Επιστημονικοί Υπολογισμοί

Newton - απόδειξη

Σταμάτιος-Άγγελος Ν. Αλεξανδρόπουλος
e-mail: stalexan@ee.duth.gr

https://www.researchgate.net/profile/Stamatios_Aggelos_Alexandropoulos
https://scholar.google.gr/citations?user=mht7W_YAAAAJ&hl=el
http://cilab.math.upatras.gr

Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών & Μηχανικών Υπολογιστών
Δημοκρίτειο Πανεπιστήμιο Θράκης
Κιμμέρια 67100, Ξάνθη

6 Απριλίου 2021

ΔΗΜΟΚΡΙΤΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΡΑΚΗΣ

Περιεχόμενα I

Αριθμητική Επίλυση συστημάτων μη-γραμμικών εξισώσεων

Ορισμός

Δοθείσης μιας συνάρτησης $F_n = (f_1, f_2, \dots, f_n) : \mathcal{A}_n \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, αναζητούμε ένα σημείο $x^* \in \mathcal{A}_n$ για το οποίο ισχύει $F_n(x^*) = \mathcal{O}_n$.

Ορισμός

Το σημείο $x^* \in \mathcal{A}_n$ στην παραπάνω περίπτωση καλείται ρίζα ή μηδενικό της συνάρτησης F_n ή λύση της εξίσωσης $F_n(x) = \mathcal{O}_n$.

Προσοχή: Η συνάρτηση F_n θεωρούμε πως είναι συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση.

Ισοδύναμα:

$$F_n(x) = \mathcal{O}_n \Leftrightarrow \begin{cases} f_1(x) = 0 \\ f_2(x) = 0 \\ \dots \\ f_n(x) = 0 \end{cases} , \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \qquad (1)$$

Αριθμητική Επίλυση συστημάτων μη-γραμμικών εξισώσεων

Παράδειγμα

Έστω η συνάρτηση $F_2 : \mathcal{A}_2 \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, *με τύπο:*

$$F_2(x) = \begin{cases} f_1(x_1, x_2) = 2x_1^2 + 3x_2^2 - 1/2 \\ f_2(x_1, x_2) = 3x_1^3 + x_2^2 + \sqrt{2}/2 \end{cases} .$$

Να βρείτε κάποιο $x^* = (x_1^*, x_2^*) \in \mathcal{A}_2$ *για το οποίο να ισχύει* $F_2(x^*) = \mathcal{O}_2 = (0,0)^\top$.

Προσοχή: Η πολυπλοκότητα του προβλήματος ανεβαίνει όταν, αντί για ένα τέτοιο σημείο, αναζητούμε όλα τα σημεία με αυτή την ιδιότητα.

Η μέθοδος του Newton

Υποθέτουμε ότι $F_n \in C^n$ και επιπλέον, ότι $x^i \in D_n \subset \mathbb{R}^n$ είναι μια προσέγγιση της ρίζας, έστω ξ.

Εφόσον η συνάρτηση F_n είναι συνεχώς παραγωγίσιμη κοντά στη ρίζα ξ, τότε για κάθε x^i, μπορούμε να ορίσουμε το Ιακωβιανό του μητρώο, ως εξής:

$$J_{F_n}(x^i) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(x^i)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x^i)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1(x^i)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(x^i)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x^i)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2(x^i)}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(x^i)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(x^i)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n(x^i)}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

όπου $x^i = (x_1^i, x_2^i, \dots, x_n^i)^\top$ η $i-$οστή προσέγγιση της λύσης.

Το γραμμικό σύστημα που επιλύει επαναληπτικά είναι της μορφής $Ax = b$ και περιγράφεται από την ακόλουθη σχέση:

$$J_{F_n}(x^i)s^i = -F_n(x^i), \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

Η μέθοδος του Newton

όπου $s^i = (s_1^i, s_2^i, \ldots, s_n^i)^\top$ δηλώνει τη διόρθωση της προσέγγισης στην i επανάληψη και $F_n(x^i) = (f_1(x^i), f_2(x^i), \ldots, f_n(x^i))^\top$ τη συναρτησιακή τιμή της F_n στην i επανάληψη.

Επιλύοντας, το γραμμικό σύστημα ως προς τη διόρθωση s^i και κάνοντας αντικατάσταση στην επαναληπτική σχέση

$$x^{i+1} = x^i + s^i, \quad i = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

παίρνουμε την προσέγγιση της λύσης στην $i+1$ επανάληψη, με $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)^\top$ να παριστάνει μια αρχική προσέγγιση (αυθαίρετα επιλεγμένη).

Θεωρώντας, το γραμμικό σύστημα που επιλύει επαναληπτικά η μέθοδος Newton και κάνοντας αντικατάσταση τη διόρθωση, παίρνουμε:

$$J_{F_n}(x^i)(x^{i+1} - x^i) = -F_n(x^i), \quad i = 0, 1, 2, \ldots$$

Πολλαπλασιάζοντας, την τελευταία σχέση από αριστερά με το αντίστροφο του Ιακωβιανού μητρώου, παίρνουμε

$$J_{F_n}^{-1} J_{F_n}(x^i)(x^{i+1} - x^i) = -J_{F_n}^{-1} F_n(x^i)$$

Η μέθοδος του Newton

Ισοδύναμα, και εκτελώντας τις σχετικές απλοποιήσεις, έχουμε:

$$x^{i+1} = x^i - J_{F_n}^{-1} F_n(x^i), \quad i = 0, 1, 2, 3, \dots$$

το οποίο αποτελεί το επαναληπτικό σχήμα της μεθόδου του Newton.

Σημείωση: Για την απόδειξη των παραπάνω σχέσεων αξιοποιούμε το γνωστό ανάπτυγμα Taylor για συνεχώς παραγωγίσιμες συναρτήσεις $F_n = (f_1, f_2, \dots, f_n) : \mathcal{A}_n \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

Απόδειξη της μεθόδου

Taylor: Δοθέντος μιας συνεχώς παραγωγίσιμης συνάρτησης $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, εάν γνωρίζουμε την τιμή της σε ένα σημείο, έστω $\varepsilon \in \mathbb{R}^n$ και τις μερικές παραγώγους της f στο σημείο ε, τότε δύναται να αποτιμήσουμε την τιμή της συνάρτησης και σε ένα γειτονικό σημείο του ε, έστω το $x \in \mathbb{R}^n$, ως εξής:

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{i!} \left(\sum_{j=1}^{n} (x_j - \varepsilon_j) \frac{\partial}{\partial x'_j} \right)^i f(x') \right) \Bigg|_{x'_1=\varepsilon_1,\ldots,x'_n=\varepsilon_n} \tag{2}$$

Απόδειξη της μεθόδου

Παράδειγμα ($n=2$): Αξιοποιώντας τη σχέση (2), έχουμε:

$$
\begin{aligned}
f(x_1,x_2) &= \sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{1}{i!}\left((x_1-\varepsilon_1)\frac{\partial}{\partial x_1'}+(x_2-\varepsilon_2)\frac{\partial}{\partial x_2'}\right)^i f(x_1',x_2')\right)\Bigg|_{x_1'=\varepsilon_1,x_2'=\varepsilon_2}\\
&= f(\varepsilon_1,\varepsilon_2)+\left((x_1-\varepsilon_1)\frac{\partial f}{\partial x_1}+(x_2-\varepsilon_2)\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)\Bigg|_{(\varepsilon_1,\varepsilon_2)}+\\
&+\frac{1}{2!}\left((x_1-\varepsilon_1)^2\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}+2(x_1-\varepsilon_1)(x_2-\varepsilon_2)\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2}+(x_2-\varepsilon_2)^2\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}\right)\Bigg|_{(\varepsilon_1,\varepsilon_2)}+\\
&+\dots
\end{aligned}
$$

Απόδειξη της μεθόδου

Ισοδύναμα: Η σχέση (2), γράφεται:

$$f(x_1+\varepsilon_1, x_2+\varepsilon_2, \ldots, x_n+\varepsilon_n) = \sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{1}{i!}\left(\sum_{j=1}^{n}\varepsilon_j\frac{\partial}{\partial x_j'}\right)^i f(x_1', x_2', \ldots, x_n')\right)\Big|_{x_1'=x_1,\ldots,x_n'=x_n} \quad (3)$$

Απόδειξη της μεθόδου

Παράδειγμα ($n = 2$): Αξιοποιώντας τη σχέση (3), έχουμε:

$$
\begin{aligned}
f(x_1+\varepsilon_1, x_2+\varepsilon_2) &= \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{i!} \left(\varepsilon_1 \frac{\partial}{\partial x_1'} + \varepsilon_2 \frac{\partial}{\partial x_2'} \right)^i f(x_1', x_2') \right) \Big|_{x_1'=x_1, x_2'=x_2} \\
&= f(\varepsilon_1, \varepsilon_2) + \left(\varepsilon_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \varepsilon_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} \right) \Big|_{(\varepsilon_1,\varepsilon_2)} + \\
&+ \frac{1}{2!} \left(\varepsilon_1^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + 2\varepsilon_1\varepsilon_2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} + \varepsilon_2^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} \right) \Big|_{(\varepsilon_1,\varepsilon_2)} + \\
&+ \dots
\end{aligned}
$$

Απόδειξη της μεθόδου

Αξιοποιώντας τη σχέση (3), κατασκευάζουμε τη μέθοδο του Newton.

Ζητούμενο είναι η προσέγιση μιας λύσης του συστήματος $F_n(x) = \mathcal{O}_n$. Θεωρούμε ότι $x^k = (x_1^k, \ldots, x_n^k)^\top \in \mathbb{R}^n$ και $x^{k+1} = (x_1^{k+1}, \ldots, x_n^{k+1})^\top \in \mathbb{R}^n$ είναι η k και αντιστοίχως $k+1$ προσέγγιση της λύσης του συστήματος.

Θεωρούμε ότι η $k+1$ προσέγγιση της λύσης, δίνεται από την αμέσως προηγούμενη προσέγγιση προσθέτοντας μια ποσότητα, έστω $s^k \in \mathbb{R}^n$, την οποία καλούμε διόρθωση.

Συνεπώς,

$$\begin{pmatrix} x_1^{k+1} \\ x_2^{k+1} \\ \vdots \\ x_n^{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^{k} \\ x_2^{k} \\ \vdots \\ x_n^{k} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} s_1^{k} \\ s_2^{k} \\ \vdots \\ s_n^{k} \end{pmatrix} \tag{4}$$

Από τη σχέση (4) και εξ ορισμού του προβλήματος αριθμητικής επίλυσης συστημάτων μη-γραμμικών εξισώσεων, παίρνουμε:

Απόδειξη της μεθόδου

$$
\begin{aligned}
f_1(x^{k+1}) &= f_1(x^k + s^k) = 0 \\
f_2(x^{k+1}) &= f_2(x^k + s^k) = 0 \\
&\vdots \\
f_n(x^{k+1}) &= f_n(x^k + s^k) = 0
\end{aligned}
$$

Με τη βοήθεια του αναπτύγματος Taylor αναπτύσσουμε το παραπάνω σύστημα, ως εξής:

$$
\begin{aligned}
f_1(x_1^{k+1}, \ldots, x_n^{k+1}) &= f_1(x^k) + s_1^k \frac{\partial f_1(x^k)}{\partial x_1} + \ldots + s_n^k \frac{\partial f_1(x^k)}{\partial x_n} + \ldots \\
f_2(x_1^{k+1}, \ldots, x_n^{k+1}) &= f_2(x^k) + s_1^k \frac{\partial f_2(x^k)}{\partial x_1} + \ldots + s_n^k \frac{\partial f_2(x^k)}{\partial x_n} + \ldots \\
&\vdots \\
f_n(x_1^{k+1}, \ldots, x_n^{k+1}) &= f_n(x^k) + s_1^k \frac{\partial f_n(x^k)}{\partial x_1} + \ldots + s_n^k \frac{\partial f_n(x^k)}{\partial x_n} + \ldots
\end{aligned}
$$

Απόδειξη της μεθόδου

Εξ ορισμού και λαμβάνοντας την προσέγγιση του αναπτύγματος μέχρι την n παράγωγο, έχουμε:

$$
\begin{aligned}
f_1(x_1^{k+1}, \ldots, x_n^{k+1}) &\simeq f_1(x^k) + s_1^k \frac{\partial f_1(x^k)}{\partial x_1} + \ldots + s_n^k \frac{\partial f_1(x^k)}{\partial x_n} = 0 \\
f_2(x_1^{k+1}, \ldots, x_n^{k+1}) &\simeq f_2(x^k) + s_1^k \frac{\partial f_2(x^k)}{\partial x_1} + \ldots + s_n^k \frac{\partial f_2(x^k)}{\partial x_n} = 0 \\
&\vdots \\
f_n(x_1^{k+1}, \ldots, x_n^{k+1}) &\simeq f_n(x^k) + s_1^k \frac{\partial f_n(x^k)}{\partial x_1} + \ldots + s_n^k \frac{\partial f_n(x^k)}{\partial x_n} = 0
\end{aligned}
$$

Τελικά, έχουμε:

$$
\begin{aligned}
s_1^k \frac{\partial f_1(x^k)}{\partial x_1} + \ldots + s_n^k \frac{\partial f_1(x^k)}{\partial x_n} &= -f_1(x^k) \\
s_1^k \frac{\partial f_2(x^k)}{\partial x_1} + \ldots + s_n^k \frac{\partial f_2(x^k)}{\partial x_n} &= -f_2(x^k) \\
&\vdots \\
s_1^k \frac{\partial f_n(x^k)}{\partial x_1} + \ldots + s_n^k \frac{\partial f_n(x^k)}{\partial x_n} &= -f_n(x^k)
\end{aligned}
$$

ΔΗΜΟΚΡΙΤΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΡΑΚΗΣ

Απόδειξη της μεθόδου

Επιλύοντας το τελευταίο σύστημα ως προς την άγνωστη ποσότητα της διόρθωσης και με αντικατάσταση στη σχέση (4), λαμβάνουμε τη νέα προσέγγιση της λύσης και συνεπώς, αποδεικνύουμε τη μέθοδο του Newton.

Σύγκλιση της μεθόδου

Θεώρημα

Θεωρούμε τη συνάρτηση $F_n = (f_1, f_2, \ldots, f_n) : \mathcal{A}_n \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, η οποία είναι μια συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση στο ανοικτό και κυρτό σύνολο $\mathcal{A}_n$. Θεωρούμε ότι υπάρχει $x^* \in \mathbb{R}^n$ για το οποίο ισχύει $F_n(x^*) = \mathcal{O}_n$ και επιπλέον, σταθερές $\rho, \alpha > 0$, ώστε

- $\mathcal{S}(x^*, \rho) \subset \mathcal{A}_n$, με $\mathcal{S}(x^*, \rho)$ να συμβολίζει την ανοικτή σφαίρα κέντρου x^* και ακτίνας ρ, όπου $\mathcal{S}(x^*, \rho) = \{x \in \mathbb{R}^n, ||x - x^*|| < \rho\}$,
- Η Ιακωβιανή συνάρτηση της F_n είναι συνεχής κατά Lipschitz και συγκεκριμένα, $J_{F_n} \in Lip_\beta(\mathcal{S}(x^*, \rho))$,
- Το αντίστοφο του Ιακωβιανού μητρώου στο σημείο x^* υπάρχει και μάλιστα ισχύει $||J_{F_n}^{-1}(x^*)|| \le \alpha$

Τότε, υπάρχει σταθερά $\delta > 0$, τέτοια ώστε για όλες τις αρικές προσεγγίσεις που ανήκουν στην ανοικτή σφαίρα, η ακολουθία που παράγεται από το επαναληπτικό σχήμα της μεθόδου του Newton

$$x^{k+1} = x^k - J_{F_n}^{-1}(x^k)F_n(x^k), \quad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{5}$$

ορίζεται καλώς, συγκλίνει στο x^* και ικανοποιεί τη σχέση

$$||x^{k+1} - x^*|| \le \alpha\beta||x^k - x^*||^2, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{6}$$

ΔΗΜΟΚΡΙΤΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΡΑΚΗΣ

Σύγκλιση της μεθόδου

Λήμμα

Θεωρούμε τη συνάρτηση $F_n = (f_1, f_2, \ldots, f_n) : \mathcal{A}_n \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, η οποία είναι μια συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση στο ανοικτό και κυρτό σύνολο $\mathcal{A}_n$. Θεωρούμε ότι η συνάρτηση $J_{F_n}(q)$ είναι συνεχής κατά Lipschitz στο σημείο x του διαστήματος $\mathcal{A}_n$ με σταθερά β, τότε για οποιαδήποτε στάθμη στο χώρο $\mathbb{R}^{n\times n}$ και για διάνυσμα $x + q \in \mathcal{A}_n$, έχουμε

$$||F_n(x+q) - F_n(x) - J_{F_n}(x)q|| \leq \frac{\beta}{2}||q||^2$$

Βιβλιογραφία - Αναφορές

- Γραββάνης Γ., Επιστημονικοί υπολογισμοί: Υπολογιστικές μέθοδοι και μαθηματικό λογισμικό, Παπασωτηρίου, 2013.
- Ακρίβης Γ.Δ., Δουγάλης Β.Α., Εισαγωγή στην αριθμητική ανάλυση, Πανεπιστημιακές εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο, 1997.
- Βραχάτης Μ.Ν., Αριθμητική ανάλυση: Εισαγωγή, Εκδόσεις Κλειδάριθμος, Αθήνα, 2011.
- Βραχάτης Μ.Ν., Αριθμητική Ανάλυση: Υπερβατικές Εξισώσεις, Εκδόσεις Κλειδάριθμος, Αθήνα, 2012.
- Νικόλαος Μισυρλής. Αριθμητική Ανάλυση: Μια Αλγοριθμική Προσέγγιση. Εκδόσεις: Εκδοτική ΕΚΠΑ 2017. Εύδοξος Αριθμητική Ανάλυση

ΔΗΜΟΚΡΙΤΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΡΑΚΗΣ

Βιβλιογραφία - Αναφορές

- Gerald, Curtis F, Applied numerical analysis. Pearson Education India, 2004.
- Atkinson, Kendall E, An introduction to numerical analysis. John wiley & sons, 2008.
- Burden, Richard L and Faires, J Douglas, Numerical Analysis, Brooks, Cole, Belmont, CA, 1997.
- Phillips, George M and Taylor, Peter J, Theory and applications of numerical analysis. Elsevier, 1996.
- Davis, Philip J and Rabinowitz, Philip, Methods of numerical integration. Courier Corporation, 2007.

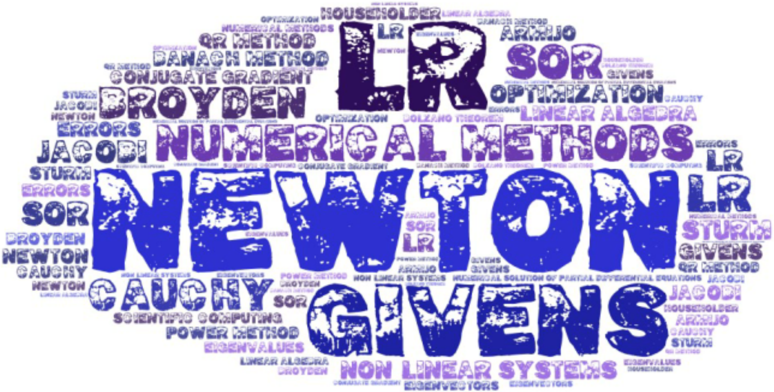
ΔΗΜΟΚΡΙΤΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΡΑΚΗΣ

Βιβλιογραφία - Αναφορές

- Herniter, Marc E, Programming in MATLAB. Brooks/Cole Publishing Co., 2000.
- Wolfram, Stephen and others, The MATHEMATICA® book, version 4. Cambridge university press, 1999.
- Gene H. Golub, Charles F. Van Loan, Θεωρία και Υπολογισμοί Μητρώων, Εκδόσεις Πεδίο, 2015.
- Λ. Trefethen, D. Bau, Numerical Linear Algebra, SIAM 1997.
- Β. Δουγαλής, Δ. Νούτσος, Α. Χατζηδήμος, Αριθμητική Γραμμική Άλγεβρα, Πανεπιστημιακές σημειώσεις, Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων.

ΔΗΜΟΚΡΙΤΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΡΑΚΗΣ

Σας ευχαριστώ πολύ για την προσοχή σας!



ΔΗΜΟΚΡΙΤΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΡΑΚΗΣ