά συνεχίζουμε στο επόμενο βήμα
6. Θέτουμε $m = m + 1$, $\eta = \frac{\eta_0}{2}$ και πηγαίνουμε στο βήμα 5
7. Θέτουμε $x^{k+1} = x^k - \eta \nabla f(x^k)$ και πηγαίνουμε στο βήμα 3

Αλγόριθμος (2/2)

1. Καθορισμός εισόδων μεθόδου
2. Θέτουμε $k = -1$
3. Ελέγχουμε αν $k > MIT$
   Αν δεν ισχύει, αυξάνουμε το k, θέτουμε $\eta = \eta_0$, $m = 1$ και συνεχίζουμε στο επόμενο βήμα, διαφορετικά πηγαίνουμε στο βήμα 8
4. Ελέγχουμε αν $\|\nabla f(x^k)\| \leq \epsilon$
   Αν δεν ισχύει, συνεχίζουμε στο επόμενο βήμα, διαφορετικά πηγαίνουμε στο βήμα 8
5. Αν ισχύει $f(x^k - \eta_{m_k} \nabla f(x^k)) - f(x^k) \leq -\frac{\eta}{2}\|\nabla f(x^k)\|^2$, πηγαίνουμε στο βήμα 7, διαφορετικά συνεχίζουμε στο επόμενο βήμα
6. Θέτουμε $m = m + 1$, $\eta = \frac{\eta_0}{2}$ και πηγαίνουμε στο βήμα 5
7. Θέτουμε $x^{k+1} = x^k - \eta \nabla f(x^k)$ και πηγαίνουμε στο βήμα 3
8. Τερματισμός μεθόδου και επιστροφή εξόδων

Εισαγωγή

- Αντιμετωπίζει το πρόβλημα ελαχιστοποίησης συναρτήσεων.

Εισαγωγή

- Αντιμετωπίζει το πρόβλημα ελαχιστοποίησης συναρτήσεων.
- Χρησιμοποιεί μέχρι και δεύτερες παραγώγους.

Εισαγωγή

- Αντιμετωπίζει το πρόβλημα ελαχιστοποίησης συναρτήσεων.
- Χρησιμοποιεί μέχρι και δεύτερες παραγώγους.
- Έχει καλύτερα αποτελέσματα από τη μέθοδος του Cauchy αν το αρχικό σημείο βρίσκεται κοντά στο ελάχιστο.

Εισαγωγή

- Αντιμετωπίζει το πρόβλημα ελαχιστοποίησης συναρτήσεων.
- Χρησιμοποιεί μέχρι και δεύτερες παραγώγους.
- Έχει καλύτερα αποτελέσματα από τη μέθοδος του Cauchy αν το αρχικό σημείο βρίσκεται κοντά στο ελάχιστο.
- Χρησιμοποιείται όταν
  1. το πλήθος των μεταβλητών του προβλήματος δεν είναι πολύ μεγάλο

Εισαγωγή

- Αντιμετωπίζει το πρόβλημα ελαχιστοποίησης συναρτήσεων.
- Χρησιμοποιεί μέχρι και δεύτερες παραγώγους.
- Έχει καλύτερα αποτελέσματα από τη μέθοδος του Cauchy αν το αρχικό σημείο βρίσκεται κοντά στο ελάχιστο.
- Χρησιμοποιείται όταν
    1. το πλήθος των μεταβλητών του προβλήματος δεν είναι πολύ μεγάλο
    2. η κλίση $\nabla f(x^k)$ και το Εσσιανό μητρώο $\nabla^2 f(x^k)$ της αντικειμενικής συνάρτησης είναι γνωστά και δίνονται αναλυτικά

Εισαγωγή

Περιγράφεται από τον τύπο

$$x^{k+1} = x^k - \lambda^k \nabla^2 f(x^k)^{-1} \nabla f(x^k), \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

όπου $\nabla^2 f$ είναι το Εσσιανό μητρώο και περιγράφεται ως

$$\nabla^2 f = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial xn} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial xn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

Γενική φιλοσοφία

- Κατασκευάζουμε μια τετραγωνική προσέγγιση της αντικειμενικής συνάρτησης που έχει ίδιες συναρτησιακές τιμές στην πρώτη και δεύτερη παράγωγο με την αντικειμενική μας συνάρτηση.

