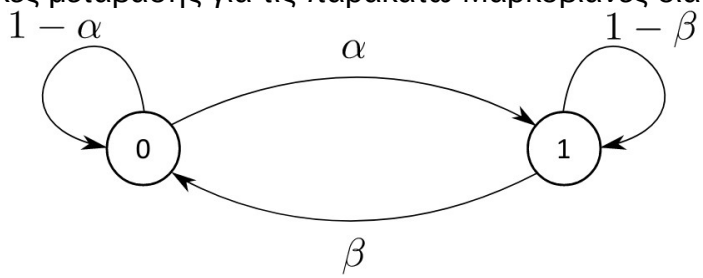
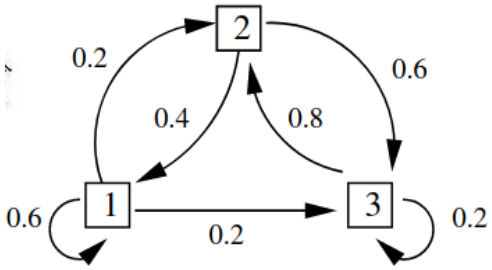
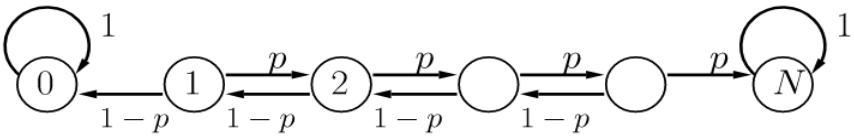
Σημειώσεις Στοχαστικές Διεργασίες - 3ο Μάθημα
Τρίτη 17 Οκτωβρίου 2023

Δραστηριότητες εξοικείωσης με τους πίνακες μετάβασης

Δραστηριότητα 1
Να γραφούν οι πίνακες μετάβασης για τις παρακάτω Μαρκοβιανές διαδικασίες







Δραστηριότητα 2
Να γίνει το διάγραμμα καταστάσεων της Μαρκοβιανής Διεργασίας με πίνακα μετάβασης

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/4 & 0 & 1/4 \\ 1/2 & 1/4 & 0 & 1/4 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/4 & 0 & 1/4 \\ 1/2 & 1/4 & 0 & 1/4 & 0 \end{bmatrix}$$

5. Μαρκοβιανές Διαδικασίες (συνέχεια)

Δύο σημαντικά ερωτήματα που αφορούν τις ομογενείς Μαρκοβιανές αλυσίδες διακριτού χρόνου είναι τα εξής:

Ερώτημα 1
Αν γνωρίζουμε τις πιθανότητες μετάβασης μεταξύ δύο διαδοχικών θέσεων της διεργασίας ($p_{ij} = P(X_1 = j \mid X_0 = i)$) τότε ποιες είναι οι πιθανότητες μετάβασης βήματος 2 ($p^{(2)}_{ij} = P(X_2 = j \mid X_0 = i)$);

Απάντηση στο Ερώτημα 1
Θεώρημα
Αν $P^{(2)} = [p_{ij}^{(2)}]$, όπου $p^{(2)}_{ij} = P(X_2 = j \mid X_0 = i)$, $i, j \in S$, είναι ο πίνακας μετάβασης 2 – βημάτων, τότε $\mathbf{P^{(2)} = P^2}$**.**

Απόδειξη: Για κάθε $m \in N$:

$$
\begin{aligned}
p_{ij}^{(2)} &= P(X_2 = j \mid X_0 = i) = \textstyle\sum_{k \in S} P(X_2 = j, X_1 = k \mid X_0 = i) \\
&= \textstyle\sum_{k \in S} P(X_2 = j \mid X_1 = k, X_0 = i) \cdot P(X_1 = k \mid X_0 = i) \\
&= \textstyle\sum_{k \in S} P(X_2 = j \mid X_1 = k) \cdot P(X_1 = k \mid X_0 = i) \\
&= \textstyle\sum_{k \in S} p_{kj} \cdot p_{ik} \\
&= \textstyle\sum_{k \in S} p_{ik} \cdot p_{kj} \\
&= (P^2)_{ij} \text{ (το στοιχείο (i, j) του } P^2\text{)},
\end{aligned}
$$

Όμοια αποδεικνύεται ότι $P^{(n)} = P^n$, ($P^0 = I$).

Εξίσωση Chapman-Kolmogorov
Η γενική σχέση η οποία ισχύει μεταξύ πιθανοτήτων μετάβασης είναι η εξής:

$$\mathbf{p_{ij}^{(m+n)} = \textstyle\sum_{k \in S} p_{ik}^{(m)} p_{kj}^{(n)}},$$

Η σχέση αυτή είναι γνωστή ως **εξίσωση Chapman-Kolmogorov.**

Άσκηση 5.1
Δίνεται η Μαρκοβιανή αλυσίδα $\{X_n, n \geq 0\}$ με χώρο καταστάσεων $S = \{0, 1\}$ και στοχαστικό πίνακα

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

(α) Σχεδιάστε το διάγραμμα καταστάσεων της διαδικασίας όπου θα παρουσιάζονται και οι αντίστοιχες πιθανότητες μετάβασης.
(β) Να υπολογιστούν οι πιθανότητες μετάβασης
(i) $P(X_1 = 1 \mid X_0 = 0)$, (ii) $P(X_2 = 0 \mid X_0 = 1)$, (iii) $P(X_3 = 0 \mid X_0 = 0)$.

Ερώτημα 2
Αν γνωρίζουμε την κατανομή της X_0, τότε ποια είναι η κατανομή πιθανότητας της X_n, n > 1;

Απάντηση στο Ερώτημα 2
Έστω $\{X_n, n \geq 0\}$ μία Μαρκοβιανή αλυσίδα, με πεπερασμένο χώρο καταστάσεων $S = \{1, 2, \ldots, N\}$ και $\pi_i = P(X_0 = i)$. Αξιοποιώντας τον πίνακα

$$\boldsymbol{\pi} = \begin{pmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \\ \vdots \\ \pi_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(X_0 = 1) \\ \mathbb{P}(X_0 = 2) \\ \vdots \\ \mathbb{P}(X_0 = N) \end{pmatrix}$$

που περιγράφει την κατανομή της X_0, μπορούμε να υπολογίσουμε την κατανομή πιθανότητας της X_1. Πράγματι, για κάθε j = 1, 2, …, N, είναι

$$\begin{aligned} P(X_1 = j) &= \sum_{i = 1, \ldots, N} P(X_1 = j, X_0 = i) \\ &= \sum_{i = 1, \ldots, N} P(X_1 = j \mid X_0 = i) \cdot P(X_0 = i) \\ &= \sum_{i = 1, \ldots, N} p_{ij} \cdot \pi_i \\ &= \sum_{i = 1, \ldots, N} \pi_i \cdot p_{ij} \\ &= (\pi^T P)_j, \end{aligned}$$

δηλαδή $\mathbf{X_1 \sim \pi^T P}$, όπου P ο στοχαστικός πίνακας της αλυσίδας.
Ανάλογα αποδεικνύεται ότι $\mathbf{X_2 \sim \pi^T P^2}$ και γενικότερα ότι $\mathbf{X_n \sim \pi^T P^n}$, n = 1, 2, … , N.

Άσκηση 5.2
Η οικογενειακή κατάσταση για ένα οποιοδήποτε έτος της ενήλικης ζωής προσεγγίζεται από την Μαρκοβιανή αλυσίδα $\{X_n, n \geq 0\}$, όπου οι τ.μ. λαμβάνουν τις τιμές 1 (Ελεύθερος), 2 (Συγκατοίκηση) και 3 (Έγγαμος/η). Ο πίνακας μετάβασης από έτος σε έτος είναι ο επόμενος:

$$P = \begin{pmatrix} 0.60 & 0.35 & 0.05 \\ 0.20 & 0.70 & 0.10 \\ 0.10 & 0.05 & 0.85 \end{pmatrix}$$

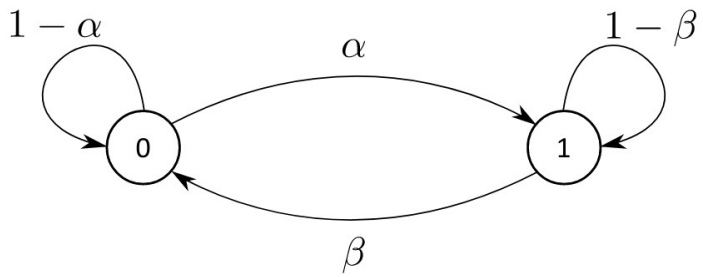
(α) Σχεδιάστε το διάγραμμα καταστάσεων της διαδικασίας όπου θα παρουσιάζονται και οι αντίστοιχες πιθανότητες μετάβασης.

(β) Υπολογίστε την πιθανότητα, ένας έγγαμος ενήλικος να πάρει διαζύγιο μία χρονιά και την επόμενη να ξαναπαντρευτεί.

(γ) Γνωρίζοντας ότι ένας ενήλικος είναι ελεύθερος, υπολογίστε την πιθανότητα να παραμείνει ελεύθερος για δύο ακόμα χρόνια.

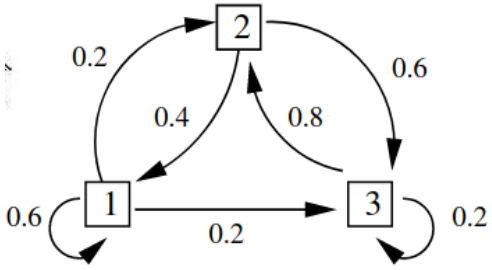
(δ) Αν στην ηλικία των 18 οι πιθανότητες των τριών ενδεχομένων είναι 1: 0,95, 2: 0,04, 3: 0,01, να βρεθεί η κατανομή πιθανοτήτων μετά από 1 έτος, στην ηλικία των 19.

Άσκηση 5.3
Θεωρούμε τη στοχαστική ανέλιξη $\{X_n, n \geq 0\}$ του σχήματος που περιγράφει ένα κωδικοποιημένο δυαδικό σήμα



(α) Είναι η $\{X_n, n \geq 0\}$ μία Μαρκοβιανή αλυσίδα;
(β) Αν γνωρίζουμε ότι το δυαδικό σήμα ξεκινάει με 0, τότε ποια είναι η πιθανότητα να πάρει την τιμή 1, στα 3 επόμενα βήματα;
(γ) Αν γνωρίζουμε ότι το δυαδικό σήμα ξεκινάει με 0 ή 1 με ίδια πιθανότητα, τότε ποια είναι η πιθανότητα να πάρει την τιμή 1 στα 3 επόμενα βήματα;
Υποδείξεις
(α) Προφανές
(β) Εφαρμόστε τον τύπο (1)
(γ) Νόμος ολικής πιθανότητας σε συνδυασμό με τον τύπο (1).

Άσκηση 5.4
Ένας ψύλλος βρίσκεται στο δίκτυο του σχήματος και πηδάει μεταξύ των θέσεων 1, 2, 3 σύμφωνα με τις πιθανότητες που αναφέρονται σε αυτό.



Έστω X_n, η θέση του (1, 2 ή 3) τη χρονική στιγμή n.
(α) Καταγράψτε τον στοχαστικό πίνακα που περιγράφει την Μαρκοβιανή αλυσίδα.
(β) Υπολογίστε την πιθανότητα $P(X_2 = 3 \mid X_0 = 1)$.
(γ) Υποθέτοντας πως ο ψύλλος εισάγεται με ίση πιθανότητα σε μία από τις θέσεις του δικτύου, υπολογίστε την κατανομή πιθανότητας της X_1.
(δ) Υποθέτοντας πως ο ψύλλος τοποθετείται στην θέση 1, υπολογίστε την κατανομή πιθανότητας της X_2.

Παράδειγμα
Έστω 0 ≤ α, β ≤ 1 και $\{X_n, n \geq 0\}$ μια Αλυσίδα Markov με καταστάσεις S = {0, 1} και πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης

$$\begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{pmatrix}$$

(α) Να αποδειχθεί ότι:

$$P^n = \begin{pmatrix} \frac{b}{a+b} & \frac{a}{a+b} \\ \frac{b}{a+b} & \frac{a}{a+b} \end{pmatrix} + (1-a-b)^n \begin{pmatrix} \frac{a}{a+b} & -\frac{a}{a+b} \\ -\frac{b}{a+b} & \frac{b}{a+b} \end{pmatrix}$$

(β) Βρείτε το $\lim_{n \to \infty} P^{(n)}$

(γ) Αν $\pi = (p \;\; 1\text{-}p)^T$, να βρεθεί η οριακή κατανομή της αλυσίδας.

Λύση
(α) Η απόδειξη μπορεί να γίνει με επαγωγή:

1ο βήμα: Επαληθεύουμε πως ο ισχυρισμός ισχύει για δείκτη n = 1.

$$\begin{aligned} P^1 &= \begin{bmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{a+b}\begin{bmatrix} b & a \\ b & a \end{bmatrix} + \frac{1-a-b}{a+b}\begin{bmatrix} a & -a \\ -b & b \end{bmatrix} \end{aligned}$$

2ο βήμα: Υποθέτουμε πως ο ισχυρισμός ισχύει για το δείκτη n ε N.

$$P^n = \begin{pmatrix} \frac{b}{a+b} & \frac{a}{a+b} \\ \frac{b}{a+b} & \frac{a}{a+b} \end{pmatrix} + (1-a-b)^n \begin{pmatrix} \frac{a}{a+b} & -\frac{a}{a+b} \\ -\frac{b}{a+b} & \frac{b}{a+b} \end{pmatrix}$$

3ο βήμα: Αποδεικνύουμε πως αν ισχύει για το δείκτη n τότε ισχύει και για το δείκτη n + 1.

$$\begin{aligned} P^{n+1} = P^n P &= \frac{1}{a+b}\left(\begin{bmatrix} b & a \\ b & a \end{bmatrix} + (1-a-b)^n \begin{bmatrix} a & -a \\ -b & b \end{bmatrix}\right) \cdot \begin{bmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{a+b}\begin{bmatrix} b & a \\ b & a \end{bmatrix} + \frac{(1-a-b)^{n+1}}{a+b}\begin{bmatrix} a & -a \\ -b & b \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

Σημείωση:
Εναλλακτικά, μπορεί να αποδειχθεί γράφοντας P = I – A, και $A^n = (a + b)^{n-1}A$, n = 1, 2, …
Προσοχή! Ο τελευταίος τύπος δεν ισχύει για n = 0.

(β) Για $0 \le \alpha, \beta \le 1$, είναι $0 \le \alpha + \beta \le 2$ ή $|1 - \alpha - \beta| \le 1$ και

$$\lim_{n\to\infty} P^n = \frac{1}{a+b}\begin{bmatrix} b & a \\ b & a \end{bmatrix}$$

(γ) $\lim_{n \to \infty}\pi^{(n)} = \lim_{n \to \infty}[\pi P^{(n)}] = \pi \lim_{n \to \infty}P^{(n)} = [\beta/(\alpha\ \ \beta)\ \ \alpha/(\alpha+\beta)]$.

Άσκηση 5.6

Έστω μια Αλυσίδα Markov με δύο καταστάσεις και πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης

$$P = \begin{bmatrix} p_{00} & p_{01} \\ p_{10} & p_{11} \end{bmatrix}$$

Επιπλέον, υποθέτουμε ότι $|p_{00} + p_{11} - 1| < 1$.

(α) Αποδείξτε ότι

$$P^{(n)} = \frac{1}{2 - p_{00} - p_{11}}\begin{bmatrix} 1 - p_{11} & 1 - p_{00} \\ 1 - p_{11} & 1 - p_{00} \end{bmatrix}$$

$$+\frac{(p_{00} + p_{11} - 1)^n}{2 - p_{00} - p_{11}}\begin{bmatrix} 1 - p_{00} & -(1 - p_{00}) \\ -(1 - p_{11}) & (1 - p_{11}) \end{bmatrix}$$

(β) Βρείτε το $\lim_{n \to \infty}P^{(n)}$

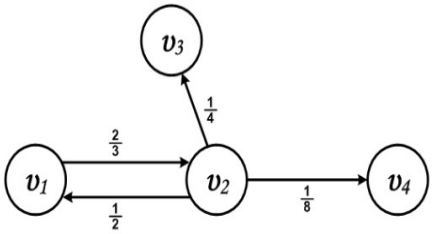
Σημείωση

Δεν φτάνουν όλες οι αλυσίδες Markov σε στάσιμη συμπεριφορά. Για παράδειγμα, η διωνυμική διεργασία S_n με $p > 0$, αυξάνει σταθερά έτσι ώστε, για σταθερό j, $p^{(n)} \to 0$ καθώς $n \to \infty$. Ωστόσο, αποδεικνύεται ότι κάθε αλυσίδα Markov με πεπερασμένο πλήθος καταστάσεων της οποίας ο πίνακας μετάβασης P δεν περιέχει μηδενικές πιθανότητες (δηλαδή $p_{ij} > 0$, για κάθε $i, j \in S$) έχει στάσιμη συμπεριφορά. Ειδικότερα, αρκεί η υπόθεση πως θα υπάρχει κάποιο $n \in N$, τέτοιο ώστε $p^{(n)}_{ij} > 0$, για κάθε $i, j \in S$. Οι αλυσίδες αυτού του τύπου ονομάζονται **αδιαχώριστες**.

Μία απόδειξη για τον παραπάνω ισχυρισμό μπορεί να βρεθεί εδώ:
https://math.uchicago.edu/~may/REU2017/REUPapers/Freedman.pdf (Θεώρημα 3.3 σελ. 6)

Άσκηση 5.7

Για τη διεργασία του σχήματος:



(α) Συμπληρώστε στο σχήμα τις πιθανότητες διατήρησης του συστήματος στην ίδια κατάσταση που λείπουν.

(β) Να βρείτε τον πίνακα μετάβασης P.

(γ) Αν το σύστημα βρίσκεται στην κατάσταση $υ_1$:

(γ1) να βρείτε την πιθανότητα να ακολουθήσει τη διαδρομή υ1 → υ2 → υ2 → υ1.

(γ2) να βρείτε την πιθανότητα μετά από δύο βήματα να βρίσκεται ξανά στην υ1.

(γ3) Να βρείτε τον αναμενόμενο πλήθος βημάτων έως ότου το σύστημα βρεθεί στην υ2 για πρώτη φορά.

(δ) Αν το σύστημα ξεκινήσει από την υ2, να βρείτε την πιθανότητα να βρεθεί κάποια στιγμή στην υ1.

Υπόδειξη για το (γ3): Αν X = πλήθος επαναλήψεων μέχρι την πρώτη επιτυχία και p = πιθανότητα επιτυχίας σε κάθε βήμα, τότε X ~ Geometric(p) και E(X) = 1/p.