Σημειώσεις Στοχαστικές Διεργασίες - 4ο Μάθημα
Τρίτη 24 Οκτωβρίου 2023

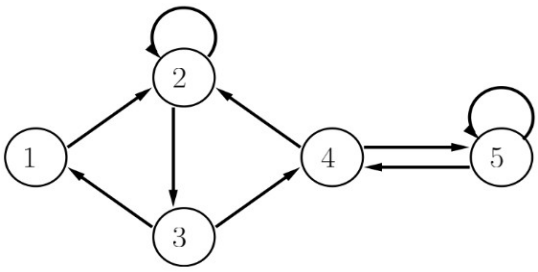
6. Κατηγοριοποίηση των καταστάσεων μίας Μαρκοβιανής Αλυσίδας

Μία κατάσταση i καλείται **προσιτή (accessible)** από την κατάσταση j εάν για κάποιο ακέραιο $n \geq 0$ ισχύει $p^{(n)}_{ji} > 0$. Κάθε κατάσταση είναι προσιτή από τον εαυτό της καθώς $p^{(0)}_{ii} = 1$, $i \in S$. Δύο καταστάσεις που είναι προσιτές μεταξύ τους λέμε ότι **επικοινωνούν (communicate)**. Δηλαδή, οι καταστάσεις i και j επικοινωνούν αν υπάρχουν $n, m \geq 0$ τέτοια ώστε

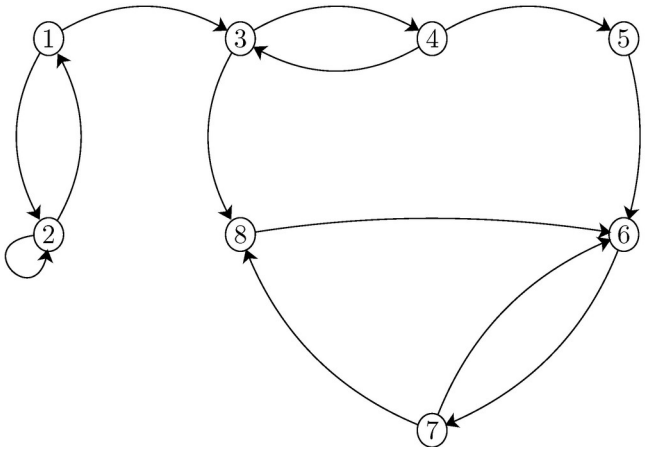
$$p^{(n)}_{ij} > 0 \text{ και } p^{(m)}_{ji} > 0.$$

Αν οι i, j επικοινωνούν, γράφουμε **i ↔ j**. Φανερά, αν **i ↔ j** και **j ↔ k** τότε **i ↔ k**. Κάθε κατάσταση επικοινωνεί με τον εαυτό της καθώς $p^{(0)}_{ii} = 1$, $i \in S$.

Παράδειγμα 1
Όλες οι καταστάσεις της αλυσίδας του σχήματος επικοινωνούν μεταξύ τους.



Δραστηριότητα
Να βρεθούν οι κλάσεις ισοδυναμίας της παρακάτω Μαρκοβιανής αλυσίδας



Η επικοινωνία ως σχέση ισοδυναμίας
Έστω i, j, k τρεις καταστάσεις μίας Μαρκοβιανής αλυσίδας.
Τότε, για τη σχέση της επικοινωνίας (↔) ισχύει:

- i ↔ i (ανακλαστική)
- i ↔ j ⟺ j ↔ i (συμμετρική)
- i ↔ j και j ↔ k ⟺ i ↔ k (μεταβατική)

Συμπεραίνουμε ότι:

Η σχέση επικοινωνίας (↔) είναι μία σχέση ισοδυναμίας.

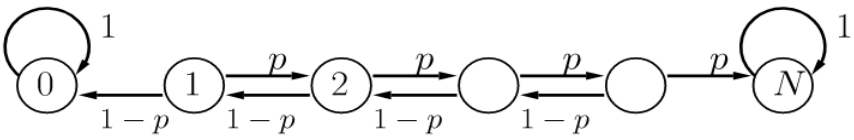
Καθώς κάθε σχέση ισοδυναμίας προσδιορίζει μία διαμέριση ενός συνόλου, προκύπτει πως το σύνολο καταστάσεων S μπορεί να διαχωριστεί σε υποσύνολα $\{C_i, i = 1, .., N\}$ που αποτελούνται από ισοδύναμα στοιχεία ως προς τη σχέση της επικοινωνίας (↔). Η διαμέριση του S σε κλάσεις ισοδυναμίας ονομάζεται σύνολο πηλίκο και συμβολίζεται S/↔.

Σημείωση: Μία απόδειξη για το γεγονός πως κάθε σχέση ισοδυναμίας σε ένα σύνολο προσδιορίζει μία διαμέριση στο σύνολο μπορεί να βρεθεί εδώ:
https://math.libretexts.org/Courses/Monroe_Community_College/MTH_220_Discrete_Math/6%3A_Relations/6.3%3A_Equivalence_Relations_and_Partitions (Theorem 6.3.3)

Ορισμός
Μία κατάσταση i ε S ονομάζεται **απορροφητική (absorbing)** όταν το σύστημα δεν μπορεί να αλλάξει κατάσταση όταν βρεθεί εκεί ($p_{ii} = 1$).

Φανερά, για κάθε κατάσταση i που δεν είναι κατάσταση απορρόφησης υπάρχει τουλάχιστον μία κατάσταση j τέτοια ώστε i → j.

Παράδειγμα 1
Οι καταστάσεις 0, N είναι απορροφητικές. Ειδικότερα, οι 0, N, είναι προσιτές από τις {1, 2, …, N – 1} αλλά δεν επικοινωνούν με αυτές. Οι καταστάσεις {1, 2, …, N – 1} επικοινωνούν μεταξύ τους.



Δραστηριότητα
Να διαχωριστούν οι καταστάσεις {0, 1, …, N} του Παραδείγματος 1 σε κλάσεις ισοδυναμίας ως προς τη σχέση της επικοινωνίας.

Βασικές και μη βασικές καταστάσεις
Μία κατάσταση i ονομάζεται **βασική (essential)** όταν *για κάθε άλλη* κατάσταση j για την οποία i → j είναι και j → i, (δηλαδή τελικά i ↔ j). Μία βασική κατάσταση είτε αποτελεί μέλος μίας κλάσης ισοδυναμίας είτε συνιστά μόνη της μία κλάση ισοδυναμίας ως προς τη σχέση της επικοινωνίας.

Μία κατάσταση i ονομάζεται **μη βασική (inessential)** όταν δεν είναι βασική, δηλαδή όταν υπάρχει τουλάχιστον μία άλλη κατάσταση j για την οποία i → j αλλά όχι j → i.

Μία κατάσταση i του S, είναι **μη βασική** όταν δεν υπάρχει κάποια άλλη κατάσταση που να επικοινωνεί με αυτήν.

Δηλαδή, μία κατάσταση i είναι **μη βασική** εάν είτε το (α) είτε το (β) ισχύει όπου
(α) υπάρχει κάποια κατάσταση j για την οποία i → j χωρίς να ισχύει j → i.
(β) δεν υπάρχει καμία κατάσταση j τέτοια ώστε i → j.

Δηλαδή, μία μη βασική κατάσταση είναι είτε κατάσταση απορρόφησης (η αλυσίδα παραμένει σε αυτή για πάντα) είτε μεταβατική.

Οι βασικές καταστάσεις ομαδοποιούνται σε κλάσεις με περισσότερα από ένα στοιχεία του χώρου καταστάσεων S. Αντίθετα, μία μη βασική κατάσταση αποτελεί μόνη της μία κλάση ισοδυναμίας του S.

Από τα παραπάνω, συμπεραίνουμε ότι:

- **Κάθε κλάση ισοδυναμίας αποτελείται είτε μόνο από βασικές είτε μόνο από μη βασικές καταστάσεις.**

- **Ο χώρος καταστάσεων S διαχωρίζεται σε κλάσεις ισοδυναμίας οι οποίες θα είναι είτε μεμονωμένες μη βασικές καταστάσεις είτε κλάσεις βασικών καταστάσεων.**

Καταστάσεις βασικές που ανήκουν σε διαφορετικές κλάσεις δεν είναι προσιτές μεταξύ τους.

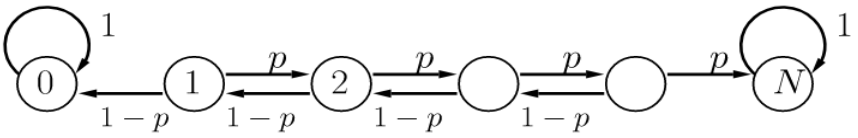
Η εύρεση των βασικών και μη βασικών καταστάσεων μίας Μαρκοβιανής διαδικασίας, βοηθάει στην αναδιατύπωση του πίνακα μετάβασης με τρόπο ώστε να διευκολύνονται οι πράξεις που απαιτούνται για την πρόβλεψη της μελλοντικής συμπεριφοράς μίας Μαρκοβιανής αλυσίδας.

Παράδειγμα 2
Αν $\{X_n, n \geq 0\}$ Μαρκοβιανή αλυσίδα με χώρο καταστάσεων S = {0, 1} και πίνακα μετάβασης

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Τότε η κατάσταση 0 οδηγεί ντετερμινιστικά στην 1 και η 1 είναι κατάσταση απορρόφησης.
Οι μοναδικές κλάσεις ισοδυναμίας είναι οι {0} και {1}.
Δηλαδή:
Το σύνολο καταστάσεων S = {0, 1} είναι κλειστό αλλά όχι κλάση ισοδυναμίας. Το σύνολο {0} είναι κλάση ισοδυναμίας αλλά όχι κλειστό.
Η κλάση {0} είναι μεταβατική άρα μη βασική.
Η κλάση {1} είναι απορροφητική άρα μη βασική.

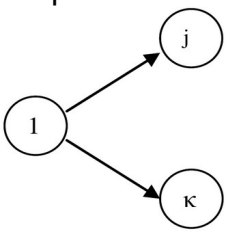
Εφαρμογή
Να χαρακτηριστούν οι καταστάσεις {0, 1, …, N} της αλυσίδας του σχήματος ως βασικές ή μη βασικές.



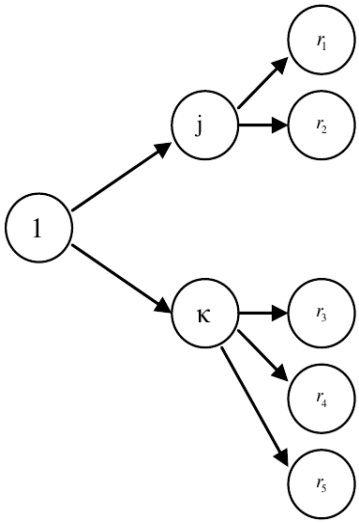
Απάντηση
- Οι απορροφητικές καταστάσεις 0, N είναι βασικές γιατί ικανοποιούν (τετριμμένα) τον ορισμό.
- Οι καταστάσεις 1, 2, 3, …, N – 1 είναι μη βασικές γιατί έχουν πρόσβαση στις απορροφητικές, ενώ δεν επικοινωνούν με αυτές.

Εντοπισμός βασικών και μη βασικών καταστάσεων
Η εύρεση των βασικών και μη βασικών καταστάσεων καθώς και των κλάσεων τους, μπορεί να γίνει με την παρακάτω διαδικασία.

Ξεκινώντας από την κατάσταση 1 σημειώνουμε σε ένα διάγραμμα ροής όλες τις καταστάσεις που είναι προσιτές από αυτήν.



Συνεχίζουμε το διάγραμμα ροής για μία από τις καταστάσεις του τελευταίου βήματος. Η διαδικασία συνεχίζεται μέχρις ότου εμφανιστούν όλες οι καταστάσεις. Εάν υπάρχουν καταστάσεις που δεν έχουν εμφανιστεί στο διάγραμμα ροής, ξεκινάμε με κάποια από αυτές ένα καινούριο διάγραμμα μέχρι να εξαντληθούν όλες.

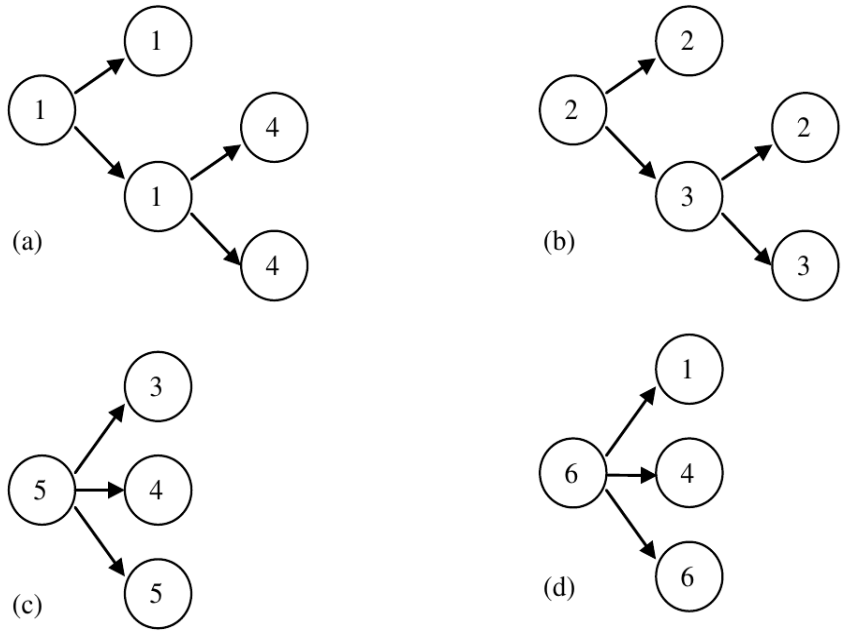


Παράδειγμα 4
Δίνεται η Μαρκοβιανή αλυσίδα $\{X_n, n \geq 0\}$ με χώρο καταστάσεων S = {1, 2, 3, 4, 5, 6} και πίνακα μετάβασης:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0.1 & 0 & 0 & 0.9 & 0 & 0 \\ 0 & 0.6 & 0.4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.7 & 0.3 & 0 & 0 & 0 \\ 0.8 & 0 & 0 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 & 0.4 & 0.4 & 0 \\ 0.3 & 0 & 0 & 0.4 & 0 & 0.3 \end{pmatrix}$$

Να βρεθούν οι κλάσεις βασικών καταστάσεων της $\{X_n, n \geq 0\}$.

Λύση



Από το τμήμα (a) του διαγράμματος ροής των καταστάσεων της Μαρκοβιανής αλυσίδας προκύπτει, ότι το σύνολο {1, 4} αποτελεί μία κλάση βασικών καταστάσεων (1 ↔ 4).
Από το τμήμα (b) προκύπτει ότι οι καταστάσεις {2, 3} αποτελούν μία κλάση βασικών καταστάσεων (2 ↔ 3).
Από το (c) έχουμε ότι η {5} είναι μη βασική κατάσταση (η 3 είναι προσβάσιμη από την 5 αλλά η 5 δεν είναι προσβάσιμη από την 3).
Από το (d) έχουμε ότι η {6} είναι μη βασική κατάσταση (6 → 1 αλλά το αντίστροφο δεν ισχύει).

Άσκηση 2
Για τη Μαρκοβιανή Αλυσίδα με πίνακα μετάβασης P να διαχωριστούν οι καταστάσεις σε κλάσεις ισοδυναμίας ως προς τη σχέση της επικοινωνίας και να χαρακτηριστούν ως βασικές ή μη βασικές.

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Άσκηση 3
Για τη Μαρκοβιανή αλυσίδα με πίνακα μετάβασης P:

(α) Να γίνει το διάγραμμα καταστάσεων
(β) Να διαχωριστεί ο χώρος καταστάσεων σε κλάσεις βασικών καταστάσεων.

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

Σύνοψη

Μία κατάσταση i μπορεί να χαρακτηριστεί:
(α) ως κατάσταση που είναι **προσιτή** από μία άλλη κατάσταση j.
(β) ως κατάσταση που **επικοινωνεί** με μία άλλη κατάσταση j.
(γ) ως **απορροφητική** κατάσταση.
(δ) ως **βασική** (ή μη βασική) κατάσταση.

7. Αδιαχώριστες Μαρκοβιανές αλυσίδες

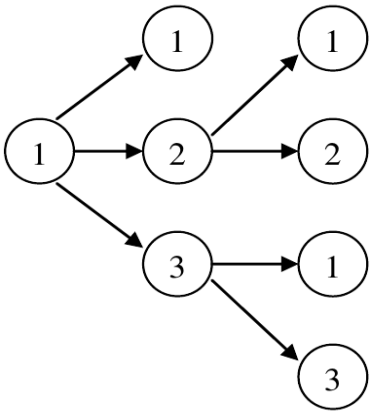
Μια Μαρκοβιανή αλυσίδα καλείται **αδιαχώριστη (indecomposable ή irreducible)** ή **μη διαχωρίσιμη** αν αποτελείται από μόνο μία βασική κλάση καταστάσεων, δηλαδή όλες οι καταστάσεις της επικοινωνούν η μία από την άλλη. Φανερά, μία αδιαχώριστη Μαρκοβιανή αλυσίδα δεν μπορεί να περιέχει απορροφητικές καταστάσεις.

Δραστηριότητα

Να δείξετε ότι η Μαρκοβιανή αλυσίδα $\{X_n, n \geq 0\}$ με πίνακα μετάβασης P είναι αδιαχώριστη, όπου

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.2 & 0.5 \\ 0.1 & 0.9 & 0 \\ 0.2 & 0 & 0.8 \end{pmatrix}$$

Το διάγραμμα ροής των καταστάσεων είναι:



Καθώς οι καταστάσεις {1, 2, 3} αποτελούν μία βασική κλάση καταστάσεων, συμπεραίνουμε ότι η Μαρκοβιανή αλυσίδα είναι αδιαχώριστη.

Παράδειγμα

Οι Μαρκοβιανές αλυσίδες με πίνακες μετάβασης P_1 και P_2 δεν είναι αδιαχώριστες (γιατί;).

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0.9 & 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 & 0.8 \\ 0 & 0 & 0.7 & 0.3 \end{pmatrix} \qquad P_2 = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.1 & 0.4 & 0.4 \\ 0.5 & 0.1 & 0.1 & 0.3 \\ 0.2 & 0.4 & 0.2 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Δραστηριότητα

Να δείξετε ότι η Μαρκοβιανή αλυσίδα $\{X_n, n \geq 0\}$ με πίνακα μετάβασης P_3 είναι αδιαχώριστη, όπου

$$P_3 = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0 & 0.8 & 0 & 0.2 \\ 0.7 & 0 & 0.1 & 0 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0.9 & 0 \\ 0.9 & 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0 \end{pmatrix}$$

Δραστηριότητα

Να δείξετε ότι η Μαρκοβιανή αλυσίδα $\{X_n, n \geq 0\}$, $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, με πίνακα μετάβασης P δεν είναι αδιαχώριστη, όπου

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{3}{4} & 0 \end{pmatrix}$$

8. Κανονική μορφή πίνακα μετάβασης

Παρατηρούμε ότι ένα στοιχείο p_{ij} του πίνακα μετάβασης P μπορεί να αντιστοιχεί σε μόνο ένα από τα παρακάτω γεγονότα:

(α) Μετάβαση μεταξύ δύο καταστάσεων της ίδιας κλάσης βασικών καταστάσεων.
(β) Μετάβαση από κάποια μη βασική κατάσταση σε κάποια βασική κατάσταση, δηλαδή κατάσταση που να ανήκει σε κάποια κλάση βασικών καταστάσεων.
(γ) Μετάβαση από κάποια μη βασική κατάσταση σε κάποια (άλλη ή την ίδια) μη βασική κατάσταση.

Λέμε ότι ο πίνακας μετάβασης βρίσκεται σε **κανονική μορφή** όταν οι γραμμές και οι στήλες του έχουν τοποθετηθεί με τρόπο ώστε να τηρούνται οι εξής κανόνες:

(α) Εμφανίζονται πρώτα οι κλάσεις των βασικών καταστάσεων με αύξουσα σειρά ως προς το πλήθος των καταστάσεων των κλάσεων.

(β) Εμφανίζονται μετά οι κλάσεις των μη βασικών καταστάσεων με τέτοια σειρά, ώστε να είναι πρώτες εκείνες που είναι προσιτές από άλλες.

Παράδειγμα

Στην περίπτωση του παραδείγματος 4, οι βασικές κλάσεις είναι οι {1, 4} και {2, 3} και οι μη βασικές καταστάσεις είναι οι {5} και η {6}. Μεταξύ των {5} και {6} καμία δεν είναι προσιτή από την άλλη κατά συνέπεια η σειρά τους δεν παίζει κανένα ρόλο. Συμπεραίνουμε ότι η κανονική μορφή του πίνακα P είναι η εξής:

$$\mathbf{P}=\begin{pmatrix} 0.1 & 0 & 0 & 0.9 & 0 & 0 \\ 0 & 0.6 & 0.4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.7 & 0.3 & 0 & 0 & 0 \\ 0.8 & 0 & 0 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 & 0.4 & 0.4 & 0 \\ 0.3 & 0 & 0 & 0.4 & 0 & 0.3 \end{pmatrix} \Longrightarrow \mathbf{P}=\begin{pmatrix} 0.1 & 0.9 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.8 & 0.2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.6 & 0.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.7 & 0.3 & 0 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0 & 0.2 & 0.4 & 0 \\ 0.3 & 0.4 & 0 & 0 & 0 & 0.3 \end{pmatrix}$$

Έστω μία Μαρκοβιανή αλυσίδα που έχει k βασικές κλάσεις καταστάσεων και s μη βασικές. Τότε είναι φανερό ότι η γενική μορφή της κανονικής μορφής του πίνακα μετάβασης P της Μαρκοβιανής αλυσίδας θα είναι

$$\mathbf{P}=\begin{pmatrix} \mathbf{P_1} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{P_2} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{P_\kappa} & \mathbf{0} \\ \mathbf{R_1} & \mathbf{R_2} & \dots & \mathbf{R_\kappa} & \mathbf{Q} \end{pmatrix} \qquad \mathbf{Q}=\begin{pmatrix} \mathbf{Q}_1 & & & \\ & \mathbf{Q}_2 & & \mathbf{0} \\ \mathbf{T} & & \ddots & \\ & & & \mathbf{Q}_s \end{pmatrix}$$

όπου P_1, P_2, …, P_k είναι στοχαστικοί πίνακες οι οποίοι αντιστοιχούν στις μεταβάσεις μεταξύ των στοιχείων των k βασικών κλάσεις καταστάσεων, οι Q_1 ,Q_2,…, Q_s αντιστοιχούν στις μη βασικές καταστάσεις και οι R_1, R_2, …, R_k αντιστοιχούν στις μεταβάσεις από τις μη βασικές στις βασικές κλάσεις καταστάσεων.

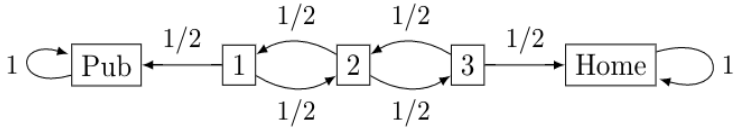
Η σημαντικότητα της κανονικής μορφής οφείλεται στην ευκολία με την οποία μπορεί να υπολογιστεί η δύναμη του πίνακα P, καθώς ισχύει:

$$\mathbf{P}=\begin{pmatrix} \mathbf{P_1} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{P_2} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{P_\kappa} & \mathbf{0} \\ \mathbf{R_1} & \mathbf{R_2} & \dots & \mathbf{R_\kappa} & \mathbf{Q} \end{pmatrix} \Longrightarrow \mathbf{P^n}=\begin{pmatrix} \mathbf{P_1^n} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{P_2^n} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{P_\kappa} & \mathbf{0} \\ \mathbf{R_1^{(n)}} & \mathbf{R_2^{(n)}} & \dots & \mathbf{R_\kappa^{(n)}} & \mathbf{Q^n} \end{pmatrix}$$

Οι πίνακες $R_i^{(n)}$ είναι πολύπλοκοι και εκφράζουν τις μεταβάσεις από τις μη βασικές καταστάσεις στην i -κλάση βασικών καταστάσεων. Αν ωστόσο ο P δεν έχει μη βασικές καταστάσεις, τότε η μελέτη της ασυμπτωτικής του συμπεριφοράς ανάγεται στην εύρεση

του ορίου των P_i^n, δηλαδή στη μελέτη μίας Μαρκοβιανής αλυσίδας της οποίας όλες οι καταστάσεις της αποτελούν μία κλάση ισοδυναμίας.

Άσκηση 1
Να γραφεί στην κανονική μορφή ο πίνακας μετάβασης της αλυσίδας



Άσκηση 2
Να γραφεί στην κανονική μορφή ο πίνακας μετάβασης

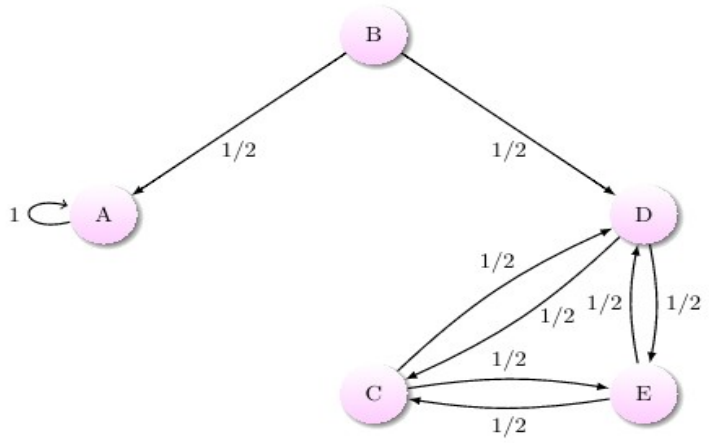
$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/4 & 0 & 1/4 \\ 1/2 & 1/4 & 0 & 1/4 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/4 & 0 & 1/4 \\ 1/2 & 1/4 & 0 & 1/4 & 0 \end{bmatrix}$$

9. Αλυσίδες απορρόφησης

Υπενθυμίζεται ότι μία κατάσταση ονομάζεται **κατάσταση απορρόφησης (absorbing state)** όταν η Μαρκοβιανή αλυσίδα, αν βρεθεί σε αυτήν, δεν μπορεί να αλλάξει την κατάστασή της σε επόμενο βήμα.

Η κατάσταση i είναι κατάσταση απορρόφησης αν $p_{ii} = 1$ (και $p_{ij} = 0$, $i \neq j$).
Στην περίπτωση όπου το σύνολο των καταστάσεων οδηγούν σε καταστάσεις απορρόφησης σε πεπερασμένο πλήθος βημάτων, τότε η αλυσίδα ονομάζεται **αλυσίδα απορρόφησης (absorbing Markov chain)**.

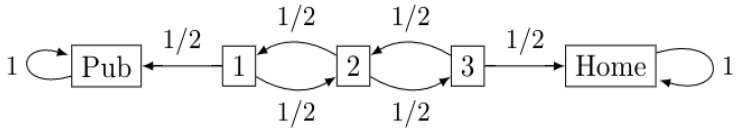
Σε μία αλυσίδα απορρόφησης, κάθε κατάσταση είναι είτε κατάσταση απορρόφησης (absorbing state) είτε **κατάσταση μετάβασης (transient state)**.



Στο σχήμα περιγράφονται οι πιθανές καταστάσεις μίας Μαρκοβιανής διεργασίες.
Η κατάσταση A είναι απορροφητική καθώς αν βρεθεί στην κατάσταση αυτή η διεργασία παραμένει για πάντα.

Οι καταστάσεις B, C, D, E είναι μεταβατικές καθώς επιτρέπουν την μετακίνηση σε άλλη κατάσταση με θετική πιθανότητα.

Παράδειγμα
Στο σχήμα περιγράφεται η κίνηση ενός μεθυσμένου μεταξύ της Pub και του σπιτιού του (θέσεις 4 και 5 στον πίνακα μετάβασης) οι οποίες είναι απορροφητικές καταστάσεις καθώς αν βρεθεί στις δύο αυτές θέσεις, δεν μπορεί να φύγει.



$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Άσκηση
Ποιοι από τους παρακάτω πίνακες μετάβασης περιγράφουν αλυσίδες απορρόφησης;

$$A = \begin{bmatrix} .3 & .7 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ .2 & .3 & .5 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} .1 & .3 & .4 & .2 \\ 0 & .2 & .1 & .7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ .2 & .2 & .2 & .2 & .2 \\ 0 & 0 & 0 & .3 & .7 \\ 0 & 0 & 0 & .6 & .4 \end{bmatrix}$$

Σε κάθε αλυσίδα απορρόφησης υπάρχει θετική πιθανότητα πρόσβασης από κάθε μεταβατική κατάσταση προς κάποια κατάσταση απορρόφησης. Συνεπώς, ανεξάρτητα από την αρχική κατάσταση, κάθε αλυσίδα απορρόφησης στο τέλος *με βεβαιότητα* καταλήγει σε μία κατάσταση απορρόφησης.

Αναδεικνύονται ορισμένα ενδιαφέροντα ερωτήματα:

Ερώτημα 1: Πόσες φορές αναμένεται να βρεθεί η αλυσίδα σε κάποια μεταβατική κατάσταση πριν φτάσει σε κατάσταση απορρόφησης;

Ερώτημα 2: Με ποια πιθανότητα θα βρεθεί σε κάθε μία από τις θέσεις απορρόφησης;

Έστω ότι η αλυσίδα απορρόφησης περιέχει r καταστάσεις απορρόφησης και s καταστάσεις μετάβασης. Καθώς, για κάθε κατάσταση απορρόφησης i είναι $p_{ii} = 1$ και $p_{ij} = 0$, $i \neq j$ συνάγουμε ότι ο πίνακας μετάβασης P μίας αλυσίδας απορρόφησης μπορεί να γραφεί (ύστερα από κατάλληλη αναδιάταξη των γραμμών και των στηλών του) ως:

$$P = \begin{pmatrix} Q & R \\ \mathbf{0} & I_r \end{pmatrix}$$

όπου **Q** είναι ένας *τετραγωνικός* πίνακας s x s, **R** είναι ένας μη μηδενικός πίνακας s x r, **0** είναι ένας r x s μηδενικός πίνακας και $\mathbf{I_r}$ είναι ο r x r μοναδιαίος πίνακας. Ο **Q** περιέχει τις πιθανότητες μετάβασης του συστήματος μεταξύ των s μεταβατικών καταστάσεων ενώ ο **R** περιέχει τις πιθανότητες μετάβασης του συστήματος από τις s μεταβατικές προς τις r απορροφητικές καταστάσεις.

Παράδειγμα

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow P = \begin{pmatrix} Q & R \\ \mathbf{0} & I_r \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Παρατήρηση

Η αναδιάταξη των γραμμών και των στηλών του πίνακα μετάβασης P είναι εξίσου αποτελεσματική σε οποιαδήποτε από τις μορφές

$$P = \begin{bmatrix} Q & R \\ 0 & I \end{bmatrix} \text{ ή } P = \begin{bmatrix} I & 0 \\ R & Q \end{bmatrix}$$

Έστω ότι ο πίνακας μετάβασης μίας αλυσίδας απορρόφησης είναι ο $P = \begin{bmatrix} I & 0 \\ R & Q \end{bmatrix}$

Τότε:

$$P^2 = \begin{bmatrix} I & 0 \\ R & Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ R & Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ R+QR & Q^2 \end{bmatrix}$$

και γενικότερα:

$$P^3 = \begin{bmatrix} I & 0 \\ R+QR & Q^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ R & Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ R+QR+Q^2R & Q^3 \end{bmatrix}$$

$$P^t = \begin{bmatrix} I & 0 \\ (I+Q+Q^2+\ldots+Q^{t-1})R & Q^t \end{bmatrix}$$

Μία αλυσίδα απορρόφησης, στο τέλος αναπόφευκτα θα βρεθεί σε μία κατάσταση απορρόφησης. Συνεπώς, καθώς ο πίνακας **Q** περιέχει τις πιθανότητες μετάβασης του συστήματος από μία μεταβατική κατάσταση σε μία άλλη γίνεται αντιληπτό ότι:

$$\lim_{t \to \infty} \mathbf{Q}^t = \mathbf{0}.$$

Πράγματι:
Από τον ορισμό μίας αλυσίδας απορρόφησης, *υπάρχει* μια διαδρομή από οποιαδήποτε μη απορροφητική κατάσταση s σε κάποια απορροφητική κατάσταση r. Επομένως, κάθε φορά που η διαδικασία ξεκινά από το s, υπάρχει μια *θετική πιθανότητα* να ακολουθήσει η διεργασία αυτό το μονοπάτι. Δηλαδή, μπορεί να υπολογιστεί ένα $0 < p < 1$, τέτοιο ώστε η πιθανότητα να μην φτάσει η διεργασία στην απορροφητική κατάσταση s μετά από m βήματα, m ε N, να είναι το πολύ p. Μετά από $k \cdot m$ βήματα, η πιθανότητα να μην φτάσει στην r είναι το πολύ p^k, και καθώς $k \to \infty$, και $p < 1$, συμπεραίνουμε ότι $p^k \to 0$.

Καθώς $\lim_{t \to \infty} \mathbf{Q}^t = \mathbf{0}$, συμπεραίνουμε ότι:

$$P^t = \begin{bmatrix} I & 0 \\ (I+Q+Q^2+\ldots+Q^{t-1})R & Q^t \end{bmatrix} \Longrightarrow P^\infty = \begin{bmatrix} I & 0 \\ NR & 0 \end{bmatrix}$$

όπου: $N = I+Q+Q^2+\ldots = (I-Q)^{-1}$

Ο **Q** περιέχει τις πιθανότητες μετάβασης του συστήματος από μία μεταβατική κατάσταση s_1 σε μία άλλη s_2, συνεπώς ο πίνακας $\mathbf{Q}^n$ περιέχει τις πιθανότητες μετάβασης μεταξύ του συνόλου των μεταβατικών καταστάσεων σε n βήματα. Αν η διάσταση του πίνακα **Q** είναι s x s, τότε ο πίνακας **N** είναι ένας τετραγωνικός s x s πίνακας με γραμμές και στήλες που αντιστοιχούν στις μεταβατικές καταστάσεις καθώς έχει δημιουργηθεί ως συνδυασμός δυνάμεων του πίνακα **Q.**

Ο πίνακας **N** ονομάζεται **βασικός πίνακας** της απορροφητικής Μαρκοβιανής αλυσίδας. Τα στοιχεία του **N** είναι το άθροισμα των πιθανοτήτων να μεταβεί το σύστημα από μία μεταβατική κατάσταση σε κάποια άλλη σε 0, 1, 2, ... βήματα.

Καθώς η σειρά i του πίνακα **N**, i = 1, …, s αντιστοιχεί στην i μεταβατική κατάσταση, γίνεται αντιληπτό ότι:

Το στοιχείο N_{ij}, i, j = 1, …, s, είναι **ο αναμενόμενος αριθμός επισκέψεων** στην κατάσταση j που θα συμβούν πριν περάσει η αλυσίδα σε κάποια απορροφητική κατάσταση, όπου s το πλήθος των μεταβατικών καταστάσεων της Μαρκοβιανής αλυσίδας.

Πράγματι:
Έστω i και j δύο μεταβατικές καταστάσεις και έστω ότι το σύστημα βρίσκεται αρχικά στην κατάσταση i. Έστω επίσης X_κ μία τ.μ. τέτοια ώστε $X_\kappa = 1$ αν η κατάσταση της διεργασίας είναι j ύστερα από κ βήματα και 0 αν δεν είναι, δηλαδή, $X_\kappa \sim \text{Bernoulli}(Q^\kappa_{ij})$ και

$$E(X_\kappa) = P(X_\kappa = 1) = Q^\kappa_{ij}.$$

Το αναμενόμενο πλήθος επισκέψεων της διεργασίας στην κατάσταση j στα πρώτα n βήματα είναι:

$$E(X_0 + X_1 + X_2 + \ldots + X_n) = Q^0_{ij} + Q^1_{ij} + Q^2_{ij} + \ldots + Q^n_{ij}.$$

Καθώς $n \to \infty$ προκύπτει ότι $E(X_0 + X_1 + X_2 + \ldots) = N_{ij}$

Ο πίνακας **R** περιέχει τις πιθανότητες μετάβασης του συστήματος από μία κατάσταση μετάβασης (s) σε μία κατάσταση απορρόφησης (r).

Αν B_{ij}, η πιθανότητα το σύστημα που ξεκίνησε από τη μεταβατική θέση i, i = 1, …, s, να βρεθεί κάποια στιγμή στην απορροφητική θέση j, j = 1, 2, …, r, τότε

$$B_{ij} = \Sigma_n \Sigma_\kappa [Q^n]_{ik} \cdot R_{kj} = \Sigma_\kappa (\Sigma_n [Q^n]_{ik}) \cdot R_{kj} = \Sigma_\kappa N_{i\kappa} \cdot R_{kj} = (N \cdot R)_{ij}$$

Δηλαδή, προκύπτει ότι:

Ο πίνακας **N · R** περιέχει τις πιθανότητες μετάβασης από μία μεταβατική σε μία απορροφητική κατάσταση. Ο πίνακας **N · R** ονομάζεται και **πίνακας λύσεων** της αλυσίδας.

Συνοψίζοντας:

Ερώτημα 1: Πόσες φορές αναμένεται να βρεθεί η αλυσίδα σε κάποια μεταβατική κατάσταση πριν φτάσει σε κάποια κατάσταση απορρόφησης;

Απάντηση

Τα στοιχεία του βασικού πίνακα $\mathbf{N = (I - Q)^{-1}}$ είναι **ο αναμενόμενος αριθμός περιόδων** που απαιτούνται για την άφιξη σε κάποια απορροφητική κατάσταση. Αν η διεργασία ξεκινήσει από την i μεταβατική κατάσταση, το άθροισμα της i γραμμής του **N** αποδίδει το

αναμενόμενο συνολικό πλήθος βημάτων που απαιτούνται για την άφιξη σε οποιαδήποτε κατάσταση απορρόφησης

Ερώτημα 2: Με ποια πιθανότητα θα βρεθεί σε κάθε μία από τις θέσεις απορρόφησης;

Απάντηση
Ο *πίνακας λύσεων* **N · R** περιέχει τις πιθανότητες μετάβασης από μία μεταβατική σε μία απορροφητική κατάσταση.

Σημείωση
Η μέθοδος της διαγωνιοποίησης ενός πίνακα μπορεί να χρησιμοποιηθεί έναντι της αναγωγής στην κανονική μορφή. Ωστόσο, είναι πιθανό ένας πίνακας να μην μπορεί να διαγωνοποιηθεί οπότε είναι υποχρεωτικό να ακολουθήσουμε τη διαδικασία, όπως περιγράφηκε στην ενότητα αυτή.

Κάποια παραδείγματα στοχαστικών πινάκων που δεν είναι διαγωνοποιήσιμοι είναι τα εξής:

$$M = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 5/12 & 5/12 & 1/6 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

Δραστηριότητα
Επαληθεύστε πως οι παραπάνω πίνακες δεν είναι διαγωνοποιήσιμοι.

Παράδειγμα 1
Σε ένα διάσημο πείραμα, ο Asch (1951) εξέτασε τον βαθμό στον οποίο οι άνθρωποι αποδέχονται την κοινωνική πίεση για συμμόρφωση. Φαινομενικά, το πείραμα αφορούσε την οπτική αντίληψη. Ένα άτομο οδηγούταν σε ένα δωμάτιο και καθόταν με κάποιους άλλους συμμετέχοντες. Ο πειραματιστής τους παρουσίαζε μια απλή οπτική εργασία - να καθορίσουν ποια από τις τρεις γραμμές είχε το ίδιο μήκος με μια γραμμή αναφοράς. Στη συνέχεια, ζητούνταν από κάθε συμμετέχοντα να δώσει την απάντησή του, με το υποκείμενο να απαντά τελευταίος. Η εργασία σχεδιάστηκε έτσι ώστε η σωστή απάντηση να είναι προφανής. Ωστόσο, εν αγνοία του συμμετέχοντα, όλα τα άλλα άτομα ήταν συνεργάτες του πειραματιστή και είχαν λάβει οδηγίες να δώσουν την ίδια εσφαλμένη απάντηση. Έτσι, όταν τελικά ερχόταν η σειρά του υποκειμένου να απαντήσει, το υποκείμενο έπρεπε να επιλέξει αν θα δώσει τη σωστή απάντηση (αγνοώντας την πίεση συμμόρφωσης με την ομάδα) ή τη λανθασμένη απάντηση (υποχώρηση σε αυτήν την πίεση).

Μετά την καταγραφή των απαντήσεων, ο πειραματιστής συνέχιζε με άλλη δοκιμασία όπου υπήρχε μία εξίσου προφανής επιλογή με τους συνεργάτες του να απαντούν πάλι εσκεμμένα λάθος και να αφήνουν πάλι το συμμετέχοντα να επιλέξει αν θα έλεγε τη σωστή απάντηση και όχι αυτήν που είχαν πει όλοι οι άλλοι.
Σε μια εκδοχή αυτού του πειράματος, αυτή η διαδικασία επαναλήφθηκε συνολικά 35 φορές. Έτσι, για κάθε υποκείμενο, τα δεδομένα μπορεί να αποτελούνται από μια σειρά απαντήσεων όπως π.χ

αααααβαβββαβββββββββββββββββββββββ

όπου το α δηλώνει τη σωστή απάντηση (αγνόηση των υπολοίπων) και το β τη λανθασμένη απάντηση (κοινωνική συμμόρφωση).

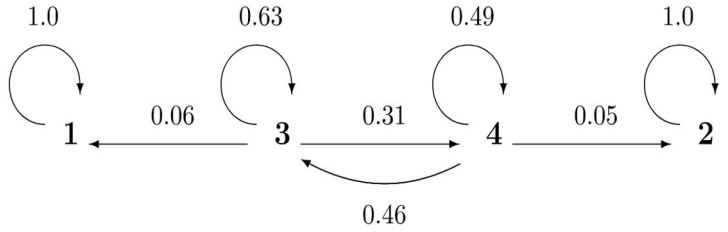
Αυτό το πείραμα επαναλήφθηκε με άλλα άτομα, καθένα από τα οποία δημιούργησε τη δική του ακολουθία απόκρισης. Βρέθηκε πως οι περισσότεροι ερωτώμενοι αρχικά αμφιταλαντεύονται μεταξύ των α και β, αλλά τελικά επέλεγαν μια σταθερή απάντηση (είτε το α είτε το β) χωρίς μεταβολή από επανάληψη σε επανάληψη της δοκιμασίας.

Για την μοντελοποίηση της συμπεριφοράς των ερωτώμενων, ο Cohen (1958) πρότεινε ένα μοντέλο αλυσίδας Markov με 4 καταστάσεις:
Κατάσταση 1: σταθερός αντικομφορμιστής (δεν επηρεάζεται από τους άλλους)
Κατάσταση 2: σταθερός κομφορμιστής (επιλέγει την άποψη των άλλων, αν και λανθασμένη)
Κατάσταση 3: προσωρινός αντικομφορμιστής (δεν επηρεάζεται από τους άλλους, προσωρινά)
Κατάσταση 4: προσωρινός κομφορμιστής (προσωρινά επιλέγει την άποψη των άλλων)
Τα υποκείμενα στην κατάσταση 1 ή 3 δίνουν σωστή απάντηση (α) αγνοώντας τους υπόλοιπους, ενώ τα άτομα στην κατάσταση 2 ή 4 δίνουν λανθασμένη απάντηση (β) υποκύπτοντας στην κοινωνική πίεση που τους ασκείται από τους υπόλοιπους.
Στο μοντέλο του Cohen[1], οι καταστάσεις 1 και 2 απορροφούν, ενώ οι μεταβάσεις μπορούν να συμβούν από την κατάσταση 3 στην 1 ή 4 και από την κατάσταση 4 στην 3 ή 2.
[1] Cohen, B. P. (1958). A Probability Model for Conformity. Sociometry, 21(1), 69–81. https://doi.org/10.2307/2786059

Χρησιμοποιώντας τα πειραματικά δεδομένα, ο Cohen υπολόγισε τον πίνακα μετάβασης της διεργασίας.

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0.06 & 0 & 0.63 & 0.31 \\ 0 & 0.05 & 0.46 & 0.49 \end{bmatrix}$$

Μακροπρόθεσμα, κάθε υποκείμενο γίνεται τελικά είτε μόνιμος μη κομφορμιστής (κατάσταση 1) είτε μόνιμος κομφορμιστής (κατάσταση 2).



Η θεωρία Μαρκοβιανών αλυσίδων μπορεί να μας ενημερώσει για τις πιθανότητες υιοθέτησης μίας από τις δύο απορροφητικές καταστάσεις, ανάλογα με την αρχική στάση ενός υποκειμένου.

Εάν η αλυσίδα ξεκινήσει στην 1η μεταβατική κατάσταση (κατάσταση 3), περιμένουμε ότι η αλυσίδα θα περάσει 11,06 περιόδους σε αυτήν την κατάσταση και 6,72 περιόδους στη 2η μεταβατική κατάσταση (κατάσταση 4) πριν να αφιχθεί στην 1η ή τη 2η απορροφητική κατάσταση αντίστοιχα.

Αντίστοιχα, εάν η αλυσίδα ξεκινήσει στη 2η μεταβατική κατάσταση (κατάσταση 4), μπορούμε να περιμένουμε ότι θα περάσει 9,98 περιόδους στην 1η μεταβατική κατάσταση και 8,03 περιόδους στη 2η μεταβατική κατάσταση πριν να αφιχθεί στην 1η ή τη 2η απορροφητική κατάσταση

Κώδικας Gnu Octave (ή Matlab)

```
>> P = [1 0 0 0; 0 1 0 0; 0.06 0 0.63 0.31; 0 0.05 0.46 0.49]    % Ο πίνακας μετάβασης της διεργασίας
>> R = P(3:4, 1:2)  % Ο πίνακας R που περιέχει τις πιθανότητες μετάβασης από τις μεταβατικές στις απορροφητικές.
>> Q = P(3:4, 3:4)  % Ο πίνακας Q που περιέχει τις πιθανότητες μετάβασης μεταξύ των μεταβατικών καταστάσεων.
>> N = inv(eye(2) – Q)          % Ο βασικός πίνακας της διεργασίας

>> sum(N, 2)     % Αναμενόμενο πλήθος μεταβάσεων πριν την άφιξη σε οποιαδήποτε απορροφητική κατάσταση.
>> N * R   % πιθανότητες μετάβασης από τις μεταβατικές στις απορροφητικές καταστάσεις
```

Εάν η αλυσίδα ξεκινήσει στην 1η μεταβατική κατάσταση (κατάσταση 3), περιμένουμε ότι η αλυσίδα θα αφιχθεί σε κάποια από τις δύο απορροφητικές καταστάσεις ύστερα από 17,8 περιόδους.

Αντίστοιχα, εάν η αλυσίδα ξεκινήσει στη 2η μεταβατική κατάσταση (κατάσταση 4), η άφιξη σε κάποια απορροφητική κατάσταση θα συμβεί ύστερα από 18 περιόδους.

Εάν το υποκείμενο ήταν αρχικά προσωρινός αντικομφορμιστής (κατάσταση 3), τότε με 66,38% πιθανότητα καταλήγει μόνιμος αντικομφορμιστής ενώ με 33,62% πιθανότητα καταλήγει μόνιμος κομφορμιστής.

Εάν αρχικά ήταν προσωρινά κομφορμιστής (κατάσταση 4), έχει 59,87% πιθανότητες να καταλήξει μόνιμος αντικομφορμιστής και 40,13% πιθανότητα να καταλήξει μόνιμος κομφορμιστής.

Παράδειγμα 2
Ένας τζογαδόρος έχει 3.000 € και αποφασίζει να παίξει 1.000 € τη φορά σε ένα τραπέζι Black Jack σε ένα καζίνο. Έχει αποφασίσει πως θα συνεχίζει να παίζει έως ότου χρεοκοπήσει ή κερδίσει 5.000 €. Η πιθανότητα να κερδίσει στο Black Jack είναι 0,40.
Να βρεθεί ο πίνακας μετάβασης και η πιθανότητα ότι ο τζογαδόρος θα χρεοκοπήσει
(α) έχοντας το αρχικό ποσό των 3.000 €
(β) με την υπόθεση ότι έχει βρεθεί να έχει 2.000 €.

Λύση
Πίνακας μετάβασης P =

$$\begin{array}{c} \\ 0 \\ 1K \\ 2K \\ 3K \\ 4K \\ 5K \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 0 & 1K & 2K & 3K & 4K & 5K \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ .60 & 0 & .40 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & .60 & 0 & .40 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & .60 & 0 & .40 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & .60 & 0 & .40 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Κανονική μορφή P =

$$\begin{array}{c} \\ 0 \\ 5K \\ 1K \\ 2K \\ 3K \\ 4K \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc|cccc} 0 & 5K & 1K & 2K & 3K & 4K \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline .60 & 0 & 0 & .40 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & .60 & 0 & .40 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & .60 & 0 & .40 \\ 0 & .40 & 0 & 0 & .60 & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

R **Q**

Βασικός πίνακας **N** = (**I** – **Q**)$^{-1}$ =

$$\begin{array}{c} \\ 1K \\ 2K \\ 3K \\ 4K \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1K & 2K & 3K & 4K \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1.54 & .90 & .47 & .19 \\ 1.35 & 2.25 & 1.18 & .47 \\ 1.07 & 1.78 & 2.25 & .90 \\ .64 & 1.07 & 1.35 & 1.54 \end{bmatrix} \end{array}$$

Πίνακας λύσεων **N** · **R**

$$\begin{bmatrix} 1.54 & .90 & .47 & .19 \\ 1.35 & 2.25 & 1.18 & .47 \\ 1.07 & 1.78 & 2.25 & .90 \\ .64 & 1.07 & 1.35 & 1.54 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} .6 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & .4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} .92 & .08 \\ .81 & .19 \\ .64 & .36 \\ .38 & .62 \end{bmatrix} =$$

Ο πίνακας **N** · **R** περιέχει τις πιθανότητες της απορρόφησης στην κατάσταση 0 € ή στην κατάσταση 5.000 € ξεκινώντας από οποιαδήποτε από τις τέσσερις μεταβατικές καταστάσεις (1K, 2K, 3K, 4K).
Εάν ο παίκτης έχει 3.000 €, τότε η πιθανότητα οικονομικής καταστροφής του(3.000 € → 0 €) είναι 64% και η πιθανότητα να φτάσει τα 5.000 € (3.000 € → 5.000 €) είναι 36%.
Εάν ο παίκτης έχει 2.000 €, τότε η πιθανότητα οικονομικής καταστροφής του(2.000 € → 0 €) είναι 81% και η πιθανότητα να φτάσει τα 5.000 € (2.000 € → 5.000 €) είναι 19%.

Παράδειγμα 3
Οι σπουδές ενός φοιτητή στο πανεπιστήμιο μπορούν να περιγραφούν σαν μια Μαρκοβιανή αλυσίδα με 6 καταστάσεις όπου η κάθε κατάσταση περιγράφεται παρακάτω:
Κατάσταση 1: ο φοιτητής εγκαταλείπει το πανεπιστήμιο.
Κατάσταση 2: ο φοιτητής παίρνει το πτυχίο του.
Κατάσταση 3: ο φοιτητής σπουδάζει στο 4^{ο} έτος.
Κατάσταση 4: ο φοιτητής σπουδάζει στο 3^{ο} έτος.
Κατάσταση 5: ο φοιτητής σπουδάζει στο 2^{ο} έτος.
Κατάσταση 6: ο φοιτητής σπουδάζει στο 1^{ο} έτος.
Ένας φοιτητής, κάθε χρονιά είτε συνεχίζει τις σπουδές του στο επόμενο έτος, είτε επαναλαμβάνει τα μαθήματα του ίδιου έτους, είτε εγκαταλείπει τις σπουδές του.
Αν p είναι η πιθανότητα εγκατάλειψης των σπουδών σε κάθε έτος, q η πιθανότητα επανάληψης του ίδιου έτους και r η πιθανότητα παρακολούθησης του επόμενου έτους τότε ο πίνακας μετάβασης της διεργασίας είναι:

$$P = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ p & r & q & 0 & 0 & 0 \\ p & 0 & r & q & 0 & 0 \\ p & 0 & 0 & r & q & 0 \\ p & 0 & 0 & 0 & r & q \end{pmatrix} \end{array}$$

R Q

Ο βασικός πίνακας N και ο πίνακας N · R που περιέχει τις πιθανότητες μετάβασης της διεργασίας είναι:

$$N = \frac{1}{(p+r)}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ t & 1 & 0 & 0 \\ t^2 & t & 1 & 0 \\ t^3 & t^2 & t & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1-t & t \\ 1-t^2 & t^2 \\ 1-t^3 & t^3 \\ 1-t^4 & t^4 \end{pmatrix}$$

όπου t = r / (p + r).
Εάν θέσουμε
p = 20%: πιθανότητα εγκατάλειψης των σπουδών σε κάθε έτος,
q = 10%: η πιθανότητα επανάληψης του ίδιου έτους,
r = 70%: η πιθανότητα παρακολούθησης του επόμενου έτους,
τότε t = r / (p + r) = 7/9 = 0,7777… και

$$N = \begin{pmatrix} 1.11 & 0 & 0 & 0 \\ 0.86 & 1.11 & 0 & 0 \\ 0.67 & 0.86 & 1.11 & 0 \\ 0.52 & 0.67 & 0.86 & 1.11 \end{pmatrix}, \quad N \cdot R = \begin{array}{c} \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 1 & 2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.22 & 0.78 \\ 0.40 & 0.60 \\ 0.53 & 0.47 \\ 0.63 & 0.37 \end{pmatrix} \end{array}$$

Ενδεικτικά:

- Η πιθανότητα ένας 2ετής (κατάσταση 5) να πάρει πτυχίο (κατάσταση 2) μετά από πεπερασμένο πλήθος ετών είναι 47%.
- Η πιθανότητα ένας 2ετής (κατάσταση 5) να εγκαταλείψει τις σπουδές του(κατάσταση 1) μετά από πεπερασμένο πλήθος ετών είναι 53%.

Κώδικας Gnu Octave (ή Matlab)

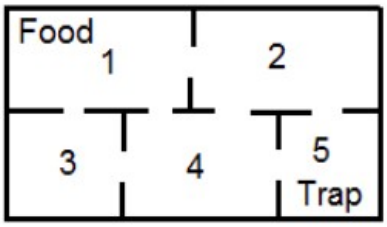
```
>> p =0.2; q = 0.1; r = 0.7
>> P = [1 0 0 0 0 0;0 1 0 0 0 0; p r q 0 0 0; p 0 r q 0 0; p 0 0 r q 0;p 0 0 0 r q]
>> R = P(3:6, 1:2)  % O πίνακας R που περιέχει τις πιθανότητες μετάβασης από τις μεταβατικές στις απορροφητικές.
>> Q = P(3:6, 3:6)  % O πίνακας Q που περιέχει τις πιθανότητες μετάβασης μεταξύ των μεταβατικών καταστάσεων.
>> N = inv(eye(4) – Q)  %  O βασικός πίνακας της διεργασίας
>> sum(N, 2)  % Αναμενόμενο πλήθος ετών πριν την αποφοίτηση ή την εγκατάλειψη των σπουδών.
>> N * R   % ποσοστά0 0αποφοίτησης ή εγκατάλειψης σπουδών από οποιοδήποτε έτος0.
```

Κώδικας Python

```
import numpy as np
p = 0.2; q = 0.1; r = 0.7
P = np.array([[1, 0, 0, 0, 0, 0], [0, 1, 0, 0, 0, 0], [p, r, q, 0, 0, 0],
                [p, 0, r, q, 0, 0], [p, 0, 0, r, q, 0],  [p, 0, 0, 0, r, q]])
R = P[2:6,0:2]
Q = P[2:6,2:6]
N = np.linalg.inv(np.identity(4) - Q)
print(np.dot(N, R))
```

Παράδειγμα 4

Ένα ποντίκι τοποθετείται στον λαβύρινθο που φαίνεται παρακάτω και μετακινείται από δωμάτιο σε δωμάτιο τυχαία. Από οποιοδήποτε δωμάτιο, το ποντίκι θα επιλέξει μια πόρτα στο επόμενο δωμάτιο με ίσες πιθανότητες. Μόλις το ποντίκι φτάσει στο δωμάτιο 1, βρίσκει φαγητό και δεν φεύγει ποτέ από αυτό το δωμάτιο. Και όταν φτάσει στο δωμάτιο 5, παγιδεύεται και δεν μπορεί να φύγει από αυτό το δωμάτιο. Ποια είναι η πιθανότητα το ποντίκι να καταλήξει στο δωμάτιο 5, αν είχε αρχικά τοποθετηθεί στο δωμάτιο 3;



Κώδικας Gnu Octave (ή Matlab)

```
>> P = [1 0 0 0 0; 1/3 0 0 1/3 1/3; 1/2 0 0 1/2 0;1/4 1/4 1/4 0 1/4;0 0 0 0 1]
>> P2 = [1 0 0 0 0; 0 1 0 0 0; 1/2 0 0 1/2 0;1/4 1/4 1/4 0 1/4;1/3 1/3 0 1/3 0]
>> R = P2(3:5, 1:2)
>> Q = P2(3:5, 3:5)
>> N = inv(eye(3) – Q)  %  Ο βασικός πίνακας της διεργασίας
>> sum(N, 2)  % Αναμενόμενο πλήθος κινήσεων πριν την άφιξη στην τροφή ή την
παγίδα.
>> N * R   % πιθανότητα άφιξης στην τροφή ή στην παγίδα.
ans =
   0.78947   0.21053
   0.57895   0.42105
   0.52632   0.47368
```

Η πιθανότητα το ποντίκι να καταλήξει στο δωμάτιο 5, αν είχε αρχικά τοποθετηθεί στο δωμάτιο 3 είναι **21,1%**.

Παράδειγμα 5
Δύο ισοδύναμοι τενίστες, ο Andre και ο Vilay ο καθένας με 2 € στην τσέπη, αποφασίζουν να στοιχηματίσουν από 1 €, για κάθε παιχνίδι που παίζουν. Συνεχίζουν να παίζουν μέχρι να χρεοκοπήσει ένας από αυτούς.
(α) Γράψτε τον πίνακα μετάβασης για τον Andre.
(β) Προσδιορίστε τις απορροφητικές καταστάσεις.
(γ) Γράψτε τον πίνακα λύσης.
(δ) Αν ο Andre έχει 1 €, ποια είναι η πιθανότητα να τα χάσει όλα τελικά;

Κώδικας Gnu Octave (ή Matlab)

```
>> P = [1 0 0 0 0; 1/2 0 1/2 0 0; 0 1/2 0 1/2 0; 0 0 1/2 0 1/2; 0 0 0 0 1]
>> P2 = [1 0 0 0 0; 0 1 0 0 0; 1/2 0 0 1/2 0;0 0 1/2 0 1/2;0 1/2 0 1/2 0]
>> R = P2(3:5, 1:2)
>> Q = P2(3:5, 3:5)
>> N = inv(eye(3) – Q)  %  Ο βασικός πίνακας της διεργασίας
>> sum(N, 2)  % Αναμενόμενο πλήθος κινήσεων πριν την άφιξη στην τροφή ή την
παγίδα.
>> N * R   % πιθανότητα άφιξης στην τροφή ή στην παγίδα.
ans =
   0.75000   0.25000
   0.50000   0.50000
   0.25000   0.75000
```

Αν ο Antre έχει 1 €, η πιθανότητα να τα χάσει όλα τελικά είναι **75%**.

Παράδειγμα 5 (εκδοχή β)
Δύο ισοδύναμοι τενίστες, ο Andre και ο Vilay ο καθένας με 2 € στην τσέπη, αποφασίζουν να στοιχηματίσουν από 1 €, για κάθε παιχνίδι που παίζουν. Συνεχίζουν να παίζουν μέχρι να χρεοκοπήσει ένας από αυτούς.
Η πιθανότητα νίκης για τον Andre είναι 0,4 και για τον Vilay 0,6.
(α) Γράψτε τον πίνακα μετάβασης για τον Andre.
(β) Προσδιορίστε τις απορροφητικές καταστάσεις.
(γ) Γράψτε τον πίνακα λύσης.
(δ) Αν ο Andre έχει 1 €, ποια είναι η πιθανότητα να τα χάσει όλα τελικά;

Παράδειγμα 5 (εκδοχή γ)
Αρχικά ο Andre έχει 3 € και ο Vilay έχει 2 €. Αποφασίζουν να στοιχηματίσουν από 1 €, για κάθε παιχνίδι που παίζουν. Συνεχίζουν να παίζουν μέχρι να χρεοκοπήσει ένας από αυτούς.
Η πιθανότητα νίκης για τον Andre είναι 0,4 και για τον Vilay 0,6.
(α) Γράψτε τον πίνακα μετάβασης για τον Andre.
(β) Προσδιορίστε τις απορροφητικές καταστάσεις.
(γ) Γράψτε τον πίνακα λύσης.
(δ) Αν ο Andre έχει41 €, ποια είναι η πιθανότητα να τα χάσει όλα τελικά;

Συμπλήρωμα Θεωρίας στις απορροφητικές αλυσίδες

Θεώρημα (Αναμενόμενες επισκέψεις από μία κατάσταση i σε μία άλλη κατάσταση j σε οποιαδήποτε αλυσίδα)

Έστω $\{X_n, n \in N\}$ μία Μαρκοβιανή αλυσίδα με χώρο καταστάσεων $S = A \cup B$, $|A \cap B| = 0$ και P ο πίνακας μετάβασης μεταξύ των καταστάσεων του υποσυνόλου A, τέτοιος ώστε $\lim_{n \to \infty} P^n = O$. Τότε, ο πίνακας $(I - P)^{-1}$, περιέχει ως στοιχεία το αναμενόμενο πλήθος μετακινήσεων του συστήματος μεταξύ των διαφορετικών καταστάσεων του A, πριν την μεταφορά στις καταστάσεις του συνόλου B.

Απόδειξη

Ο πίνακας μετάβασης P μίας Μαρκοβιανής αλυσίδας περιέχει τις πιθανότητες μετάβασης ενός βήματος (π.χ. από το στάδιο 0 στο στάδιο 1) ενώ ο πίνακας P^n περιέχει τις πιθανότητες μετάβασης n βημάτων (π.χ. από το στάδιο 0 στο στάδιο n).

Αν στο στάδιο 0 η αλυσίδα βρίσκεται στην κατάσταση i, τότε, το αναμενόμενο πλήθος επισκέψεων στην κατάσταση j θα είναι μετά από:

0 βήματα : $N_j = 1 \cdot P(X_0 = j \mid X_0 = i) = \delta_{ij} = \{0 \text{ αν } i \neq j \text{ και } 1 \text{ αν } i = j\} = [I]_{ij}$

1 βήματα : $N_j = 1 \cdot P(X_0 = j \mid X_0 = i) + 1 \cdot P(X_1 = j \mid X_0 = i) = \delta_{ij} + p_{ij} = [I + P]_{ij}$

2 βήματα: $N_j = 1 \cdot P(X_0 = j \mid X_0 = i) + 1 \cdot P(X_1 = j \mid X_0 = i) + 1 \cdot P(X_2 = j \mid X_0 = i)$
$= \delta_{ij} + p_{ij} + p_{ij}^{(2)} = [I]_{ij} + [P]_{ij} + [P^2]_{ij} = [I + P + P^2]_{ij}$:

...

n βήματα: $N_j = 1 \cdot P(X_0 = j \mid X_0 = i) + 1 \cdot P(X_1 = j \mid X_0 = i) + 1 \cdot P(X_2 = j \mid X_0 = i) + \ldots + 1 \cdot P(X_n = j \mid X_0 = i) \quad = [I + P + P^2 + \ldots + P^n]_{ij}$

Βρήκαμε ότι: Αν στο στάδιο 0 η αλυσίδα βρίσκεται στην κατάσταση i, τότε, το **αναμενόμενο πλήθος επισκέψεων** στην κατάσταση j **μετά από n βήματα** είναι:

$$N_j = [I + P + P^2 + \ldots + P^n]_{ij}$$

Δηλαδή, τα στοιχεία του πίνακα $I + P + P^2 + \ldots + P^n$ αντιπροσωπεύουν το αναμενόμενο πλήθος επισκέψεων από κάθε αρχική κατάσταση i στο βήμα 0 σε οποιαδήποτε κατάσταση j στο βήμα n. Αν επιπλέον $\mathbf{\lim_{n \to \infty} P^n = O}$, τότε
$\lim_{n \to \infty} (I + P + P^2 + \ldots + P^n) = (I - P)^{-1}$
και έχουμε ότι:

Το συνολικό αναμενόμενο πλήθος επισκέψεων στην κατάσταση j από την κατάσταση i είναι ίσο με

$$\mathbf{N_j = \lim_{n \to \infty} [I + P + P^2 + \ldots + P^n]_{ij} = [(I - P)^{-1}]_{ij}}$$

Σημείωση: Τα παραπάνω επιχειρήματα αναφέρονται σε οποιαδήποτε Μαρκοβιανή αλυσίδα και όχι μόνο σε αλυσίδες απορρόφησης.

Παράδειγμα

Δίνεται Μαρκοβιανή Αλυσίδα με S = {1, 2, 3, 4, 5} και πίνακα μετάβασης

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & .2 & .8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & .9 & .1 \\ .6 & 0 & 0 & 0 & .4 \\ .2 & .8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & .9 & .1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Έστω ότι $X_0 = 3$. Να βρεθεί το αναμενόμενο πλήθος επισκέψεων στην κατάσταση 2 πριν τη μετάβαση του συστήματος στην κατάσταση 1.

Λύση

Ο πίνακας μετάβασης μεταξύ των καταστάσεων 2, 3, 4, 5 είναι ο

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & .9 & .1 \\ 0 & 0 & 0 & .4 \\ .8 & 0 & 0 & 0 \\ .9 & .1 & 0 & .4 \end{bmatrix}$$

Υπολογίζουμε τον πίνακα $N = (I - Q)^{-1}$ και βρίσκουμε:

$$N = \frac{5}{447} \begin{bmatrix} 480 & 5 & 432 & 50 \\ 180 & 95 & 162 & 56 \\ 384 & 4 & 435 & 40 \\ 450 & 14 & 405 & 140 \end{bmatrix}$$

Συμπεραίνουμε, ότι το αναμενόμενο πλήθος επισκέψεων από την κατάσταση 3 στην κατάσταση 2 πριν την άφιξη στην κατάσταση 1, είναι 5·180/447 = 2,01.

Πιθανότητα μετάβασης από τις μεταβατικές στις απορροφητικές καταστάσεις

Θεώρημα

Ο πίνακας **N · R** περιέχει τις πιθανότητες μετάβασης από μία μεταβατική σε μία απορροφητική κατάσταση. Ο πίνακας **N · R** ονομάζεται και **πίνακας λύσεων** της αλυσίδας.

Απόδειξη

Έστω S = T U A, όπου T οι μεταβατικές καταστάσεις και A οι απορροφητικές καταστάσεις μίας απορροφητικής αλυσίδας. Έστω R ο πίνακας που περιέχει τις πιθανότητες μετάβασης από τις μεταβατικές T στις απορροφητικές A καταστάσεις και Q ο πίνακας που περιέχει τις πιθανότητες μετάβασης μεταξύ των μεταβατικών καταστάσεων.

Αν στο στάδιο 0 η αλυσίδα βρίσκεται στην μεταβατική κατάσταση t ϵ T, τότε η πιθανότητα να μεταβεί στην απορροφητική κατάσταση α ϵ A, μετά από:

1 βήματα: $P(X_1 = \alpha \mid X_0 = t) = [R]_{t\alpha} = [I \cdot R]_{t\alpha}$

2 βήματα: $P(X_2 = \alpha \mid X_0 = t) = \Sigma_{\kappa 1 \in T} P(X_2=\alpha \mid X_1= \kappa 1) \cdot P(X_1=\kappa 1 \mid X_0=t) = \Sigma_{\kappa \in T} [R]_{\kappa 1\alpha} [Q]_{t\kappa 1} = \Sigma_{\kappa \in T} [Q]_{t\kappa 1} [R]_{\kappa 1\alpha} = [Q \cdot R]_{t\alpha}$

3 βήματα: $P(X_3 = \alpha \mid X_0 = t) = \Sigma_{\kappa 2 \in T}\Sigma_{\kappa 1 \in T} P(X_3=\alpha \mid X_2=\kappa 2) \cdot P(X_2=\kappa 2 \mid X_1=\kappa 1) \cdot P(X_1=\kappa 1 \mid X_1=t) = \Sigma_{\kappa 2 \in T}\Sigma_{\kappa 1 \in T} [R]_{\kappa 2\alpha} \cdot [Q]_{\kappa 1\kappa 2} \cdot [Q]_{t\kappa 1} = \Sigma_{\kappa 2 \in T} [R]_{\kappa 2\alpha} (\Sigma_{\kappa 1 \in T}[Q]_{\kappa 1\kappa 2} \cdot [Q]_{t\kappa 1}) = \Sigma_{\kappa 2 \in T} [R]_{\kappa 2\alpha} [Q^2]_{t\kappa 2} = \Sigma_{\kappa 2 \in T} [Q^2]_{t\kappa 2} [R]_{\kappa 2\alpha} = [Q^2 \cdot R]_{t\alpha}$

n βήματα: $P(X_n = \alpha \mid X_0 = t) = \ldots = [Q^n \cdot R]_{t\alpha}$

Η αλυσίδα μπορεί να μεταβεί από τις μεταβατικές στις απορροφητικές καταστάσεις σε 1, 2, … βήματα. Φανερά, τα ενδεχόμενα $M_{t\alpha}^n$ = {η αλυσίδα μεταβαίνει σε n βήματα από την t στην α} = $P(X_n=\alpha \mid X_0=t)$ είναι ξένα μεταξύ τους.

Άρα, η πιθανότητα μετάβασης σε οποιοδήποτε βήμα από την μεταβατική κατάσταση t ϵ T, στην απορροφητική κατάσταση α ϵ A είναι

$P(t \rightarrow \alpha) = P(M_{ta}^0) + P(M_{ta}^1) + P(M_{ta}^2) + \ldots = [I \cdot R]_{t\alpha} + [Q \cdot R]_{t\alpha} + [Q^2 \cdot R]_{t\alpha} + \ldots = [(I + Q + Q^2 + \ldots) \cdot R]_{t\alpha} = [N \cdot R]_{t\alpha}$,

Όπου $N = I + Q + Q^2 + \ldots = (I - Q)^{-1}$, ο βασικός πίνακας της απορροφητικής αλυσίδας.