Γενική φιλοσοφία

- Κατασκευάζουμε μια τετραγωνική προσέγγιση της αντικειμενικής συνάρτησης που έχει ίδιες συναρτησιακές τιμές στην πρώτη και δεύτερη παράγωγο με την αντικειμενική μας συνάρτηση.
- Με δεδομένο ένα αρχικό σημείο, ελαχιστοποιούμε τη νέα συνάρτηση αντί για την αντικειμενική.

Γενική φιλοσοφία

- Κατασκευάζουμε μια τετραγωνική προσέγγιση της αντικειμενικής συνάρτησης που έχει ίδιες συναρτησιακές τιμές στην πρώτη και δεύτερη παράγωγο με την αντικειμενική μας συνάρτηση.
- Με δεδομένο ένα αρχικό σημείο, ελαχιστοποιούμε τη νέα συνάρτηση αντί για την αντικειμενική.
- Επιλέγουμε το σημείο που ελαχιστοποιεί την τετραγωνική συνάρτηση και το παίρνουμε ως αρχικό σημείο στην επόμενη επανάληψη

Γενική φιλοσοφία

- Κατασκευάζουμε μια τετραγωνική προσέγγιση της αντικειμενικής συνάρτησης που έχει ίδιες συναρτησιακές τιμές στην πρώτη και δεύτερη παράγωγο με την αντικειμενική μας συνάρτηση.
- Με δεδομένο ένα αρχικό σημείο, ελαχιστοποιούμε τη νέα συνάρτηση αντί για την αντικειμενική.
- Επιλέγουμε το σημείο που ελαχιστοποιεί την τετραγωνική συνάρτηση και το παίρνουμε ως αρχικό σημείο στην επόμενη επανάληψη
- Συνεχίζουμε ομοίως μέχρι να ενεργοποιηθεί το κριτήριο τερματισμού που εφαρμόσαμε

ΔΗΜΟΚΡΙΤΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΡΑΚΗΣ

Κατασκευή της μεθόδου (1/2)

- Από το ανάπτυγμα Taylor παίρνουμε μια τετραγωνική προσέγγιση της συνάρτησης f

$$g(x^k + d) \simeq f(x^k) + d^T \nabla f(x^k) + \frac{1}{2} d^T \nabla^2 f(x^k) d$$

Κατασκευή της μεθόδου (1/2)

- Από το ανάπτυγμα Taylor παίρνουμε μια τετραγωνική προσέγγιση της συνάρτησης f

$$g(x^k + d) \simeq f(x^k) + d^T \nabla f(x^k) + \frac{1}{2} d^T \nabla^2 f(x^k) d$$

- Αν το Εσσιανό μητρώο είναι θετικά ορισμένο, τότε μπορούμε να βρούμε την κατεύθυνση αναζήτησης του Newton.

Κατασκευή της μεθόδου (1/2)

- Από το ανάπτυγμα Taylor παίρνουμε μια τετραγωνική προσέγγιση της συνάρτησης f

$$g(x^k + d) \simeq f(x^k) + d^T \nabla f(x^k) + \frac{1}{2} d^T \nabla^2 f(x^k) d$$

- Αν το Εσσιανό μητρώο είναι θετικά ορισμένο, τότε μπορούμε να βρούμε την κατεύθυνση αναζήτησης του Newton.

Ορισμός

Ένα μητρώο καλείται θετικά ορισμένο όταν ισχύει κάτι από τα παρακάτω:

- Για κάθε διάνυσμα $x \neq 0$ ισχύει $x^T A x > 0$.
- Όλα τα κύρια υπομητρώα (πάνω αριστερά) $A[i = 1, i = 1], i = 1, 2, \cdots, n$ έχουν θετικές ορίζουσες.

Κατασκευή της μεθόδου (1/2)

- Από το ανάπτυγμα Taylor παίρνουμε μια τετραγωνική προσέγγιση της συνάρτησης f

$$g(x^k + d) \simeq f(x^k) + d^T \nabla f(x^k) + \frac{1}{2} d^T \nabla^2 f(x^k) d$$

- Αν το Εσσιανό μητρώο είναι θετικά ορισμένο, τότε μπορούμε να βρούμε την κατεύθυνση αναζήτησης του Newton.

Ορισμός

Ένα μητρώο καλείται θετικά ορισμένο όταν ισχύει κάτι από τα παρακάτω:

- Για κάθε διάνυσμα $x \neq 0$ ισχύει $x^T Ax > 0$.
- Όλα τα κύρια υπομητρώα (πάνω αριστερά) $A[i = 1, i = 1], i = 1, 2, \cdots, n$ έχουν θετικές ορίζουσες.

- Αντί για το ελάχιστο της f, θα αναζητήσουμε το ελάχιστο της g

Κατασκευή της μεθόδου (1/2)

- Από το ανάπτυγμα Taylor παίρνουμε μια τετραγωνική προσέγγιση της συνάρτησης f

$$g(x^k + d) \simeq f(x^k) + d^T \nabla f(x^k) + \frac{1}{2} d^T \nabla^2 f(x^k) d$$

- Αν το Εσσιανό μητρώο είναι θετικά ορισμένο, τότε μπορούμε να βρούμε την κατεύθυνση αναζήτησης του Newton.

Ορισμός

Ένα μητρώο καλείται θετικά ορισμένο όταν ισχύει κάτι από τα παρακάτω:

- Για κάθε διάνυσμα $x \neq 0$ ισχύει $x^T A x > 0$.
- Όλα τα κύρια υπομητρώα (πάνω αριστερά) $A[i = 1, i = 1], i = 1, 2, \cdots, n$ έχουν θετικές ορίζουσες.

- Αντί για το ελάχιστο της f, θα αναζητήσουμε το ελάχιστο της g
- Μηδενίζοντας την πρώτη παράγωγο για να πάρουμε τα κρίσιμα σημεία της συνάρτησης, έχουμε:

$$g'(x) = 0$$

Κατασκευή της μεθόδου (1/2)

- Από το ανάπτυγμα Taylor παίρνουμε μια τετραγωνική προσέγγιση της συνάρτησης f

$$g(x^k + d) \simeq f(x^k) + d^T \nabla f(x^k) + \frac{1}{2} d^T \nabla^2 f(x^k) d$$

- Αν το Εσσιανό μητρώο είναι θετικά ορισμένο, τότε μπορούμε να βρούμε την κατεύθυνση αναζήτησης του Newton.

Ορισμός

Ένα μητρώο καλείται θετικά ορισμένο όταν ισχύει κάτι από τα παρακάτω:

- Για κάθε διάνυσμα $x \neq 0$ ισχύει $x^T A x > 0$.
- Όλα τα κύρια υπομητρώα (πάνω αριστερά) $A[i = 1, i = 1], i = 1, 2, \cdots, n$ έχουν θετικές ορίζουσες.

- Αντί για το ελάχιστο της f, θα αναζητήσουμε το ελάχιστο της g
- Μηδενίζοντας την πρώτη παράγωγο για να πάρουμε τα κρίσιμα σημεία της συνάρτησης, έχουμε:

$$g'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \nabla f(x^k) + \nabla^2 f(x^k) d = 0$$

Κατασκευή της μεθόδου (2/2)

- Η κατεύθυνση αναζήτησης του Newton προκύπτει ως

$$\nabla^2 f(x^k)d = -\nabla f(x^k)$$

Κατασκευή της μεθόδου (2/2)

- Η κατεύθυνση αναζήτησης του Newton προκύπτει ως

$$\nabla^2 f(x^k) d = -\nabla f(x^k) \quad \Rightarrow \quad d = -(\nabla^2 f(x^k))^{-1} \nabla f(x^k)$$

Κατασκευή της μεθόδου (2/2)

- Η κατεύθυνση αναζήτησης του Newton προκύπτει ως

$$\nabla^2 f(x^k) d = -\nabla f(x^k) \quad \Rightarrow \quad d = -(\nabla^2 f(x^k))^{-1} \nabla f(x^k)$$

Πόρισμα

Αν το Εσσιανό μητρώο $\nabla^2 f(x^k)$ είναι θετικά ορισμένο, τότε η κατεύθυνση αναζήτησης του Newton αποτελεί κατεύθυνση μείωσης.

