**Σημειώσεις Στοχαστικές Διεργασίες - 6ο Μάθημα**

**Τρίτη 7 Νοεμβρίου 2023**

## 11. Διαδικασίες Διακλάδωσης: Προκαταρκτικά

### Γεωμετρική κατανομή

Έστω **p η πιθανότητα επιτυχίας** σε μία δοκιμή ενός πειράματος. Ως "**γεωμετρική κατανομή**" περιγράφονται οι εξής δύο διακριτές κατανομές πιθανοτήτων:

Η κατανομή πιθανότητας του πλήθους X ε N* των δοκιμών Bernoulli(p) που απαιτούνται για να επιτευχθεί μία επιτυχία. Η πιθανότητα ότι η n – οστή δοκιμή είναι η πρώτη επιτυχία είναι

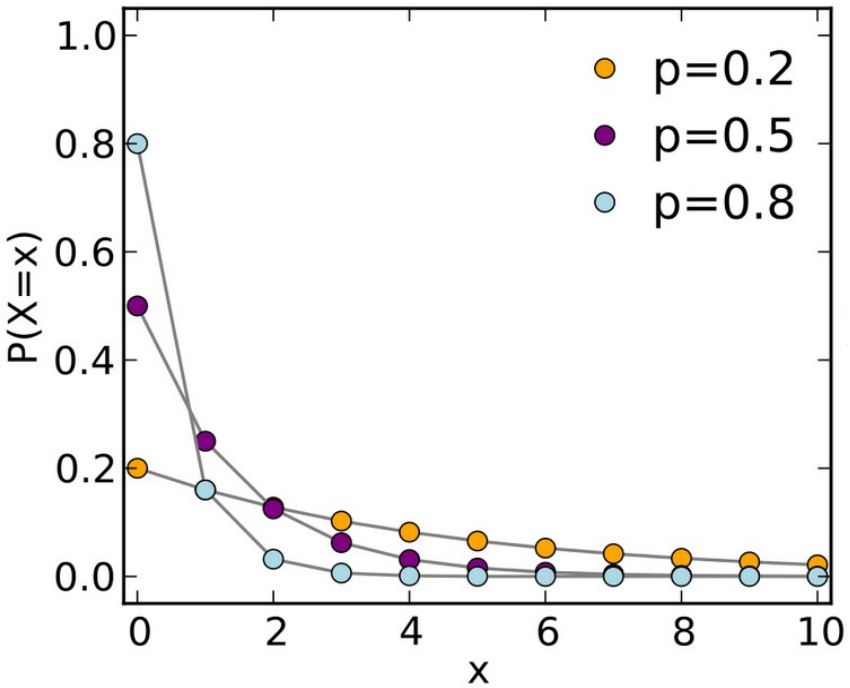
$$\mathbf{P(X = n) = (1 - p)^{n - 1} \cdot p,}\ (E(X) = 1/p,\ Var(X) = (1 - p)/p^2)$$

Η κατανομή πιθανότητας του πλήθους Y = X − 1 (ε N) αποτυχιών πριν από την πρώτη επιτυχία. Στην περίπτωση αυτή η συνάρτηση πιθανότητας της Y είναι

$$\mathbf{P(Y = n) = (1 - p)^{n} \cdot p},\ (E(Y) = (1 - p)/p,\ Var(Y) = (1 - p)/p^2)$$

Και στις δύο περιπτώσεις γράφουμε **X ~ Geometric(p)** ή **Y ~ Geometric(p)** αντίστοιχα και θα διευκρινίζεται από το πλαίσιο αναφοράς το ακριβές είδος της κατανομής.

Σημείωση
Η προέλευση της ονομασίας είναι φανερή, καθώς και στις δύο περιπτώσεις η ακολουθία των πιθανοτήτων αποτελεί γεωμετρική πρόοδο.




*Ενδεικτική συνάρτηση πιθανότητας μίας τ.μ. X ~ Geometric(p), για p = 0,2, 0,5, 0,8, όπου το X εκφράζει το πλήθος αποτυχιών πριν από την πρώτη επιτυχία για x = 0, 1, .., ,10 αποτυχίες (p: πιθανότητα επιτυχίας)* $P(X = n) = (1 - p)^n \cdot p$

**Θεώρημα**

Αν X, Y ανεξάρτητες τ.μ. τότε

(α) $E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y)$.

(β) $E(X \mid Y = y) = E(X)$

**Απόδειξη**

(α) Αν X, Y ανεξάρτητες, τότε $f_{X,\,Y}(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$ κι

$$\begin{aligned}
E(XY) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)xydxdy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)f_Y(y)xydxdy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)xdx \int_{-\infty}^{\infty} f_Y(y)ydy \\
&= E(X)E(Y)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[XY] &= \sum_{x,y} xy\Pr(X=x, Y=y) \\
&= \sum_x \sum_y xy\Pr(X=x, Y=y) \\
&= \sum_x \sum_y xy\Pr(X=x)\Pr(Y=y) \\
&= \sum_x x\Pr(X=x) \sum_y y\Pr(Y=y) \\
&= \sum_x x\Pr(X=x)\,\mathbf{E}[Y] \\
&= \mathbf{E}[Y] \sum_x x\Pr(X=x) \\
&= \mathbf{E}[Y]\,\mathbf{E}[X]
\end{aligned}$$

(β) (για διακριτές τ.μ.): $E(X \mid Y) = \Sigma_X P(X = x \mid Y = y) = \Sigma_X P(X = x) = E(X)$.

Σημείωση: Η αντίστοιχη ιδιότητα της αναμενόμενης τιμής για το άθροισμα τ.μ. ισχύει χωρίς κάποια προϋπόθεση για τις τ.μ. X, Y. Δηλαδή για κάθε τ.μ. X, Y ισχύει $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$.

**Πρόταση (Σύνθεση αναμενόμενων τιμών - Law of Iterated Expectation - LIE)**

Για κάθε δύο τ.μ. X, Y ισχύει $E(X) = E_Y(E_X(X|Y))$.

**Απόδειξη**

(α) Συνεχείς τ.μ.

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(\mathrm{E}(X \mid Y)) &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{E}(X \mid Y = y) f_Y(y)dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x f_{X|Y}(x|y)dx\, f_Y(y)dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x f_{X|Y}(x|y) f_Y(y)dxdy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x f_{X,Y}(x,y)dxdy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x f_{X,Y}(x,y)dydx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dydx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)dx \\
&= \mathrm{E}(X)
\end{aligned}$$

(β) Διακριτές τ.μ.

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(\mathrm{E}(X \mid Y)) &= \mathrm{E}\left[\sum_x x \cdot \mathrm{P}(X = x \mid Y)\right] \\
&= \sum_y \left[\sum_x x \cdot \mathrm{P}(X = x \mid Y = y)\right] \cdot \mathrm{P}(Y = y) \\
&= \sum_y \sum_x x \cdot \mathrm{P}(X = x, Y = y).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_x \sum_y x \cdot \mathrm{P}(X = x, Y = y) &= \sum_x x \sum_y \mathrm{P}(X = x, Y = y) \\
&= \sum_x x \cdot \mathrm{P}(X = x) \\
&= \mathrm{E}(X).
\end{aligned}$$

Για το νόημα των όρων $E(X \mid Y = y)$ και $E_Y(E_X(X|Y))$, ο αναγνώστης παραπέμπεται εδώ:
https://stats.stackexchange.com/questions/118578/what-is-the-difference-between-exy-and-exy-y

**Θεώρημα**

Για κάθε δύο τ.μ. X, Y, ισχύει

(α) (Law of Iterated Expectation)

$$\mathbf{E(Y) = E_X(E_Y(Y|X)).}$$

(β) Νόμος ολικής διακύμανσης (Law of total variance ή Eve's Law όπως E(xpected value) V(ariance) Law)

$$\mathbf{Var(Y) = E_X(Var_Y(Y \mid X)) + Var_X(E_Y(Y \mid X))}$$

**Απόδειξη**

(α) Από την πρόταση της προηγούμενης σελίδας με αλλαγή των ρόλων των τ.μ. X, Y.

(β)

$$\mathrm{Var}[Y] = \mathrm{E}\left[Y^2\right] - \mathrm{E}[Y]^2$$

$$\mathrm{E}\left[Y^2\right] = \mathrm{E}\left[\mathrm{E}[Y^2 \mid X]\right] = \mathrm{E}\left[\mathrm{Var}[Y \mid X] + [\mathrm{E}[Y \mid X]]^2\right]$$

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\left[Y^2\right] - \mathrm{E}[Y]^2 &= \mathrm{E}\left[\mathrm{Var}[Y \mid X] + [\mathrm{E}[Y \mid X]]^2\right] - [\mathrm{E}[\mathrm{E}[Y \mid X]]]^2 \\ &= (\mathrm{E}[\mathrm{Var}[Y \mid X]]) + \left(\mathrm{E}\left[\mathrm{E}[Y \mid X]^2\right] - [\mathrm{E}[\mathrm{E}[Y \mid X]]]^2\right) \\ &= \mathrm{E}[\mathrm{Var}[Y \mid X]] + \mathrm{Var}[\mathrm{E}[Y \mid X]]\end{aligned}$$

Πηγή: https://en.wikipedia.org/wiki/Law_of_total_variance

**Ερμηνεία του διαμερισμού**

Αν οι X, Y είναι ανεξάρτητες τότε $Var_X(E_Y(Y \mid X)) = 0$, καθώς $E_Y(Y \mid X) = E_Y(Y)$ και$Var_X(E(Y \mid X)) = Var_X(E(Y)) = 0$ (δεν υπάρχει μεταβλητότητα ως προς X).

Αν ωστόσο οι X, Y δεν είναι ανεξάρτητες τότε η $E_Y(Y \mid X = x))$ διαφοροποιείται καθώς το x διατρέχει όλες τις πιθανές τιμές της τ.μ. X και το μέγεθος της διαφοροποίησης σχετίζεται με το μέγεθος της εξάρτησης των δύο μεταβλητών. Συνεπώς, η $\mathbf{Var_X(E_Y(Y \mid X))}$ που ποσοτικοποιεί τη μεταβλητότητα αυτών των τιμών, μπορεί να ερμηνευτεί ως **το μέρος της μεταβλητότητας της τ.μ. Y <u>που εξηγείται από την τ.μ. X</u>.**

Καθώς **Var(Y) είναι το σύνολο της μεταβλητότητας** της Y και $E_X(Var_Y(Y \mid X)) + Var_X(E_Y(Y \mid X)) = Var(Y)$, η εναπομένουσα ποσότητα $\mathbf{E_X(Var_Y(Y \mid X))}$ **προσδιορίζεται ως το μέρος της μεταβλητότητας της τ.μ. Y <u>που δεν εξηγείται από την τ.μ. X</u>.**

## 11.1 Πιθανογεννήτρια συνάρτηση

Έστω X μία διακριτή μεταβλητή που λαμβάνει ακέραιες τιμές. Η **πιθανογεννήτρια συνάρτηση (probability-generating function – PGF**) της τ.μ. X ορίζεται να είναι η συνάρτηση

$$\mathbf{G_X(z) = E(z^X) = \Sigma_{\kappa = 0, 1, \ldots} P(X = \kappa) \cdot z^\kappa}$$

Καθώς $0 \le P(X = \kappa) \le 1$, $\kappa \in N$, η συνάρτηση $G_X$ συγκλίνει πάντα για κάθε $|z| < 1$. Είναι ωστόσο πιθανό να συγκλίνει σε χωρίο μεγαλύτερης ακτίνας, ακόμα και στο σύνολο του μιγαδικού επιπέδου C.

Σημειώσεις
Η πιθανογεννήτρια συνάρτηση $G_X(z)$ στη συνέχεια θα αξιοποιηθεί ως μία πραγματική συνάρτηση μίας πραγματικής μεταβλητής. Η πιθανογεννήτρια $G_X(z)$ συνδέεται στενά με τη ροπογεννήτρια $M_X$ με τη σχέση $G_X(e^t) = M_X(t)$ ή ισοδύναμα $G_X(z) = M_X(\log z)$

**Παράδειγμα**

Αν $X \sim B(n, p)$ τότε $P(X = \kappa) = (n \text{ ανά } \kappa)\, p^\kappa (1 – p)^{n – \kappa}$ και

$$G_X(z) = E(z^X) = \Sigma_{\kappa = 0, 1, \ldots, n} P(X = \kappa) \cdot z^\kappa$$

$$= \Sigma_{\kappa = 0, 1, \ldots, n} (n \text{ ανά } \kappa)\, p^\kappa (1 – p)^{n – \kappa} \cdot z^\kappa$$

$$= \Sigma_{\kappa = 0, 1, \ldots, n} (n \text{ ανά } \kappa)\, (zp)^\kappa (1 – p)^{n – \kappa}$$

$$= (zp + 1 – p)^n$$

$$= (1 + (z – 1)\, p)^n.$$

Άρα, $G_X(z) = (1 + (z – 1)\, p)^n$ για **κάθε z ε C**, ειδικότερα,

$G_X(x) = (1 + (x – 1)\, p)^n$, για **κάθε x ε R**.

**Παράδειγμα**

Αν $X \sim \text{Geometric}(p)$ τότε $P(X = \kappa) = (1 – p)^\kappa \cdot p$, $\kappa = 0, 1, 2, \ldots$, και

$$G_X(z) = E(z^X) = \Sigma_{\kappa = 0, 1, \ldots} (1 – p)^\kappa \cdot p \cdot z^\kappa$$

$$= p \cdot \Sigma_{\kappa = 0, 1, \ldots} [z(1 – p)]^\kappa$$

$$= p / [1 – z(1 – p)]$$

Άρα, $G_X(z) = p / [1 – z(1 – p)]$ **για κάθε $|z(1 – p)| < 1$**, δηλαδή **$|z| < 1 / (1 – p)$**.

Σημείωση
Άθροισμα γεωμετρικής προόδου $\Sigma_{\kappa = 0, 1, \ldots} \alpha^\kappa = 1 + \alpha + \alpha^2 + \ldots = 1/(1 – \alpha)$ για $|\alpha| < 1$.

**Παράδειγμα**

Αν $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$ τότε $P(X = \kappa) = \lambda^{\kappa} \cdot e^{-\lambda} / \kappa!$, $\kappa = 0, 1, 2, \ldots$, και

$$G_X(z) = E(z^X) = \Sigma_{\kappa = 0, 1, \ldots} P(X = \kappa) \cdot z^{\kappa}$$

$$= \Sigma_{\kappa = 0, 1, \ldots} \lambda^{\kappa} \cdot e^{-\lambda} / \kappa! \cdot z^{\kappa}$$

$$= e^{-\lambda} \cdot \Sigma_{\kappa = 0, 1, \ldots} (z\lambda)^{\kappa} / \kappa!$$

$$= e^{-\lambda} \cdot e^{z\lambda}$$

$$= e^{(z - 1)\lambda}.$$

Άρα, $G_X(z) = e^{(z - 1)\lambda}$ για **κάθε z ε C**, ειδικότερα, $G_X(x) = e^{(x - 1)\lambda}$, για **κάθε x ε R**.

Η συνάρτηση $G_X(z) = E(z^X) = \Sigma_{\kappa = 0, 1, \ldots} P(X = \kappa) \cdot z^{\kappa}$ στο χωρίο που ορίζεται καλώς, παραγωγίζεται ως εξής:

$$G^{(1)}_X(z) = \Sigma_{\kappa = 1, 2, \ldots} \kappa \cdot P(X = \kappa) \cdot z^{\kappa - 1}$$

$$= P(X = 1) + 2 \cdot P(X = 2) \cdot z + 3 \cdot P(X = 3) \cdot z^2 + \ldots$$

$$G^{(2)}_X(z) = \Sigma_{\kappa = 2, 3, \ldots} \kappa \cdot (\kappa - 1) \cdot P(X = \kappa) \cdot z^{\kappa - 2}$$

$$= 2 \cdot P(X = 2) + 6 \cdot P(X = 3) \cdot z + 12 \cdot P(X = 4) \cdot z^2 + \ldots$$

$$G^{(3)}_X(z) = \Sigma_{\kappa = 3, 4, \ldots} \kappa \cdot (\kappa - 1) \cdot (\kappa - 2) \cdot P(X = \kappa) \cdot z^{\kappa - 3}$$

$$= 6 \cdot P(X = 3) + 24 \cdot P(X = 4) \cdot z + 60 \cdot P(X = 5) \cdot z^2 + \ldots$$

...

$$G^{(n)}_X(z) = \Sigma_{\kappa = n, n+1, \ldots} \kappa! / (\kappa - n)! \cdot P(X = \kappa) \cdot z^{\kappa - n}$$

**Η ονομασία "πιθανογεννήτρια συνάρτηση" για την $G_X(z)$ δικαιολογείται από τις εξής ιδιότητες:**

- $G_X(0) = \Sigma_{\kappa = 0, 1, \ldots} P(X = 0) \cdot 0^{\kappa} = P(X = 0)$
- $G^{(1)}_X(0) = \Sigma_{\kappa = 1, 2, \ldots} \kappa \cdot P(X = \kappa) \cdot 0^{\kappa - 1} = P(X = 1)$
- $G^{(n)}_X(0) / n! = 1 / n! \cdot \Sigma_{\kappa = n, n+1, \ldots} \kappa! / (\kappa - n)! \cdot P(X = \kappa) \cdot 0^{\kappa - n} = P(X = n)$

Συμπεραίνουμε ότι:

**Η πιθανογεννήτρια συνάρτηση $G_X(z)$ της διακριτής τυχαίας μεταβλητής X, προσδιορίζει πλήρως τη συνάρτηση πιθανότητάς $f(n) = P(X = n)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$.**

Ιδιαίτερα, αν δύο τ.μ. έχουν την ίδια πιθανογεννήτρια τότε θα έχουν και την ίδια κατανομή πιθανότητας.

**Δραστηριότητα**

Έστω X διακριτή τ.μ. που λαμβάνει τιμές φυσικούς αριθμούς με πιθανογεννήτρια 0συνάρτηση $G_X(z) = z(2 + 3z^2) / 5$. Να βρεθεί η συνάρτηση πιθανότητας $P(X = \kappa)$ της X, $\kappa = 0, 1, 2, \ldots$.

Υπόδειξη

Υπολογίστε τις τιμές $G^{(n)}_X(0) / n!$ για διάφορές τιμές του n.

**Η ονομασία πιθανογεννήτρια αιτιολογείται <u>και</u> από τις παρακάτω ιδιότητες**

Αν η $G^{(1)}$ ορίζεται και είναι συνεχής συνάρτηση στο $z = 1$, τότε:

$E(X) = \Sigma_{\kappa = 1, 2, \ldots} \kappa \cdot P(X = \kappa) = \lim_{z \to 1} G^{(1)}_X(z) = G^{(1)}_X(1)$

$E(X\cdot(X - 1)\cdot\ldots\cdot(X - n + 1)) = \Sigma_{\kappa = n, n+1, \ldots} \kappa! / (\kappa - n)! \cdot P(X = \kappa) = \lim_{z \to 1} G^{(n)}_X(z) = G^{(n)}_X(1)$

$$\begin{aligned} Var(X) &= E(X - E(X))^2 \\ &= E(X^2) - (EX)^2 \\ &= E(X(X - 1)) + E(X) - (E(X))^2 \\ &= \lim_{z \to 1} G^{(2)}_X(z) + \lim_{z \to 1} G^{(1)}_X(z) - [\lim_{z \to 1} G^{(1)}_X(z)]^2 \\ &= G^{(2)}_X(1) + G^{(1)}_X(1) - [G^{(1)}_X(1)]^2 \end{aligned}$$

**Θεώρημα**

Η πιθανογεννήτρια ως πραγματική συνάρτηση μίας πραγματικής μεταβλητής:

(i) είναι αύξουσα στο διάστημα [0, 1].

(ii) Αν η τ.μ. X παίρνει έστω και μία τιμή μεγαλύτερη του 1, τότε η $G_X$ είναι κυρτή στο διάστημα [0, 1].

**Απόδειξη**

Πράγματι, είναι $G_X(s) = E(s^X) = \Sigma_{\kappa = 0, 1, \ldots} P(X = \kappa) \cdot s^\kappa$ , άρα

$$G^{(1)}_X(s) = \Sigma_{\kappa = 1, 2 \ldots} P(X = \kappa) \cdot \kappa \cdot s^{\kappa-1} \geq 0, \text{ και}$$

$$G^{(2)}_X(s) = \Sigma_{\kappa = 2, 3, \ldots} P(X = \kappa) \cdot \kappa \cdot (\kappa - 1) \cdot s^{\kappa-2} \geq 0, \text{ για } 0 \leq s \leq 1.$$

**Θεώρημα**

Αν $X_1, X_2, \ldots, X_n$ είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές και $Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$, τότε

$$G_Y(z) = G_{X1}(z) \cdot G_{X2}(z) \cdot \ldots G_{Xn}(z)$$

**Απόδειξη**

Πράγματι, $G_Y(z)= E(z^Y) = E(z^{X1 + X2 + \ldots + Xn})$

$$= E(z^{X1} \cdot z^{X2} \cdot \ldots \cdot z^{Xn})$$

$$= E(z^{X1}) \cdot E(z^{X2}) \cdot \ldots \cdot E(z^{Xn})$$

$$= G_{X1}(z) \cdot G_{X2}(z) \cdot \ldots G_{\chi n}(z),$$

γιατί $X_1, X_2, \ldots, X_n$ είναι ανεξάρτητες τ.μ. , άρα και οι $z^{X1}, z^{X2} \cdot \ldots \cdot z^{Xn}$ είναι ανεξάρτητες.

Σημειώσεις

1. Αν $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ανεξάρτητες τ.μ. τότε $f_1(X_1), f_2(X_2), \ldots, f_n(X_n)$ ομοίως ανεξάρτητες για οποιεσδήποτε πραγματικές συναρτήσεις $f_i$, $i = 1, \ldots, n$. (Ισχύει και στη συνεχή περίπτωση τ.μ., αρκεί οι $f_i$, $i = 1, \ldots, n$, να είναι ολοκληρώσιμες στο R).
2. Επιπλέον, ισχύει ότι αν $G_{X, Y}(z) = G_X(z) \cdot G_Y(z)$, τότε οι X, Y είναι ανεξάρτητες τ.μ.

## 11.2 Άθροισμα τυχαίου πλήθους ισόνομων τυχαίων μεταβλητών

**Θεώρημα**

Έστω $X_1, X_2, \ldots,$ ανεξάρτητες και ισόνομες τ. μ. με $E(X_i) = \mu$ και $Var(X_i) = \sigma^2$. Έστω επίσης N μία ακόμα τ. μ. με τιμές φυσικούς αριθμούς και ανεξάρτητη από τις $X_i$, $i = 1, \ldots,$. Αν $S_N = X_1 + X_2 + \ldots + X_N$, τότε

(α) $E(S_N) = E(X_1 + X_2 + \ldots + X_N) = \mu \cdot E(N)$..

(β) $Var(S_N) = Var(X_1 + X_2 + \ldots + X_N) = \sigma^2 \cdot E(N) + \mu^2 \cdot Var(N)$.

(γ) Αν $G_X$ η κοινή πιθανογεννήτρια των $X_i$, $i = 1, 2, \ldots,$. και $G_N$ η πιθανογεννήτρια της N, τότε $G_{SN}(z) = G_N(G_X(z)) = G_N \text{ o } G_X(z)$.

**Απόδειξη**

Αν γνωρίζαμε το πλήθος των $X_i$ τότε θα μπορούσαμε άμεσα να υπολογίσουμε το άθροισμα των επιμέρους αναμενόμενων τιμών καθώς $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$. Από τη στιγμή όμως που το πλήθος των $X_i$ είναι συνάρτηση του N, θα "υποκριθούμε" ότι το ξέρουμε, εκφράζοντας το $E(S_N)$ με τη βοήθεια της δεσμευμένης πιθανότητας ως προς τις διάφορες τιμές του N = 0, 1, 2, …

(α) $E(S_N) = E_N(E(S_N \mid N))$

$$= E_N(E(X_1 + X_2 + \ldots + X_N \mid N))$$

$$= E_N(E(X_1 + X_2 + \ldots + X_N))$$

$$= E_N(E(X_1) + E(X_2) + \ldots + E(X_N))$$

$$= E_N(N \cdot \mu)$$

$$= \mu \cdot E(N).$$

Σημείωση: Κατά σειρά εφαρμόστηκε
(α) ο τύπος $E_X(X) = E_Y(E_X(X|Y))$ που ισχύει για κάθε δύο τ.μ.,

(β) η ανεξαρτησία των $X_1, X_2, \ldots$ με την N,

(γ) η αθροιστική ιδιότητα της αναμενόμενης τιμής.

(δ) το γεγονός πως όλες οι $X_1, X_2, \ldots$ είναι ισόνομες με αναμενόμενη τιμή μ.

(β) Αρχικά, παρατηρούμε ότι:

$Var(S_N \mid N) = Var(X_1 + X_2 + \ldots + X_N \mid N)$

$$= Var(X_1 + X_2 + \ldots + X_N)$$

$$= Var(X_1) + Var(X_2) + \ldots + Var(X_N)$$

$$= N \cdot Var(X)$$

$$= N \cdot \sigma^2.$$

Σημείωση: Κατά σειρά εφαρμόστηκε
(α) η ανεξαρτησία των $X_1, X_2, \ldots$ με την N,
(β) η ανεξαρτησία των $X_1, X_2, \ldots$ μεταξύ τους και
(γ) το γεγονός πως όλες οι $X_1, X_2, \ldots$ είναι ισόνομες με διακύμανση $\sigma^2$.

Επιπλέον, είναι $Var_N(E(S_N \mid N)) = Var_N(E(S_N))$

$$= Var_N(N \cdot \mu)$$

$$= \mu^2 \cdot Var(N).$$

Σημείωση: Κατά σειρά εφαρμόστηκε
(α) η ανεξαρτησία των $X_1, X_2, \ldots$ με την N,
(β) η αθροιστική ιδιότητα της αναμενόμενης τιμής και
(γ) το γεγονός πως όλες οι $X_1, X_2, \ldots$ είναι ισόνομες με διακύμανση $\sigma^2$.

Δείξαμε ότι $Var(S_N \mid N) = N \cdot \sigma^2$ και ότι $Var_N(E(S_N \mid N)) = \mu^2 \cdot Var(N)$.

Τώρα, από το νόμο της ολικής διακύμανσης (law of total variance) είναι:

$$Var(S_N) = E_N(Var(S_N \mid N)) + Var_N(E(S_N \mid N))$$

$$= E_N(N \cdot \sigma^2) + \mu^2 \cdot Var(N)$$

$$= \sigma^2 \cdot E_N(N) + \mu^2 \cdot Var(N).$$

(γ) $G_{SN}(z) = E(z^{SN})$

$= E(z^{X1 + X2 + \ldots + XN})$

$= E_N( E(z^{X1 + X2 + \ldots + XN} \mid N) )$

$= E_N( E(z^{X1} \cdot z^{X2} \cdot \ldots \cdot z^{XN} \mid N) )$

$= E_N( E(z^{X1} \cdot z^{X2} \cdot \ldots \cdot z^{XN}) )$

$= E_N( E(z^{X1}) \cdot E(z^{X2}) \cdot \ldots \cdot E(z^{XN}) )$

$= E_N( (G_X(z))^N)$

$= G_N(G_X(z))$

$= G_N \circ G_X(z).$

## 12. Εξέλιξη μίας Διαδικασίας Διακλάδωσης

Μια διαδικασία διακλάδωσης $\{Z_n, n \geq 0\}$ περιγράφει τη διαδικασία αναπαραγωγής μίας κοινότητας κάτω από τις εξής υποθέσεις:

- Τη χρονική στιγμή 0 υπάρχει μόνο ένα άτομο: $Z_0 = 1$.
- Κάθε άτομο ζει μία χρονική μονάδα, και πεθαίνει αφού αποκτήσει Y απογόνους όπου η τ.μ. Y λαμβάνει τιμές 0, 1, 2, …
- Όλα τα άτομα είναι ανεξάρτητα ως προς την αναπαραγωγή τους, δηλαδή αν $Y_1$ και $Y_2$ είναι οι απόγονοι των ατόμων A και B τότε οι $Y_1$ και $Y_2$ είναι ανεξάρτητες τ.μ. (είναι και ισόνομες καθώς $Y_1$, $Y_2$ ~ Y). Δηλαδή, κάθε άτομο ξεκινά τη δική του ανεξάρτητη με τις άλλες διαδικασία διακλάδωσης.

Έστω $Z_n$ το μέγεθος της n-οστής γενιάς, δηλαδή $Z_n$ είναι ο αριθμός των ατόμων που γεννήθηκαν τη χρονική στιγμή n.

**Σημαντικά ερωτήματα που αφορούν τη διαδικασία διακλάδωσης $\{Z_n, n \geq 0\}$:**

- Ποια είναι η μέση τιμή και η διακύμανση της $Z_n$;
- Ποια είναι η κατανομή της $Z_n$;
- Ποια είναι η πιθανότητα ο πληθυσμός να έχει εξαλειφθεί στη γενιά n; ($P(Z_n = 0)$ = ;).
- Ποια είναι η πιθανότητα ο πληθυσμός τελικά να εξαλειφθεί; ($P(\lim_{n \to \infty} Z_n = 0)$ = ;).
- Ποιες είναι οι προϋποθέσεις τελικής εξάλειψης του πληθυσμού;

Αν $Z_n$ ο πληθυσμός γενιάς n, τότε $Z_{n-1}$ είναι ο πληθυσμός της προηγούμενης γενιάς n – 1. Έστω 1, 2, …, $Z_{n-1}$ μία αρίθμηση των ατόμων της γενιάς n – 1. Κάθε ένα από αυτά τα άτομα ξεκινά μία δική του διαδικασία διακλάδωσης και έστω $Y_1$, $Y_2$, …, $Y_{zn-1}$, οι απόγονοι των ατόμων 1, 2, …, $Z_{n-1}$ αντίστοιχα. Τότε ο πληθυσμός στη γενιά n θα είναι ίσος με το άθροισμα όλων αυτών των απογόνων, δηλαδή

$$Z_n = \sum_{i=1}^{Z_{n-1}} Y_i$$

Είναι αξιοσημείωτο πως το μέγεθος της n γενεάς είναι ένα **τυχαίου πλήθους $Z_{n-1}$** άθροισμα, **τυχαίων μεταβλητών $Y_i$.**

Έστω, $Z_{n-1}$ ο πληθυσμός της γενιάς n – 1 και $Y_1$, $Y_2$, …, $Y_{zn-1}$, οι απόγονοι αυτών των ατόμων.

Παρατηρούμε ότι:

- Οι $Y_1, Y_2, \ldots, Y_{zn-1}$, είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τ.μ. με τιμές φυσικούς αριθμούς και κοινή πιθανογεννήτρια συνάρτηση $G_Y$.
- $Z_{n-1}$ είναι μία τ.μ. ανεξάρτητη από τις $Y_1, Y_2, \ldots, Y_{zn-1}$.
- Αν $Z_n = Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_{zn-1}$, τότε η πιθανογεννήτρια συνάρτηση της $S_N$ είναι η

$$G_{Zn}(z) = G_{Zn-1}(G_Y(z)) = G_{Zn-1} o\ G_Y(z),$$

όπου $G_Y(z) = E(z^Y)$ η πιθανογεννήτρια συνάρτηση της τ.μ. Y.

Συμβολίζουμε $G(z) = G_1(z)$ και $G_n(z) = G_{zn}(z)$, $n \geq 1$. Καθώς $Z_1 = Y$, είναι

$$G_Y(z) = G_{Z1}(z) = G_1(z) = G(z)$$

και η σχέση

$$G_{Zn}(z) = G_{Zn-1}(G_Y(z)) = G_{Zn-1} o\ G_Y(z),$$

γράφεται

$$\mathbf{G_n(z) = G_{n-1}(G(z)) = G_{n-1}\ o\ G(z).}$$

Από την τελευταία σχέση, βρίσκουμε σχετικά με τις πιθανογεννήτριες συναρτήσεις της κατανομής των απογόνων:

Απόγονοι $1^{ης}$ γενιάς: $G_1(z) = G(z)$

Απόγονοι $2^{ης}$ γενιάς: $G_2(z) = G(G(z)) = G\ o\ G(z)$

…

Απόγονοι $n^{ης}$ γενιάς: $G_n(z) = G(G(...G(z)\ldots)) = G\ o\ G\ o\ \ldots\ o\ G(z)$ (n φορές)

Συνοψίζοντας:

$G(z) = E(z^Y) = \Sigma_{\kappa\ \epsilon\ N} P(Y = \kappa) z^\kappa$, είναι η πιθανογεννήτρια συνάρτηση της τ.μ. Y που αναπαριστά το πλήθος απογόνων κάθε ενός ατόμου, οποιαδήποτε χρονική στιγμή.

$Z_0 = 1$

$Z_1 = Y$

$G_n(z) = G(G(...G(z)\ldots)) = G\ o\ G\ o\ \ldots\ o\ G(z)$ (n φορές)

Ο εντοπισμός της πιθανογεννήτριας συνάρτησης $G_n$ που εκφράζει το πλήθος απογόνων $Z_n$ της n γενιάς είναι γενικά μία δύσκολη διαδικασία.

Για παράδειγμα αν Y ~ Poisson(λ) τότε G(y) = $e^{(y-1)\lambda}$, y ϵ N και

$$G_2(y) = G(G(y)) = e^{(G(y)-1)\lambda} = e^{(e^{(y-1)\lambda}-1)\lambda}$$
$$G_3(y) = G_2(G(y)) = e^{(e^{(G(y)-1)\lambda}-1)\lambda} = e^{(e^{(e^{(y-1)\lambda}-1)\lambda}-1)\lambda}$$

Ωστόσο, υπάρχουν και κάποιες περιπτώσεις που είναι εφικτές, όπως η περίπτωση όπου η Y ακολουθεί την Γεωμετρική κατανομή, δηλαδή, $P(Y = n) = (1 - p)^n \cdot p = q^n \cdot p$. Στην περίπτωση αυτή αποδεικνύεται ότι:

$$G_n(s) = E(s^{Z_n}) = \begin{cases} \dfrac{n-(n-1)s}{n+1-ns}, & \text{αν } p = q = 0{,}5. \\ \dfrac{(\mu^n-1)-\mu(\mu^{n-1}-1)s}{(\mu^{n+1}-1)-\mu(\mu^n-1)s}, & \text{αν } p \neq q, \text{ όπου } \mu = \dfrac{q}{p}. \end{cases}$$

## 12.1 Υπολογισμός $E(Z_n)$ και $Var(Z_n)$

**Θεώρημα**

Έστω $\{Z_0, Z_1, Z_2, \ldots\}$ είναι μια διαδικασία διακλάδωσης με $Z_0 = 1$. Έστω Y η κατανομή του πλήθους των απογόνων, $E(Y) = \mu$ και $Var(Y) = \sigma^2$. Τότε

- $E(Z_n) = \mu^n$.
- $Var(Z_n) = \sigma^2 \cdot n$, αν $\mu = 1$ και $Var(Z_n) = \sigma^2 \cdot \mu^{n-1} \cdot \dfrac{\mu^n - 1}{\mu - 1}$, αν $\mu \neq 1$.

**Απόδειξη**

Εφαρμόζουμε το θεώρημα:

"Έστω $X_1, X_2, \ldots$, ανεξάρτητες και ισόνομες τ. μ. με $E(X_i) = \mu$ και $Var(X_i) = \sigma^2$. Έστω επίσης N μία ακόμα τ. μ. με τιμές φυσικούς αριθμούς και ανεξάρτητη από τις $X_i$, i = 1, …,.

Αν $S_N = X_1 + X_2 + \ldots + X_N$, τότε

(α) $E(S_N) = E(X_1 + X_2 + \ldots + X_N) = \mu \cdot E(N)$

(β) $Var(S_N) = Var(X_1 + X_2 + \ldots + X_N)$

$= \sigma^2 \cdot E(N) + \mu^2 \cdot Var(N)$.

Για $Z_0 = 1$, $Z_1 = Y$, $Z_n = Y_1 + Y_2 + \ldots + Yz_{n-1}$, και $N = Z_{n-1}$ έχουμε

$E(Z_n) = E(Y_1 + Y_2 + \ldots + Yz_{n-1})$

$= \mu \cdot E(Z_{n-1})$

$= \mu \cdot \mu \cdot E(Z_{n-2})$

$= \ldots$

$= \mu \cdot \mu \cdot \ldots \cdot \mu$

$= \mu^n$.

Επιπλέον, αν συμβολίζουμε $V_n = Var(Z_n)$, τότε

$V_0 = Var(Z_0) = 0$,

$V_1 = Var(Z_1) = Var(Y) = \sigma^2$ και

$V_n = Var(Z_n)$

$= Var(Y_1 + Y_2 + \ldots + Yz_{n-1})$

$= \sigma^2 \cdot E(Z_{n-1}) + \mu^2 \cdot Var(Z_{n-1})$

$= \sigma^2 \cdot \mu^{n-1} + \mu^2 \cdot V_{n-1}$.

Από τη σχέση $V_n = \sigma^2 \cdot \mu^{n-1} + \mu^2 \cdot V_{n-1}$ με αναδρομικό συλλογισμό παίρνουμε:

$V_1 = \sigma^2$

$V_2 = \sigma^2 \cdot \mu^1 + \mu^2 \cdot \sigma^2 = \mu \cdot \sigma^2(1 + \mu)$

$V_3 = \sigma^2 \cdot \mu^2 + \mu^2 \cdot V_2 = \sigma^2 \cdot \mu^2 + \mu^3 \cdot \sigma^2(1 + \mu) = \mu^2 \cdot \sigma^2(1 + \mu + \mu^2)$

…

$V_n = \mu^{n-1} \cdot \sigma^2(1 + \mu + \mu^2 + \ldots + \mu^{n-1}) = \sigma^2 \cdot n$, αν $\mu = 1$ ή

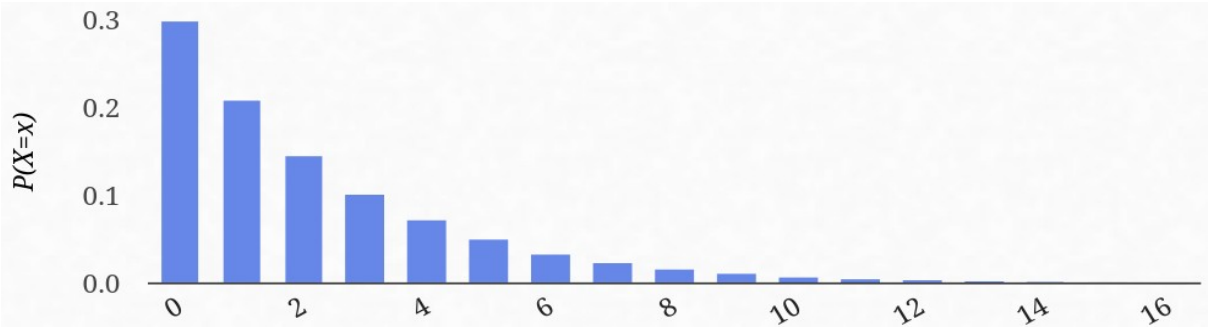
$\sigma^2 \cdot \mu^{n-1} (1 - \mu^n) / (1 - \mu)$, αν $\mu \neq 1$.

**Παράδειγμα 1**

Έστω $\{Z_0, Z_1, Z_2, \ldots\}$ μια διαδικασία διακλάδωσης με $Z_0 = 1$ και $Y \sim \text{Geometric}(0{,}3)$. Τότε:

$\mu = E(Y) = (1 - p) / p = 0{,}7 / 0{,}3 = 2{,}33$ απόγονοι ανά άτομο και

$\sigma^2 = \text{Var}(Y) = (1 - p) / p^2 = 0{,}7 / 0{,}3^2 = 7{,}78$ ή $\sigma = 2{,}8$ άτομα.




Στη $10^{η}$ γενιά, αναμένεται να υπάρχουν

$$E(Z_{10}) = \mu^{10} = 2{,}33^{10} = 4.715{,}8 \text{ απόγονοι}$$

Διακύμανση πλήθους απογόνων:

$$\text{Var}(Z_{10}) = \sigma^2 \cdot \mu^9 (1 - \mu^{10}) / (1 - \mu) = 7{,}78 \cdot 2{,}33^9 (1 - 2{,}33^{10}) / (1 - 2{,}33) = 5{,}72 \cdot 10^7.$$

Τυπική απόκλιση:

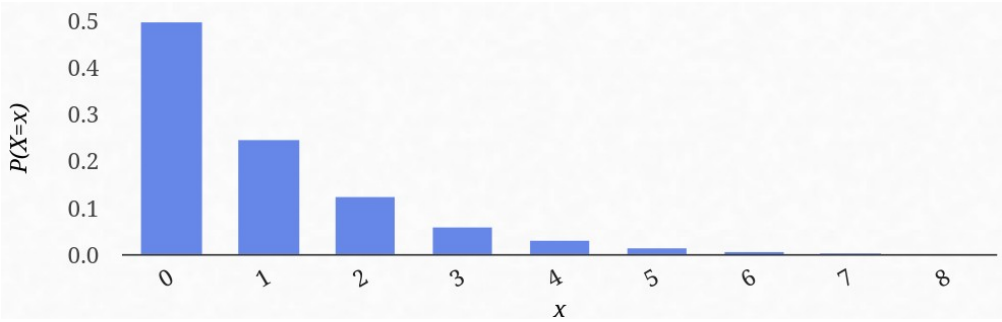
$$[\text{Var}(Z_{10})]^{1/2} = (5{,}72 \cdot 10^7)^{1/2} = 7.563{,}1 \text{ άτομα.}$$

**Παράδειγμα 2**

Έστω $\{Z_0, Z_1, Z_2, \ldots\}$ μια διαδικασία διακλάδωσης με $Z_0 = 1$ και $Y \sim \text{Geometric}(0{,}5)$. Τότε:

$\mu = E(Y) = (1 - p) / p = 0{,}5 / 0{,}5 = 1$ απόγονος ανά άτομο και

$\sigma^2 = \text{Var}(Y) = (1 - p) / p^2 = 0{,}5 / 0{,}5^2 = 2$ ή $\sigma = 1{,}4$ άτομα.



Στη $10^{η}$ γενεά, αναμένεται να υπάρχουν

$$E(Z_{10}) = \mu^{10} = 1^{10} = 1 \text{ απόγονος}$$

Διακύμανση πλήθους απογόνων:

$$Var(Z_{10}) = \sigma^2 \cdot 10 = 2 \cdot 10 = 20.$$

Τυπική απόκλιση:

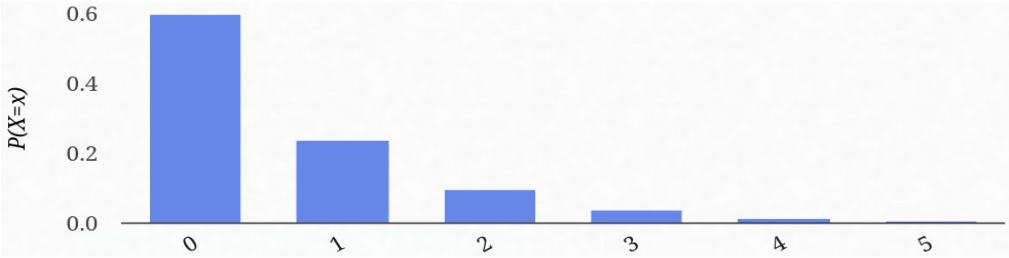
$$[Var(Z_{10})]^{1/2} = (20)^{1/2} = 4{,}5 \text{ άτομα.}$$

**Παράδειγμα 3**

Έστω $\{Z_0, Z_1, Z_2, \ldots\}$ μια διαδικασία διακλάδωσης με $Z_0 = 1$ και $Y \sim \text{Geometric}(0{,}6)$. Τότε:

$\mu = E(Y) = (1 – p) / p = 0{,}4 / 0{,}6 = 0{,}67$ απόγονοι ανά άτομο και

$\sigma^2 = Var(Y) = (1 – p) / p^2 = 0{,}4 / 0{,}6^2 = 1{,}11$ ή $\sigma = 1{,}05$ άτομα.




Στη $10^{η}$ γενεά, αναμένεται να υπάρχουν

$$E(Z_{10}) = \mu^{10} = 0{,}67^{10} = 0{,}017 \text{ απόγονοι}$$

Διακύμανση πλήθους απογόνων:

$$Var(Z_{10}) = \sigma^2 \cdot \mu^9 (1 – \mu^{10}) / (1 – \mu) = 1{,}11 \cdot 0{,}67^9 (1 – 0{,}67^{10}) / (1 – 0{,}67) = 1{,}03.$$

Τυπική απόκλιση:

$$[Var(Z_{10})]^{1/2} = (1{,}03)^{1/2} = 1{,}02 \text{ άτομα.}$$

**Δραστηριότητα**

Έστω $\{Z_0 = 1, Z_1, Z_2, \ldots\}$ είναι μια διαδικασία διακλάδωσης με $Y \sim B(2, ¼)$. Τότε, κάθε άτομο μπορεί να έχει 0, 1 ή 2 απογόνους με πιθανότητες

Να μην έχει απογόνους: $P(Y = 0) = (2 \text{ ανά } 0)\ 0{,}25^0(1 – 0{,}25)^2 = 0{,}5625 = 56{,}25\%$

Να έχει έναν απόγονο: $P(Y = 1) = (2 \text{ ανά } 1)\ 0{,}25^1(1 – 0{,}25)^1 = 0{,}375 = 37{,}5\%$

Να έχει δύο απογόνους: $P(Y = 2) = (2 \text{ ανά } 2)\ 0{,}25^2(1 - 0{,}25)^0 = 0{,}0625 = 6{,}25\%$

Επιπλέον, γνωρίζουμε από τη θεωρία πως το μέσο πλήθος απογόνων για κάθε άτομο θα είναι $E(Y) = n \cdot p = 2 \cdot ¼ = ½$ με διακύμανση $Var(Y) = n \cdot p \cdot (1 - p) = 2 \cdot ¼ \cdot ¾ = 3/8$.

Να βρεθεί το αναμενόμενο πλήθος απογόνων και τυπική απόκλιση του πλήθους στην 5η γενιά.

### 12.2 Πιθανότητα τελικής εξάλειψης

Μία από τις πιο ενδιαφέρουσες εφαρμογές των διαδικασιών διακλάδωσης είναι ο υπολογισμός της πιθανότητας τελικής εξαφάνισης ενός πληθυσμού, δηλαδή της πιθανότητας $P(Z_n = 0)$.

Για παράδειγμα:

- Ποια είναι η πιθανότητα μια αποικία καρκινικών κυττάρων να εξαφανιστεί προτού αναπτυχθεί σε βάρος του περιβάλλοντα ιστού;
- Ποια είναι η πιθανότητα να εξαφανιστεί μια μολυσματική ασθένεια πριν γίνει επιδημική;
- Ποια είναι η πιθανότητα στο μέλλον να χαθεί το οικογενειακό επίθετο;

Συμβολίζουμε

$$\mathbf{E_n = \{Z_n = 0\} = \{\text{ο πληθυσμός εξαφανίζεται στην } n - \text{οστή γενιά}\}}$$

$$\mathbf{= \{\text{δεν υπάρχουν απόγονοι στην } n - \text{οστή γενιά}\}}$$

Την πιθανότητα να εξαφανιστεί ο πληθυσμός στη n γενιά, τη συμβολίζουμε

$$\mathbf{\gamma_n = P(E_n)}$$

Αν εξαφανιστεί ο πληθυσμός τη n – οστή γενιά θα παραμείνει εξαφανισμένος και στην n + 1 γενιά. Δηλαδή, παρατηρούμε ότι:

$$\mathbf{E_1 \subseteq E_2 \subseteq \ldots \subseteq E_n \subseteq}$$

Στην αρχή της διαδικασίας διακλάδωσης, μας ενδιαφέρει η πιθανότητα ο πληθυσμός να εξαφανιστεί από τη γενιά n, για οποιαδήποτε τιμή του n. Καθώς $E_n \subseteq E_{n+1}$ είναι:

$$\mathbf{\gamma = P(\text{ο πληθυσμός τελικά θα εξαλειφθεί})}$$

$$\mathbf{= P(U_{n \in N} E_n)}$$

$$\mathbf{= P(\lim_{n \to \infty} E_n)}$$

$$\mathbf{= \lim_{n \to \infty} P(E_n)}$$

$$\mathbf{= \lim_{n \to \infty} \gamma_n}$$

Μεταξύ των

$\mathbf{\gamma_n = P(E_n)}$

$\mathbf{= P(Z_n = 0)}$

**= P(ο πληθυσμός εξαφανίζεται στην n – οστή γενιά), n ≥ 0,**

υπάρχει μία πολύ χρήσιμη σχέση. Για κάθε $n \geq 1$, είναι

$$\gamma_n = G(\gamma_{n-1})$$

**Απόδειξη**

Η συνάρτηση $G_n = G \circ G \circ \ldots \circ G$ (n φορές) είναι η πιθανογεννήτρια της $Z_n$, άρα

$$\gamma_n = P(Z_n = 0) = G_n(0) \text{ και } \gamma_{n-1} = P(Z_{n-1} = 0) = G_{n-1}(0).$$

Όμως, $G_n(z) = G(G_{n-1}(z))$, άρα $G_n(0) = G(G_{n-1}(0))$ ή ισοδύναμα $\gamma_n = G(\gamma_{n-1})$.

**Θεώρημα**

Αν γ είναι η πιθανότητα τελικής εξαφάνισης του πληθυσμού, τότε η γ είναι η μικρότερη μη αρνητική λύση της εξίσωσης G(s) = s, όπου G(s) είναι η πιθανογεννήτρια της τυχαίας μεταβλητής Y με την οποία εκφράζεται το πλήθος των απογόνων ενός ατόμου.

**Απόδειξη**

Αρκεί να αποδείξουμε ότι: G(γ) = γ και αν G(s) = s, με s ϵ [0, 1], τότε s ≥ γ (η περίπτωση ρίζας s > 1 δεν μας απασχολεί καθώς προφανώς τότε θα είναι γ < s).

Πράγματι, είναι

$\gamma = \lim_{n \to \infty} \gamma_n$

$= \lim_{n \to \infty} G(\gamma_{n-1})$

$= G(\lim_{n \to \infty} \gamma_{n-1})$

$= G(\lim_{n \to \infty} \gamma_n)$

$= G(\gamma)$,

συνεπώς, η γ είναι λύση της εξίσωσης G(s) = s.

Στη συνέχεια, θα δείξουμε πως η γ είναι η μικρότερη μη αρνητική λύση της G(s) = s.

Γνωρίζουμε ότι τη χρονική στιγμή 0 είναι $Z_0 = 1$, άρα $\gamma_0 = P(E_0) = 0$. Έστω τώρα s ϵ [0, 1], λύση της G(s) = s. Καθώς, η συνάρτηση G είναι αύξουσα στο [0, 1] και $\gamma_0 = 0$, είναι

$$\gamma_0 \leq s \leftrightarrow G(\gamma_0) \leq G(s) \leftrightarrow \gamma_1 \leq s \leftrightarrow G(\gamma_1) \leq G(s) \leftrightarrow \gamma_2 \leq s \leftrightarrow \ldots \leftrightarrow \gamma_n \leq s, \text{ για κάθε } n \in N.$$

Καθώς, $\gamma_n \leq s$, για κάθε n ϵ N, είναι και $\lim_{n \to \infty} \gamma_n \leq s$ δηλαδή γ ≤ s, και αποδείχθηκε πως η πιθανότητα τελικής εξάλειψης γ είναι η μικρότερη δυνατή ρίζα της εξίσωσης G(γ) = γ.

**Παράδειγμα 3**

Έστω $\{Z_0 = 1, Z_1, Z_2, \ldots\}$ μια διαδικασία διακλάδωσης με $Y \sim B(2, ¼)$. Βρείτε την πιθανότητα ο πληθυσμός τελικά να εξαλειφθεί.

**Λύση**

Γνωρίζουμε ότι $Y \sim B(2, ¼)$ άρα κάθε άτομο μπορεί να έχει 0, 1 ή 2 απογόνους με πιθανότητες

Να μην έχει απογόνους: $P(Y = 0) = (2 \text{ ανά } 0)\ 0{,}25^0(1 – 0{,}25)^2 = 0{,}5625 = 56{,}25\%$

Να έχει έναν απόγονο: $P(Y = 1) = (2 \text{ ανά } 1)\ 0{,}25^1(1 – 0{,}25)^1 = 0{,}375 = 37{,}5\%$

Να έχει δύο απογόνους: $P(Y = 2) = (2 \text{ ανά } 2)\ 0{,}25^2(1 – 0{,}25)^0 = 0{,}0625 = 6{,}25\%$

Περαιτέρω, αν $Y \sim B(n, p)$ γνωρίζουμε ότι $G_Y(z) = (1 + (z – 1)\, p)^n$.

Για $n = 2$ και $p = ¼$ είναι $G_Y(s) = (1 + (s – 1) / 4)^2 = (¾ + ¼\, s)^2$. Λύνουμε την εξίσωση

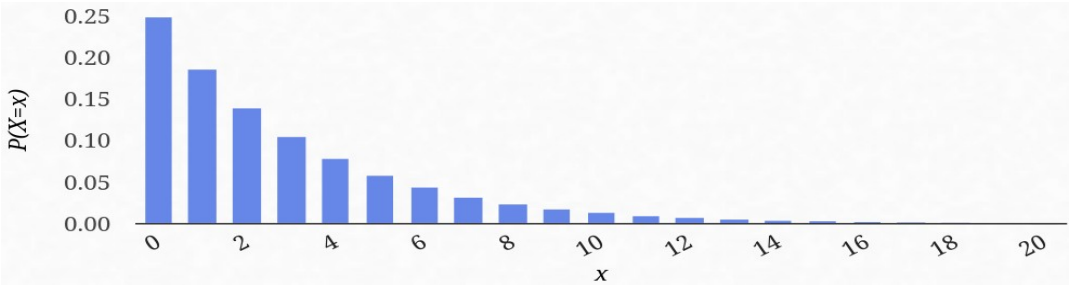
$G(s) = s \leftrightarrow (¾ + ¼\, s)^2 = s$ και βρίσκουμε λύσεις (πως;) $s = 1$ ή $s = 9$. Άρα, $y = 1$, δηλαδή πληθυσμός που αναπαράγεται με $Y \sim B(2, ¼)$ είναι βέβαιο πως θα εξαφανιστεί.

**Παράδειγμα 4**

Έστω $\{Z_0 = 1, Z_1, Z_2, \ldots\}$ μια διαδικασία διακλάδωσης με $Y \sim \text{Geometric}(¼)$. Βρείτε την πιθανότητα ο πληθυσμός τελικά να εξαλειφθεί.

**Λύση**

Γνωρίζουμε ότι $Y \sim \text{Geometric}(¼)$ άρα κάθε άτομο μπορεί να έχει 0, 1, 2,… απογόνους.




Επιπλέον, γνωρίζουμε ότι $G_Y(z) = p / [1 – z(1 – p)]$. Για $p = ¼$ είναι $G_Y(s) = 1 / (4 – 3s)$. Λύνουμε την εξίσωση

$G(s) = s \leftrightarrow (¾ + ¼\, s)^2 = s$ και βρίσκουμε λύσεις (πως;) $s = 1/3$ ή $s = 1$. Άρα, $y = 1/3$, δηλαδή πληθυσμός που αναπαράγεται με $Y \sim \text{Geometric}(¼)$ έχει πιθανότητα 33,3% τελικά να εξαλειφθεί.

**Η πιθανότητα τελικής εξάλειψης εξαρτάται από το μέσο πλήθος απογόνων μ.**

Για κάποιες τιμές του μέσου πλήθους μ η τελική εξάλειψη του πληθυσμού είναι βέβαιη (π.χ. όπως στο παράδειγμα Y ~ B(2, ¼) με μ = ½). Σε άλλες τιμές αντιστοιχεί πιθανότητα εξάλειψης μικρότερη από το 1 (όπως στο παράδειγμα Y ~ Geometric(¼) με μ = 3).

Αποδεικνύεται ότι εάν ο μέσος αριθμός απογόνων ανά άτομο είναι μεγαλύτερος από 1 (δηλαδή, τα άτομα αντικαθιστούν τον εαυτό τους και κάτι παραπάνω), τότε η διαδικασία διακλάδωσης έχει θετική πιθανότητα μακροπρόθεσμης επιβίωσης —αν και πάντα είναι ένα ενδεχόμενο που μπορεί να συμβεί.

Ωστόσο, εάν ο μέσος αριθμός απογόνων ανά άτομο είναι μικρότερος ή ίσος του 1, τότε αποδεικνύεται ότι ο πληθυσμός θα εξαλειφθεί με βεβαιότητα (εκτός εάν Y = 1 με πιθανότητα 1).

**Σημείωση**
Το αποτέλεσμα είναι αναμενόμενο όταν μ > 1 ή μ < 1, ωστόσο είναι διαισθητικά μη προφανές όταν μ = 1, περίπτωση κατά την οποία η εξαφάνιση του πληθυσμού θα συμβεί με βεβαιότητα.

**Θεώρημα**

Έστω $\{Z_0 = 1, Z_1, Z_2, \ldots\}$ μια διαδικασία διακλάδωσης και Y η τ.μ. του πλήθους των απογόνων κάθε ατόμου. Έστω μ = E(Y) το μέσο πλήθος απογόνων και γ η πιθανότητα τελικής εξάλειψης του πληθυσμού. Τότε ισχύουν τα εξής:

(i) Αν μ > 1 (supercritical case), τότε γ < 1: Η εξάλειψη δεν είναι σίγουρη αν το μέσο πλήθος απογόνων είναι μ > 1.

(ii) Αν μ < 1 (subcritical case), τότε γ = 1: Η εξάλειψη είναι σίγουρη αν το μέσο πλήθος απογόνων είναι μ < 1.

(iii) Αν μ = 1 (critical case), τότε γ = 1: Η εξάλειψη είναι σίγουρη εκτός αν το πλήθος απογόνων είναι σταθερό Y = 1.

**Απόδειξη**

(i) (μ > 1) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = G^{(1)}(x) - 1$. Είναι $f(0) = G^{(1)}(0) - 1 = P(X = 1) - 1 < 0$ και $f(1) = G^{(1)}(1) - 1 = \mu - 1 > 0$, άρα από το Θ. Bolzano υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (0, 1) της εξίσωσης, $f(x) = 0$ ή $G^{(1)}(x) = 1$ ή $G(x) = x + c$. Όμως, είναι $G(1) = 1$ άρα $c = 0$ και αποδείχθηκε.

(ii) (μ < 1) Η εφαπτομένη της $y = G(s)$ στο $(1, G(1))$ έχει εξίσωση

$$y - G(1) = G^{(1)}(s)(s - 1) \text{ ή } y - 1 = \mu (s - 1) \text{ ή } y = \mu s + 1 - \mu$$

Όμως η συνάρτηση G(s) είναι κυρτή στο [0, 1] συνεπώς η γραφική της παράσταση στο διάστημα [0, 1] βρίσκεται πάνω από την εφαπτομένη της, και είναι

$$G(s) \geq \mu s + 1 - \mu > s, \text{ για } s \in [0, 1).$$

Άρα, η εξίσωση $G(s) = s$ δεν έχει ρίζα στο $[0, 1)$, δηλαδή η ελάχιστη θετική ρίζα είναι η $\gamma = 1$.

(iii) ($\mu = 1$) Ανάλογα, με τη (ii) βρίσκουμε $G(s) \geq s$. Αν $Y = 1$ τότε $G(s) = s$ και $\gamma = \min\{s \geq 0: G(s) = s\} = 0$. Αν η Y δεν είναι σταθερή με $\mu = 1$, τότε $G(s) > s$ και $\gamma = 1$.

**Παράδειγμα 5**

Έστω $\{Z_0 = 1, Z_1, Z_2, \ldots\}$ μια διαδικασία διακλάδωσης με $Y \sim B(3, p)$. Να βρείτε το μέγιστο p που να διασφαλίζει ότι ο πληθυσμός στο τέλος θα εξαλειφθεί.

**Λύση**

Είναι $\mu = E(X) = n \cdot p = 3p$. Για να είναι βέβαιη η εξάλειψη θα πρέπει $\mu \leq 1$ ή $p \leq 1/3$. Άρα, αν η τιμή $p = 1/3$ είναι η μέγιστη που διασφαλίζει ότι ο πληθυσμός τελικά θα εξαλειφθεί.

**Παράδειγμα 6**

Έστω $\{Z_0 = 1, Z_1, Z_2, \ldots\}$ μια διαδικασία διακλάδωσης με $Y \sim \text{Geometric}(p)$. Να βρείτε το ελάχιστο p που να διασφαλίζει ότι ο πληθυσμός στο τέλος θα εξαλειφθεί.

**Λύση**

Είναι $\mu = E(X) = (1 - p)/p$. Για να είναι βέβαιη η εξάλειψη θα πρέπει $(1 - p)/p \leq 1$ ή $p \geq 1/2$. Άρα, αν η τιμή $p = 1/2$ είναι η ελάχιστη που διασφαλίζει ότι ο πληθυσμός τελικά θα εξαλειφθεί.

## 12.3 Χρόνος τελικής εξάλειψης

**Υπολογισμός χρόνου εξάλειψης <u>έως τη</u> γενιά n**

Ο υπολογισμός της πιθανότητας

$$\gamma_n = P(\text{ο πληθυσμός θα εξαφανιστεί μέχρι τη n γενιά}) = P(Z_n = 0),$$

γίνεται με χρήση της πιθανογεννήτριας:

$$\gamma_n = P(Z_n = 0) = G_n(0).$$

**Υπολογισμός χρόνου εξάλειψης <u>ακριβώς στη</u> γενιά n**

Ο υπολογισμός της πιθανότητας

$$P(\text{ο πληθυσμός θα εξαφανιστεί ακριβώς τη n γενιά}) = P(Z_n = 0, Z_{n-1} > 0).$$

Είναι $\{Z_n = 0, Z_{n-1} > 0\} \cup \{Z_n = 0, Z_{n-1} = 0\} = \{Z_n = 0\}$ και

$$P(Z_n = 0, Z_{n-1} > 0) + P(Z_n = 0, Z_{n-1} = 0) = P(Z_n = 0).$$

Όμως $P(Z_n = 0, Z_{n-1} = 0) = P(Z_{n-1} = 0)$ (γιατί;) άρα

$$P(Z_n = 0, Z_{n-1} > 0) = P(Z_n = 0) - P(Z_{n-1} = 0) = \gamma_n - \gamma_{n-1} = G_n(0) - G_{n-1}(0).$$

**Παράδειγμα 7**

Έστω $\{Z_0 = 1, Z_1, Z_2, \ldots\}$ είναι μια διαδικασία διακλάδωσης. Για την τ.μ. Y γνωρίζουμε ότι μπορεί να πάρει τις τιμές 0, 1 και 3 με αντίστοιχες πιθανότητες 1/6, 1/2 και 1/3.

Να βρεθούν

(α) το αναμενόμενο πλήθος απογόνων και η διακύμανση του πλήθους στην $9^η$ γενιά.

(β) η πιθανότητα να εξαλειφθεί ο πληθυσμός την $3^η$ γενιά.

(γ) η πιθανότητα να μην εξαλειφθεί ποτέ ο πληθυσμός.

(δ) Αν υποθέσουμε ότι 5 ανεξάρτητα αντίγραφα αυτής της διαδικασίας διακλάδωσης εξελίσσονται 0ταυτόχρονα (δηλαδή $Z_0 = 5$), να υπολογιστεί η πιθανότητα τελικής εξάλειψης του πληθυσμού.

**Λύση**

Έστω $\{Z_0 = 1, Z_1, Z_2, \ldots\}$ είναι μια διαδικασία διακλάδωσης. Για την τ.μ. Y γνωρίζουμε ότι μπορεί να πάρει τις τιμές 0, 1 και 3 με αντίστοιχες πιθανότητες 1/6, 1/2 και 1/3.

(α) το αναμενόμενο πλήθος απογόνων και η διακύμανση του πλήθους στην $9^η$ γενιά.

Υπολογίζουμε

$\mu = E(Y) = 0 \cdot 1/6 + 1 \cdot 1/2 + 3 \cdot 1/3 = 3/2$

$Var(Y) = E[(Y - \mu)^2] = (0 - 3/2)^2 \cdot 1/6 + (1 - 3/2)^2 \cdot 1/2 + (3 - 3/2)^2 \cdot 1/3 = 5/4.$

$E(Z_9) = \mu^9 = (3/2)^9 = 38{,}4$

$Var(Z_9) = \sigma^2 \cdot \mu^8 (1 - \mu^9) / (1 - \mu) = 5/4 \cdot (3/2)^8 \cdot (1 - (3/2)^9) / (1 - 3/2) = 2.400$

Τυπική απόκλιση: $[Var(Z_9)]^{1/2} = 2.400^{1/2} = 49$ άτομα.

(β) η πιθανότητα να εξαλειφθεί ο πληθυσμός ακριβώς στην $3^η$ γενιά.

Είναι $G(s) = s^0 \cdot 1/6 + s^1 \cdot 1/2 + s^3 \cdot 1/3 = 1/6 \cdot (1 + 3s + 2s^3)$. Άρα,

$$\begin{aligned} P(Z_3 = 0, Z_2 > 0) &= P(Z_3 = 0) - P(Z_2 = 0) \\ &= G_3(0) - G_2(0) \\ &= G(G(G(0))) - G(G(0)) \\ &= 0{,}2977 - 0{,}2515 \\ &= 0{,}0462 \\ &= 4{,}62\%. \end{aligned}$$

(είναι $G(0) = 1/6$, $G(G(0)) = G(1/6) = 0{,}2515$ και $G(G(G(0))) = G(0{,}2515) = 0{,}2977$)

(γ) η πιθανότητα να μην εξαλειφθεί ποτέ ο πληθυσμός.

Είναι $\mu = 3/2 > 1$ άρα η πιθανότητα εξάλειψης είναι μικρότερη της μονάδας. Για να την υπολογίσουμε επακριβώς λύνουμε την εξίσωση $G(s) = s$ δηλαδή την εξίσωση

$1/6\cdot(1 + 3s + 2s^3) = s$, η οποία έχει ρίζες 1, $(-1 - 3^{0.5})/2$, $(-1 + 3^{0.5})/2$. Από αυτές η μικρότερη θετική ρίζα είναι η ζητούμενη λύση, δηλαδή $\gamma = (-1 + 3^{0.5})/2 = 0{,}366 = 36{,}6\%$

(δ) Αν υποθέσουμε ότι 5 ανεξάρτητα αντίγραφα αυτής της διαδικασίας διακλάδωσης εξελίσσονται 0ταυτόχρονα (δηλαδή $Z_0 = 5$), να υπολογιστεί η πιθανότητα τελικής εξάλειψης του πληθυσμού.

Πρόκειται για 5 ανεξάρτητες διεργασίες κάθε μία από τις οποίες έχει πιθανότητα εξάλειψης $\gamma = 0{,}366$. Συνεπώς, η πιθανότητα να συμβεί αυτό και στις 5 διεργασίες είναι

$$\gamma^5 = 0{,}366^5 = 0{,}0065 = 0{,}65\%$$

**Παράδειγμα 8**

Έστω $\{Z_0 = 1, Z_1, Z_2, \ldots\}$ είναι μια διαδικασία διακλάδωσης και $Y \sim \text{Poisson}(\lambda)$.

(α) Υποθέτοντας πως δεν αποβιώνει κανένα μέλος του πληθυσμού, προσδιορίστε τον αναμενόμενο συνολικό πληθυσμό την $10^{\eta}$ γενιά.

(β) Προσδιορίστε, (και με τη βοήθεια υπολογιστή) την πιθανότητα να μην υπάρχουν μακροπρόθεσμα απόγονοι για $\lambda = ½$, $\lambda = 1$ και $\lambda = 2$.

**Λύση**

(α) $E(Z_0 + Z_1 + Z_2 + Z_3 + Z_4 + Z_5 + Z_6 + Z_7 + Z_8 + Z_9 + Z_{10}) =$

$$= E(Z_0) + E(Z_1) + E(Z_2) + E(Z_3) + E(Z_4) + E(Z_5) +$$

$$+ E(Z_6) + E(Z_7) + E(Z_8) + E(Z_9) + E(Z_{10})$$

$$= 1 + \mu + \mu^2 + \mu^3 + \mu^4 + \mu^5 + \mu^6 + \mu^7 + \mu^8 + \mu^9 + \mu^{10}$$

$$= (\mu^{11} - 1) / (\mu - 1), \text{ αν } \mu \neq 1 \text{ ή } 11 \text{ αν } \mu = 1.$$

Σημείωση
Η αθροιστική ιδιότητα της αναμενόμενης τιμής ισχύει για κάθε σύνολο τυχαίων μεταβλητών.

(β) $Y \sim \text{Poisson}(\lambda)$ άρα $G_Y(s) = e^{(s-1)\lambda}$. Λύνουμε την εξίσωση

$G(s) = s$ ή $e^{(s-1)\lambda} = s$.

Αν $\lambda = ½$ ή $\lambda = 1$ η μοναδική λύση είναι η $s = 1$ (αξιοποιήστε την ανίσωση $e^x \geq x + 1$).

Αν $\lambda = 2$ τότε με χρήση υπολογιστή εκτιμούμε $s = 0{,}2032$, άρα $\gamma = 20{,}32\%$.

**Παράδειγμα 9**

Κάθε άτομο ενός πληθυσμού αναπαράγεται ανεξάρτητα από τους άλλους και δίνει τυχαίο πλήθος απογόνων ακολουθώντας την κατανομή

| Πλήθος απογόνων | 0 | 1 | 2 | 3+ |
|---|---|---|---|---|
| Πιθανότητα | 0,375 | 0,125 | 0,5 | 0 |

Στην παρούσα γενιά υπάρχουν 6 άτομα, κάθε ένα από τα οποία έχει τη δυνατότητα να παράξει απογόνους. Υπολογίστε την πιθανότητα τελικής εξάλειψης του πληθυσμού.

**Λύση**

Το αναμενόμενο πλήθος απογόνων είναι $\mu = E(Y) = 0 \cdot 0{,}375 + 1 \cdot 0{,}125 + 2 \cdot 0{,}5 = 1{,}125$.

Είναι $\mu > 1$, άρα η πιθανότητα εξάλειψης γ για τον πληθυσμό που παράγεται από κάθε ένα άτομο είναι μικρότερη της μονάδας. Ιδιαίτερα, η πιθανότητα γ εξάλειψης για κάθε ένα άτομο αποτελεί τη μικρότερη θετική ρίζα της $G(s) = s$, όπου

$$G(s) = E(s^Y) = 0{,}375 + 0{,}125s + 0{,}5s^2 = 3/8 + 1/8\, s + ½\, s^2 = (3 + s + 4s^2)/8$$

Η επίλυση της εξίσωσης $G(s) = s$ δίνει $s = ¾ = 0{,}75$ ή $s = 1$.

Κάθε ένα άτομο πρόκειται να εξαλειφθεί με πιθανότητα 0,75 = 75%. Συνεπώς, για τον αρχικό πληθυσμό των 6 ατόμων η πιθανότητα εξάλειψης είναι

$$\gamma^6 = 0{,}75^6 = 0{,}178 = 17{,}8\%$$

**Παράδειγμα 10**

Τα βακτήρια αναπαράγονται με διπλασιασμό. Κάθε χρονική μονάδα, ένα βακτήριο είτε πεθαίνει με πιθανότητα ¼, είτε παραμείνει ζωντανό χωρίς απογόνους με πιθανότητα ¼ είτε διπλασιάζεται με πιθανότητα ½. Ο αρχικός πληθυσμός των βακτηρίων είναι 100 άτομα.

(α) Να βρεθεί η πιθανογεννήτρια συνάρτηση $G_n$ του συνολικού πλήθους βακτηρίων μετά n χρονικές στιγμές.

(β) Υπολογίστε την πιθανότητα εξάλειψης του πληθυσμού.

(γ) Έστω $m_n$ ο μέγιστος αριθμός βακτηρίων τη χρονική στιγμή n. Να βρεθεί ο $m_n$ και να βρεθεί η πιθανότητα ο πληθυσμός να έχει αυτήν την μέγιστη τιμή τη χρονική στιγμή n.

(δ) Αν γνωρίζουμε πως τη χρονική στιγμή 50 υπάρχουν 1.000 βακτήρια, τότε να βρεθεί το αναμενόμενο πλήθος βακτηρίων τη χρονική στιγμή 51.

**Λύση**

Κάθε χρονική μονάδα, ένα βακτήριο αποδίδει 0 απογόνους (πεθαίνει) με πιθανότητα ¼, αποδίδει 1 απόγονο (τον ίδιο του τον εαυτό όταν παραμείνει ζωντανό χωρίς απογόνους) με πιθανότητα ¼ και δύο απογόνους (διπλασιάζεται) με πιθανότητα ½.

(α) Έστω $\zeta_i$ το πλήθος απογόνων του i - οστού βακτηριδίου, i = 1, 2, …, 100 και $\zeta_i^{(n)}$ το πλήθος απογόνων του i – οστού βακτηριδίου την γενιά n . Η πιθανογεννήτρια συνάρτηση της $\zeta_i$ είναι

$$G(s) = \tfrac{1}{4} s^0 + \tfrac{1}{4} s + \tfrac{1}{2} s^2 = \tfrac{1}{4} \cdot (1 + s + 2s^2),$$

ενώ η πιθανογεννήτρια συνάρτηση του $\zeta_i^{(n)}$, i = 1, 2, …, 100, είναι

$$G^{(n)}(s) = G \circ G \circ \ldots \circ G(s) \text{ (n φορές)}$$

Αν $Z_n$ το πλήθος απογόνων των 100 βακτηρίων της n γενιάς τότε

$$Z_n = \zeta_1^{(n)} + \zeta_1^{(n)} + \ldots + \zeta_{100}^{(n)}.$$

Οι $\zeta_i^{(n)}$, i = 1, 2, …, 100 είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους τυχαίες μεταβλητές άρα η πιθανογεννήτρια συνάρτηση της $Z_n$ θα είναι το γινόμενο των επιμέρους πιθανογεννητριών, δηλαδή

$$G_{Zn}(s) = [G^{(n)}(s)]^{100}.$$

(β) Κάθε βακτηρίδιο αναπαράγεται ανεξάρτητα από τα υπόλοιπα. Άρα, η πιθανότητα εξάλειψης του συνολικού πληθυσμού είναι ίση με το γινόμενο των πιθανοτήτων εξάλειψης κάθε ενός από αυτά. Η πιθανότητα εξάλειψης ενός από αυτά είναι η μικρότερη θετική ρίζα της εξίσωσης G(s) = s.

Είναι: $G(s) = s \leftrightarrow 1 + s + 2s^2 = 4s \leftrightarrow 2s^2 - 3s + 1 = 0 \leftrightarrow s = \tfrac{1}{2}$ ή s = 1.

Άρα, η πιθανότητα εξάλειψης του πληθυσμού που προέρχεται από ένα βακτήριο είναι $\gamma = \tfrac{1}{2} = 0{,}5 = 50\%$ και η πιθανότητα εξάλειψης του πληθυσμού που προέρχεται από το σύνολο όλων των 100 βακτηριδίων είναι $(\tfrac{1}{2})^{100} = 7{,}9 \cdot 10^{-31}$.

(γ) Το μέγιστο πλήθος βακτηριδίων προκύπτει όταν κάθε ένα από τα 100 βακτηρίδια διπλασιάζεται δηλαδή όταν δίνει 2 απογόνους. Άρα, $m_n = 100 \cdot 2^n$. Επιπλέον, σε κάθε ένα από τα βήματα i = 0, 1, 2, …, n, καθώς η πιθανότητα διπλασιασμού για ένα βακτήριο είναι ½, η πιθανότητα διπλασιασμού για τα $m_n$ βακτήρια είναι (½)^$m_n$ Υπολογίζουμε:

$$P(Z_n = m_n) = P(Z_n = m_n, Z_{n-1} = m_{n-1}, \ldots, Z_1 = m_1, Z_0 = m_0)$$

$$= P(Z_n = m_n \mid Z_{n-1} = m_{n-1}) \cdot P(Z_{n-1} = m_{n-1} \mid Z_{n-2} = m_{n-2}) \cdot$$

$$\cdot \ldots \cdot P(Z_1 = m_1 \mid Z_0 = m_0) \cdot P(Z_0 = m_0) =$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{m_{n-1}} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{m_{n-2}} \cdot \ldots \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{m_0} = \left(\frac{1}{2}\right)^{100(2^{n-1} + \ldots + 2 + 1)} = \left(\frac{1}{2}\right)^{100 \cdot (2^n - 1)}$$

(δ) Το αναμενόμενο πλήθος απογόνων για κάθε ένα από τα 1.000 βακτήρια είναι

$$M = E(Y) = 0 \cdot \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4} \cdot 1 + \tfrac{1}{2} \cdot 2 = 5/4 = 1{,}25.$$

Άρα, το αναμενόμενο πλήθος βακτηρίων στο βήμα 51 για τα 1.000 βακτήρια θα είναι

$M_{1000} = 1000 \cdot M = 1000 \cdot 1{,}25 = 1.250$ βακτήρια.

Σημειώσεις

Είναι $G'(s) = [¼ \cdot (1 + s + 2s^2)]' = ¼ \cdot (1 + 4s)$. Το αναμενόμενο πλήθος απογόνων ισοδύναμα μπορούμε να το υπολογίσουμε ως $\mu = G'(1) = 5/4$. Επιπλέον, αξιοποιήθηκε η αθροιστική ιδιότητα της αναμενόμενης τιμής που ισχύει για κάθε ομάδα τυχαίων μεταβλητών.

**Παράδειγμα 11**

Ένα παιχνίδι τύχης ξεκινάει με 3 ευρώ στο τραπέζι. Κάθε παίκτης ρίχνει ένα ζάρι.

Αν το ζάρι είναι 1 ή 2 τότε ο παίκτης παίρνει 1 ευρώ από τραπέζι.

Αν το ζάρι είναι 3 τότε ξαναρίχνει.

Αν το ζάρι είναι 4 τότε βάζει 1 ευρώ στο τραπέζι.

Αν το ζάρι είναι 5 ή 6 βάζει 2 ευρώ στο τραπέζι.

Το παιχνίδι τελειώνει όταν δεν υπάρχουν πλέον χρήματα στο τραπέζι.

(α) Προσδιορίστε τα “άτομα”, και τις έννοιες της “αναπαραγωγής” και της “γενιάς” βάσει των οποίων το παραπάνω παιχνίδι μπορεί να θεωρηθεί ως μία διαδικασία διακλάδωσης.

(β) Να βρεθεί η πιθανογεννήτρια συνάρτηση του συνολικού πλήθος ευρώ $Z_n$ που απομένουν στο τραπέζι στην n “γενιά”.

(γ) Να βρεθεί το αναμενόμενο πλήθος χρημάτων στο τραπέζι στην n “γενιά”.

(δ) Να υπολογιστεί η πιθανότητα με την οποία το παιχνίδι τελικά θα σταματήσει.

**Λύση**

(α) Για να εκφράσουμε τη διαδικασία του παιχνιδιού ως μία διαδικασία διακλάδωσης θεωρούμε ως αρχικό 0“άτομο” κάθε ένα από τα 3 ευρώ που βρίσκονται αρχικά στο τραπέζι και κάθε “γενιά” τα ευρώ που 0απομένουν στη θέση του κάθε ενός, μετά από μία συνεχόμενη ακολουθία παιχνιδιών σε πλήθος όσα και 0τα ευρώ που βρίσκονται στο τραπέζι. Δηλαδή, αν $Z_0 = 3$, τότε

$Z_1$ = τα ευρώ που βρίσκονται στο τραπέζι μετά από 3 ρίψεις.

Αν (για παράδειγμα) μετά από 3 ρίψεις τα ευρώ στο τραπέζι είναι 4 τότε

$Z_2$ = τα ευρώ που βρίσκονται στο τραπέζι μετά από άλλες 4 ρίψεις.

Με την παραπάνω θεώρηση, το κάθε ευρώ που βρίσκεται στο τραπέζι οποιαδήποτε χρονική στιγμή προσομοιάζει σε “άτομο” που “αναπαράγεται” με πλήθος απογόνων Y, όπου

$P(Y = 0) = 2/6 = 1/3$ (με 1 ή 2 ο παίκτης παίρνει ένα ευρώ)

$P(Y = 1) = 1/6$ (με 3 το ευρώ μένει άθικτο)

$P(Y = 2) = 1/6$ (με 4 το ευρώ διπλασιάζεται καθώς ο παίκτης βάζει ένα)

$P(Y = 3) = 2/6 = 1/3$ (με 5 ή 6 το ευρώ τριπλασιάζεται καθώς ο παίκτης βάζει δύο)

(β) Έστω $\zeta_i$ το πλήθος των ευρώ που μένουν στη θέση του i - οστού ευρώ, i = 1, 2, 3 και $\zeta_i^{(n)}$ το πλήθος ευρώ τη γενιά n . Η πιθανογεννήτρια συνάρτηση της $\zeta_i$ είναι

$$G(s) = 1/3\, s^0 + 1/6\, s + 1/6\, s^2 + 1/3\, s^3 = 1/6 \cdot (2 + s + s^2 + 2s^3),$$

ενώ η πιθανογεννήτρια συνάρτηση του $\zeta_i^{(n)}$, i = 1, 2, 3, είναι

$$G^{(n)}(s) = G \circ G \circ \ldots \circ G(s) \text{ (n φορές)}$$

Αν $Z_n$ το πλήθος ευρώ “απογόνων” των 3 αρχικών ευρώ στη n γενιά τότε

$$Z_n = \zeta_1^{(n)} + \zeta_1^{(n)} + \zeta_3^{(n)}.$$

Οι $\zeta_i^{(n)}$, i = 1, 2, 3 είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους τυχαίες μεταβλητές άρα η πιθανογεννήτρια συνάρτηση της $Z_n$ θα είναι το γινόμενο των επιμέρους πιθανογεννητριών, δηλαδή

$$G_{Zn}(s) = [G^{(n)}(s)]^3.$$

(γ) Είναι $G^{(1)}_{Zn}(s) = 3[G^{(n)}(s)]^2[G^{(n)}(s)]^{(1)}$ και

$$[G^{(n)}(s)]^{(1)} = G^{(1)}(G^{(n-1)}(s)) \cdot G^{(1)}(G^{(n-2)}(s)) \cdot \ldots \cdot G^{(1)}(s)$$

Καθώς G(1) = 1, υπολογίζουμε, $E(Z_n) = G^{(1)}_{Zn}(1) = 3\,(G^{(1)}(1))^n$.

Είναι, $G(s) = 1/6 \cdot (2 + s + s^2 + 2s^3)$, άρα $G^{(1)}(s) = 1/6 \cdot (1 + 2s + 6s^2)$ και $G^{(1)}(1) = 9/6 = 3/2$.

Καταλήγουμε ότι: $E(Z_n) = G^{(1)}_{Zn}(1) = 3\,(3/2)^n = 3^{n+1}/2^n$.

(δ) Η πιθανότητα εξάλειψης γ του κάθε ενός από τα αρχικά ευρώ είναι η μικρότερη θετική λύση της εξίσωσης G(s) = s. Λύνοντας την εξίσωση βρίσκουμε s = -2, s = ½ και s = 1, άρα γ = ½ = 0,5 = 50%. Καθώς κάθε ένα από τα αρχικά ευρώ αντικαθίσταται με τρόπο ανεξάρτητο με τα άλλα, συμπεραίνουμε ότι η πιθανότητα το παιχνίδι να σταματήσει είναι

$$(1/2)^3 = 1/8 = 0{,}125 = 12{,}5\%.$$