Στοχαστικές Διεργασίες – Θέματα Εξετάσεων

Θέμα 1

Δίνεται η ομογενής Μαρκοβιανή αλυσίδα $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ με χώρο καταστάσεων S = {1, 2, 3} και πίνακα μετάβασης $P = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0{,}8 \\ 0{,}8 & 0{,}2 & \beta \\ 0{,}5 & \gamma & 0{,}5 \end{pmatrix}$.

(α) Να αποδείξετε ότι α = 0,2, β = 0 και γ = 0.

Για α = 0,2, β = 0 και γ = 0:

(β) Να δείξετε ότι η $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ είναι αδιαχώριστη Μαρκοβιανή αλυσίδα.

(γ) Να βρείτε τις πιθανότητες μετάβασης δεύτερης τάξης της αλυσίδας.

(δ) Γνωρίζουμε ότι αρχικά, η διεργασία μπορεί να βρίσκεται είτε στην κατάσταση 1 με 50% πιθανότητα, είτε στην κατάσταση 2 με 50% πιθανότητα. Να βρείτε την κατάσταση που είναι πιθανότερο να βρίσκεται η αλυσίδα μετά από 2 μεταβάσεις και την πιθανότητα με την οποία θα συμβεί αυτό το γεγονός.

Βαθμολογία: (α) 0,5μ, (β) 0,5μ, (γ) 0,5μ, (δ) 1μ.

Θέμα 2

Με X_n εκφράζεται η κατηγορία που ανήκει ένας πολίτης ανάλογα με το πλήθος των ωρών που αφιερώνει μπροστά στην τηλεόραση την εβδομάδα n = 1, 2, … Η μεταβλητή X_n, παίρνει τις τιμές 1 έως 5 όπου: 1 = δε βλέπει τηλεόραση, 2 = βλέπει έως 3 ώρες, 3 = βλέπει 3 έως 10 ώρες την ημέρα, 4 = βλέπει 10 έως 20 ώρες, 5 = βλέπει περισσότερες από 20 ώρες. Ο πίνακας μετάβασης της Μαρκοβιανής αλυσίδας $\{X_n, n \geq 1\}$ είναι ο παρακάτω:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{10} & \frac{1}{2} & \frac{3}{10} & 0 & \frac{1}{10} \\ 0 & 0 & \frac{7}{10} & \frac{1}{10} & \frac{2}{10} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(α) Να γίνει το διάγραμμα καταστάσεων της διαδικασίας.

(β) Να βρείτε ποιες από τις καταστάσεις είναι μεταβατικές και ποιες είναι απορροφητικές.

(γ) Να γραφτεί ο πίνακας μετάβασης στην κανονική του μορφή.

(δ) Να βρεθεί η πιθανότητα κάποιος που βλέπει αυτήν την εβδομάδα έως 3 ώρες τηλεόραση, μετά από 2 εβδομάδες να βλέπει 10 έως 20 ώρες.

Βαθμολογία: (α) 0,5μ, (β) 0,5μ, (γ) 0,5μ, (δ) 1μ.

Θέμα 3

Σε ένα πρατήριο καυσίμων οι αφίξεις των Ι.Χ. αυτοκινήτων είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους και γνωρίζουμε ότι ο μέσος ρυθμός άφιξης είναι 1 αυτοκίνητο Ι.Χ. κάθε 3 λεπτά.

(α) Να βρεθεί η πιθανότητα να μην έρθει κάποιο αυτοκίνητο για ανεφοδιασμό μεταξύ 12:00 και 12:10.

(β) Αν γνωρίζουμε ότι έχουν έρθει δύο αυτοκίνητα μεταξύ 12:00 και 12:10, να βρεθεί η πιθανότητα αυτά να έχουν έρθει μεταξύ 12:03 και 12:07.

(γ) Να βρεθεί η πιθανότητα να υπάρχει ακριβώς μία άφιξη σε καθένα από τα ακόλουθα χρονικά διαστήματα: (12:00, 12:01], (12:01, 12:02] και (12:02, 12:03].

(δ) Να βρείτε την πιθανότητα η πρώτη άφιξη μετά τις 12:00 να καθυστερήσει περισσότερο από μισό λεπτό.

Βαθμολογία: (α) 0,5μ, (β) 0,5μ, (γ) 1μ, (δ) 0,5μ.

Θέμα 4
Σε ένα πρατήριο καυσίμων οι αφίξεις των αυτοκινήτων είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους και γνωρίζουμε ότι ο μέσος ρυθμός άφιξης είναι 1 αυτοκίνητο κάθε 3 λεπτά.

Στο ίδιο πρατήριο, το προσωπικό ανεφοδιάζει με καύσιμα 1 αυτοκίνητο κάθε 2 λεπτά.

(α) Ποια είναι η πιθανότητα να μην υπάρχει κανένα αυτοκίνητο στο πρατήριο;
(β) Ποιο είναι το αναμενόμενο πλήθος αυτοκινήτων που περιμένουν να ανεφοδιαστούν;
(γ) Ποια είναι η πιθανότητα να περιμένουν 2 ή παραπάνω αυτοκίνητα στην ουρά για να ανεφοδιαστούν;
(δ) Ποιος πρέπει να είναι ο ελάχιστος ρυθμός ανεφοδιασμού των αυτοκινήτων από το προσωπικό ώστε ο αναμενόμενος χρόνος αναμονής στην ουρά να μην ξεπερνάει τα 30 δευτερόλεπτα;

Βαθμολογία: (α) 0,5μ, (β) 0,5μ, (γ) 0,5μ, (δ) 1μ

Τυπολόγιο

Αν X ~ Poisson(λ) τότε $P(X = \kappa) = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^{\kappa}}{\kappa!},\ \kappa = 0, 1, 2, \ldots$

Αν X ~ Exp(λ) τότε $P(X \le x) = 1 - e^{-\lambda x},\ x \ge 0.$

Αν X(t) = {ο αριθμός των πελατών στην ουρά M/M/1 τη χρονική στιγμή t}, και $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu}$, τότε:

$P(X(t) = 0) = g_0 = 1 - \rho,$

$P(X(t) = n) = g_n = \rho^n g_0 = \rho^n (1 - \rho),$

$P(X(t) \ge n) = \rho^n$

$L_S = \rho / (1 - \rho) = \lambda / (\mu - \lambda),$

$L_Q = \rho L_S,$

$L_{QQ} = L_Q / \rho^2$

$L_S = L_Q + \lambda/\mu = L_Q + \rho,$

$W_S = L_S / \lambda = 1 / (\mu - \lambda),$

$W_Q = L_Q / \lambda = \rho\, L_S / \lambda = L_S / \mu$

P(Χρόνος παραμονής στο σύστημα > t) = e^{-t / W_S}

P(Χρόνος παραμονής στην ουρά > t) = e^{-t / W_Q}

Οι παραπάνω τύποι ισχύουν και έχουν νόημα μόνο στην περίπτωση της ευστάθειας.

Ενδεικτικές λύσεις των θεμάτων της εξέτασης

Θέμα 1

(α) Ο πίνακας μετάβασης είναι ένας στοχαστικός πίνακας άρα πρέπει το άθροισμα όλων των στοιχείων κάθε γραμμής να είναι ίσο με τη μονάδα. Συνεπώς,

α + 0,8 = 1,

0,8 + 0,2 + β = 1 και

0,5 + γ + 0,5 = 1,

από όπου βρίσκουμε α = 0,2, β = γ = 0.

(β) Από τον πίνακα μετάβασης σχεδιάζουμε το διάγραμμα ροής της διεργασίας και παρατηρούμε ότι 1 ↔ 2 (η κατάσταση 1 επικοινωνεί με τη 2) και πως 1 ↔ 3 (η κατάσταση 1 επικοινωνεί με τη 3), άρα οι {1, 2, 3} αποτελούν μία κλάση ισοδύναμων καταστάσεων και η αλυσίδα είναι αδιαχώριστη.

(γ) Οι πιθανότητες μετάβασης δύο βημάτων είναι τα στοιχεία του πίνακα

$$P^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0,2 & 0,8 \\ 0,8 & 0,2 & 0 \\ 0,5 & 0 & 0,5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0,2 & 0,8 \\ 0,8 & 0,2 & 0 \\ 0,5 & 0 & 0,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,56 & 0,04 & 0,4 \\ 0,16 & 0,20 & 0,64 \\ 0,25 & 0,1 & 0,65 \end{pmatrix}.$$

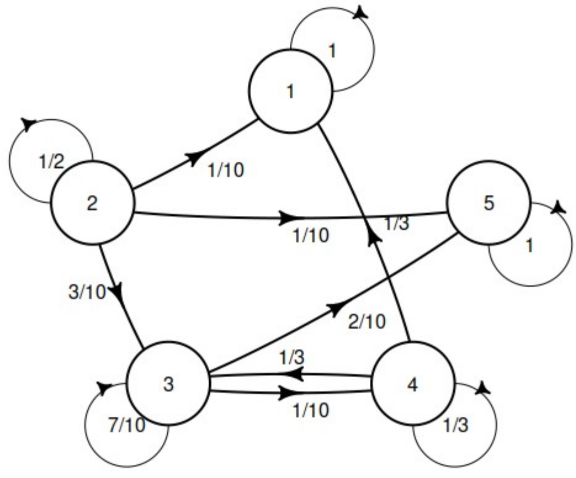
(δ) Η αρχική κατανομή πιθανοτήτων είναι $\pi^T = (0,5\ 0,5\ 0)$, άρα η κατανομή πιθανοτήτων της X_2, θα είναι

$$\pi^T \cdot P^2 = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,56 & 0,04 & 0,4 \\ 0,16 & 0,20 & 0,64 \\ 0,25 & 0,1 & 0,65 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,36 & 0,12 & 0,52 \end{pmatrix}.$$

Μετά από 2 βήματα, η αλυσίδα θα βρίσκεται με μεγαλύτερη πιθανότητα στην κατάσταση 3 με πιθανότητα 0,52 = 52%.

Θέμα 2

(α) Ενδεικτικό διάγραμμα καταστάσεων:



(β) Απορροφητικές καταστάσεις είναι η 1 και η 5. Μεταβατικές είναι οι 2, 3, 4.

(γ) Κανονική μορφή πίνακα μετάβασης

$$P = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{10} & \frac{1}{2} & \frac{3}{10} & 0 & \frac{1}{10} \\ 0 & 0 & \frac{7}{10} & \frac{1}{10} & \frac{2}{10} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} \\ 1 \\ 5 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 5 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{10} & \frac{1}{10} & \frac{1}{2} & \frac{3}{10} & 0 \\ 0 & \frac{2}{10} & 0 & \frac{7}{10} & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \end{array}.$$

(δ) Ο πίνακας $Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{10} & 0 \\ 0 & \frac{7}{10} & \frac{1}{10} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ περιέχει τις πιθανότητες μετάβασης μεταξύ των καταστάσεων 2, 3, 4, άρα ο Q^2 περιέχει τις πιθανότητες μετάβασης 2 βημάτων μεταξύ των ίδιων καταστάσεων και η πιθανότητα $P(X_2 = 4 \mid X_0 = 2)$ είναι το στοιχείο του Q^2 που βρίσκεται στη θέση (1, 3) (η 1η γραμμή αντιστοιχεί στην κατάσταση 2 και η 3η στήλη στην κατάσταση 4).
Υπολογίζουμε

$$P(X_2 = 4 \mid X_0 = 2) = p^{(2)}_{2,4} = 1/2\cdot 0 + 3/10\cdot 1/10 + 0\cdot 1/3 = 3/100 = 0{,}03 = 3\%.$$

Θέμα 3
Η προσέλευση των Ι.Χ. στο πρατήριο περιγράφεται από μία διεργασία Poisson με $\lambda = 1/3$.
Αν $N(t)$ = {πλήθος Ι.Χ. στο διάστημα (0, t]}, τότε $N(t) \sim \text{Poisson}(\lambda t) = \text{Poisson}(t/3)$, δηλαδή

$$P(N(t) = \kappa) = e^{-\lambda t}(\lambda t)^{\kappa} / \kappa! = e^{-t/3}(t/3)^{\kappa} / \kappa!$$

(α) $P(N(10) = 0) = e^{-10/3}(10/3)^0 / 0! = e^{-10/3} = 0{,}0357 = 3{,}6\%$.

(β) Γνωρίζουμε ότι τα δύο Ι.Χ. έχουν αφιχθεί σε διάστημα 10 λεπτών. Η χρονική στιγμή προσέλευσης του κάθε ενός Ι.Χ. είναι τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή U(0, 10), άρα η πιθανότητα να έχουν αφιχθεί μεταξύ 12:03 έως 12:07 είναι 4 / 10 = 0,4 = 40%. Καθώς, οι αφίξεις των Ι.Χ. είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους, βρίσκουμε ότι η πιθανότητα και τα 2 Ι.Χ. να έχουν αφιχθεί μεταξύ 12:03 έως 12:07 είναι 0,4 · 0,4 = 0,16 = 16%.

(γ) Έστω Y_1, Y_2, Y_3, το πλήθος των αφίξεων στα διαστήματα (0, 1], (1, 2] και (2, 3].
Κάθε ένα από τα διαστήματα έχει μήκος $\delta = 1$, άρα $Y_i \sim \text{Poisson}(1/3)$, i = 1, 2, 3. Επιπλέον, τα διαστήματα δεν είναι επικαλυπτόμενα, άρα οι Y_1, Y_2, Y_3, είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους.
Υπολογίζουμε:

$$P(Y_1 = 1, Y_2= 1, Y_3= 1) = P(Y_1 = 1) \cdot P(Y_2= 1) \cdot P(Y_3= 1) = (1/3\cdot e^{-1/3})^3 = 0{,}0136 = 1{,}36\%.$$

(δ) Γνωρίζουμε ότι αν X_1: ο χρόνος που περνάει μέχρι να συμβεί το 1ο γεγονός, τότε $X_1 \sim \text{Exp}(\lambda) = \text{Exp}(1/3)$. Είναι:

$$P(X_1 > 0{,}5) = e^{-1/3 \cdot 0{,}5} = e^{-1/6} = 0{,}846 = 84{,}6\%$$

Θέμα 4

Είναι ρ = λ / μ = (1/3) / (1/2) = 2/3.

(α) P(X(t) = 0) = g_0 = 1 – ρ = 1/3 = 0,333 = 33,3%.

(β) L_Q = ρ^2 / (1 – ρ) = 4/9 / (1 – 2/3) = 4 / 3 = 1,33 Ι.Χ.

(γ) P(X(t) ≥ 3) = ρ^3 = $(2/3)^3$ = 8 / 27 = 0,296 = 29,6%.

(δ) 30 sec = 0,5 min. Αναζητούμε το μ ώστε $W_Q \leq 0,5$
ή λ / [μ(μ – λ)] ≤ 0,5 ή $\frac{3\mu^2 - \mu - 2}{2\mu(3\mu - 1)} \geq 0$ από όπου βρίσκουμε μ ≤ -2/3 ή μ ϵ (0, 1/3) ή μ ≥ 1.
Όμως, μ ≤ -2/3 απορρίπτεται γιατί δεν έχει φυσική σημασία και μ ϵ (0, 1/3) απορρίπτεται γιατί στην περίπτωση αυτή ρ = λ/μ > 1 και το σύστημα δεν είναι ευσταθές.

Άρα μ ≥ 1 Ι.Χ. / λεπτό. Ειδικότερα, ο ελάχιστος χρόνος ανεφοδιασμού είναι μ = 1 Ι.Χ. / λεπτό.

Σχόλια και παρατηρήσεις

Θέμα 1
Κώδικας Octave για την επαλήθευση των υπολογισμών
```
P = [0 0.2 0.8; 0.8 0.2 0; 0.5 0 0.5]
P^2
X0 = [0.5 0.5 0]
X0*P*P
```

Θέμα 2
Κώδικας R που παράγει το διάγραμμα καταστάσεων
```
library('heemod')
library('diagram')
mat_dim <- define_transition(
  state_names = states,
  1, 0, 0, 0, 0,
  1/10, 1/2, 3/10, 0, 1/10,
  0, 0, 7/10, 1/10, 2/10,
  1/3, 0, 1/3, 1/3, 0,
  0, 0, 0, 0, 1);
curves <- matrix(nrow = 5, ncol = 5, 0.05)
plot(mat_dim,
     curve = curves,
     self.shiftx = c(0.1, 0.1, -0.1, -0.1, 0.1),
     self.shifty = c(-0.1, -0.1, -0.1, 0.1, 0.1),
     self.arrpos = c(1, 1, 2, 2, 1))
```

(γ) Στην κανονική μορφή του πίνακα η σειρά των μεταβατικών καταστάσεων 2, 3, 4 δεν έχει σημασία.