Κατασκευή της μεθόδου (2/2)

- Η κατεύθυνση αναζήτησης του Newton προκύπτει ως

$$\nabla^2 f(x^k)d = -\nabla f(x^k) \quad \Rightarrow \quad d = -(\nabla^2 f(x^k))^{-1}\nabla f(x^k)$$

Πόρισμα

Αν το Εσσιανό μητρώο $\nabla^2 f(x^k)$ είναι θετικά ορισμένο, τότε η κατεύθυνση αναζήτησης του Newton αποτελεί κατεύθυνση μείωσης.

- Η νέα προσέγγιση υπολογίζεται μέσω της σχέσης

$$x^{k+1} = x^k - \lambda^k \nabla^2 f(x^k)^{-1}\nabla f(x^k), \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Κατασκευή της μεθόδου (2/2)

- Η κατεύθυνση αναζήτησης του Newton προκύπτει ως

$$\nabla^2 f(x^k) d = -\nabla f(x^k) \quad \Rightarrow \quad d = -(\nabla^2 f(x^k))^{-1} \nabla f(x^k)$$

Πόρισμα

Αν το Εσσιανό μητρώο $\nabla^2 f(x^k)$ είναι θετικά ορισμένο, τότε η κατεύθυνση αναζήτησης του Newton αποτελεί κατεύθυνση μείωσης.

- Η νέα προσέγγιση υπολογίζεται μέσω της σχέσης

$$x^{k+1} = x^k - \lambda^k \nabla^2 f(x^k)^{-1} \nabla f(x^k), \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Κλασσική μορφή Newton ($\lambda^k = 1$)

$$x^{k+1} = x^k - \nabla^2 f(x^k)^{-1} \nabla f(x^k), \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Αλγόριθμος (1/2)

- Είσοδοι

Αλγόριθμος (1/2)

- Είσοδοι
  - n το πλήθος των μεταβλητών της αντικειμενικής συνάρτησης

Αλγόριθμος (1/2)

- Είσοδοι
  - n το πλήθος των μεταβλητών της αντικειμενικής συνάρτησης
  - $f(x)$ ο τύπος της συνάρτησης

Αλγόριθμος (1/2)

- Είσοδοι
  - n το πλήθος των μεταβλητών της αντικειμενικής συνάρτησης
  - $f(x)$ ο τύπος της συνάρτησης
  - $\nabla f(x)$ η κλίση της συνάρτησης

Αλγόριθμος (1/2)

- Είσοδοι
  - n το πλήθος των μεταβλητών της αντικειμενικής συνάρτησης
  - $f(x)$ ο τύπος της συνάρτησης
  - $\nabla f(x)$ η κλίση της συνάρτησης
  - x_0 η αρχική προσέγγιση της ρίζας

Αλγόριθμος (1/2)

- Είσοδοι
  - n το πλήθος των μεταβλητών της αντικειμενικής συνάρτησης
  - $f(x)$ ο τύπος της συνάρτησης
  - $\nabla f(x)$ η κλίση της συνάρτησης
  - x_0 η αρχική προσέγγιση της ρίζας
  - MIT το μέγιστο πλήθος επαναλήψεων της μεθόδου

Αλγόριθμος (1/2)

- Είσοδοι
  - n το πλήθος των μεταβλητών της αντικειμενικής συνάρτησης
  - $f(x)$ ο τύπος της συνάρτησης
  - $\nabla f(x)$ η κλίση της συνάρτησης
  - x_0 η αρχική προσέγγιση της ρίζας
  - MIT το μέγιστο πλήθος επαναλήψεων της μεθόδου
  - ϵ_1 η ακρίβεια που θέτουμε για τη νόρμα της κλίσης

Αλγόριθμος (1/2)

- Είσοδοι
    - n το πλήθος των μεταβλητών της αντικειμενικής συνάρτησης
    - $f(x)$ ο τύπος της συνάρτησης
    - $\nabla f(x)$ η κλίση της συνάρτησης
    - x_0 η αρχική προσέγγιση της ρίζας
    - MIT το μέγιστο πλήθος επαναλήψεων της μεθόδου
    - ϵ_1 η ακρίβεια που θέτουμε για τη νόρμα της κλίσης
    - ϵ_2 η ακρίβεια που θέτουμε για τη νόρμα δυο διαδοχικών προσεγγίσεων

Αλγόριθμος (1/2)

- Είσοδοι
  - n το πλήθος των μεταβλητών της αντικειμενικής συνάρτησης
  - $f(x)$ ο τύπος της συνάρτησης
  - $\nabla f(x)$ η κλίση της συνάρτησης
  - x_0 η αρχική προσέγγιση της ρίζας
  - MIT το μέγιστο πλήθος επαναλήψεων της μεθόδου
  - ϵ_1 η ακρίβεια που θέτουμε για τη νόρμα της κλίσης
  - ϵ_2 η ακρίβεια που θέτουμε για τη νόρμα δυο διαδοχικών προσεγγίσεων
  - $\nabla^2 f(x)$ το Εσσιανό μητρώο της συνάρτησης

Αλγόριθμος (1/2)

- Είσοδοι
  - n το πλήθος των μεταβλητών της αντικειμενικής συνάρτησης
  - $f(x)$ ο τύπος της συνάρτησης
  - $\nabla f(x)$ η κλίση της συνάρτησης
  - x_0 η αρχική προσέγγιση της ρίζας
  - MIT το μέγιστο πλήθος επαναλήψεων της μεθόδου
  - ϵ_1 η ακρίβεια που θέτουμε για τη νόρμα της κλίσης
  - ϵ_2 η ακρίβεια που θέτουμε για τη νόρμα δυο διαδοχικών προσεγγίσεων
  - $\nabla^2 f(x)$ το Εσσιανό μητρώο της συνάρτησης
- Έξοδοι

Αλγόριθμος (1/2)

- Είσοδοι
  - n το πλήθος των μεταβλητών της αντικειμενικής συνάρτησης
  - $f(x)$ ο τύπος της συνάρτησης
  - $\nabla f(x)$ η κλίση της συνάρτησης
  - x_0 η αρχική προσέγγιση της ρίζας
  - MIT το μέγιστο πλήθος επαναλήψεων της μεθόδου
  - ϵ_1 η ακρίβεια που θέτουμε για τη νόρμα της κλίσης
  - ϵ_2 η ακρίβεια που θέτουμε για τη νόρμα δυο διαδοχικών προσεγγίσεων
  - $\nabla^2 f(x)$ το Εσσιανό μητρώο της συνάρτησης
- Έξοδοι
  - k η τρέχουσα επανάληψη

Αλγόριθμος (1/2)

- Είσοδοι
  - n το πλήθος των μεταβλητών της αντικειμενικής συνάρτησης
  - $f(x)$ ο τύπος της συνάρτησης
  - $\nabla f(x)$ η κλίση της συνάρτησης
  - x_0 η αρχική προσέγγιση της ρίζας
  - MIT το μέγιστο πλήθος επαναλήψεων της μεθόδου
  - ϵ_1 η ακρίβεια που θέτουμε για τη νόρμα της κλίσης
  - ϵ_2 η ακρίβεια που θέτουμε για τη νόρμα δυο διαδοχικών προσεγγίσεων
  - $\nabla^2 f(x)$ το Εσσιανό μητρώο της συνάρτησης
- Έξοδοι
  - k η τρέχουσα επανάληψη
  - x^k η τελευταία προσέγγιση της ρίζας

Αλγόριθμος (1/2)

- Είσοδοι
  - n το πλήθος των μεταβλητών της αντικειμενικής συνάρτησης
  - $f(x)$ ο τύπος της συνάρτησης
  - $\nabla f(x)$ η κλίση της συνάρτησης
  - x_0 η αρχική προσέγγιση της ρίζας
  - MIT το μέγιστο πλήθος επαναλήψεων της μεθόδου
  - ϵ_1 η ακρίβεια που θέτουμε για τη νόρμα της κλίσης
  - ϵ_2 η ακρίβεια που θέτουμε για τη νόρμα δυο διαδοχικών προσεγγίσεων
  - $\nabla^2 f(x)$ το Εσσιανό μητρώο της συνάρτησης
- Έξοδοι
  - k η τρέχουσα επανάληψη
  - x^k η τελευταία προσέγγιση της ρίζας
  - $f(x^k)$ η τιμή της συνάρτησης στην k επανάληψη

