Επιστημονικοί Υπολογισμοί

Αριθμητική Επίλυση συστημάτων μη-γραμμικών εξισώσεων - Μη γραμμικές μέθοδοι

Σταμάτιος-Άγγελος Ν. Αλεξανδρόπουλος
e-mail: stalexan@ee.duth.gr

https://www.researchgate.net/profile/Stamatios_Aggelos_Alexandropoulos
https://scholar.google.gr/citations?user=mht7W_YAAAAJ&hl=el
http://cilab.math.upatras.gr

Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών & Μηχανικών Υπολογιστών
Δημοκρίτειο Πανεπιστήμιο Θράκης
Κιμμέρια 67100, Ξάνθη

ΔΗΜΟΚΡΙΤΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΡΑΚΗΣ

30 Μαρτίου 2021

Περιεχόμενα I

επίλυση εξίσωσης ⇔ εύρεση σταθερών σημείων

Το πρόβλημα της επίλυσης εξισώσεων σχετίζεται με το πρόβλημα του υπολογισμού σταθερών σημείων μιας συνάρτησης.

επίλυση εξίσωσης ⇔ εύρεση σταθερών σημείων

Το πρόβλημα της επίλυσης εξισώσεων σχετίζεται με το πρόβλημα του υπολογισμού σταθερών σημείων μιας συνάρτησης.

Το πρόβλημα υπολογισμού σταθερών σημείων

Δεδομένης της $f : [a, b] \subset R \to R$
να βρεθεί κάποιο σημείο $r \in (a, b)$ τέτοιο ώστε $f(r) = r$

επίλυση εξίσωσης $\Leftrightarrow$ εύρεση σταθερών σημείων

Το πρόβλημα της επίλυσης εξισώσεων σχετίζεται με το πρόβλημα του υπολογισμού σταθερών σημείων μιας συνάρτησης.

Το πρόβλημα υπολογισμού σταθερών σημείων

Δεδομένης της $f : [a, b] \subset R \rightarrow R$
να βρεθεί κάποιο σημείο $r \in (a, b)$ τέτοιο ώστε $f(r) = r$

- επίλυση εξίσωσης $\Rightarrow$ εύρεση σταθερών σημείων

επίλυση εξίσωσης $\Leftrightarrow$ εύρεση σταθερών σημείων

Το πρόβλημα της επίλυσης εξισώσεων σχετίζεται με το πρόβλημα του υπολογισμού σταθερών σημείων μιας συνάρτησης.

Το πρόβλημα υπολογισμού σταθερών σημείων

Δεδομένης της $f : [a, b] \subset R \to R$
να βρεθεί κάποιο σημείο $r \in (a, b)$ τέτοιο ώστε $f(r) = r$

- επίλυση εξίσωσης $\Rightarrow$ εύρεση σταθερών σημείων
    1. με κάποια αριθμητική μέθοδο θέλουμε να επιλύσουμε την $f(x) = 0$

επίλυση εξίσωσης $\Leftrightarrow$ εύρεση σταθερών σημείων

Το πρόβλημα της επίλυσης εξισώσεων σχετίζεται με το πρόβλημα του υπολογισμού σταθερών σημείων μιας συνάρτησης.

Το πρόβλημα υπολογισμού σταθερών σημείων

Δεδομένης της $f : [a, b] \subset R \to R$
να βρεθεί κάποιο σημείο $r \in (a, b)$ τέτοιο ώστε $f(r) = r$

- επίλυση εξίσωσης $\Rightarrow$ εύρεση σταθερών σημείων
    1. με κάποια αριθμητική μέθοδο θέλουμε να επιλύσουμε την $f(x) = 0$
    2. επιλύουμε την $f(x) = g(x) - x$ και βρίσκουμε τη λύση r

επίλυση εξίσωσης $\Leftrightarrow$ εύρεση σταθερών σημείων

Το πρόβλημα της επίλυσης εξισώσεων σχετίζεται με το πρόβλημα του υπολογισμού σταθερών σημείων μιας συνάρτησης.

Το πρόβλημα υπολογισμού σταθερών σημείων

Δεδομένης της $f : [a, b] \subset R \to R$
να βρεθεί κάποιο σημείο $r \in (a, b)$ τέτοιο ώστε $f(r) = r$

- επίλυση εξίσωσης $\Rightarrow$ εύρεση σταθερών σημείων
  1. με κάποια αριθμητική μέθοδο θέλουμε να επιλύσουμε την $f(x) = 0$
  2. επιλύουμε την $f(x) = g(x) - x$ και βρίσκουμε τη λύση r
  3. επειδή $f(r) = 0$

επίλυση εξίσωσης $\Leftrightarrow$ εύρεση σταθερών σημείων

Το πρόβλημα της επίλυσης εξισώσεων σχετίζεται με το πρόβλημα του υπολογισμού σταθερών σημείων μιας συνάρτησης.

Το πρόβλημα υπολογισμού σταθερών σημείων

Δεδομένης της $f : [a, b] \subset R \to R$
να βρεθεί κάποιο σημείο $r \in (a, b)$ τέτοιο ώστε $f(r) = r$

- επίλυση εξίσωσης $\Rightarrow$ εύρεση σταθερών σημείων
  1. με κάποια αριθμητική μέθοδο θέλουμε να επιλύσουμε την $f(x) = 0$
  2. επιλύουμε την $f(x) = g(x) - x$ και βρίσκουμε τη λύση r
  3. επειδή $f(r) = 0 \Rightarrow g(r) - r = 0$

επίλυση εξίσωσης $\Leftrightarrow$ εύρεση σταθερών σημείων

Το πρόβλημα της επίλυσης εξισώσεων σχετίζεται με το πρόβλημα του υπολογισμού σταθερών σημείων μιας συνάρτησης.

Το πρόβλημα υπολογισμού σταθερών σημείων

Δεδομένης της $f : [a, b] \subset R \to R$
να βρεθεί κάποιο σημείο $r \in (a, b)$ τέτοιο ώστε $f(r) = r$

- επίλυση εξίσωσης $\Rightarrow$ εύρεση σταθερών σημείων
  1. με κάποια αριθμητική μέθοδο θέλουμε να επιλύσουμε την $f(x) = 0$
  2. επιλύουμε την $f(x) = g(x) - x$ και βρίσκουμε τη λύση r
  3. επειδή $f(r) = 0 \Rightarrow g(r) - r = 0 \ \Rightarrow g(r) = r$

επίλυση εξίσωσης ⇔ εύρεση σταθερών σημείων

Το πρόβλημα της επίλυσης εξισώσεων σχετίζεται με το πρόβλημα του υπολογισμού σταθερών σημείων μιας συνάρτησης.

Το πρόβλημα υπολογισμού σταθερών σημείων

Δεδομένης της $f : [a, b] \subset R \to R$
να βρεθεί κάποιο σημείο $r \in (a, b)$ τέτοιο ώστε $f(r) = r$

- επίλυση εξίσωσης ⇒ εύρεση σταθερών σημείων
  1. με κάποια αριθμητική μέθοδο θέλουμε να επιλύσουμε την $f(x) = 0$
  2. επιλύουμε την $f(x) = g(x) - x$ και βρίσκουμε τη λύση r
  3. επειδή $f(r) = 0 \Rightarrow g(r) - r = 0 \ \Rightarrow g(r) = r$
  4. το r είναι σταθερό σημείο της $g(x)$

επίλυση εξίσωσης $\Leftrightarrow$ εύρεση σταθερών σημείων

Το πρόβλημα της επίλυσης εξισώσεων σχετίζεται με το πρόβλημα του υπολογισμού σταθερών σημείων μιας συνάρτησης.

Το πρόβλημα υπολογισμού σταθερών σημείων

Δεδομένης της $f : [a, b] \subset R \rightarrow R$
να βρεθεί κάποιο σημείο $r \in (a, b)$ τέτοιο ώστε $f(r) = r$

- επίλυση εξίσωσης $\Rightarrow$ εύρεση σταθερών σημείων
    1. με κάποια αριθμητική μέθοδο θέλουμε να επιλύσουμε την $f(x) = 0$
    2. επιλύουμε την $f(x) = g(x) - x$ και βρίσκουμε τη λύση r
    3. επειδή $f(r) = 0 \Rightarrow g(r) - r = 0 \ \Rightarrow g(r) = r$
    4. το r είναι σταθερό σημείο της $g(x)$
- εύρεση σταθερών σημείων $\Rightarrow$ επίλυση εξίσωσης

επίλυση εξίσωσης ⇔ εύρεση σταθερών σημείων

Το πρόβλημα της επίλυσης εξισώσεων σχετίζεται με το πρόβλημα του υπολογισμού σταθερών σημείων μιας συνάρτησης.

Το πρόβλημα υπολογισμού σταθερών σημείων

Δεδομένης της $f : [a, b] \subset R \to R$
να βρεθεί κάποιο σημείο $r \in (a, b)$ τέτοιο ώστε $f(r) = r$

- επίλυση εξίσωσης ⇒ εύρεση σταθερών σημείων
  1. με κάποια αριθμητική μέθοδο θέλουμε να επιλύσουμε την $f(x) = 0$
  2. επιλύουμε την $f(x) = g(x) - x$ και βρίσκουμε τη λύση r
  3. επειδή $f(r) = 0 \Rightarrow g(r) - r = 0 \ \Rightarrow g(r) = r$
  4. το r είναι σταθερό σημείο της $g(x)$
- εύρεση σταθερών σημείων ⇒ επίλυση εξίσωσης
  1. με κάποια αριθμητική μέθοδο θέλουμε να βρούμε ένα σταθερό σημείο για την $g(x)$

επίλυση εξίσωσης $\Leftrightarrow$ εύρεση σταθερών σημείων

Το πρόβλημα της επίλυσης εξισώσεων σχετίζεται με το πρόβλημα του υπολογισμού σταθερών σημείων μιας συνάρτησης.

Το πρόβλημα υπολογισμού σταθερών σημείων

Δεδομένης της $f : [a, b] \subset R \to R$
να βρεθεί κάποιο σημείο $r \in (a, b)$ τέτοιο ώστε $f(r) = r$

- επίλυση εξίσωσης $\Rightarrow$ εύρεση σταθερών σημείων
  1. με κάποια αριθμητική μέθοδο θέλουμε να επιλύσουμε την $f(x) = 0$
  2. επιλύουμε την $f(x) = g(x) - x$ και βρίσκουμε τη λύση r
  3. επειδή $f(r) = 0 \Rightarrow g(r) - r = 0 \ \Rightarrow g(r) = r$
  4. το r είναι σταθερό σημείο της $g(x)$
- εύρεση σταθερών σημείων $\Rightarrow$ επίλυση εξίσωσης
  1. με κάποια αριθμητική μέθοδο θέλουμε να βρούμε ένα σταθερό σημείο για την $g(x)$
  2. ψάχνουμε $g(x) = x$

επίλυση εξίσωσης $\Leftrightarrow$ εύρεση σταθερών σημείων

Το πρόβλημα της επίλυσης εξισώσεων σχετίζεται με το πρόβλημα του υπολογισμού σταθερών σημείων μιας συνάρτησης.

Το πρόβλημα υπολογισμού σταθερών σημείων

Δεδομένης της $f : [a, b] \subset R \to R$
να βρεθεί κάποιο σημείο $r \in (a, b)$ τέτοιο ώστε $f(r) = r$

- επίλυση εξίσωσης $\Rightarrow$ εύρεση σταθερών σημείων
  1. με κάποια αριθμητική μέθοδο θέλουμε να επιλύσουμε την $f(x) = 0$
  2. επιλύουμε την $f(x) = g(x) - x$ και βρίσκουμε τη λύση r
  3. επειδή $f(r) = 0 \Rightarrow g(r) - r = 0 \ \Rightarrow g(r) = r$
  4. το r είναι σταθερό σημείο της $g(x)$
- εύρεση σταθερών σημείων $\Rightarrow$ επίλυση εξίσωσης
  1. με κάποια αριθμητική μέθοδο θέλουμε να βρούμε ένα σταθερό σημείο για την $g(x)$
  2. ψάχνουμε $g(x) = x$
  3. επειδή $g(x) - x = 0$, ,

ΔΗΜΟΚΡΙΤΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΡΑΚΗΣ

επίλυση εξίσωσης ⇔ εύρεση σταθερών σημείων

Το πρόβλημα της επίλυσης εξισώσεων σχετίζεται με το πρόβλημα του υπολογισμού σταθερών σημείων μιας συνάρτησης.

Το πρόβλημα υπολογισμού σταθερών σημείων

Δεδομένης της $f : [a, b] \subset R \rightarrow R$
να βρεθεί κάποιο σημείο $r \in (a, b)$ τέτοιο ώστε $f(r) = r$

- επίλυση εξίσωσης ⇒ εύρεση σταθερών σημείων
  1. με κάποια αριθμητική μέθοδο θέλουμε να επιλύσουμε την $f(x) = 0$
  2. επιλύουμε την $f(x) = g(x) - x$ και βρίσκουμε τη λύση r
  3. επειδή $f(r) = 0 \Rightarrow g(r) - r = 0 \;\Rightarrow g(r) = r$
  4. το r είναι σταθερό σημείο της $g(x)$
- εύρεση σταθερών σημείων ⇒ επίλυση εξίσωσης
  1. με κάποια αριθμητική μέθοδο θέλουμε να βρούμε ένα σταθερό σημείο για την $g(x)$
  2. ψάχνουμε $g(x) = x$
  3. επειδή $g(x) - x = 0$, θέτουμε $f(x) = g(x) - x$,

ΔΗΜΟΚΡΙΤΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΡΑΚΗΣ

επίλυση εξίσωσης ⇔ εύρεση σταθερών σημείων

Το πρόβλημα της επίλυσης εξισώσεων σχετίζεται με το πρόβλημα του υπολογισμού σταθερών σημείων μιας συνάρτησης.

Το πρόβλημα υπολογισμού σταθερών σημείων

Δεδομένης της $f : [a, b] \subset R \to R$
να βρεθεί κάποιο σημείο $r \in (a, b)$ τέτοιο ώστε $f(r) = r$

- επίλυση εξίσωσης ⇒ εύρεση σταθερών σημείων
  1. με κάποια αριθμητική μέθοδο θέλουμε να επιλύσουμε την $f(x) = 0$
  2. επιλύουμε την $f(x) = g(x) - x$ και βρίσκουμε τη λύση r
  3. επειδή $f(r) = 0 \Rightarrow g(r) - r = 0 \ \Rightarrow g(r) = r$
  4. το r είναι σταθερό σημείο της $g(x)$
- εύρεση σταθερών σημείων ⇒ επίλυση εξίσωσης
  1. με κάποια αριθμητική μέθοδο θέλουμε να βρούμε ένα σταθερό σημείο για την $g(x)$
  2. ψάχνουμε $g(x) = x$
  3. επειδή $g(x) - x = 0$, θέτουμε $f(x) = g(x) - x$, καταλήγουμε $f(x) = 0$

Θεώρημα (Ύπαρξη σταθερών σημείων)

Αν η συνάρτηση $g : [a, b] \subset R \to [a, b]$ είναι συνεχής στο διάστημα $[a, b]$, τότε η g έχει ένα σταθερό σημείο στο $[a, b]$.

Θεώρημα (Ύπαρξη σταθερών σημείων)

Αν η συνάρτηση $g : [a, b] \subset R \to [a, b]$ είναι συνεχής στο διάστημα $[a, b]$, τότε η g έχει ένα σταθερό σημείο στο $[a, b]$.

Θεώρημα (Μοναδικότητα σταθερών σημείων)

Αν υπάρχει η πρώτη παράγωγος $g^{'}(x)$ της συνάρτησης g στο (a, b) και υπάρχει μια σταθερά $p < 1$ τέτοια ώστε να ισχύει

$$\left|g^{'}(x)\right| \leq p, \quad \text{για όλα τα } x \in (a, b)$$

τότε το σταθερό σημείο που ανήκει στο $[a, b]$ είναι μοναδικό.

Θεώρημα (Ύπαρξη σταθερών σημείων)

Αν η συνάρτηση $g : [a, b] \subset R \to [a, b]$ είναι συνεχής στο διάστημα $[a, b]$, τότε η g έχει ένα σταθερό σημείο στο $[a, b]$.

Θεώρημα (Μοναδικότητα σταθερών σημείων)

Αν υπάρχει η πρώτη παράγωγος $g^{'}(x)$ της συνάρτησης g στο (a, b) και υπάρχει μια σταθερά $p < 1$ τέτοια ώστε να ισχύει

$$\left|g^{'}(x)\right| \leq p, \quad \text{για όλα τα } x \in (a, b)$$

τότε το σταθερό σημείο που ανήκει στο $[a, b]$ είναι μοναδικό.

Γενική επαναληπτική μέθοδος

- Μπορούμε να προσεγγίσουμε ένα σταθερό σημείο της συνάρτησης $g(x)$

Θεώρημα (Ύπαρξη σταθερών σημείων)

Αν η συνάρτηση $g : [a, b] \subset R \to [a, b]$ είναι συνεχής στο διάστημα $[a, b]$, τότε η g έχει ένα σταθερό σημείο στο $[a, b]$.

Θεώρημα (Μοναδικότητα σταθερών σημείων)

Αν υπάρχει η πρώτη παράγωγος $g^{'}(x)$ της συνάρτησης g στο (a, b) και υπάρχει μια σταθερά $p < 1$ τέτοια ώστε να ισχύει

$$\left|g^{'}(x)\right| \leq p, \quad \text{για όλα τα } x \in (a, b)$$

τότε το σταθερό σημείο που ανήκει στο $[a, b]$ είναι μοναδικό.

Γενική επαναληπτική μέθοδος

- Μπορούμε να προσεγγίσουμε ένα σταθερό σημείο της συνάρτησης $g(x)$
- επιλέγοντας μια αρχική προσέγγιση x_0

Θεώρημα (Ύπαρξη σταθερών σημείων)

Αν η συνάρτηση $g : [a, b] \subset R \to [a, b]$ είναι συνεχής στο διάστημα $[a, b]$, τότε η g έχει ένα σταθερό σημείο στο $[a, b]$.

Θεώρημα (Μοναδικότητα σταθερών σημείων)

Αν υπάρχει η πρώτη παράγωγος $g'(x)$ της συνάρτησης g στο (a, b) και υπάρχει μια σταθερά $p < 1$ τέτοια ώστε να ισχύει

$$\left|g'(x)\right| \leq p, \quad \text{για όλα τα } x \in (a, b)$$

τότε το σταθερό σημείο που ανήκει στο $[a, b]$ είναι μοναδικό.

Γενική επαναληπτική μέθοδος

- Μπορούμε να προσεγγίσουμε ένα σταθερό σημείο της συνάρτησης $g(x)$
- επιλέγοντας μια αρχική προσέγγιση x_0
- δημιουργείται μια ακολουθία όρων $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ από τη σχέση

$$x_{k+1} = g(x_k), \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Προσοχή

- Ο μετασχηματισμός της εξίσωσης $f(x) = 0$ στη μορφή $x = g(x)$ δεν είναι μοναδικός

Προσοχή

- Ο μετασχηματισμός της εξίσωσης $f(x) = 0$ στη μορφή $x = g(x)$ δεν είναι μοναδικός
- Η γενική επαναληπτική μέθοδος δε συγκλίνει για οποιαδήποτε συνάρτηση $g(x)$

Προσοχή

- Ο μετασχηματισμός της εξίσωσης $f(x) = 0$ στη μορφή $x = g(x)$ δεν είναι μοναδικός
- Η γενική επαναληπτική μέθοδος δε συγκλίνει για οποιαδήποτε συνάρτηση $g(x)$

Αιτίες αποτυχίας σύγκλισης γενικής επαναληπτικής μεθόδου

1. Η συνάρτηση $g(x)$ απειρίζεται.

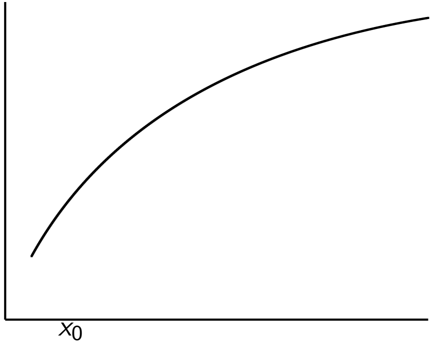
Προσοχή

- Ο μετασχηματισμός της εξίσωσης $f(x) = 0$ στη μορφή $x = g(x)$ δεν είναι μοναδικός
- Η γενική επαναληπτική μέθοδος δε συγκλίνει για οποιαδήποτε συνάρτηση $g(x)$

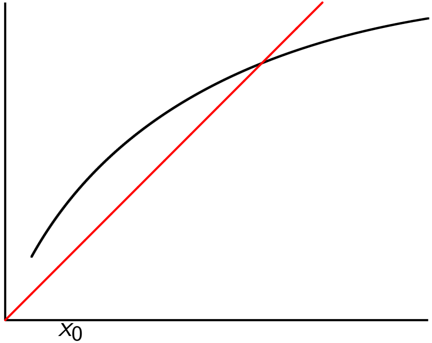
Αιτίες αποτυχίας σύγκλισης γενικής επαναληπτικής μεθόδου

1. Η συνάρτηση $g(x)$ απειρίζεται.
2. Η συνάρτηση $g(x)$ ταλαντώνεται.

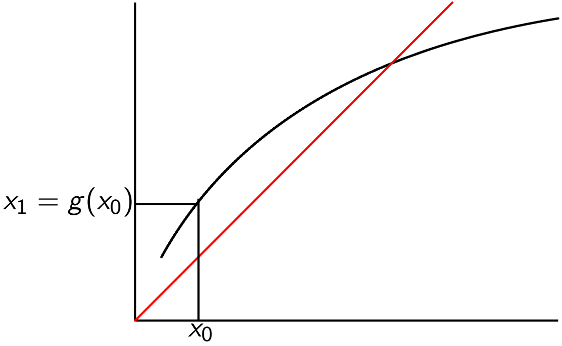
Γεωμετρική ερμηνεία



Γεωμετρική ερμηνεία



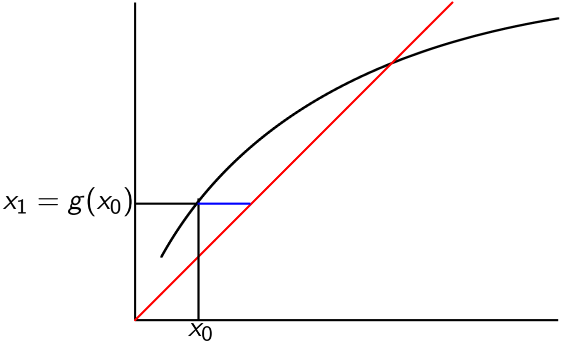
Φέρνουμε την $y = x$



Φέρνουμε την $y = x$

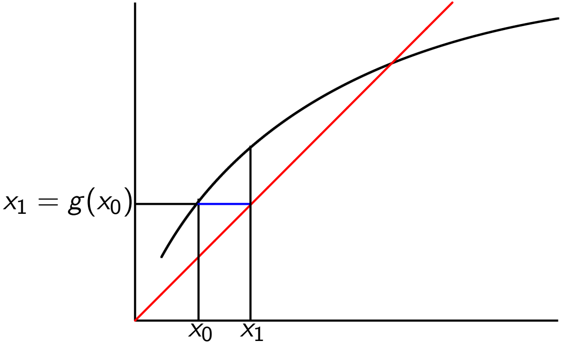
Βρίσκουμε το $g(x_0)$

Γεωμετρική ερμηνεία



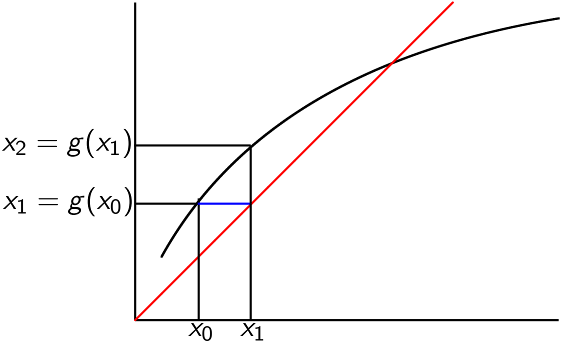
Φέρνουμε την $y = x$
Βρίσκουμε το $g(x_0)$

$y = x_1$ Τομή $y = x$



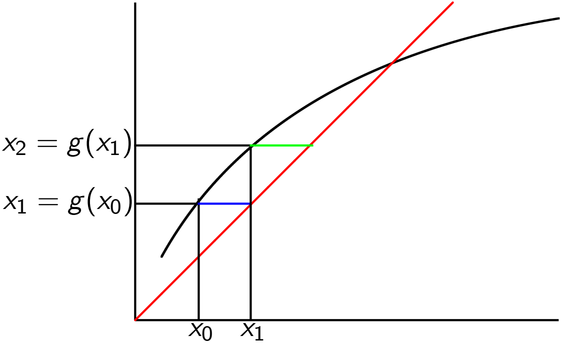
Φέρνουμε την $y = x$
Βρίσκουμε το $g(x_0)$
$y = x_1$ Τομή $y = x$
κάθετη στον $x^{'}x$

Γεωμετρική ερμηνεία



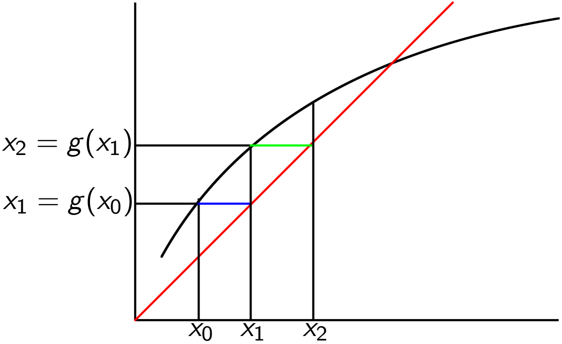
Φέρνουμε την $y = x$	
Βρίσκουμε το $g(x_0)$	Βρίσκουμε το $g(x_1)$
$y = x_1$ Τομή $y = x$	
κάθετη στον $x'x$	

Γεωμετρική ερμηνεία



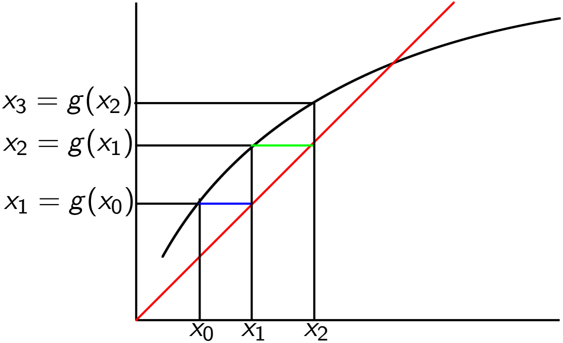
Φέρνουμε την $y = x$	
Βρίσκουμε το $g(x_0)$	Βρίσκουμε το $g(x_1)$
$y = x_1$ Τομή $y = x$	$y = x_2$ Τομή $y = x$
κάθετη στον $x'x$	

Γεωμετρική ερμηνεία



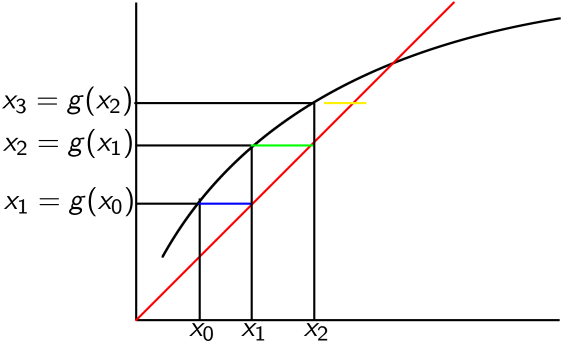
Φέρνουμε την $y = x$	
Βρίσκουμε το $g(x_0)$ $y = x_1$ Τομή $y = x$ κάθετη στον $x'x$	Βρίσκουμε το $g(x_1)$ $y = x_2$ Τομή $y = x$ κάθετη στον $x'x$

Γεωμετρική ερμηνεία



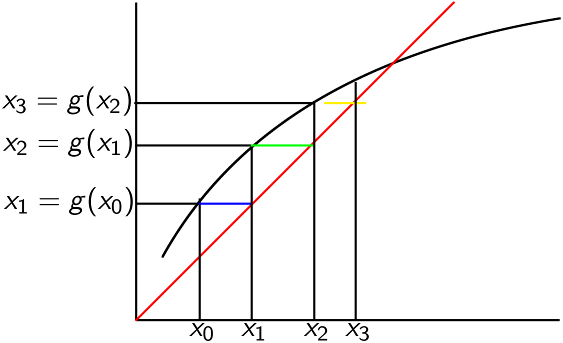
Φέρνουμε την $y = x$		
Βρίσκουμε το $g(x_0)$	Βρίσκουμε το $g(x_1)$	Βρίσκουμε το $g(x_2)$
$y = x_1$ Τομή $y = x$	$y = x_2$ Τομή $y = x$	
κάθετη στον $x'x$	κάθετη στον $x'x$	

Γεωμετρική ερμηνεία



Φέρνουμε την $y = x$		
Βρίσκουμε το $g(x_0)$	Βρίσκουμε το $g(x_1)$	Βρίσκουμε το $g(x_2)$
$y = x_1$ Τομή $y = x$	$y = x_2$ Τομή $y = x$	$y = x_3$ Τομή $y = x$
κάθετη στον $x'x$	κάθετη στον $x'x$	

Γεωμετρική ερμηνεία



Φέρνουμε την $y = x$		
Βρίσκουμε το $g(x_0)$	Βρίσκουμε το $g(x_1)$	Βρίσκουμε το $g(x_2)$
$y = x_1$ Τομή $y = x$	$y = x_2$ Τομή $y = x$	$y = x_3$ Τομή $y = x$
κάθετη στον $x'x$	κάθετη στον $x'x$	κάθετη στον $x'x$

Μη σύγκλιση της μεθόδου

Σύγκλιση της μεθόδου

Μη σύγκλιση της μεθόδου

Η τελική τιμή του δείκτη επαναλήψεων, μεγαλύτερη από το δεδομένο μέγιστο αριθμό επαναλήψεων

Σύγκλιση της μεθόδου

Μη σύγκλιση της μεθόδου

Η τελική τιμή του δείκτη επαναλήψεων, μεγαλύτερη από το δεδομένο μέγιστο αριθμό επαναλήψεων

Σύγκλιση της μεθόδου

Δύο διαδοχικές προσεγγίσεις, κοντά (ακρίβεια ϵ) η μία στην άλλη

$$|x_n - x_{n-1}| < \epsilon$$

Μη σύγκλιση της μεθόδου

Η τελική τιμή του δείκτη επαναλήψεων, μεγαλύτερη από το δεδομένο μέγιστο αριθμό επαναλήψεων

Σύγκλιση της μεθόδου

Δύο διαδοχικές προσεγγίσεις, κοντά (ακρίβεια ϵ) η μία στην άλλη

$$|x_n - x_{n-1}| < \epsilon$$

Η τιμή της $f(x)$ κοντά στο 0

$$|f(x_n)| < \epsilon$$

Μη σύγκλιση της μεθόδου

Η τελική τιμή του δείκτη επαναλήψεων, μεγαλύτερη από το δεδομένο μέγιστο αριθμό επαναλήψεων

Σύγκλιση της μεθόδου

Δύο διαδοχικές προσεγγίσεις, κοντά (ακρίβεια ϵ) η μία στην άλλη

$|x_n - x_{n-1}| < \epsilon$

Η τιμή της $f(x)$ κοντά στο 0

$|f(x_n)| < \epsilon$

Σχετικό σφάλμα μικρότερο από την ακρίβεια ϵ

$\frac{|x_n - x_{n-1}|}{|x_n|} < \epsilon, \; x_n \neq 0$

Μη σύγκλιση της μεθόδου

Η τελική τιμή του δείκτη επαναλήψεων, μεγαλύτερη από το δεδομένο μέγιστο αριθμό επαναλήψεων

Σύγκλιση της μεθόδου

Δύο διαδοχικές προσεγγίσεις, κοντά (ακρίβεια ϵ) η μία στην άλλη

$|x_n - x_{n-1}| < \epsilon$

Η τιμή της $f(x)$ κοντά στο 0

$|f(x_n)| < \epsilon$

Σχετικό σφάλμα μικρότερο από την ακρίβεια ϵ

$\frac{|x_n - x_{n-1}|}{|x_n|} < \epsilon,\ x_n \neq 0$

ΔΗΜΟΚΡΙΤΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΡΑΚΗΣ

Προσοχή

Αλγόριθμος

1. Καθορισμός εισόδων μεθόδου

1. Καθορισμός εισόδων μεθόδου
    - g ο τύπος της συνάρτησης

Αλγόριθμος

1. Καθορισμός εισόδων μεθόδου
   - g ο τύπος της συνάρτησης
   - x_0 η πρώτη προσέγγιση της ρίζας

1. Καθορισμός εισόδων μεθόδου
   - g ο τύπος της συνάρτησης
   - x_0 η πρώτη προσέγγιση της ρίζας
   - MIT το μέγιστο πλήθος επαναλήψεων της μεθόδου

1. Καθορισμός εισόδων μεθόδου
   - g ο τύπος της συνάρτησης
   - x_0 η πρώτη προσέγγιση της ρίζας
   - MIT το μέγιστο πλήθος επαναλήψεων της μεθόδου
   - ϵ η ακρίβεια που θέτουμε

Αλγόριθμος

1. Καθορισμός εισόδων μεθόδου
   - g ο τύπος της συνάρτησης
   - x_0 η πρώτη προσέγγιση της ρίζας
   - MIT το μέγιστο πλήθος επαναλήψεων της μεθόδου
   - ϵ η ακρίβεια που θέτουμε
2. Θέτουμε $k = -1$ και πηγαίνουμε στο επόμενο βήμα

1. Καθορισμός εισόδων μεθόδου
   - g ο τύπος της συνάρτησης
   - x_0 η πρώτη προσέγγιση της ρίζας
   - MIT το μέγιστο πλήθος επαναλήψεων της μεθόδου
   - ϵ η ακρίβεια που θέτουμε
2. Θέτουμε $k = -1$ και πηγαίνουμε στο επόμενο βήμα
3. Ανανεώνουμε το k $(k = k + 1)$ και πηγαίνουμε στο επόμενο βήμα

1. Καθορισμός εισόδων μεθόδου
    - g ο τύπος της συνάρτησης
    - x_0 η πρώτη προσέγγιση της ρίζας
    - MIT το μέγιστο πλήθος επαναλήψεων της μεθόδου
    - ϵ η ακρίβεια που θέτουμε
2. Θέτουμε $k = -1$ και πηγαίνουμε στο επόμενο βήμα
3. Ανανεώνουμε το k $(k = k + 1)$ και πηγαίνουμε στο επόμενο βήμα
4. Ελέγχουμε αν $k > MIT$

1. Καθορισμός εισόδων μεθόδου
   - g ο τύπος της συνάρτησης
   - x_0 η πρώτη προσέγγιση της ρίζας
   - MIT το μέγιστο πλήθος επαναλήψεων της μεθόδου
   - ϵ η ακρίβεια που θέτουμε
2. Θέτουμε $k = -1$ και πηγαίνουμε στο επόμενο βήμα
3. Ανανεώνουμε το k $(k = k + 1)$ και πηγαίνουμε στο επόμενο βήμα
4. Ελέγχουμε αν $k > MIT$
   - Αν δεν ισχύει, θέτουμε $x_{k+1} = g(x_k)$ και συνεχίζουμε στο επόμενο βήμα

1. Καθορισμός εισόδων μεθόδου
   - g ο τύπος της συνάρτησης
   - x_0 η πρώτη προσέγγιση της ρίζας
   - MIT το μέγιστο πλήθος επαναλήψεων της μεθόδου
   - ϵ η ακρίβεια που θέτουμε
2. Θέτουμε $k = -1$ και πηγαίνουμε στο επόμενο βήμα
3. Ανανεώνουμε το k $(k = k + 1)$ και πηγαίνουμε στο επόμενο βήμα
4. Ελέγχουμε αν $k > MIT$
   - Αν δεν ισχύει, θέτουμε $x_{k+1} = g(x_k)$ και συνεχίζουμε στο επόμενο βήμα
   - Αν ισχύει πηγαίνουμε στο βήμα 6

1. Καθορισμός εισόδων μεθόδου
   - g ο τύπος της συνάρτησης
   - x_0 η πρώτη προσέγγιση της ρίζας
   - MIT το μέγιστο πλήθος επαναλήψεων της μεθόδου
   - ϵ η ακρίβεια που θέτουμε
2. Θέτουμε $k = -1$ και πηγαίνουμε στο επόμενο βήμα
3. Ανανεώνουμε το k $(k = k + 1)$ και πηγαίνουμε στο επόμενο βήμα
4. Ελέγχουμε αν $k > MIT$
   - Αν δεν ισχύει, θέτουμε $x_{k+1} = g(x_k)$ και συνεχίζουμε στο επόμενο βήμα
   - Αν ισχύει πηγαίνουμε στο βήμα 6
5. Ελέγχουμε ένα ή περισσότερα κριτήρια τερματισμού (έστω $|x_{k+1} - x_k| \leq \epsilon$)

Αλγόριθμος

1. Καθορισμός εισόδων μεθόδου
   - g ο τύπος της συνάρτησης
   - x_0 η πρώτη προσέγγιση της ρίζας
   - MIT το μέγιστο πλήθος επαναλήψεων της μεθόδου
   - ϵ η ακρίβεια που θέτουμε
2. Θέτουμε $k = -1$ και πηγαίνουμε στο επόμενο βήμα
3. Ανανεώνουμε το k ($k = k + 1$) και πηγαίνουμε στο επόμενο βήμα
4. Ελέγχουμε αν $k > MIT$
   - Αν δεν ισχύει, θέτουμε $x_{k+1} = g(x_k)$ και συνεχίζουμε στο επόμενο βήμα
   - Αν ισχύει πηγαίνουμε στο βήμα 6
5. Ελέγχουμε ένα ή περισσότερα κριτήρια τερματισμού (έστω $|x_{k+1} - x_k| \leq \epsilon$)
   - Αν δεν ισχύουν, συνεχίζουμε στο βήμα 3

1. Καθορισμός εισόδων μεθόδου
   - g ο τύπος της συνάρτησης
   - x_0 η πρώτη προσέγγιση της ρίζας
   - MIT το μέγιστο πλήθος επαναλήψεων της μεθόδου
   - ϵ η ακρίβεια που θέτουμε
2. Θέτουμε $k = -1$ και πηγαίνουμε στο επόμενο βήμα
3. Ανανεώνουμε το k ($k = k + 1$) και πηγαίνουμε στο επόμενο βήμα
4. Ελέγχουμε αν $k > MIT$
   - Αν δεν ισχύει, θέτουμε $x_{k+1} = g(x_k)$ και συνεχίζουμε στο επόμενο βήμα
   - Αν ισχύει πηγαίνουμε στο βήμα 6
5. Ελέγχουμε ένα ή περισσότερα κριτήρια τερματισμού (έστω $|x_{k+1} - x_k| \leq \epsilon$)
   - Αν δεν ισχύουν, συνεχίζουμε στο βήμα 3
   - Αν ισχύουν πηγαίνουμε στο βήμα 6

1. Καθορισμός εισόδων μεθόδου
   - g ο τύπος της συνάρτησης
   - x_0 η πρώτη προσέγγιση της ρίζας
   - MIT το μέγιστο πλήθος επαναλήψεων της μεθόδου
   - ϵ η ακρίβεια που θέτουμε
2. Θέτουμε $k = -1$ και πηγαίνουμε στο επόμενο βήμα
3. Ανανεώνουμε το k $(k = k + 1)$ και πηγαίνουμε στο επόμενο βήμα
4. Ελέγχουμε αν $k > MIT$
   - Αν δεν ισχύει, θέτουμε $x_{k+1} = g(x_k)$ και συνεχίζουμε στο επόμενο βήμα
   - Αν ισχύει πηγαίνουμε στο βήμα 6
5. Ελέγχουμε ένα ή περισσότερα κριτήρια τερματισμού (έστω $|x_{k+1} - x_k| \leq \epsilon$)
   - Αν δεν ισχύουν, συνεχίζουμε στο βήμα 3
   - Αν ισχύουν πηγαίνουμε στο βήμα 6
6. Τερματισμός μεθόδου και επιστροφή εξόδων

1. Καθορισμός εισόδων μεθόδου
   - g ο τύπος της συνάρτησης
   - x_0 η πρώτη προσέγγιση της ρίζας
   - MIT το μέγιστο πλήθος επαναλήψεων της μεθόδου
   - ϵ η ακρίβεια που θέτουμε
2. Θέτουμε $k = -1$ και πηγαίνουμε στο επόμενο βήμα
3. Ανανεώνουμε το k ($k = k + 1$) και πηγαίνουμε στο επόμενο βήμα
4. Ελέγχουμε αν $k > MIT$
   - Αν δεν ισχύει, θέτουμε $x_{k+1} = g(x_k)$ και συνεχίζουμε στο επόμενο βήμα
   - Αν ισχύει πηγαίνουμε στο βήμα 6
5. Ελέγχουμε ένα ή περισσότερα κριτήρια τερματισμού (έστω $|x_{k+1} - x_k| \leq \epsilon$)
   - Αν δεν ισχύουν, συνεχίζουμε στο βήμα 3
   - Αν ισχύουν πηγαίνουμε στο βήμα 6
6. Τερματισμός μεθόδου και επιστροφή εξόδων
   - x_k η τελευταία προσέγγιση της ρίζας

1. Καθορισμός εισόδων μεθόδου
   - g ο τύπος της συνάρτησης
   - x_0 η πρώτη προσέγγιση της ρίζας
   - MIT το μέγιστο πλήθος επαναλήψεων της μεθόδου
   - ϵ η ακρίβεια που θέτουμε
2. Θέτουμε $k = -1$ και πηγαίνουμε στο επόμενο βήμα
3. Ανανεώνουμε το k $(k = k + 1)$ και πηγαίνουμε στο επόμενο βήμα
4. Ελέγχουμε αν $k > MIT$
   - Αν δεν ισχύει, θέτουμε $x_{k+1} = g(x_k)$ και συνεχίζουμε στο επόμενο βήμα
   - Αν ισχύει πηγαίνουμε στο βήμα 6
5. Ελέγχουμε ένα ή περισσότερα κριτήρια τερματισμού (έστω $|x_{k+1} - x_k| \leq \epsilon$)
   - Αν δεν ισχύουν, συνεχίζουμε στο βήμα 3
   - Αν ισχύουν πηγαίνουμε στο βήμα 6
6. Τερματισμός μεθόδου και επιστροφή εξόδων
   - x_k η τελευταία προσέγγιση της ρίζας
   - $g(x_k)$ η τιμή της συνάρτησης για την προσέγγιση

1. Καθορισμός εισόδων μεθόδου
   - g ο τύπος της συνάρτησης
   - x_0 η πρώτη προσέγγιση της ρίζας
   - MIT το μέγιστο πλήθος επαναλήψεων της μεθόδου
   - ϵ η ακρίβεια που θέτουμε
2. Θέτουμε $k = -1$ και πηγαίνουμε στο επόμενο βήμα
3. Ανανεώνουμε το k $(k = k + 1)$ και πηγαίνουμε στο επόμενο βήμα
4. Ελέγχουμε αν $k > MIT$
   - Αν δεν ισχύει, θέτουμε $x_{k+1} = g(x_k)$ και συνεχίζουμε στο επόμενο βήμα
   - Αν ισχύει πηγαίνουμε στο βήμα 6
5. Ελέγχουμε ένα ή περισσότερα κριτήρια τερματισμού (έστω $|x_{k+1} - x_k| \leq \epsilon$)
   - Αν δεν ισχύουν, συνεχίζουμε στο βήμα 3
   - Αν ισχύουν πηγαίνουμε στο βήμα 6
6. Τερματισμός μεθόδου και επιστροφή εξόδων
   - x_k η τελευταία προσέγγιση της ρίζας
   - $g(x_k)$ η τιμή της συνάρτησης για την προσέγγιση
   - k το πλήθος επαναλήψεων που έγιναν

- Αναγάγουν το πρόβλημα της επίλυσης ενός $n-$ διάστατου μη-γραμμικού συστήματος σε απλούστερες μη-γραμμικές εξισώσεις μιας μεταβλητής

- Αναγάγουν το πρόβλημα της επίλυσης ενός $n-$ διάστατου μη-γραμμικού συστήματος σε απλούστερες μη-γραμμικές εξισώσεις μιας μεταβλητής
- Προέρχονται από τη γραμμική Gauss-Seidel, η οποία υπολογίζει την επόμενη συνιστώσα x_i^{k+1}, επιλύοντας ως προς x_i τη γραμμική εξίσωση

$$\sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij} x_j^{k+1} + \alpha_{ii} x_i + \sum_{j=i+1}^{n} \alpha_{ij} x_j^{k} - b_i = 0$$

- Αναγάγουν το πρόβλημα της επίλυσης ενός $n-$ διάστατου μη-γραμμικού συστήματος σε απλούστερες μη-γραμμικές εξισώσεις μιας μεταβλητής
- Προέρχονται από τη γραμμική Gauss-Seidel, η οποία υπολογίζει την επόμενη συνιστώσα x_i^{k+1}, επιλύοντας ως προς x_i τη γραμμική εξίσωση

$$\sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij} x_j^{k+1} + \alpha_{ii} x_i + \sum_{j=i+1}^{n} \alpha_{ij} x_j^{k} - b_i = 0$$

- Η παραπάνω διαδικασία μπορεί να εφαρμοστεί και στην περίπτωση της αριθμητικής επίλυσης συστημάτων μη-γραμμικών εξισώσεων

- Αναγάγουν το πρόβλημα της επίλυσης ενός $n-$ διάστατου μη-γραμμικού συστήματος σε απλούστερες μη-γραμμικές εξισώσεις μιας μεταβλητής
- Προέρχονται από τη γραμμική Gauss-Seidel, η οποία υπολογίζει την επόμενη συνιστώσα x_i^{k+1}, επιλύοντας ως προς x_i τη γραμμική εξίσωση

$$\sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij} x_j^{k+1} + \alpha_{ii} x_i + \sum_{j=i+1}^{n} \alpha_{ij} x_j^{k} - b_i = 0$$

- Η παραπάνω διαδικασία μπορεί να εφαρμοστεί και στην περίπτωση της αριθμητικής επίλυσης συστημάτων μη-γραμμικών εξισώσεων
- Σε αυτή την περίπτωση, το x_i^{k+1} επιτυγχάνεται λύνοντας τη μη-γραμμική εξίσωση μιας μεταβλητής

$$f_i(x_1^{k+1}, x_2^{k+1}, \ldots, x_{i-1}^{k+1}, x, x_{i+1}^{k}, \ldots, x_n^{k}) = 0$$

όπου μεταβλητές σταθερές

- Αναγάγουν το πρόβλημα της επίλυσης ενός $n-$ διάστατου μη-γραμμικού συστήματος σε απλούστερες μη-γραμμικές εξισώσεις μιας μεταβλητής
- Προέρχονται από τη γραμμική Gauss-Seidel, η οποία υπολογίζει την επόμενη συνιστώσα x_i^{k+1}, επιλύοντας ως προς x_i τη γραμμική εξίσωση

$$\sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij} x_j^{k+1} + \alpha_{ii} x_i + \sum_{j=i+1}^{n} \alpha_{ij} x_j^{k} - b_i = 0$$

- Η παραπάνω διαδικασία μπορεί να εφαρμοστεί και στην περίπτωση της αριθμητικής επίλυσης συστημάτων μη-γραμμικών εξισώσεων
- Σε αυτή την περίπτωση, το x_i^{k+1} επιτυγχάνεται λύνοντας τη μη-γραμμική εξίσωση μιας μεταβλητής

$$f_i(x_1^{k+1}, x_2^{k+1}, \ldots, x_{i-1}^{k+1}, x, x_{i+1}^{k}, \ldots, x_n^{k}) = 0$$

όπου μεταβλητές σταθερές

- Αν η λύση της παραπάνω σχεσης είναι η $\hat{x}_i$, θέτουμε

$$x_i^{k+1} = \hat{x}_i$$

- Θεωρώντας και μια παράμετρο χαλάρωσης, το επαναληπτικό σχήμα γίνεται

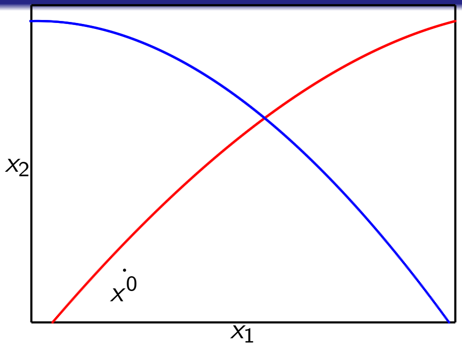
$$x_i^{k+1} = x_i^k + \omega_k(\hat{x}_i - x_i^k)$$

- Θεωρώντας και μια παράμετρο χαλάρωσης, το επαναληπτικό σχήμα γίνεται

$$x_i^{k+1} = x_i^k + \omega_k(\hat{x}_i - x_i^k)$$

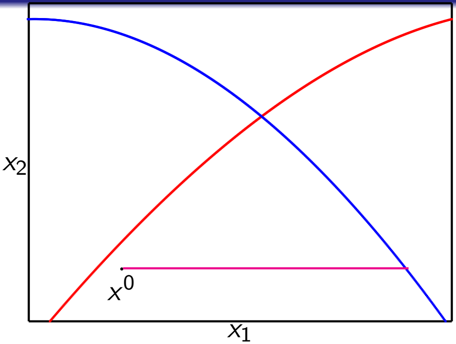
- Η παραπάνω μέθοδος έχει νόημα μόνο όταν οι εξισώσεις f_i έχουν μοναδικές λύσεις στη δοσμένη περιοχή

Γεωμετρική ερμηνεία



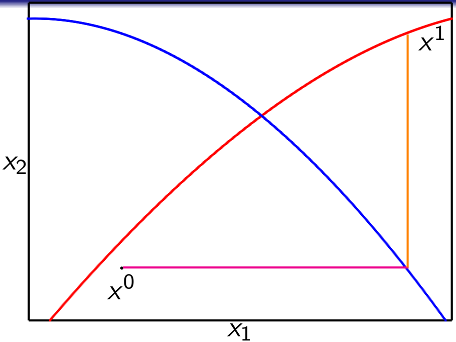
x^0		

Γεωμετρική ερμηνεία



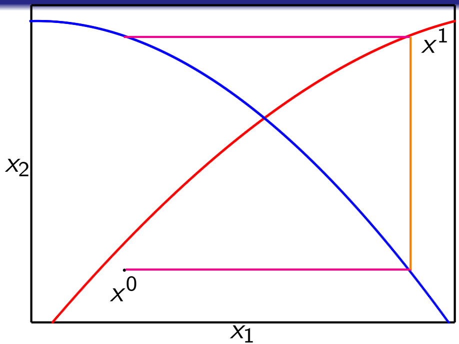
x^0 κρατάμε x_2 σταθερό	

Γεωμετρική ερμηνεία



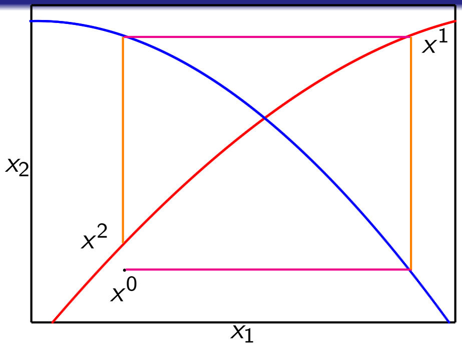
x^0	κρατάμε x_2 σταθερό	κρατάμε x_1 σταθερό	Εύρεση x^1

Γεωμετρική ερμηνεία



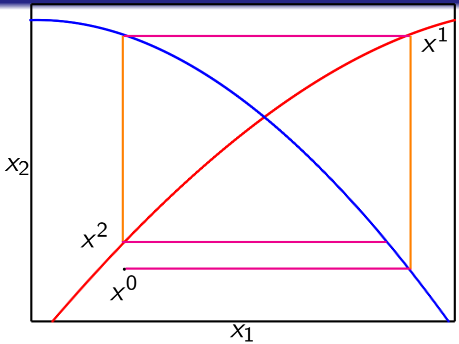
x^0	κρατάμε x_2 σταθερό	κρατάμε x_1 σταθερό	Εύρεση x^1
x^1	κρατάμε x_2 σταθερό		

Γεωμετρική ερμηνεία



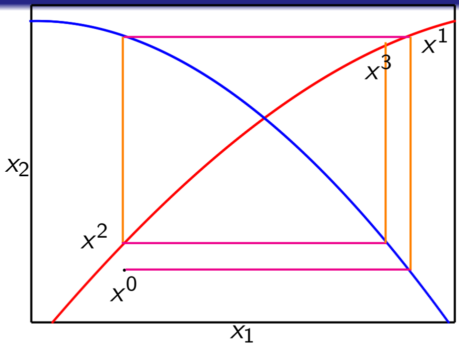
x^0	κρατάμε x_2 σταθερό	κρατάμε x_1 σταθερό	Εύρεση x^1
x^1	κρατάμε x_2 σταθερό	κρατάμε x_1 σταθερό	Εύρεση x^2

Γεωμετρική ερμηνεία



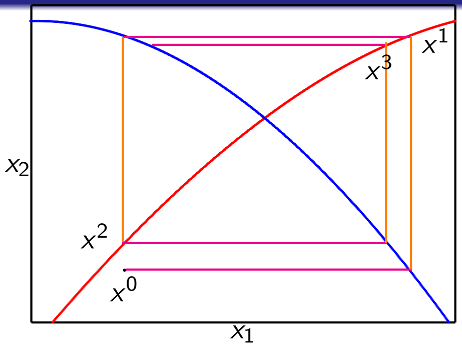
x^0	κρατάμε x_2 σταθερό	κρατάμε x_1 σταθερό	Εύρεση x^1
x^1	κρατάμε x_2 σταθερό	κρατάμε x_1 σταθερό	Εύρεση x^2
x^2	κρατάμε x_2 σταθερό		

Γεωμετρική ερμηνεία



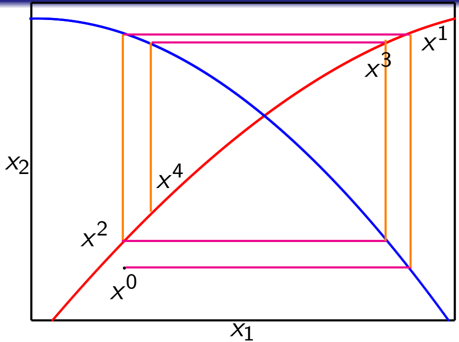
x^0	κρατάμε x_2 σταθερό	κρατάμε x_1 σταθερό	Εύρεση x^1
x^1	κρατάμε x_2 σταθερό	κρατάμε x_1 σταθερό	Εύρεση x^2
x^2	κρατάμε x_2 σταθερό	κρατάμε x_1 σταθερό	Εύρεση x^3

Γεωμετρική ερμηνεία



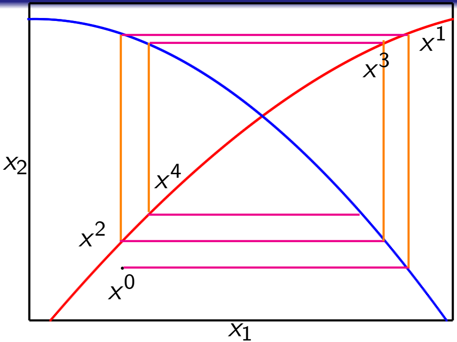
x^0	κρατάμε x_2 σταθερό	κρατάμε x_1 σταθερό	Εύρεση x^1
x^1	κρατάμε x_2 σταθερό	κρατάμε x_1 σταθερό	Εύρεση x^2
x^2	κρατάμε x_2 σταθερό	κρατάμε x_1 σταθερό	Εύρεση x^3
x^3	κρατάμε x_2 σταθερό		

Γεωμετρική ερμηνεία



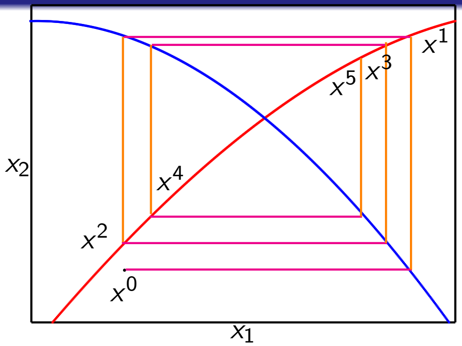
x^0	κρατάμε x_2 σταθερό	κρατάμε x_1 σταθερό	Εύρεση x^1
x^1	κρατάμε x_2 σταθερό	κρατάμε x_1 σταθερό	Εύρεση x^2
x^2	κρατάμε x_2 σταθερό	κρατάμε x_1 σταθερό	Εύρεση x^3
x^3	κρατάμε x_2 σταθερό	κρατάμε x_1 σταθερό	Εύρεση x^4

Γεωμετρική ερμηνεία



x^0	κρατάμε x_2 σταθερό	κρατάμε x_1 σταθερό	Εύρεση x^1
x^1	κρατάμε x_2 σταθερό	κρατάμε x_1 σταθερό	Εύρεση x^2
x^2	κρατάμε x_2 σταθερό	κρατάμε x_1 σταθερό	Εύρεση x^3
x^3	κρατάμε x_2 σταθερό	κρατάμε x_1 σταθερό	Εύρεση x^4
x^4	κρατάμε x_2 σταθερό		

Γεωμετρική ερμηνεία



x^0	κρατάμε x_2 σταθερό	κρατάμε x_1 σταθερό	Εύρεση x^1
x^1	κρατάμε x_2 σταθερό	κρατάμε x_1 σταθερό	Εύρεση x^2
x^2	κρατάμε x_2 σταθερό	κρατάμε x_1 σταθερό	Εύρεση x^3
x^3	κρατάμε x_2 σταθερό	κρατάμε x_1 σταθερό	Εύρεση x^4
x^4	κρατάμε x_2 σταθερό	κρατάμε x_1 σταθερό	Εύρεση x^5

- Συνεχίζουμε την ίδια διαδικασία μέχρι να βρούμε ένα σημείο που προσεγγίζει τη λύση $x^* = (x_1^*, x_2^*)$

- Συνεχίζουμε την ίδια διαδικασία μέχρι να βρούμε ένα σημείο που προσεγγίζει τη λύση $x^* = (x_1^*, x_2^*)$
- Σταματάμε όταν πληρείται ένα ή περισσότερα κριτήρια τερματισμού

Μη σύγκλιση της μεθόδου

Σύγκλιση της μεθόδου

Μη σύγκλιση της μεθόδου

Η τελική τιμή του δείκτη επαναλήψεων, μεγαλύτερη από το δεδομένο μέγιστο αριθμό επαναλήψεων

Σύγκλιση της μεθόδου

Μη σύγκλιση της μεθόδου

Η τελική τιμή του δείκτη επαναλήψεων, μεγαλύτερη από το δεδομένο μέγιστο αριθμό επαναλήψεων

Σύγκλιση της μεθόδου

Δύο διαδοχικές προσεγγίσεις, κοντά (ακρίβεια ϵ) η μία στην άλλη

$$\|x^{k+1} - x^k\| \leq \epsilon_2$$

Μη σύγκλιση της μεθόδου

Η τελική τιμή του δείκτη επαναλήψεων, μεγαλύτερη από το δεδομένο μέγιστο αριθμό επαναλήψεων

Σύγκλιση της μεθόδου

Δύο διαδοχικές προσεγγίσεις, κοντά (ακρίβεια ϵ) η μία στην άλλη

$$\|x^{k+1} - x^k\| \leq \epsilon_2$$

Η νόρμα της F_n κοντά στο 0

$$\|F_n(x^{k+1})\| \leq \epsilon_1$$

Μη σύγκλιση της μεθόδου

Η τελική τιμή του δείκτη επαναλήψεων, μεγαλύτερη από το δεδομένο μέγιστο αριθμό επαναλήψεων

Σύγκλιση της μεθόδου

Δύο διαδοχικές προσεγγίσεις, κοντά (ακρίβεια ϵ) η μία στην άλλη

$$\|x^{k+1} - x^k\| \leq \epsilon_2$$

Η νόρμα της F_n κοντά στο 0

$$\|F_n(x^{k+1})\| \leq \epsilon_1$$

Προσοχή

Ανάλογα με τη φύση της συνάρτησης, μπορεί να ισχύει κάποιο κριτήριο τερματισμού και η μέθοδος να αποκλίνει

Είσοδοι-Έξοδοι

- Είσοδοι

Είσοδοι-Έξοδοι

- Είσοδοι
  - n το πλήθος των εξισώσεων και των αγνώστων

Είσοδοι-Έξοδοι

- Είσοδοι
  - n το πλήθος των εξισώσεων και των αγνώστων
  - $F_n(x)$ ο τύπος της συνάρτησης

Είσοδοι-΄Εξοδοι

- Είσοδοι
  - n το πλήθος των εξισώσεων και των αγνώστων
  - $F_n(x)$ ο τύπος της συνάρτησης
  - x_0 η αρχική προσέγγιση της ρίζας

Είσοδοι-Έξοδοι

- Είσοδοι
  - n το πλήθος των εξισώσεων και των αγνώστων
  - $F_n(x)$ ο τύπος της συνάρτησης
  - x_0 η αρχική προσέγγιση της ρίζας
  - ω_k οι παράμετροι χαλάρωσης

Είσοδοι-΄Εξοδοι

- Είσοδοι
  - n το πλήθος των εξισώσεων και των αγνώστων
  - $F_n(x)$ ο τύπος της συνάρτησης
  - x_0 η αρχική προσέγγιση της ρίζας
  - ω_k οι παράμετροι χαλάρωσης
  - MIT το μέγιστο πλήθος επαναλήψεων της μεθόδου

Είσοδοι-Έξοδοι

- Είσοδοι
  - n το πλήθος των εξισώσεων και των αγνώστων
  - $F_n(x)$ ο τύπος της συνάρτησης
  - x_0 η αρχική προσέγγιση της ρίζας
  - ω_k οι παράμετροι χαλάρωσης
  - MIT το μέγιστο πλήθος επαναλήψεων της μεθόδου
  - ϵ_1 η ακρίβεια που θέτουμε για το x

Είσοδοι-΄Εξοδοι

- Είσοδοι
  - n το πλήθος των εξισώσεων και των αγνώστων
  - $F_n(x)$ ο τύπος της συνάρτησης
  - x_0 η αρχική προσέγγιση της ρίζας
  - ω_k οι παράμετροι χαλάρωσης
  - MIT το μέγιστο πλήθος επαναλήψεων της μεθόδου
  - ϵ_1 η ακρίβεια που θέτουμε για το x
  - ϵ_2 η ακρίβεια που θέτουμε για την $F_n(x)$

Είσοδοι-Έξοδοι

- Είσοδοι
  - n το πλήθος των εξισώσεων και των αγνώστων
  - $F_n(x)$ ο τύπος της συνάρτησης
  - x_0 η αρχική προσέγγιση της ρίζας
  - ω_k οι παράμετροι χαλάρωσης
  - MIT το μέγιστο πλήθος επαναλήψεων της μεθόδου
  - ϵ_1 η ακρίβεια που θέτουμε για το x
  - ϵ_2 η ακρίβεια που θέτουμε για την $F_n(x)$
- Έξοδοι

Είσοδοι-Έξοδοι

- Είσοδοι
  - n το πλήθος των εξισώσεων και των αγνώστων
  - $F_n(x)$ ο τύπος της συνάρτησης
  - x_0 η αρχική προσέγγιση της ρίζας
  - ω_k οι παράμετροι χαλάρωσης
  - MIT το μέγιστο πλήθος επαναλήψεων της μεθόδου
  - ϵ_1 η ακρίβεια που θέτουμε για το x
  - ϵ_2 η ακρίβεια που θέτουμε για την $F_n(x)$
- Έξοδοι
  - x^k η τελευταία προσέγγιση της ρίζας

Είσοδοι-΄Εξοδοι

- Είσοδοι
  - n το πλήθος των εξισώσεων και των αγνώστων
  - $F_n(x)$ ο τύπος της συνάρτησης
  - x_0 η αρχική προσέγγιση της ρίζας
  - ω_k οι παράμετροι χαλάρωσης
  - MIT το μέγιστο πλήθος επαναλήψεων της μεθόδου
  - ϵ_1 η ακρίβεια που θέτουμε για το x
  - ϵ_2 η ακρίβεια που θέτουμε για την $F_n(x)$
- ΄Εξοδοι
  - x^k η τελευταία προσέγγιση της ρίζας
  - $F_n(x^k)$ η τιμή της συνάρτησης στην k επανάληψη

Είσοδοι-Έξοδοι

- Είσοδοι
  - n το πλήθος των εξισώσεων και των αγνώστων
  - $F_n(x)$ ο τύπος της συνάρτησης
  - x_0 η αρχική προσέγγιση της ρίζας
  - ω_k οι παράμετροι χαλάρωσης
  - MIT το μέγιστο πλήθος επαναλήψεων της μεθόδου
  - ϵ_1 η ακρίβεια που θέτουμε για το x
  - ϵ_2 η ακρίβεια που θέτουμε για την $F_n(x)$
- Έξοδοι
  - x^k η τελευταία προσέγγιση της ρίζας
  - $F_n(x^k)$ η τιμή της συνάρτησης στην k επανάληψη
  - k το πλήθος επαναλήψεων που έγιναν

Αλγόριθμος

1. Καθορισμός εισόδων μεθόδου

Αλγόριθμος

1. Καθορισμός εισόδων μεθόδου
2. Θέτουμε $k = -1$

1. Καθορισμός εισόδων μεθόδου
2. Θέτουμε $k = -1$
3. Ελέγχουμε αν $k < MIT$
   Αν δεν ισχύει, πηγαίνουμε στο βήμα 9. Διαφορετικά, αυξάνουμε το k και συνεχίζουμε στο επλομενο βήμα

1. Καθορισμός εισόδων μεθόδου
2. Θέτουμε $k = -1$
3. Ελέγχουμε αν $k < MIT$
   Αν δεν ισχύει, πηγαίνουμε στο βήμα 9. Διαφορετικά, αυξάνουμε το k και συνεχίζουμε στο επλομενο βήμα
4. Ελέγχουμε αν $\|F_n(x^k)\| \leq \epsilon_2$
   Αν δεν ισχύει, συνεχίζουμε στο επόμενο βήμα. Διαφορετικά, πηγαίνουμε στο βήμα 9

1. Καθορισμός εισόδων μεθόδου
2. Θέτουμε $k = -1$
3. Ελέγχουμε αν $k < MIT$
   Αν δεν ισχύει, πηγαίνουμε στο βήμα 9. Διαφορετικά, αυξάνουμε το k και συνεχίζουμε στο επλομενο βήμα
4. Ελέγχουμε αν $\|F_n(x^k)\| \leq \epsilon_2$
   Αν δεν ισχύει, συνεχίζουμε στο επόμενο βήμα. Διαφορετικά, πηγαίνουμε στο βήμα 9
5. Θέτουμε $i = 0$

Αλγόριθμος

1. Καθορισμός εισόδων μεθόδου
2. Θέτουμε $k = -1$
3. Ελέγχουμε αν $k < MIT$
   Αν δεν ισχύει, πηγαίνουμε στο βήμα 9. Διαφορετικά, αυξάνουμε το k και συνεχίζουμε στο επλομενο βήμα
4. Ελέγχουμε αν $\|F_n(x^k)\| \leq \epsilon_2$
   Αν δεν ισχύει, συνεχίζουμε στο επόμενο βήμα. Διαφορετικά, πηγαίνουμε στο βήμα 9
5. Θέτουμε $i = 0$
6. Αν ισχύει $i < n$, αυξάνουμε το i και πηγαίνουμε στο επόμενο βήμα. Διαφορετικά, πηγαίνουμε στο βήμα 8

1. Καθορισμός εισόδων μεθόδου
2. Θέτουμε $k = -1$
3. Ελέγχουμε αν $k < MIT$
   Αν δεν ισχύει, πηγαίνουμε στο βήμα 9. Διαφορετικά, αυξάνουμε το k και συνεχίζουμε στο επλομενο βήμα
4. Ελέγχουμε αν $\|F_n(x^k)\| \leq \epsilon_2$
   Αν δεν ισχύει, συνεχίζουμε στο επόμενο βήμα. Διαφορετικά, πηγαίνουμε στο βήμα 9
5. Θέτουμε $i = 0$
6. Αν ισχύει $i < n$, αυξάνουμε το i και πηγαίνουμε στο επόμενο βήμα. Διαφορετικά, πηγαίνουμε στο βήμα 8
7. Βρίσκουμε τη λύση $\hat{x}_i$ της μονοδιάστατης μη-γραμμικής εξίσωσης $f_i(x_1^{k+1}, x_2^{k+1}, \ldots, x_{i-1}^{k+1}, x, x_{i+1}^{k+1}, \ldots, x_n^{k+1}) = 0$ ως προς x, θέτουμε $x_i^{k+1} = x_i^k + \omega_k(\hat{x}_i - x_i^k)$ και πήγαινε στο βήμα 6

1. Καθορισμός εισόδων μεθόδου
2. Θέτουμε $k = -1$
3. Ελέγχουμε αν $k < MIT$
   Αν δεν ισχύει, πηγαίνουμε στο βήμα 9. Διαφορετικά, αυξάνουμε το k και συνεχίζουμε στο επλομενο βήμα
4. Ελέγχουμε αν $\|F_n(x^k)\| \leq \epsilon_2$
   Αν δεν ισχύει, συνεχίζουμε στο επόμενο βήμα. Διαφορετικά, πηγαίνουμε στο βήμα 9
5. Θέτουμε $i = 0$
6. Αν ισχύει $i < n$, αυξάνουμε το i και πηγαίνουμε στο επόμενο βήμα. Διαφορετικά, πηγαίνουμε στο βήμα 8
7. Βρίσκουμε τη λύση $\hat{x}_i$ της μονοδιάστατης μη-γραμμικής εξίσωσης $f_i(x_1^{k+1}, x_2^{k+1}, \ldots, x_{i-1}^{k+1}, x, x_{i+1}^{k+1}, \ldots, x_n^{k+1}) = 0$ ως προς x, θέτουμε $x_i^{k+1} = x_i^k + \omega_k(\hat{x}_i - x_i^k)$ και πήγαινε στο βήμα 6
8. Ελέγχουμε αν $\|x_i^{k+1} - x_i^k\| \leq \epsilon_1$
   Αν δεν ισχύει, συνεχίζουμε στο βήμα 3. Διαφορετικά, πηγαίνουμε στο βήμα 9

1. Καθορισμός εισόδων μεθόδου
2. Θέτουμε $k = -1$
3. Ελέγχουμε αν $k < MIT$
   Αν δεν ισχύει, πηγαίνουμε στο βήμα 9. Διαφορετικά, αυξάνουμε το k και συνεχίζουμε στο επλομενο βήμα
4. Ελέγχουμε αν $\|F_n(x^k)\| \leq \epsilon_2$
   Αν δεν ισχύει, συνεχίζουμε στο επόμενο βήμα. Διαφορετικά, πηγαίνουμε στο βήμα 9
5. Θέτουμε $i = 0$
6. Αν ισχύει $i < n$, αυξάνουμε το i και πηγαίνουμε στο επόμενο βήμα. Διαφορετικά, πηγαίνουμε στο βήμα 8
7. Βρίσκουμε τη λύση $\hat{x}_i$ της μονοδιάστατης μη-γραμμικής εξίσωσης $f_i(x_1^{k+1}, x_2^{k+1}, \ldots, x_{i-1}^{k+1}, x, x_{i+1}^{k+1}, \ldots, x_n^{k+1}) = 0$ ως προς x, θέτουμε $x_i^{k+1} = x_i^k + \omega_k(\hat{x}_i - x_i^k)$ και πήγαινε στο βήμα 6
8. Ελέγχουμε αν $\|x_i^{k+1} - x_i^k\| \leq \epsilon_1$
   Αν δεν ισχύει, συνεχίζουμε στο βήμα 3. Διαφορετικά, πηγαίνουμε στο βήμα 9
9. Τερματισμός μεθόδου και επιστροφή εξόδων

ΔΗΜΟΚΡΙΤΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΡΑΚΗΣ

- Αναγάγουν το πρόβλημα της επίλυσης ενός $n-$ διάστατου μη-γραμμικού συστήματος σε απλούστερες μη-γραμμικές εξισώσεις μιας μεταβλητής

- Αναγάγουν το πρόβλημα της επίλυσης ενός $n-$ διάστατου μη-γραμμικού συστήματος σε απλούστερες μη-γραμμικές εξισώσεις μιας μεταβλητής
- Προέρχονται από τη γραμμική Jacobi, η οποία υπολογίζει την επόμενη συνιστώσα x_i^{k+1}, επιλύοντας ως προς x_i τη γραμμική εξίσωση

$$\sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij} x_j^k + \alpha_{ii} x_i + \sum_{j=i+1}^{n} \alpha_{ij} x_j^k - b_i = 0$$

- Αναγάγουν το πρόβλημα της επίλυσης ενός $n-$ διάστατου μη-γραμμικού συστήματος σε απλούστερες μη-γραμμικές εξισώσεις μιας μεταβλητής
- Προέρχονται από τη γραμμική Jacobi, η οποία υπολογίζει την επόμενη συνιστώσα x_i^{k+1}, επιλύοντας ως προς x_i τη γραμμική εξίσωση

$$\sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij} x_j^k + \alpha_{ii} x_i + \sum_{j=i+1}^{n} \alpha_{ij} x_j^k - b_i = 0$$

- Η παραπάνω διαδικασία μπορεί να εφαρμοστεί και στην περίπτωση της αριθμητικής επίλυσης συστημάτων μη-γραμμικών εξισώσεων

- Αναγάγουν το πρόβλημα της επίλυσης ενός $n-$ διάστατου μη-γραμμικού συστήματος σε απλούστερες μη-γραμμικές εξισώσεις μιας μεταβλητής
- Προέρχονται από τη γραμμική Jacobi, η οποία υπολογίζει την επόμενη συνιστώσα x_i^{k+1}, επιλύοντας ως προς x_i τη γραμμική εξίσωση

$$\sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij} x_j^k + \alpha_{ii} x_i + \sum_{j=i+1}^{n} \alpha_{ij} x_j^k - b_i = 0$$

- Η παραπάνω διαδικασία μπορεί να εφαρμοστεί και στην περίπτωση της αριθμητικής επίλυσης συστημάτων μη-γραμμικών εξισώσεων
- Σε αυτή την περίπτωση, το x_i^{k+1} επιτυγχάνεται λύνοντας τη μη-γραμμική εξίσωση μιας μεταβλητής

$$f_i(x_1^k, x_2^k, \ldots, x_{i-1}^k, x, x_{i+1}^k, \ldots, x_n^k) = 0$$

όπου μεταβλητές σταθερές

- Αναγάγουν το πρόβλημα της επίλυσης ενός $n-$ διάστατου μη-γραμμικού συστήματος σε απλούστερες μη-γραμμικές εξισώσεις μιας μεταβλητής
- Προέρχονται από τη γραμμική Jacobi, η οποία υπολογίζει την επόμενη συνιστώσα x_i^{k+1}, επιλύοντας ως προς x_i τη γραμμική εξίσωση

$$\sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij} x_j^k + \alpha_{ii} x_i + \sum_{j=i+1}^{n} \alpha_{ij} x_j^k - b_i = 0$$

- Η παραπάνω διαδικασία μπορεί να εφαρμοστεί και στην περίπτωση της αριθμητικής επίλυσης συστημάτων μη-γραμμικών εξισώσεων
- Σε αυτή την περίπτωση, το x_i^{k+1} επιτυγχάνεται λύνοντας τη μη-γραμμική εξίσωση μιας μεταβλητής

$$f_i(x_1^k, x_2^k, \ldots, x_{i-1}^k, x, x_{i+1}^k, \ldots, x_n^k) = 0$$

όπου μεταβλητές σταθερές

- Αν η λύση της παραπάνω σχεσης είναι η $\hat{x}_i$, θέτουμε

$$x_i^{k+1} = \hat{x}_i$$

- Θεωρώντας και μια παράμετρο χαλάρωσης, το επαναληπτικό σχήμα γίνεται

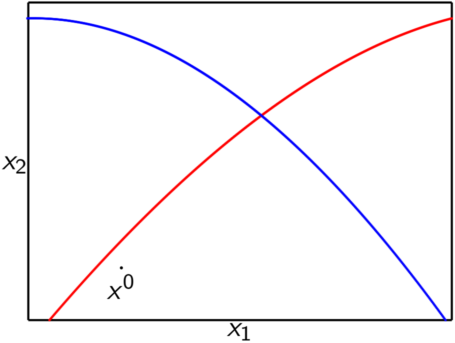
$$x_i^{k+1} = x_i^k + \omega_k(\hat{x}_i - x_i^k)$$

- Θεωρώντας και μια παράμετρο χαλάρωσης, το επαναληπτικό σχήμα γίνεται

$$x_i^{k+1} = x_i^k + \omega_k(\hat{x}_i - x_i^k)$$

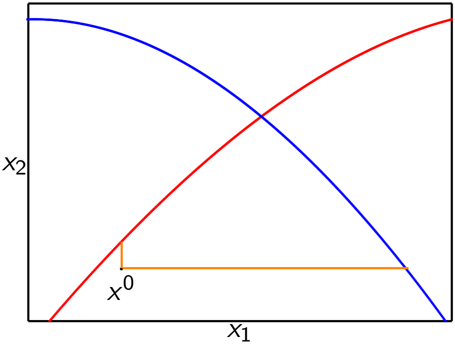
- Η παραπάνω μέθοδος έχει νόημα μόνο όταν οι εξισώσεις f_i έχουν μοναδικές λύσεις στη δοσμένη περιοχή

Γεωμετρική ερμηνεία



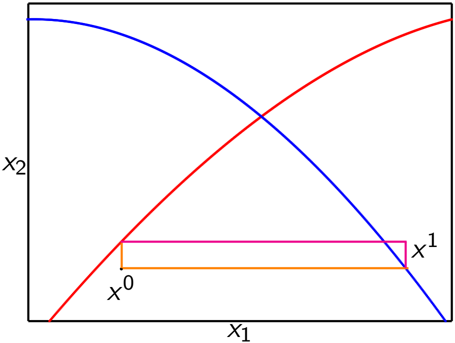
x^0		

Γεωμετρική ερμηνεία



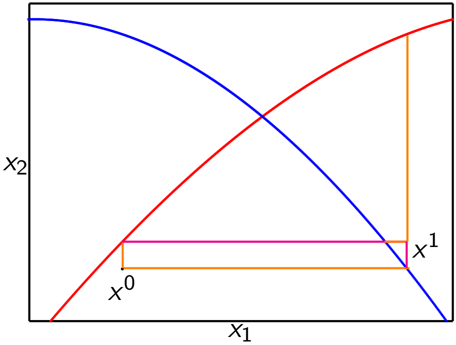
x^0	επιλύουμε ως x_2 και x_1	

Γεωμετρική ερμηνεία



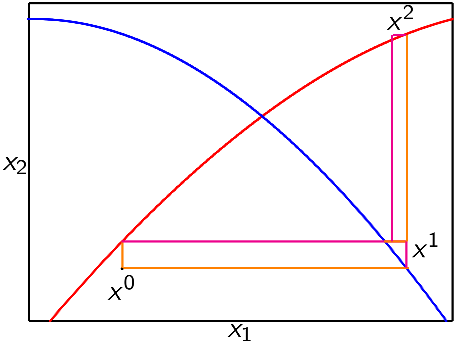
x^0 επιλύουμε ως x_2 και x_1	Εύρεση x^1

Γεωμετρική ερμηνεία



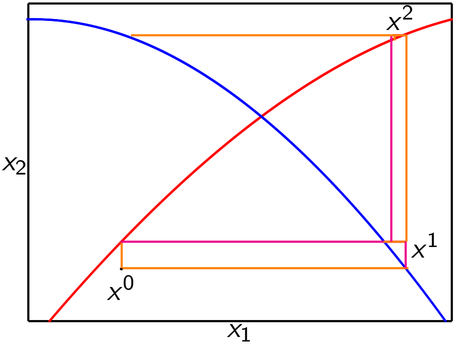
x^0	επιλύουμε ως x_2 και x_1	Εύρεση x^1
x^1	επιλύουμε ως x_2 και x_1	

Γεωμετρική ερμηνεία



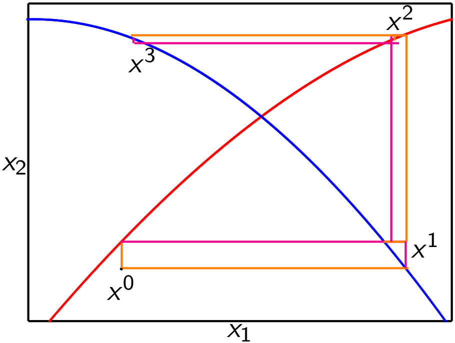
x^0	επιλύουμε ως x_2 και x_1	Εύρεση x^1
x^1	επιλύουμε ως x_2 και x_1	Εύρεση x^2

Γεωμετρική ερμηνεία



x^0	επιλύουμε ως x_2 και x_1	Εύρεση x^1
x^1	επιλύουμε ως x_2 και x_1	Εύρεση x^2
x^2	επιλύουμε ως x_2 και x_1	

Γεωμετρική ερμηνεία



x^0	επιλύουμε ως x_2 και x_1	Εύρεση x^1
x^1	επιλύουμε ως x_2 και x_1	Εύρεση x^2
x^2	επιλύουμε ως x_2 και x_1	Εύρεση x^3

ΔΗΜΟΚΡΙΤΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΡΑΚΗΣ

- Συνεχίζουμε την ίδια διαδικασία μέχρι να βρούμε ένα σημείο που προσεγγίζει τη λύση $x^* = (x_1^*, x_2^*)$

- Συνεχίζουμε την ίδια διαδικασία μέχρι να βρούμε ένα σημείο που προσεγγίζει τη λύση $x^* = (x_1^*, x_2^*)$
- Σταματάμε όταν πληρείται ένα ή περισσότερα κριτήρια τερματισμού

Μη σύγκλιση της μεθόδου

Σύγκλιση της μεθόδου

Μη σύγκλιση της μεθόδου

Η τελική τιμή του δείκτη επαναλήψεων, μεγαλύτερη από το δεδομένο μέγιστο αριθμό επαναλήψεων

Σύγκλιση της μεθόδου

Μη σύγκλιση της μεθόδου

Η τελική τιμή του δείκτη επαναλήψεων, μεγαλύτερη από το δεδομένο μέγιστο αριθμό επαναλήψεων

Σύγκλιση της μεθόδου

Δύο διαδοχικές προσεγγίσεις, κοντά (ακρίβεια ϵ) η μία στην άλλη

$$\|x^{k+1} - x^k\| \leq \epsilon_2$$

Μη σύγκλιση της μεθόδου

Η τελική τιμή του δείκτη επαναλήψεων, μεγαλύτερη από το δεδομένο μέγιστο αριθμό επαναλήψεων

Σύγκλιση της μεθόδου

Δύο διαδοχικές προσεγγίσεις, κοντά (ακρίβεια ϵ) η μία στην άλλη

$\|x^{k+1} - x^k\| \leq \epsilon_2$

Η νόρμα της F_n κοντά στο 0

$\|F_n(x^{k+1})\| \leq \epsilon_1$

Μη σύγκλιση της μεθόδου

Η τελική τιμή του δείκτη επαναλήψεων, μεγαλύτερη από το δεδομένο μέγιστο αριθμό επαναλήψεων

Σύγκλιση της μεθόδου

Δύο διαδοχικές προσεγγίσεις, κοντά (ακρίβεια ϵ) η μία στην άλλη

$$\|x^{k+1} - x^k\| \leq \epsilon_2$$

Η νόρμα της F_n κοντά στο 0

$$\|F_n(x^{k+1})\| \leq \epsilon_1$$

Προσοχή

Ανάλογα με τη φύση της συνάρτησης, μπορεί να ισχύει κάποιο κριτήριο τερματισμού και η μέθοδος να αποκλίνει

Είσοδοι-Έξοδοι

- Είσοδοι

Είσοδοι-Έξοδοι

- Είσοδοι
  - n το πλήθος των εξισώσεων και των αγνώστων

Είσοδοι-Έξοδοι

- Είσοδοι
  - n το πλήθος των εξισώσεων και των αγνώστων
  - $F_n(x)$ ο τύπος της συνάρτησης

Είσοδοι-΄Εξοδοι

- Είσοδοι
  - n το πλήθος των εξισώσεων και των αγνώστων
  - $F_n(x)$ ο τύπος της συνάρτησης
  - x_0 η αρχική προσέγγιση της ρίζας

Είσοδοι-Έξοδοι

- Είσοδοι
  - n το πλήθος των εξισώσεων και των αγνώστων
  - $F_n(x)$ ο τύπος της συνάρτησης
  - x_0 η αρχική προσέγγιση της ρίζας
  - ω_k οι παράμετροι χαλάρωσης

Είσοδοι-Έξοδοι

- Είσοδοι
  - n το πλήθος των εξισώσεων και των αγνώστων
  - $F_n(x)$ ο τύπος της συνάρτησης
  - x_0 η αρχική προσέγγιση της ρίζας
  - ω_k οι παράμετροι χαλάρωσης
  - MIT το μέγιστο πλήθος επαναλήψεων της μεθόδου

ΔΗΜΟΚΡΙΤΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΡΑΚΗΣ

Είσοδοι-΄Εξοδοι

- Είσοδοι
  - n το πλήθος των εξισώσεων και των αγνώστων
  - $F_n(x)$ ο τύπος της συνάρτησης
  - x_0 η αρχική προσέγγιση της ρίζας
  - ω_k οι παράμετροι χαλάρωσης
  - MIT το μέγιστο πλήθος επαναλήψεων της μεθόδου
  - ϵ_1 η ακρίβεια που θέτουμε για το x

Είσοδοι-Έξοδοι

- Είσοδοι
  - n το πλήθος των εξισώσεων και των αγνώστων
  - $F_n(x)$ ο τύπος της συνάρτησης
  - x_0 η αρχική προσέγγιση της ρίζας
  - ω_k οι παράμετροι χαλάρωσης
  - MIT το μέγιστο πλήθος επαναλήψεων της μεθόδου
  - ϵ_1 η ακρίβεια που θέτουμε για το x
  - ϵ_2 η ακρίβεια που θέτουμε για την $F_n(x)$

Είσοδοι-Έξοδοι

- Είσοδοι
  - n το πλήθος των εξισώσεων και των αγνώστων
  - $F_n(x)$ ο τύπος της συνάρτησης
  - x_0 η αρχική προσέγγιση της ρίζας
  - ω_k οι παράμετροι χαλάρωσης
  - MIT το μέγιστο πλήθος επαναλήψεων της μεθόδου
  - ϵ_1 η ακρίβεια που θέτουμε για το x
  - ϵ_2 η ακρίβεια που θέτουμε για την $F_n(x)$
- Έξοδοι

Είσοδοι-Έξοδοι

- Είσοδοι
  - n το πλήθος των εξισώσεων και των αγνώστων
  - $F_n(x)$ ο τύπος της συνάρτησης
  - x_0 η αρχική προσέγγιση της ρίζας
  - ω_k οι παράμετροι χαλάρωσης
  - MIT το μέγιστο πλήθος επαναλήψεων της μεθόδου
  - ϵ_1 η ακρίβεια που θέτουμε για το x
  - ϵ_2 η ακρίβεια που θέτουμε για την $F_n(x)$
- Έξοδοι
  - x^k η τελευταία προσέγγιση της ρίζας

Είσοδοι-Έξοδοι

- Είσοδοι
  - n το πλήθος των εξισώσεων και των αγνώστων
  - $F_n(x)$ ο τύπος της συνάρτησης
  - x_0 η αρχική προσέγγιση της ρίζας
  - ω_k οι παράμετροι χαλάρωσης
  - MIT το μέγιστο πλήθος επαναλήψεων της μεθόδου
  - ϵ_1 η ακρίβεια που θέτουμε για το x
  - ϵ_2 η ακρίβεια που θέτουμε για την $F_n(x)$
- Έξοδοι
  - x^k η τελευταία προσέγγιση της ρίζας
  - $F_n(x^k)$ η τιμή της συνάρτησης στην k επανάληψη

Είσοδοι-΄Εξοδοι

- Είσοδοι
  - n το πλήθος των εξισώσεων και των αγνώστων
  - $F_n(x)$ ο τύπος της συνάρτησης
  - x_0 η αρχική προσέγγιση της ρίζας
  - ω_k οι παράμετροι χαλάρωσης
  - MIT το μέγιστο πλήθος επαναλήψεων της μεθόδου
  - ϵ_1 η ακρίβεια που θέτουμε για το x
  - ϵ_2 η ακρίβεια που θέτουμε για την $F_n(x)$
- ΄Εξοδοι
  - x^k η τελευταία προσέγγιση της ρίζας
  - $F_n(x^k)$ η τιμή της συνάρτησης στην k επανάληψη
  - k το πλήθος επαναλήψεων που έγιναν

Αλγόριθμος

1. Καθορισμός εισόδων μεθόδου

Αλγόριθμος

1. Καθορισμός εισόδων μεθόδου
2. Θέτουμε $k = -1$

1. Καθορισμός εισόδων μεθόδου
2. Θέτουμε $k = -1$
3. Ελέγχουμε αν $k < MIT$
   Αν δεν ισχύει, πηγαίνουμε στο βήμα 9. Διαφορετικά, αυξάνουμε το k και συνεχίζουμε στο επλομενο βήμα

Αλγόριθμος

1. Καθορισμός εισόδων μεθόδου
2. Θέτουμε $k = -1$
3. Ελέγχουμε αν $k < MIT$
   Αν δεν ισχύει, πηγαίνουμε στο βήμα 9. Διαφορετικά, αυξάνουμε το k και συνεχίζουμε στο επλομενο βήμα
4. Ελέγχουμε αν $\|F_n(x^k)\| \leq \epsilon_2$
   Αν δεν ισχύει, συνεχίζουμε στο επόμενο βήμα. Διαφορετικά, πηγαίνουμε στο βήμα 9

1. Καθορισμός εισόδων μεθόδου
2. Θέτουμε $k = -1$
3. Ελέγχουμε αν $k < MIT$
   Αν δεν ισχύει, πηγαίνουμε στο βήμα 9. Διαφορετικά, αυξάνουμε το k και συνεχίζουμε στο επλομενο βήμα
4. Ελέγχουμε αν $\|F_n(x^k)\| \leq \epsilon_2$
   Αν δεν ισχύει, συνεχίζουμε στο επόμενο βήμα. Διαφορετικά, πηγαίνουμε στο βήμα 9
5. Θέτουμε $i = 0$

1. Καθορισμός εισόδων μεθόδου
2. Θέτουμε $k = -1$
3. Ελέγχουμε αν $k < MIT$
   Αν δεν ισχύει, πηγαίνουμε στο βήμα 9. Διαφορετικά, αυξάνουμε το k και συνεχίζουμε στο επλομενο βήμα
4. Ελέγχουμε αν $\|F_n(x^k)\| \leq \epsilon_2$
   Αν δεν ισχύει, συνεχίζουμε στο επόμενο βήμα. Διαφορετικά, πηγαίνουμε στο βήμα 9
5. Θέτουμε $i = 0$
6. Αν ισχύει $i < n$, αυξάνουμε το i και πηγαίνουμε στο επόμενο βήμα. Διαφορετικά, πηγαίνουμε στο βήμα 8

Αλγόριθμος

1. Καθορισμός εισόδων μεθόδου
2. Θέτουμε $k = -1$
3. Ελέγχουμε αν $k < MIT$
   Αν δεν ισχύει, πηγαίνουμε στο βήμα 9. Διαφορετικά, αυξάνουμε το k και συνεχίζουμε στο επλομενο βήμα
4. Ελέγχουμε αν $\|F_n(x^k)\| \leq \epsilon_2$
   Αν δεν ισχύει, συνεχίζουμε στο επόμενο βήμα. Διαφορετικά, πηγαίνουμε στο βήμα 9
5. Θέτουμε $i = 0$
6. Αν ισχύει $i < n$, αυξάνουμε το i και πηγαίνουμε στο επόμενο βήμα. Διαφορετικά, πηγαίνουμε στο βήμα 8
7. Βρίσκουμε τη λύση $\hat{x}_i$ της μονοδιάστατης μη-γραμμικής εξίσωσης $f_i(x_1^k, x_2^k, \ldots, x_{i-1}^k, x, x_{i+1}^k, \ldots, x_n^k) = 0$ ως προς x, θέτουμε $x_i^{k+1} = x_i^k + \omega_k(\hat{x}_i - x_i^k)$ και πήγαινε στο βήμα 6

ΔΗΜΟΚΡΙΤΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΡΑΚΗΣ

Αλγόριθμος

1. Καθορισμός εισόδων μεθόδου
2. Θέτουμε $k = -1$
3. Ελέγχουμε αν $k < MIT$
   Αν δεν ισχύει, πηγαίνουμε στο βήμα 9. Διαφορετικά, αυξάνουμε το k και συνεχίζουμε στο επλομενο βήμα
4. Ελέγχουμε αν $\|F_n(x^k)\| \leq \epsilon_2$
   Αν δεν ισχύει, συνεχίζουμε στο επόμενο βήμα. Διαφορετικά, πηγαίνουμε στο βήμα 9
5. Θέτουμε $i = 0$
6. Αν ισχύει $i < n$, αυξάνουμε το i και πηγαίνουμε στο επόμενο βήμα. Διαφορετικά, πηγαίνουμε στο βήμα 8
7. Βρίσκουμε τη λύση $\hat{x}_i$ της μονοδιάστατης μη-γραμμικής εξίσωσης $f_i(x_1^k, x_2^k, \ldots, x_{i-1}^k, x, x_{i+1}^k, \ldots, x_n^k) = 0$ ως προς x, θέτουμε $x_i^{k+1} = x_i^k + \omega_k(\hat{x}_i - x_i^k)$ και πήγαινε στο βήμα 6
8. Ελέγχουμε αν $\|x_i^{k+1} - x_i^k\| \leq \epsilon_1$
   Αν δεν ισχύει, συνεχίζουμε στο βήμα 3. Διαφορετικά, πηγαίνουμε στο βήμα 9

ΔΗΜΟΚΡΙΤΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΡΑΚΗΣ

1. Καθορισμός εισόδων μεθόδου
2. Θέτουμε $k = -1$
3. Ελέγχουμε αν $k < MIT$
   Αν δεν ισχύει, πηγαίνουμε στο βήμα 9. Διαφορετικά, αυξάνουμε το k και συνεχίζουμε στο επλομενο βήμα
4. Ελέγχουμε αν $\|F_n(x^k)\| \leq \epsilon_2$
   Αν δεν ισχύει, συνεχίζουμε στο επόμενο βήμα. Διαφορετικά, πηγαίνουμε στο βήμα 9
5. Θέτουμε $i = 0$
6. Αν ισχύει $i < n$, αυξάνουμε το i και πηγαίνουμε στο επόμενο βήμα. Διαφορετικά, πηγαίνουμε στο βήμα 8
7. Βρίσκουμε τη λύση $\hat{x}_i$ της μονοδιάστατης μη-γραμμικής εξίσωσης $f_i(x_1^k, x_2^k, ..., x_{i-1}^k, x, x_{i+1}^k, ..., x_n^k) = 0$ ως προς x, θέτουμε $x_i^{k+1} = x_i^k + \omega_k(\hat{x}_i - x_i^k)$ και πήγαινε στο βήμα 6
8. Ελέγχουμε αν $\|x_i^{k+1} - x_i^k\| \leq \epsilon_1$
   Αν δεν ισχύει, συνεχίζουμε στο βήμα 3. Διαφορετικά, πηγαίνουμε στο βήμα 9
9. Τερματισμός μεθόδου και επιστροφή εξόδων

Βιβλιογραφία - Αναφορές

- Γραββάνης Γ., Επιστημονικοί υπολογισμοί: Υπολογιστικές μέθοδοι και μαθηματικό λογισμικό, Παπασωτηρίου, 2013.
- Ακρίβης Γ.Δ., Δουγάλης Β.Α., Εισαγωγή στην αριθμητική ανάλυση, Πανεπιστημιακές εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο, 1997.
- Βραχάτης Μ.Ν., Αριθμητική ανάλυση: Εισαγωγή, Εκδόσεις Κλειδάριθμος, Αθήνα, 2011.
- Βραχάτης Μ.Ν., Αριθμητική Ανάλυση: Υπερβατικές Εξισώσεις, Εκδόσεις Κλειδάριθμος, Αθήνα, 2012.
- Νικόλαος Μισυρλής. Αριθμητική Ανάλυση: Μια Αλγοριθμική Προσέγγιση. Εκδόσεις: Εκδοτική ΕΚΠΑ 2017. Εύδοξος Αριθμητική Ανάλυση

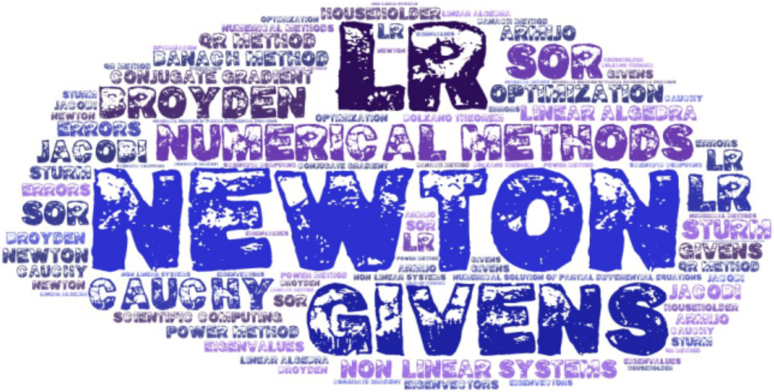
Βιβλιογραφία - Αναφορές

- Gerald, Curtis F, Applied numerical analysis. Pearson Education India, 2004.
- Atkinson, Kendall E, An introduction to numerical analysis. John wiley & sons, 2008.
- Burden, Richard L and Faires, J Douglas, Numerical Analysis, Brooks, Cole, Belmont, CA, 1997.
- Phillips, George M and Taylor, Peter J, Theory and applications of numerical analysis. Elsevier, 1996.
- Davis, Philip J and Rabinowitz, Philip, Methods of numerical integration. Courier Corporation, 2007.

Βιβλιογραφία - Αναφορές

- Herniter, Marc E, Programming in MATLAB. Brooks/Cole Publishing Co., 2000.
- Wolfram, Stephen and others, The MATHEMATICA® book, version 4. Cambridge university press, 1999.
- Gene H. Golub, Charles F. Van Loan, Θεωρία και Υπολογισμοί Μητρώων, Εκδόσεις Πεδίο, 2015.
- Λ. Trefethen, D. Bau, Numerical Linear Algebra, SIAM 1997.
- Β. Δουγαλής, Δ. Νούτσος, Α. Χατζηδήμος, Αριθμητική Γραμμική Άλγεβρα, Πανεπιστημιακές σημειώσεις, Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων.

Σας ευχαριστώ πολύ για την προσοχή σας!



ΔΗΜΟΚΡΙΤΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΡΑΚΗΣ