Σημειώσεις Στοχαστικές Διεργασίες - 7ο Μάθημα

Τρίτη 14 Νοεμβρίου 2023

12. Εξέλιξη μίας Διαδικασίας Διακλάδωσης

Μια διαδικασία διακλάδωσης $\{Z_n, n \geq 0\}$ περιγράφει τη διαδικασία αναπαραγωγής μίας κοινότητας κάτω από τις εξής υποθέσεις:

- Τη χρονική στιγμή 0 υπάρχει μόνο ένα άτομο: $Z_0 = 1$.
- Κάθε άτομο ζει μία χρονική μονάδα, και πεθαίνει αφού αποκτήσει Y απογόνους όπου η τ.μ. Y λαμβάνει τιμές 0, 1, 2, …
- Όλα τα άτομα είναι ανεξάρτητα ως προς την αναπαραγωγή τους, δηλαδή αν Y_1 και Y_2 είναι οι απόγονοι των ατόμων A και B τότε οι Y_1 και Y_2 είναι ανεξάρτητες τ.μ. (είναι και ισόνομες καθώς Y_1, Y_2 ~ Y). Δηλαδή, κάθε άτομο ξεκινά τη δική του ανεξάρτητη με τις άλλες διαδικασία διακλάδωσης.

Έστω Z_n το μέγεθος της n-οστής γενιάς, δηλαδή Z_n είναι ο αριθμός των ατόμων που γεννήθηκαν τη χρονική στιγμή n.

Σημαντικά ερωτήματα που αφορούν τη διαδικασία διακλάδωσης $\{Z_n, n \geq 0\}$:

- Ποια είναι η μέση τιμή και η διακύμανση της Z_n;
- Ποια είναι η κατανομή της Z_n;
- Ποια είναι η πιθανότητα ο πληθυσμός να έχει εξαλειφθεί στη γενιά n; ($P(Z_n = 0)$ = ;).
- Ποια είναι η πιθανότητα ο πληθυσμός τελικά να εξαλειφθεί; ($P(\lim_{n \to \infty} Z_n = 0)$ = ;).
- Ποιες είναι οι προϋποθέσεις τελικής εξάλειψης του πληθυσμού;

Αν Z_n ο πληθυσμός γενιάς n, τότε Z_{n-1} είναι ο πληθυσμός της προηγούμενης γενιάς n – 1. Έστω 1, 2, …, Z_{n-1} μία αρίθμηση των ατόμων της γενιάς n – 1. Κάθε ένα από αυτά τα άτομα ξεκινά μία δική του διαδικασία διακλάδωσης και έστω Y_1, Y_2, …, Y_{zn-1}, οι απόγονοι των ατόμων 1, 2, …, Z_{n-1} αντίστοιχα. Τότε ο πληθυσμός στη γενιά n θα είναι ίσος με το άθροισμα όλων αυτών των απογόνων, δηλαδή

$$Z_n = \sum_{i=1}^{Z_{n-1}} Y_i$$

Είναι αξιοσημείωτο πως το μέγεθος της n γενεάς είναι ένα **τυχαίου πλήθους Z_{n-1}** άθροισμα, **τυχαίων μεταβλητών Y_i.**

12.1 Υπολογισμός $E(Z_n)$ και $Var(Z_n)$

Θεώρημα

Έστω $\{Z_0, Z_1, Z_2, \ldots\}$ είναι μια διαδικασία διακλάδωσης με $Z_0 = 1$. Έστω Y η κατανομή του πλήθους των απογόνων, $E(Y) = \mu$ και $Var(Y) = \sigma^2$. Τότε

- $E(Z_n) = \mu^n$.
- $\mathrm{Var}(Z_n) = \sigma^2 \cdot n$, αν $\mu = 1$ και $\mathrm{Var}(Z_n) = \sigma^2 \cdot \mu^{n-1} \cdot \dfrac{\mu^n - 1}{\mu - 1}$, αν $\mu \neq 1$.

Απόδειξη

Εφαρμόζουμε το θεώρημα:

Έστω $X_1, X_2, \ldots,$ ανεξάρτητες και ισόνομες τ. μ. με $E(X_i) = \mu$ και $Var(X_i) = \sigma^2$. Έστω επίσης N μία ακόμα τ. μ. με τιμές φυσικούς αριθμούς και ανεξάρτητη από τις X_i, $i = 1, \ldots,$.

Αν $S_N = X_1 + X_2 + \ldots + X_N$, τότε

(α) $E(S_N) = E(X_1 + X_2 + \ldots + X_N) = \mu \cdot E(N)$

(β) $Var(S_N) = Var(X_1 + X_2 + \ldots + X_N)$

$= \sigma^2 \cdot E(N) + \mu^2 \cdot Var(N)$.

Για $Z_0 = 1$, $Z_1 = Y$, $Z_n = Y_1 + Y_2 + \ldots + Yz_{n-1}$, και $N = Z_{n-1}$ έχουμε

$$
\begin{aligned}
E(Z_n) &= E(Y_1 + Y_2 + \ldots + Yz_{n-1}) \\
&= \mu \cdot E(Z_{n-1}) \\
&= \mu \cdot \mu \cdot E(Z_{n-2}) \\
&= \ldots \\
&= \mu \cdot \mu \cdot \ldots \cdot \mu \cdot E(Z_0) \\
&= \mu^n.
\end{aligned}
$$

Επιπλέον, αν συμβολίζουμε $V_n = Var(Z_n)$, τότε

$V_0 = Var(Z_0) = 0$,

$V_1 = Var(Z_1) = Var(Y) = \sigma^2$

...

$V_n = Var(Z_n)$

$= Var(Y_1 + Y_2 + \ldots + Yz_{n-1})$

$= \sigma^2 \cdot E(Z_{n-1}) + \mu^2 \cdot Var(Z_{n-1})$

$= \sigma^2 \cdot \mu^{n-1} + \mu^2 \cdot V_{n-1}$.

Από τη σχέση $V_n = \sigma^2 \cdot \mu^{n-1} + \mu^2 \cdot V_{n-1}$ με αναδρομικό συλλογισμό παίρνουμε:

$V_1 = \sigma^2$

$V_2 = \sigma^2 \cdot \mu^1 + \mu^2 \cdot \sigma^2 = \mu \cdot \sigma^2(1 + \mu)$

$V_3 = \sigma^2 \cdot \mu^2 + \mu^2 \cdot V_2 = \sigma^2 \cdot \mu^2 + \mu^3 \cdot \sigma^2(1 + \mu) = \mu^2 \cdot \sigma^2(1 + \mu + \mu^2)$

…

$V_n = \mu^{n-1} \cdot \sigma^2(1 + \mu + \mu^2 + \ldots + \mu^{n-1})$

$= \sigma^2 \cdot n$, αν $\mu = 1$ ή $\sigma^2 \cdot \mu^{n-1} (1 - \mu^n) / (1 - \mu)$, αν $\mu \neq 1$.

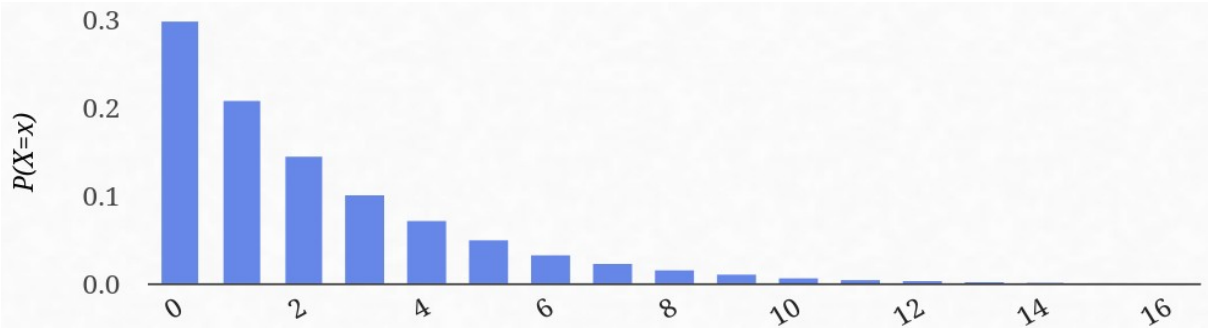
Παράδειγμα 1

Έστω $\{Z_0, Z_1, Z_2, \ldots\}$ μια διαδικασία διακλάδωσης με $Z_0 = 1$ και $Y \sim Geometric(0,3)$.

Τότε $P(Y = k) = (1 - 0,3)^k 0,3 = 0,7^k \cdot 0,3$, $k \geq 0$ και ενδεικτικά $P(Y = 0) = 0,3$, $P(Y = 1) = 0,21$.

Επιπλέον:

- $\mu = E(Y) = (1 - p) / p = 0,7 / 0,3 = 2,33$ απόγονοι ανά άτομο και
- $\sigma^2 = Var(Y) = (1 - p) / p^2 = 0,7 / 0,3^2 = 7,78$ ή $\sigma = 2,8$ άτομα.



Στη $10^η$ γενιά, αναμένεται να υπάρχουν

$$E(Z_{10}) = \mu^{10} = 2,33^{10} = 4.715,8 \text{ απόγονοι}$$

Διακύμανση πλήθους απογόνων:

$$Var(Z_{10}) = \sigma^2 \cdot \mu^9 (1 - \mu^{10}) / (1 - \mu) = 7,78 \cdot 2,33^9 (1 - 2,33^{10}) / (1 - 2,33) = 5,72 \cdot 10^7.$$

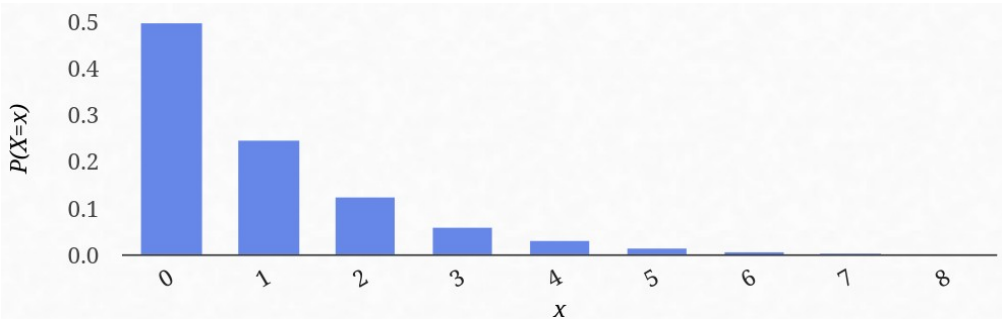
Τυπική απόκλιση:

$$[\mathrm{Var}(Z_{10})]^{1/2} = (5{,}72 \cdot 10^7)^{1/2} = 7.563{,}1 \text{ άτομα.}$$

Παράδειγμα 2

Έστω $\{Z_0, Z_1, Z_2, \ldots\}$ μια διαδικασία διακλάδωσης με $Z_0 = 1$ και $Y \sim \mathrm{Geometric}(0{,}5)$. Τότε:

- $\mu = E(Y) = (1 - p) / p = 0{,}5 / 0{,}5 = 1$ απόγονος ανά άτομο και
- $\sigma^2 = \mathrm{Var}(Y) = (1 - p) / p^2 = 0{,}5 / 0{,}5^2 = 2$ ή $\sigma = 1{,}4$ άτομα.



Στη $10^η$ γενεά, αναμένεται να υπάρχουν

$$E(Z_{10}) = \mu^{10} = 1^{10} = 1 \text{ απόγονος}$$

Διακύμανση πλήθους απογόνων:

$$\mathrm{Var}(Z_{10}) = \sigma^2 \cdot 10 = 2 \cdot 10 = 20.$$

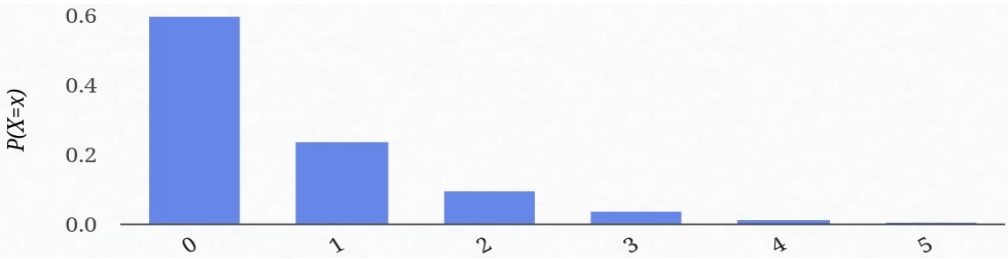
Τυπική απόκλιση:

$$[\mathrm{Var}(Z_{10})]^{1/2} = (20)^{1/2} = 4{,}5 \text{ άτομα.}$$

Παράδειγμα 3

Έστω $\{Z_0, Z_1, Z_2, \ldots\}$ μια διαδικασία διακλάδωσης με $Z_0 = 1$ και $Y \sim \mathrm{Geometric}(0{,}6)$. Τότε:

- $\mu = E(Y) = (1 - p) / p = 0{,}4 / 0{,}6 = 0{,}67$ απόγονοι ανά άτομο και
- $\sigma^2 = \mathrm{Var}(Y) = (1 - p) / p^2 = 0{,}4 / 0{,}6^2 = 1{,}11$ ή $\sigma = 1{,}05$ άτομα.



Στη $10^{η}$ γενεά, αναμένεται να υπάρχουν

$$E(Z_{10}) = \mu^{10} = 0{,}67^{10} = 0{,}017 \text{ απόγονοι}$$

Διακύμανση πλήθους απογόνων:

$$Var(Z_{10}) = \sigma^2 \cdot \mu^9 (1 - \mu^{10}) / (1 - \mu) = 1{,}11 \cdot 0{,}67^9 (1 - 0{,}67^{10}) / (1 - 0{,}67) = 1{,}03.$$

Τυπική απόκλιση:

$$[Var(Z_{10})]^{1/2} = (1{,}03)^{1/2} = 1{,}02 \text{ άτομα.}$$

Δραστηριότητα

Έστω $\{Z_0 = 1, Z_1, Z_2, \ldots\}$ είναι μια διαδικασία διακλάδωσης με $Y \sim B(2, ¼)$. Τότε, κάθε άτομο μπορεί να έχει 0, 1 ή 2 απογόνους με πιθανότητες

Να μην έχει απογόνους: $P(Y = 0) = (2 \text{ ανά } 0)\ 0{,}25^0(1 - 0{,}25)^2 = 0{,}5625 = 56{,}25\%$

Να έχει έναν απόγονο: $P(Y = 1) = (2 \text{ ανά } 1)\ 0{,}25^1(1 - 0{,}25)^1 = 0{,}375 = 37{,}5\%$

Να έχει δύο απογόνους: $P(Y = 2) = (2 \text{ ανά } 2)\ 0{,}25^2(1 - 0{,}25)^0 = 0{,}0625 = 6{,}25\%$

Επιπλέον, γνωρίζουμε από τη θεωρία πως το μέσο πλήθος απογόνων για κάθε άτομο θα είναι $E(Y) = n \cdot p = 2 \cdot ¼ = ½$ με διακύμανση $Var(Y) = n \cdot p \cdot (1 - p) = 2 \cdot ¼ \cdot ¾ = 3/8$.

Να βρεθεί το αναμενόμενο πλήθος απογόνων και τυπική απόκλιση του πλήθους στην 5η γενιά.

12.2 Πιθανογεννήτρια συνάρτηση του πληθυσμού της n-οστής γενιάς

Έστω, Z_{n-1} ο πληθυσμός της γενιάς $n - 1$ και $Y_1, Y_2, \ldots, Y_{zn-1}$, οι απόγονοι αυτών των ατόμων. Παρατηρούμε ότι:

- Οι $Y_1, Y_2, \ldots, Y_{zn-1}$, είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τ.μ. με τιμές φυσικούς αριθμούς και κοινή πιθανογεννήτρια συνάρτηση G_Y.
- Z_{n-1} είναι μία τ.μ. ανεξάρτητη από τις $Y_1, Y_2, \ldots, Y_{zn-1}$.
- Αν $Z_n = Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_{zn-1}$, τότε η πιθανογεννήτρια συνάρτηση της S_N είναι η

$$G_{Zn}(z) = G_{Zn-1}(G_Y(z)) = G_{Zn-1} \circ G_Y(z),$$

όπου $G_Y(z) = E(z^Y)$ η πιθανογεννήτρια συνάρτηση της τ.μ. Y.

Συμβολίζουμε $G(z) = G_1(z)$ και $G_n(z) = G_{zn}(z)$, $n \geq 1$. Καθώς $Z_1 = Y$, είναι

$$G_Y(z) = G_{Z1}(z) = G_1(z) = G(z)$$

και η σχέση

$$G_{Zn}(z) = G_{Zn-1}(G_Y(z)) = G_{Zn-1} \circ G_Y(z),$$

γράφεται

$$\mathbf{G_n(z) = G_{n-1}(G(z)) = G_{n-1} \circ G(z).}$$

Από την τελευταία σχέση, βρίσκουμε σχετικά με τις πιθανογεννήτριες συναρτήσεις της κατανομής των απογόνων:

Απόγονοι 1ης γενιάς: $G_1(z) = G(z)$

Απόγονοι 2ης γενιάς: $G_2(z) = G(G(z)) = G \circ G(z)$

…

Απόγονοι nης γενιάς: $G_n(z) = G(G(...G(z)\ldots)) = G \circ G \circ \ldots \circ G(z)$ (n φορές)

Συνοψίζοντας:

Έστω Y η τυχαία μεταβλητή που αναπαριστά το πλήθος απογόνων κάθε ενός ατόμου, οποιαδήποτε χρονική στιγμή και $G(z) = E(z^Y) = \Sigma_{\kappa \in N} P(Y = \kappa) z^\kappa$, η πιθανογεννήτρια συνάρτηση της Y. Αν $G_n(z)$ η πιθανογεννήτρια συνάρτηση της Z_n, τότε

$$G_n(z) = G(G(...G(z)\ldots)) = G \circ G \circ \ldots \circ G(z) \text{ (n φορές)}$$

Ο εντοπισμός της πιθανογεννήτριας συνάρτησης G_n που εκφράζει το πλήθος απογόνων Z_n της n γενιάς είναι γενικά μία δύσκολη διαδικασία.

Για παράδειγμα αν Y ~ Poisson(λ) τότε $G(y) = e^{(y-1)\lambda}$, y ϵ N και

$$G_2(y) = G(G(y)) = e^{(G(y)-1)\lambda} = e^{(e^{(y-1)\lambda}-1)\lambda}$$
$$G_3(y) = G_2(G(y)) = e^{(e^{(G(y)-1)\lambda}-1)\lambda} = e^{(e^{(e^{(y-1)\lambda}-1)\lambda}-1)\lambda}$$

Ωστόσο, υπάρχουν και κάποιες περιπτώσεις που είναι εφικτές, όπως η περίπτωση όπου η Y ακολουθεί την Γεωμετρική κατανομή, δηλαδή, $P(Y = n) = (1 - p)^n \cdot p = q^n \cdot p$. Στην περίπτωση αυτή αποδεικνύεται ότι:

$$G_n(s) = E(s^{Z_n}) = \begin{cases} \dfrac{n-(n-1)s}{n+1-ns}, & \text{αν } p = q = 0{,}5. \\ \dfrac{(\mu^n - 1) - \mu(\mu^{n-1}-1)s}{(\mu^{n+1}-1) - \mu(\mu^n - 1)s}, & \text{αν } p \neq q, \text{ όπου } \mu = \dfrac{q}{p}. \end{cases}$$

12.3 Πιθανότητα γ τελικής εξάλειψης του πληθυσμού

Μία από τις πιο ενδιαφέρουσες εφαρμογές των διαδικασιών διακλάδωσης είναι ο υπολογισμός της πιθανότητας τελικής εξαφάνισης ενός πληθυσμού, δηλαδή της πιθανότητας $\lim_{n\to\infty} P(Z_n = 0)$.

Για παράδειγμα:

- Ποια είναι η πιθανότητα μια αποικία καρκινικών κυττάρων να εξαφανιστεί προτού αναπτυχθεί σε βάρος του περιβάλλοντα ιστού;
- Ποια είναι η πιθανότητα να εξαφανιστεί μια μολυσματική ασθένεια πριν γίνει επιδημική;
- Ποια είναι η πιθανότητα στο μέλλον να χαθεί το οικογενειακό επίθετο;

Συμβολίζουμε

$$\mathbf{E_n = \{Z_n = 0\} = \{\text{ο πληθυσμός εξαφανίζεται στην n – οστή γενιά}\}}$$

$$\mathbf{= \{\text{δεν υπάρχουν απόγονοι στην n – οστή γενιά}\}}$$

Την πιθανότητα να εξαφανιστεί ο πληθυσμός στη n γενιά, τη συμβολίζουμε

$$\mathbf{\gamma_n = P(E_n)}$$

Αν εξαφανιστεί ο πληθυσμός τη n – οστή γενιά θα παραμείνει εξαφανισμένος και στην n + 1 γενιά. Δηλαδή, παρατηρούμε ότι:

$$\mathbf{E_1 \subseteq E_2 \subseteq \ldots \subseteq E_n \subseteq}$$

Για κάθε διαδικασίας διακλάδωσης που εξελίσσεται, ένα σημαντικό ερώτημα αφορά την πιθανότητα ο πληθυσμός να εξαφανιστεί σε κάποια γενιά $n \geq 1$. Καθώς $E_n \subseteq E_{n+1}$ είναι:

$$\begin{aligned}
\mathbf{\gamma} &\mathbf{= P(\text{ο πληθυσμός τελικά θα εξαλειφθεί})} \\
&\mathbf{= P(U_{n \in N} E_n)} \\
&\mathbf{= P(\lim_{n\to\infty} E_n)} \\
&\mathbf{= \lim_{n\to\infty} P(E_n)} \\
&\mathbf{= \lim_{n\to\infty} \gamma_n}
\end{aligned}$$

Μεταξύ των

$$\begin{aligned}
\mathbf{\gamma_n} &\mathbf{= P(E_n)} \\
&\mathbf{= P(Z_n = 0)} \\
&\mathbf{= P(\text{ο πληθυσμός εξαφανίζεται στην n – οστή γενιά}),\ n \geq 0,}
\end{aligned}$$

υπάρχει μία πολύ χρήσιμη σχέση.

Θεώρημα

Για κάθε $n \geq 1$, είναι

$$\gamma_n = G(\gamma_{n-1})$$

Απόδειξη

Η συνάρτηση $G_n = G \circ G \circ \ldots \circ G$ (n φορές) είναι η πιθανογεννήτρια της Z_n, άρα

$$\gamma_n = P(Z_n = 0) = G_n(0) \text{ και } \gamma_{n-1} = P(Z_{n-1} = 0) = G_{n-1}(0).$$

Όμως, $G_n(z) = G(G_{n-1}(z))$, άρα $G_n(0) = G(G_{n-1}(0))$ ή ισοδύναμα $\gamma_n = G(\gamma_{n-1})$.

Θεώρημα

Αν γ είναι η πιθανότητα τελικής εξαφάνισης του πληθυσμού, τότε η γ είναι η μικρότερη μη αρνητική λύση της εξίσωσης $G(s) = s$, όπου $G(s)$ είναι η πιθανογεννήτρια της τυχαίας μεταβλητής Y με την οποία εκφράζεται το πλήθος των απογόνων ενός ατόμου.

Απόδειξη

Αρκεί να αποδείξουμε ότι: $G(\gamma) = \gamma$ και αν $G(s) = s$, με $s \in [0, 1]$, τότε $s \geq \gamma$ (η περίπτωση ρίζας $s > 1$ δεν μας απασχολεί καθώς προφανώς τότε θα είναι $\gamma < s$). Πράγματι, είναι

$$\begin{aligned}\gamma &= \lim_{n\to\infty}\gamma_n \\ &= \lim_{n\to\infty}G(\gamma_{n-1}) \\ &= G(\lim_{n\to\infty}\gamma_{n-1}) \\ &= G(\lim_{n\to\infty}\gamma_n) \\ &= G(\gamma), \text{ συνεπώς, η } \gamma \text{ είναι λύση της εξίσωσης } G(s) = s.\end{aligned}$$

Στη συνέχεια, θα δείξουμε πως η γ είναι η μικρότερη μη αρνητική λύση της $G(s) = s$.

Γνωρίζουμε ότι τη χρονική στιγμή 0 είναι $Z_0 = 1$, άρα $\gamma_0 = P(E_0) = 0$. Έστω τώρα $s \in [0, 1]$, λύση της $G(s) = s$. Καθώς, η συνάρτηση G είναι αύξουσα στο [0, 1] και $\gamma_0 = 0$, είναι

$$\gamma_0 \leq s \leftrightarrow G(\gamma_0) \leq G(s) \leftrightarrow \gamma_1 \leq s \leftrightarrow G(\gamma_1) \leq G(s) \leftrightarrow \gamma_2 \leq s \leftrightarrow \ldots \leftrightarrow \gamma_n \leq s, \text{ για κάθε } n \in N.$$

Καθώς, $\gamma_n \leq s$, για κάθε $n \in N$, είναι και $\lim_{n\to\infty}\gamma_n \leq s$ δηλαδή $\gamma \leq s$, και αποδείχθηκε πως η πιθανότητα τελικής εξάλειψης γ είναι η μικρότερη δυνατή ρίζα της εξίσωσης $G(\gamma) = \gamma$.

Παράδειγμα 3

Έστω $\{Z_0 = 1, Z_1, Z_2, \ldots\}$ μια διαδικασία διακλάδωσης με $Y \sim B(2, ¼)$. Βρείτε την πιθανότητα ο πληθυσμός τελικά να εξαλειφθεί.

Λύση

Γνωρίζουμε ότι $Y \sim B(2, ¼)$ άρα κάθε άτομο μπορεί να έχει 0, 1 ή 2 απογόνους με πιθανότητες

Να μην έχει απογόνους: $P(Y = 0) = (2 \text{ ανά } 0)\ 0{,}25^0(1 – 0{,}25)^2 = 0{,}5625 = 56{,}25\%$

Να έχει έναν απόγονο: $P(Y = 1) = (2 \text{ ανά } 1)\ 0{,}25^1(1 – 0{,}25)^1 = 0{,}375 = 37{,}5\%$

Να έχει δύο απογόνους: $P(Y = 2) = (2 \text{ ανά } 2)\ 0{,}25^2(1 – 0{,}25)^0 = 0{,}0625 = 6{,}25\%$

Περαιτέρω, αν $Y \sim B(n, p)$ γνωρίζουμε ότι $G_Y(z) = (1 + (z – 1)\, p)^n$.

Για $n = 2$ και $p = ¼$ είναι $G_Y(s) = (1 + (s – 1) / 4)^2 = (¾ + ¼\, s)^2$. Λύνουμε την εξίσωση

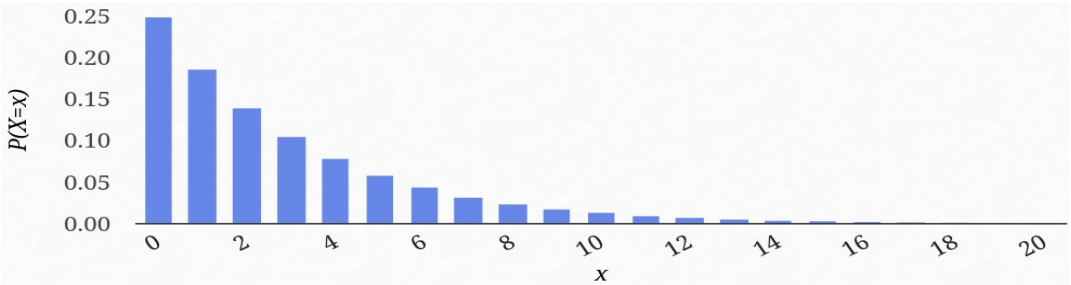
$G(s) = s \leftrightarrow (¾ + ¼\, s)^2 = s$ και βρίσκουμε λύσεις (πως;) $s = 1$ ή $s = 9$. Άρα, $y = 1$, δηλαδή πληθυσμός που αναπαράγεται με $Y \sim B(2, ¼)$ είναι βέβαιο πως θα εξαφανιστεί.

Παράδειγμα 4

Έστω $\{Z_0 = 1, Z_1, Z_2, \ldots\}$ μια διαδικασία διακλάδωσης με $Y \sim \text{Geometric}(¼)$. Βρείτε την πιθανότητα ο πληθυσμός τελικά να εξαλειφθεί.

Λύση

Γνωρίζουμε ότι $Y \sim \text{Geometric}(¼)$ άρα κάθε άτομο μπορεί να έχει 0, 1, 2,… απογόνους.



Επιπλέον, γνωρίζουμε ότι $G_Y(z) = p / [1 – z(1 – p)]$. Για $p = ¼$ είναι $G_Y(s) = 1 / (4 – 3s)$. Λύνουμε την εξίσωση

$G(s) = s \leftrightarrow (¾ + ¼\, s)^2 = s$ και βρίσκουμε λύσεις (πως;) $s = 1/3$ ή $s = 1$. Άρα, $y = 1/3$, δηλαδή πληθυσμός που αναπαράγεται με $Y \sim \text{Geometric}(¼)$ έχει πιθανότητα 33,3% τελικά να εξαλειφθεί.

12.4 Η πιθανότητα τελικής εξάλειψης εξαρτάται από το μέσο πλήθος απογόνων μ.

Αποδεικνύεται ότι εάν ο μέσος αριθμός απογόνων ανά άτομο είναι μεγαλύτερος από 1 (δηλαδή, τα άτομα αντικαθιστούν τον εαυτό τους και κάτι παραπάνω), τότε η διαδικασία διακλάδωσης έχει θετική πιθανότητα μακροπρόθεσμης επιβίωσης —αν και πάντα είναι ένα ενδεχόμενο που μπορεί να συμβεί. Ωστόσο, εάν ο μέσος αριθμός απογόνων ανά άτομο είναι μικρότερος ή ίσος του 1, τότε αποδεικνύεται ότι ο πληθυσμός θα εξαλειφθεί με βεβαιότητα.

Στη συνέχεια για τη τ.μ. Y υποθέτουμε ότι:
(α) Δεν είναι σταθερή: $P(Y = k) < 1$, $k \in N$.
Αν το πλήθος απογόνων Y είναι σταθερό και μεγαλύτερο του 0, τότε προφανώς $\gamma = 0$.

(β) Παίρνει την τιμή 0 με θετική πιθανότητα: $P(Y = 0) > 0$.
Αν $P(Y = 0) = 0$, τότε $G(0) = 0$ και η μικρότερη ρίζα είναι προφανώς το 0, δηλαδή $\gamma = 0$.

(γ) Παίρνει έστω και μία τιμή ≥ 2, ή $P(Y = 0) + P(Y = 1) < 1$,
Με τον τρόπο αυτό είναι βέβαιο πως η συνάρτηση $G(s)$ είναι κυρτή. Επιπλέον, αν $P(Y = 0) + P(Y = 1) = 1$, τότε η μοναδική λύση της $G(s) = s$ είναι η $s = P(Y = 0) / [1 – P(Y = 1)]$.

(δ) Είναι $(G'(1) =)E(Y) = \mu < +\infty$.
Αν $\mu = +\infty$, τότε η απόδειξη της περίπτωσης $\mu > 1$, (με κατάλληλες προσαρμογές) οδηγεί ομοίως στο συμπέρασμα $\gamma < 1$.

Θεώρημα

Έστω $\{Z_0 = 1, Z_1, Z_2, \ldots\}$ μια διαδικασία διακλάδωσης και Y η (μη σταθερή) τ.μ. του πλήθους των απογόνων κάθε ατόμου. Έστω $\mu = E(Y)$ το μέσο πλήθος απογόνων και γ η πιθανότητα τελικής εξάλειψης του πληθυσμού. Τότε ισχύουν τα εξής:

(i) Αν $\mu > 1$ (supercritical case), τότε $\gamma < 1$.
Η εξάλειψη δεν είναι σίγουρη αν το μέσο πλήθος απογόνων είναι $\mu > 1$.

(ii) Αν $\mu < 1$ (subcritical case), τότε $\gamma = 1$.
Η εξάλειψη είναι σίγουρη αν το μέσο πλήθος απογόνων είναι $\mu < 1$.

(iii) Αν $\mu = 1$ (critical case), τότε $\gamma = 1$.
Η εξάλειψη είναι σίγουρη αν το μέσο πλήθος απογόνων είναι $\mu = 1$.

Απόδειξη

Για την απόδειξη θα αξιοποιήσουμε τις εξής ιδιότητες της πιθανογεννήτριας συνάρτησης που έχουμε αποδείξει σε προηγούμενες παραγράφους:

- $G(1) = 1$
- $G(0) = P(X = 0)$
- $G^{(n)}(0) / n! = P(X = n)$
- $E(X) = G'(1)$
- G κυρτή στο [0, 1]
- Η γ είναι η μικρότερη θετική ρίζα της $G(s) = s$ στο [0, 1]

(i) Περίπτωση $\mu > 1$.

Είναι $G(0) = P(Y = 0) > 0$, άρα το 0 δεν είναι μη αρνητική ρίζα της εξίσωσης $G(s) = s$ ή ισοδύναμα $\gamma > 0$. Από το θεώρημα Taylor, γνωρίζουμε πως για s κοντά στο 1, υπάρχει συνάρτηση h, με $\lim_{s\to 1} h(s) = 0$, τέτοια ώστε

$$\begin{aligned} G(s) &= G(1) + G'(1)(s-1) + h(s)(s-1) \\ &= 1 + \mu(s-1) + h(s)(s-1) \\ &= \mu s + 1 - \mu + h(s)(s-1) \qquad (\mu = 1 + \varepsilon, \text{ για κάποιο } \varepsilon > 0). \\ &= (1+\varepsilon)s + 1 - (1+\varepsilon) + h(s)(s-1) \\ &= s - (\varepsilon - h(s))(1-s). \end{aligned}$$

Καθώς $\lim_{s\to 1} h(s) = 0$, υπάρχει δ κοντά στο 1, τέτοιο ώστε, για κάθε $\delta < s < 1$, να είναι

$$|h(s)| < \varepsilon \rightarrow \varepsilon - h(s) > 0 \Leftrightarrow (\varepsilon - h(s))(1-s) > 0.$$

Συμπεραίνουμε ότι για κάθε $s_1 \in (\delta, 1]$ είναι $G(s_1) = s_1 - (\varepsilon - h(s_1))(1 - s_1) < s_1$.

Καθώς $G(0) > 0$ και $G(s_1) < s_1$, από το Θεώρημα Ενδιαμέσων Τιμών (ή από το Θεώρημα Bolzano για τη συνάρτηση $f(s) = G(s) - s$) προκύπτει ότι υπάρχει $s_0 \in (0, s_1)$ τέτοιο ώστε $G(s_0) = s_0 < 1$ ή ισοδύναμα πως $\gamma < 1$.

(ii) και (iii) Περίπτωση $\mu \le 1$.

Είναι $G(0) = P(Y = 0) > 0$, άρα το 0 δεν είναι μη αρνητική ρίζα της εξίσωσης $G(s) = s$, ή ισοδύναμα πως $\gamma > 0$. Θα αποδείξουμε με εις άτοπο απαγωγή ότι $\gamma = 1$.

Έστω ότι υπάρχει κάποιο $s_0 \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε $G(s_0) = s_0$. Η συνάρτηση G είναι συνεχής στο $[s_0, 1]$ και παραγωγίσιμη στο $(s_0, 1)$, άρα, από το Θεώρημα Μέσης Τιμής, θα υπάρχει κάποιο $c \in (s_0, 1)$, τέτοιο ώστε

$$G'(c) = \frac{G(1) - G(s_0)}{1 - s_0} = 1. \quad ,$$

Όμως, G κυρτή και $s_0 < c < 1 \rightarrow G'(s_0) < G'(c) < G'(1) = \mu \le 1$, άτοπο.

Παράδειγμα 5

Έστω $\{Z_0 = 1, Z_1, Z_2, \ldots\}$ μια διαδικασία διακλάδωσης με $Y \sim B(3, p)$. Να βρείτε το μέγιστο p που να διασφαλίζει ότι ο πληθυσμός στο τέλος θα εξαλειφθεί.

Λύση

Είναι $\mu = E(X) = n\cdot p = 3p$. Για να είναι βέβαιη η εξάλειψη θα πρέπει $\mu \le 1$ ή $p \le 1/3$. Άρα, αν η τιμή $p = 1/3$ είναι η μέγιστη που διασφαλίζει ότι ο πληθυσμός τελικά θα εξαλειφθεί.

Παράδειγμα 6

Έστω $\{Z_0 = 1, Z_1, Z_2, \ldots\}$ μια διαδικασία διακλάδωσης με $Y \sim \text{Geometric}(p)$. Να βρείτε το ελάχιστο p που να διασφαλίζει ότι ο πληθυσμός στο τέλος θα εξαλειφθεί.

Λύση

Είναι $\mu = E(X) = (1 - p)/p$. Για να είναι βέβαιη η εξάλειψη θα πρέπει $(1 - p)/p \leq 1$ ή $p \geq 1/2$. Άρα, αν η τιμή $p = 1/2$ είναι η ελάχιστη που διασφαλίζει ότι ο πληθυσμός τελικά θα εξαλειφθεί.

12.3 Χρόνος εξάλειψης στη γενιά n

Υπολογισμός χρόνου εξάλειψης <u>έως τη</u> γενιά n

Ο υπολογισμός της πιθανότητας

$$\gamma_n = P(\text{ο πληθυσμός θα εξαφανιστεί μέχρι τη n γενιά}) = P(Z_n = 0),$$

γίνεται με χρήση της πιθανογεννήτριας:

$$\gamma_n = P(Z_n = 0) = G_n(0).$$

Υπολογισμός χρόνου εξάλειψης <u>ακριβώς στη</u> γενιά n

Ο υπολογισμός της πιθανότητας

$$P(\text{ο πληθυσμός θα εξαφανιστεί ακριβώς τη n γενιά}) = P(Z_n = 0, Z_{n-1} > 0).$$

Είναι $\{Z_n = 0, Z_{n-1} > 0\} \cup \{Z_n = 0, Z_{n-1} = 0\} = \{Z_n = 0\}$ και

$$P(Z_n = 0, Z_{n-1} > 0) + P(Z_n = 0, Z_{n-1} = 0) = P(Z_n = 0).$$

Όμως $P(Z_n = 0, Z_{n-1} = 0) = P(Z_{n-1} = 0)$ (γιατί;) άρα

$$P(Z_n = 0, Z_{n-1} > 0) = P(Z_n = 0) - P(Z_{n-1} = 0) = \gamma_n - \gamma_{n-1} = G_n(0) - G_{n-1}(0).$$

Παράδειγμα 7

Έστω $\{Z_0 = 1, Z_1, Z_2, \ldots\}$ είναι μια διαδικασία διακλάδωσης. Για την τ.μ. Y γνωρίζουμε ότι μπορεί να πάρει τις τιμές 0, 1 και 3 με αντίστοιχες πιθανότητες 1/6, 1/2 και 1/3.

Να βρεθούν

(α) το αναμενόμενο πλήθος απογόνων και η διακύμανση του πλήθους στην $9^η$ γενιά.

(β) η πιθανότητα να εξαλειφθεί ο πληθυσμός την $3^η$ γενιά.

(γ) η πιθανότητα να μην εξαλειφθεί ποτέ ο πληθυσμός.

(δ) Αν υποθέσουμε ότι 5 ανεξάρτητα αντίγραφα αυτής της διαδικασίας διακλάδωσης εξελίσσονται ταυτόχρονα (δηλαδή $Z_0 = 5$), να υπολογιστεί η πιθανότητα τελικής εξάλειψης του πληθυσμού.

Λύση

Έστω $\{Z_0 = 1, Z_1, Z_2, \ldots\}$ είναι μια διαδικασία διακλάδωσης. Για την τ.μ. Y γνωρίζουμε ότι μπορεί να πάρει τις τιμές 0, 1 και 3 με αντίστοιχες πιθανότητες 1/6, 1/2 και 1/3.

(α) Υπολογίζουμε

$\mu = E(Y) = 0 \cdot 1/6 + 1 \cdot 1/2 + 3 \cdot 1/3 = 3/2$

$Var(Y) = E[(Y - \mu)^2] = (0 - 3/2)^2 \cdot 1/6 + (1 - 3/2)^2 \cdot 1/2 + (3 - 3/2)^2 \cdot 1/3 = 5/4.$

$E(Z_9) = \mu^9 = (3/2)^9 = 38{,}4$

$Var(Z_9) = \sigma^2 \cdot \mu^8 (1 - \mu^9) / (1 - \mu) = 5/4 \cdot (3/2)^8 \cdot (1 - (3/2)^9) / (1 - 3/2) = 2.400$

Τυπική απόκλιση: $[Var(Z_9)]^{1/2} = 2.400^{1/2} = 49$ άτομα.

(β) Είναι $G(s) = s^0 \cdot 1/6 + s^1 \cdot 1/2 + s^3 \cdot 1/3 = 1/6 \cdot (1 + 3s + 2s^3)$. Άρα,

$$\begin{aligned} P(Z_3 = 0, Z_2 > 0) &= P(Z_3 = 0) - P(Z_2 = 0) \\ &= G_3(0) - G_2(0) \\ &= G(G(G(0))) - G(G(0)) \\ &= 0{,}2977 - 0{,}2515 \\ &= 0{,}0462 \\ &= 4{,}62\%. \end{aligned}$$

(είναι $G(0) = 1/6$, $G(G(0)) = G(1/6) = 0{,}2515$ και $G(G(G(0))) = G(0{,}2515) = 0{,}2977$)

(γ) Είναι $\mu = 3/2 > 1$ άρα η πιθανότητα εξάλειψης είναι μικρότερη της μονάδας. Για να την υπολογίσουμε επακριβώς λύνουμε την εξίσωση $G(s) = s$ δηλαδή την εξίσωση

$1/6 \cdot (1 + 3s + 2s^3) = s$, η οποία έχει ρίζες 1, $(-1 - 3^{0.5})/2$, $(-1 + 3^{0.5})/2$. Από αυτές η μικρότερη θετική ρίζα είναι η ζητούμενη λύση, δηλαδή $y = (-1 + 3^{0.5})/2 = 0{,}366 = 36{,}6\%$

(δ) Πρόκειται για 5 ανεξάρτητες διεργασίες κάθε μία από τις οποίες έχει πιθανότητα εξάλειψης $y = 0{,}366$. Συνεπώς, η πιθανότητα να συμβεί αυτό και στις 5 διεργασίες είναι

$$y^5 = 0{,}366^5 = 0{,}0065 = 0{,}65\%$$

Παράδειγμα 8

Έστω $\{Z_0 = 1, Z_1, Z_2, \ldots\}$ είναι μια διαδικασία διακλάδωσης και $Y \sim Poisson(\lambda)$.

(α) Υποθέτοντας πως δεν αποβιώνει κανένα μέλος του πληθυσμού, προσδιορίστε τον αναμενόμενο συνολικό πληθυσμό την $10^{η}$ γενιά.

(β) Προσδιορίστε, (και με τη βοήθεια υπολογιστή) την πιθανότητα να μην υπάρχουν μακροπρόθεσμα απόγονοι για $\lambda = ½$, $\lambda = 1$ και $\lambda = 2$.

Λύση

(α) $E(Z_0 + Z_1 + Z_2 + Z_3 + Z_4 + Z_5 + Z_6 + Z_7 + Z_8 + Z_9 + Z_{10}) =$

$= E(Z_0) + E(Z_1) + E(Z_2) + E(Z_3) + E(Z_4) + E(Z_5) +$

$+ E(Z_6) + E(Z_7) + E(Z_8) + E(Z_9) + E(Z_{10})$

$= 1 + \mu + \mu^2 + \mu^3 + \mu^4 + \mu^5 + \mu^6 + \mu^7 + \mu^8 + \mu^9 + \mu^{10}$

$= (\mu^{11} – 1) / (\mu – 1)$, αν $\mu \neq 1$ ή 11 αν $\mu = 1$.

Σημείωση
Η αθροιστική ιδιότητα της αναμενόμενης τιμής ισχύει για κάθε σύνολο τυχαίων μεταβλητών.

(β) $Y \sim \text{Poisson}(\lambda)$ άρα $G_Y(s) = e^{(s – 1)\lambda}$. Λύνουμε την εξίσωση

$G(s) = s$ ή $e^{(s – 1)\lambda} = s$.

Αν $\lambda = ½$ ή $\lambda = 1$ η μοναδική λύση είναι η $s = 1$ (αξιοποιήστε την ανίσωση $e^x \geq x + 1$).

Αν $\lambda = 2$ τότε με χρήση υπολογιστή εκτιμούμε $s = 0{,}2032$, άρα $\gamma = 20{,}32\%$.

Παράδειγμα 9

Κάθε άτομο ενός πληθυσμού αναπαράγεται ανεξάρτητα από τους άλλους και δίνει τυχαίο πλήθος απογόνων ακολουθώντας την κατανομή

Πλήθος απογόνων	0	1	2	3+
Πιθανότητα	0,375	0,125	0,5	0

Στην παρούσα γενιά υπάρχουν 6 άτομα, κάθε ένα από τα οποία έχει τη δυνατότητα να παράξει απογόνους. Υπολογίστε την πιθανότητα τελικής εξάλειψης του πληθυσμού.

Λύση

Το αναμενόμενο πλήθος απογόνων είναι $\mu = E(Y) = 0 \cdot 0{,}375 + 1 \cdot 0{,}125 + 2 \cdot 0{,}5 = 1{,}125$.

Είναι $\mu > 1$, άρα η πιθανότητα εξάλειψης γ για τον πληθυσμό που παράγεται από κάθε ένα άτομο είναι μικρότερη της μονάδας. Ιδιαίτερα, η πιθανότητα γ εξάλειψης για κάθε ένα άτομο αποτελεί τη μικρότερη θετική ρίζα της $G(s) = s$, όπου

$$G(s) = E(s^Y) = 0{,}375 + 0{,}125s + 0{,}5s^2 = 3/8 + 1/8\, s + ½\, s^2 = (3 + s + 4s^2)/8$$

Η επίλυση της εξίσωσης $G(s) = s$ δίνει $s = ¾ = 0{,}75$ ή $s = 1$.

Κάθε ένα άτομο πρόκειται να εξαλειφθεί με πιθανότητα 0,75 = 75%. Συνεπώς, για τον αρχικό πληθυσμό των 6 ατόμων η πιθανότητα εξάλειψης είναι

$$\gamma^6 = 0{,}75^6 = 0{,}178 = 17{,}8\%$$

Παράδειγμα 10

Τα βακτήρια αναπαράγονται με διπλασιασμό. Κάθε χρονική μονάδα, ένα βακτήριο είτε πεθαίνει με πιθανότητα ¼, είτε παραμείνει ζωντανό χωρίς απογόνους με πιθανότητα ¼ είτε διπλασιάζεται με πιθανότητα ½. Ο αρχικός πληθυσμός των βακτηρίων είναι 100 άτομα. Έστω B_n η τυχαία μεταβλητή που εκφράζει το συνολικό πλήθους βακτηρίων μετά n χρονικές στιγμές.

(α) Να βρεθεί η πιθανογεννήτρια συνάρτηση της B_n.

(β) Υπολογίστε την πιθανότητα τελικής εξάλειψης του πληθυσμού.

(γ) Έστω m_n ο μέγιστος αριθμός βακτηρίων τη χρονική στιγμή n. Να βρεθεί ο m_n και να βρεθεί η πιθανότητα ο πληθυσμός να έχει αυτήν την μέγιστη τιμή τη χρονική στιγμή n.

(δ) Αν γνωρίζουμε πως τη χρονική στιγμή 50 υπάρχουν 1.000 βακτήρια, τότε να βρεθεί το αναμενόμενο πλήθος βακτηρίων τη χρονική στιγμή 51.

Λύση

Κάθε χρονική μονάδα, ένα βακτήριο αποδίδει 0 απογόνους (πεθαίνει) με πιθανότητα ¼, αποδίδει 1 απόγονο (τον ίδιο του τον εαυτό όταν παραμείνει ζωντανό χωρίς απογόνους) με πιθανότητα ¼ και δύο απογόνους (διπλασιάζεται) με πιθανότητα ½.

(α) Έστω ζ_i το πλήθος απογόνων του i - οστού βακτηριδίου, i = 1, 2, …, 100 και $\zeta_i^{(n)}$ το πλήθος απογόνων του i – οστού βακτηριδίου την γενιά n . Η πιθανογεννήτρια συνάρτηση της ζ_i είναι

$$G(s) = \tfrac{1}{4} s^0 + \tfrac{1}{4} s + \tfrac{1}{2} s^2 = \tfrac{1}{4} \cdot (1 + s + 2s^2),$$

ενώ η πιθανογεννήτρια συνάρτηση του $\zeta_i^{(n)}$, i = 1, 2, …, 100, είναι

$$G^{(n)}(s) = G \circ G \circ \ldots \circ G(s) \text{ (n φορές)}$$

Αν Z_n το πλήθος απογόνων των 100 βακτηρίων της n γενιάς τότε

$$Z_n = \zeta_1^{(n)} + \zeta_1^{(n)} + \ldots + \zeta_{100}^{(n)}.$$

Οι $\zeta_i^{(n)}$, i = 1, 2, …, 100 είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους τυχαίες μεταβλητές άρα η πιθανογεννήτρια συνάρτηση της Z_n θα είναι το γινόμενο των επιμέρους πιθανογεννητριών, δηλαδή

$$G_{Zn}(s) = [G^{(n)}(s)]^{100}.$$

(β) Κάθε βακτηρίδιο αναπαράγεται ανεξάρτητα από τα υπόλοιπα. Άρα, η πιθανότητα εξάλειψης του συνολικού πληθυσμού είναι ίση με το γινόμενο των πιθανοτήτων εξάλειψης κάθε ενός από αυτά. Η πιθανότητα εξάλειψης ενός από αυτά είναι η μικρότερη θετική ρίζα της εξίσωσης G(s) = s.

Είναι: $G(s) = s \leftrightarrow 1 + s + 2s^2 = 4s \leftrightarrow 2s^2 - 3s + 1 = 0 \leftrightarrow s = ½$ ή $s = 1$.

Άρα, η πιθανότητα εξάλειψης του πληθυσμού που προέρχεται από ένα βακτήριο είναι γ = ½ = 0,5 = 50% και η πιθανότητα εξάλειψης του πληθυσμού που προέρχεται από το σύνολο όλων των 100 βακτηριδίων είναι $(½)^{100} = 7,9 \cdot 10^{-31}$.

(γ) Το μέγιστο πλήθος βακτηριδίων προκύπτει όταν κάθε ένα από τα 100 βακτηρίδια διπλασιάζεται δηλαδή όταν δίνει 2 απογόνους. Άρα, $m_n = 100 \cdot 2^n$. Επιπλέον, σε κάθε ένα από τα βήματα i = 0, 1, 2, …, n, καθώς η πιθανότητα διπλασιασμού για ένα βακτήριο είναι ½, η πιθανότητα διπλασιασμού για τα m_n βακτήρια είναι (½)^m_n Υπολογίζουμε:

$$P(Z_n = m_n) = P(Z_n = m_n, Z_{n-1} = m_{n-1}, \dots, Z_1 = m_1, Z_0 = m_0)$$

$$= P(Z_n = m_n \mid Z_{n-1} = m_{n-1}) \cdot P(Z_{n-1} = m_{n-1} \mid Z_{n-2} = m_{n-2}) \cdot$$

$$\cdot \dots \cdot P(Z_1 = m_1 \mid Z_0 = m_0) \cdot P(Z_0 = m_0) =$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{m_{n-1}} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{m_{n-2}} \cdot \dots \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{m_0} = \left(\frac{1}{2}\right)^{100\left(2^{n-1} + \dots + 2 + 1\right)} = \left(\frac{1}{2}\right)^{100 \cdot \left(2^n - 1\right)}$$

(δ) Το αναμενόμενο πλήθος απογόνων για κάθε ένα από τα 1.000 βακτήρια είναι

$$M = E(Y) = 0 \cdot ¼ + ¼ \cdot 1 + ½ \cdot 2 = 5/4 = 1,25.$$

Άρα, το αναμενόμενο πλήθος βακτηρίων στο βήμα 51 για τα 1.000 βακτήρια θα είναι

$M_{1000} = 1000 \cdot M = 1000 \cdot 1,25 = 1.250$ βακτήρια.

Σημειώσεις

Είναι $G'(s) = [¼ \cdot (1 + s + 2s^2)]' = ¼ \cdot (1 + 4s)$. Το αναμενόμενο πλήθος απογόνων ισοδύναμα μπορούμε να το υπολογίσουμε ως μ = G'(1) = 5/4. Επιπλέον, αξιοποιήθηκε η αθροιστική ιδιότητα της αναμενόμενης τιμής που ισχύει για κάθε ομάδα τυχαίων μεταβλητών.

Παράδειγμα 11

Ένα παιχνίδι τύχης ξεκινάει με 3 ευρώ στο τραπέζι. Κάθε παίκτης ρίχνει ένα ζάρι.

Αν το ζάρι είναι 1 ή 2 τότε ο παίκτης παίρνει 1 ευρώ από τραπέζι.

Αν το ζάρι είναι 3 τότε ξαναρίχνει.

Αν το ζάρι είναι 4 τότε βάζει 1 ευρώ στο τραπέζι.

Αν το ζάρι είναι 5 ή 6 βάζει 2 ευρώ στο τραπέζι.

Το παιχνίδι τελειώνει όταν δεν υπάρχουν πλέον χρήματα στο τραπέζι.

(α) Προσδιορίστε τα “άτομα”, και τις έννοιες της “αναπαραγωγής” και της “γενιάς” βάσει των οποίων το παραπάνω παιχνίδι μπορεί να θεωρηθεί ως μία διαδικασία διακλάδωσης.

(β) Να βρεθεί η πιθανογεννήτρια συνάρτηση του συνολικού πλήθος ευρώ Z_n που απομένουν στο τραπέζι στην n “γενιά”.

(γ) Να βρεθεί το αναμενόμενο πλήθος χρημάτων στο τραπέζι στην n “γενιά”.

(δ) Να υπολογιστεί η πιθανότητα με την οποία το παιχνίδι τελικά θα σταματήσει.

Λύση

(α) Για να εκφράσουμε τη διαδικασία του παιχνιδιού ως μία διαδικασία διακλάδωσης θεωρούμε ως αρχικό “άτομο” κάθε ένα από τα 3 ευρώ που βρίσκονται αρχικά στο τραπέζι και κάθε “γενιά” τα ευρώ που 0απομένουν στη θέση του κάθε ενός, μετά από μία συνεχόμενη ακολουθία παιχνιδιών σε πλήθος όσα και τα ευρώ που βρίσκονται στο τραπέζι. Δηλαδή, αν $Z_0 = 3$, τότε

Z_1 = τα ευρώ που βρίσκονται στο τραπέζι μετά από 3 ρίψεις.

Αν (για παράδειγμα) μετά από 3 ρίψεις τα ευρώ στο τραπέζι είναι 4 τότε

Z_2 = τα ευρώ που βρίσκονται στο τραπέζι μετά από άλλες 4 ρίψεις.

Με την παραπάνω θεώρηση, το κάθε ευρώ που βρίσκεται στο τραπέζι οποιαδήποτε χρονική στιγμή προσομοιάζει σε “άτομο” που “αναπαράγεται” με πλήθος απογόνων Y, όπου

P(Y = 0) = 2/6 = 1/3 (με 1 ή 2 ο παίκτης παίρνει ένα ευρώ)

P(Y = 1) = 1/6 (με 3 το ευρώ μένει άθικτο)

P(Y = 2) = 1/6 (με 4 το ευρώ διπλασιάζεται καθώς ο παίκτης βάζει ένα)

P(Y = 3) = 2/6 = 1/3 (με 5 ή 6 το ευρώ τριπλασιάζεται καθώς ο παίκτης βάζει δύο)

(β) Έστω ζ_i το πλήθος των ευρώ που μένουν στη θέση του i - οστού ευρώ, i = 1, 2, 3 και $\zeta_i^{(n)}$ το πλήθος ευρώ τη γενιά n . Η πιθανογεννήτρια συνάρτηση της ζ_i είναι

$$G(s) = 1/3\, s^0 + 1/6\, s + 1/6\, s^2 + 1/3\, s^3 = 1/6 \cdot (2 + s + s^2 + 2s^3),$$

ενώ η πιθανογεννήτρια συνάρτηση του $\zeta_i^{(n)}$, i = 1, 2, 3, είναι

$$G^{(n)}(s) = G \circ G \circ \ldots \circ G(s) \text{ (n φορές)}$$

Αν Z_n το πλήθος ευρώ “απογόνων” των 3 αρχικών ευρώ στη n γενιά τότε

$$Z_n = \zeta_1^{(n)} + \zeta_1^{(n)} + \zeta_3^{(n)}.$$

Οι $\zeta_i^{(n)}$, i = 1, 2, 3 είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους τυχαίες μεταβλητές άρα η πιθανογεννήτρια συνάρτηση της Z_n θα είναι το γινόμενο των επιμέρους πιθανογεννητριών, δηλαδή

$$G_{Zn}(s) = [G^{(n)}(s)]^3.$$

(γ) Είναι $G^{(1)}_{Zn}(s) = 3[G^{(n)}(s)]^2[G^{(n)}(s)]^{(1)}$ και

$$[G^{(n)}(s)]^{(1)} = G^{(1)}(G^{(n-1)}(s)) \cdot G^{(1)}(G^{(n-2)}(s)) \cdot \ldots \cdot G^{(1)}(s)$$

Καθώς G(1) = 1, υπολογίζουμε, $E(Z_n) = G^{(1)}_{Zn}(1) = 3\,(G^{(1)}(1))^n$.

Είναι, $G(s) = 1/6 \cdot (2 + s + s^2 + 2s^3)$, άρα $G^{(1)}(s) = 1/6 \cdot (1 + 2s + 6s^2)$ και $G^{(1)}(1) = 9/6 = 3/2$.

Καταλήγουμε ότι: $E(Z_n) = G^{(1)}_{Zn}(1) = 3\,(3/2)^n = 3^{n+1}/2^n$.

(δ) Η πιθανότητα εξάλειψης γ του κάθε ενός από τα αρχικά ευρώ είναι η μικρότερη θετική λύση της εξίσωσης G(s) = s. Λύνοντας την εξίσωση βρίσκουμε s = -2, s = ½ και s = 1, άρα γ = ½ = 0,5 = 50%. Καθώς κάθε ένα από τα αρχικά ευρώ αντικαθίσταται με τρόπο ανεξάρτητο με τα άλλα, συμπεραίνουμε ότι η πιθανότητα το παιχνίδι να σταματήσει είναι

$$(1/2)^3 = 1/8 = 0{,}125 = 12{,}5\%.$$