Αλγόριθμος (1/2)

- Είσοδοι
  - n το πλήθος των μεταβλητών της αντικειμενικής συνάρτησης
  - $f(x)$ ο τύπος της συνάρτησης
  - $\nabla f(x)$ η κλίση της συνάρτησης
  - x_0 η αρχική προσέγγιση της ρίζας
  - MIT το μέγιστο πλήθος επαναλήψεων της μεθόδου
  - ϵ_1 η ακρίβεια που θέτουμε για τη νόρμα της κλίσης
  - ϵ_2 η ακρίβεια που θέτουμε για τη νόρμα δυο διαδοχικών προσεγγίσεων
  - $\nabla^2 f(x)$ το Εσσιανό μητρώο της συνάρτησης
- Έξοδοι
  - k η τρέχουσα επανάληψη
  - x^k η τελευταία προσέγγιση της ρίζας
  - $f(x^k)$ η τιμή της συνάρτησης στην k επανάληψη
  - $\|\nabla f(x^k)\|$ η τρέχουσα τιμή της νόρμας της κλίσης
  - $\nabla^2 f(x^k)$ η τρέχουσα τιμή του Εσσιανού μητρώου

Αλγόριθμος (2/2)

1. Καθορισμός εισόδων μεθόδου

Αλγόριθμος (2/2)

1. Καθορισμός εισόδων μεθόδου
2. Θέτουμε $k = -1$

Αλγόριθμος (2/2)

1. Καθορισμός εισόδων μεθόδου
2. Θέτουμε $k = -1$
3. Ελέγχουμε αν $k > MIT$, αν δεν ισχύει, αυξάνουμε το k και συνεχίζουμε στο επόμενο βήμα, διαφορετικά πηγαίνουμε στο βήμα 9

Αλγόριθμος (2/2)

1. Καθορισμός εισόδων μεθόδου
2. Θέτουμε $k = -1$
3. Ελέγχουμε αν $k > MIT$, αν δεν ισχύει, αυξάνουμε το k και συνεχίζουμε στο επόμενο βήμα, διαφορετικά πηγαίνουμε στο βήμα 9
4. Ελέγχουμε αν $\|\nabla f(x^k)\| \leq \epsilon_1$, αν δεν ισχύει, συνεχίζουμε στο επόμενο βήμα, διαφορετικά πηγαίνουμε στο βήμα 9

Αλγόριθμος (2/2)

1. Καθορισμός εισόδων μεθόδου
2. Θέτουμε $k = -1$
3. Ελέγχουμε αν $k > MIT$, αν δεν ισχύει, αυξάνουμε το k και συνεχίζουμε στο επόμενο βήμα, διαφορετικά πηγαίνουμε στο βήμα 9
4. Ελέγχουμε αν $\|\nabla f(x^k)\| \leq \epsilon_1$, αν δεν ισχύει, συνεχίζουμε στο επόμενο βήμα, διαφορετικά πηγαίνουμε στο βήμα 9
5. Υπολογίζουμε την κατεύθυνση μείωσης του Newton επιλύοντας το γραμμικό σύστημα $\nabla^2 f(x^k) d_N^k = -\nabla f(x^k)$ και συνεχίζουμε στο επόμενο βήμα

Αλγόριθμος (2/2)

1. Καθορισμός εισόδων μεθόδου
2. Θέτουμε $k = -1$
3. Ελέγχουμε αν $k > MIT$, αν δεν ισχύει, αυξάνουμε το k και συνεχίζουμε στο επόμενο βήμα, διαφορετικά πηγαίνουμε στο βήμα 9
4. Ελέγχουμε αν $\|\nabla f(x^k)\| \leq \epsilon_1$, αν δεν ισχύει, συνεχίζουμε στο επόμενο βήμα, διαφορετικά πηγαίνουμε στο βήμα 9
5. Υπολογίζουμε την κατεύθυνση μείωσης του Newton επιλύοντας το γραμμικό σύστημα $\nabla^2 f(x^k) d_N^k = -\nabla f(x^k)$ και συνεχίζουμε στο επόμενο βήμα
6. Εκτελούμε μια ευθύγραμμη αναζήτηση κατά τη διεύθυνση d_N^k προκειμένου να βρεθεί ένα επιθυμητό μήκος βήματος λ^k και πηγαίνουμε στο επόμενο βήμα

Αλγόριθμος (2/2)

1. Καθορισμός εισόδων μεθόδου
2. Θέτουμε $k = -1$
3. Ελέγχουμε αν $k > MIT$, αν δεν ισχύει, αυξάνουμε το k και συνεχίζουμε στο επόμενο βήμα, διαφορετικά πηγαίνουμε στο βήμα 9
4. Ελέγχουμε αν $\|\nabla f(x^k)\| \leq \epsilon_1$, αν δεν ισχύει, συνεχίζουμε στο επόμενο βήμα, διαφορετικά πηγαίνουμε στο βήμα 9
5. Υπολογίζουμε την κατεύθυνση μείωσης του Newton επιλύοντας το γραμμικό σύστημα $\nabla^2 f(x^k) d_N^k = -\nabla f(x^k)$ και συνεχίζουμε στο επόμενο βήμα
6. Εκτελούμε μια ευθύγραμμη αναζήτηση κατά τη διεύθυνση d_N^k προκειμένου να βρεθεί ένα επιθυμητό μήκος βήματος λ^k και πηγαίνουμε στο επόμενο βήμα
7. Θέτουμε $x^{k+1} = x^k + \lambda^k d_N^k$ και πηγαίνουμε στο επόμενο βήμα

Αλγόριθμος (2/2)

1. Καθορισμός εισόδων μεθόδου
2. Θέτουμε $k = -1$
3. Ελέγχουμε αν $k > MIT$, αν δεν ισχύει, αυξάνουμε το k και συνεχίζουμε στο επόμενο βήμα, διαφορετικά πηγαίνουμε στο βήμα 9
4. Ελέγχουμε αν $\|\nabla f(x^k)\| \leq \epsilon_1$, αν δεν ισχύει, συνεχίζουμε στο επόμενο βήμα, διαφορετικά πηγαίνουμε στο βήμα 9
5. Υπολογίζουμε την κατεύθυνση μείωσης του Newton επιλύοντας το γραμμικό σύστημα $\nabla^2 f(x^k) d_N^k = -\nabla f(x^k)$ και συνεχίζουμε στο επόμενο βήμα
6. Εκτελούμε μια ευθύγραμμη αναζήτηση κατά τη διεύθυνση d_N^k προκειμένου να βρεθεί ένα επιθυμητό μήκος βήματος λ^k και πηγαίνουμε στο επόμενο βήμα
7. Θέτουμε $x^{k+1} = x^k + \lambda^k d_N^k$ και πηγαίνουμε στο επόμενο βήμα
8. Ελέγχουμε αν $\|x^{k+1} - x^k\| \leq \epsilon_2$, αν δεν ισχύει, συνεχίζουμε στο επόμενο βήμα, διαφορετικά πηγαίνουμε στο βήμα 3

Αλγόριθμος (2/2)

1. Καθορισμός εισόδων μεθόδου
2. Θέτουμε $k = -1$
3. Ελέγχουμε αν $k > MIT$, αν δεν ισχύει, αυξάνουμε το k και συνεχίζουμε στο επόμενο βήμα, διαφορετικά πηγαίνουμε στο βήμα 9
4. Ελέγχουμε αν $\|\nabla f(x^k)\| \leq \epsilon_1$, αν δεν ισχύει, συνεχίζουμε στο επόμενο βήμα, διαφορετικά πηγαίνουμε στο βήμα 9
5. Υπολογίζουμε την κατεύθυνση μείωσης του Newton επιλύοντας το γραμμικό σύστημα $\nabla^2 f(x^k) d_N^k = -\nabla f(x^k)$ και συνεχίζουμε στο επόμενο βήμα
6. Εκτελούμε μια ευθύγραμμη αναζήτηση κατά τη διεύθυνση d_N^k προκειμένου να βρεθεί ένα επιθυμητό μήκος βήματος λ^k και πηγαίνουμε στο επόμενο βήμα
7. Θέτουμε $x^{k+1} = x^k + \lambda^k d_N^k$ και πηγαίνουμε στο επόμενο βήμα
8. Ελέγχουμε αν $\|x^{k+1} - x^k\| \leq \epsilon_2$, αν δεν ισχύει, συνεχίζουμε στο επόμενο βήμα, διαφορετικά πηγαίνουμε στο βήμα 3
9. Τερματισμός μεθόδου και επιστροφή εξόδων

Βιβλιογραφία - Αναφορές

- Γραββάνης Γ., Επιστημονικοί υπολογισμοί: Υπολογιστικές μέθοδοι και μαθηματικό λογισμικό, Παπασωτηρίου, 2013.
- Ακρίβης Γ.Δ., Δουγάλης Β.Α., Εισαγωγή στην αριθμητική ανάλυση, Πανεπιστημιακές εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο, 1997.
- Βραχάτης Μ.Ν., Αριθμητική ανάλυση: Εισαγωγή, Εκδόσεις Κλειδάριθμος, Αθήνα, 2011.
- Βραχάτης Μ.Ν., Αριθμητική Ανάλυση: Υπερβατικές Εξισώσεις, Εκδόσεις Κλειδάριθμος, Αθήνα, 2012.
- Νικόλαος Μισυρλής. Αριθμητική Ανάλυση: Μια Αλγοριθμική Προσέγγιση. Εκδόσεις: Εκδοτική ΕΚΠΑ 2017. Εύδοξος Αριθμητική Ανάλυση

ΔΗΜΟΚΡΙΤΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΡΑΚΗΣ

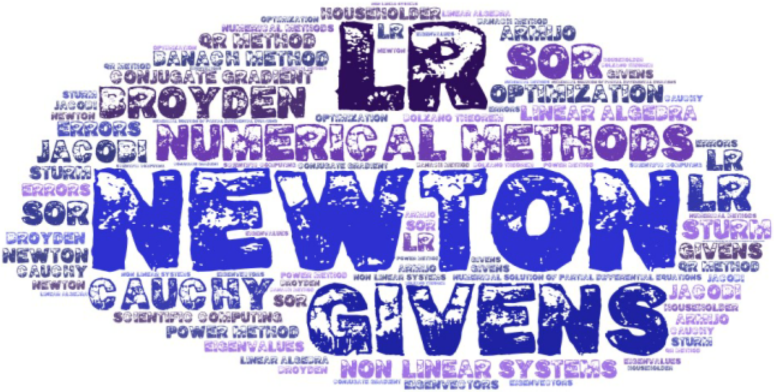
Βιβλιογραφία - Αναφορές

- Gerald, Curtis F, Applied numerical analysis. Pearson Education India, 2004.
- Atkinson, Kendall E, An introduction to numerical analysis. John wiley & sons, 2008.
- Burden, Richard L and Faires, J Douglas, Numerical Analysis, Brooks, Cole, Belmont, CA, 1997.
- Phillips, George M and Taylor, Peter J, Theory and applications of numerical analysis. Elsevier, 1996.
- Davis, Philip J and Rabinowitz, Philip, Methods of numerical integration. Courier Corporation, 2007.

Βιβλιογραφία - Αναφορές

- Herniter, Marc E, Programming in MATLAB. Brooks/Cole Publishing Co., 2000.
- Wolfram, Stephen and others, The MATHEMATICA® book, version 4. Cambridge university press, 1999.
- Gene H. Golub, Charles F. Van Loan, Θεωρία και Υπολογισμοί Μητρώων, Εκδόσεις Πεδίο, 2015.
- Λ. Trefethen, D. Bau, Numerical Linear Algebra, SIAM 1997.
- Β. Δουγαλής, Δ. Νούτσος, Α. Χατζηδήμος, Αριθμητική Γραμμική Άλγεβρα, Πανεπιστημιακές σημειώσεις, Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων.

Σας ευχαριστώ πολύ για την προσοχή σας!



ΔΗΜΟΚΡΙΤΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΡΑΚΗΣ