Στοχαστικές Διεργασίες – Θέματα Εξετάσεων

Θέμα 1

Έστω $\{X_n, n \geq 0\}$ μια Αλυσίδα Markov με καταστάσεις $S = \{0, 1\}$ και πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης $P = \begin{bmatrix} 0{,}4 & 0{,}6 \\ 0{,}8 & 0{,}2 \end{bmatrix}$. Να βρεθεί η στάσιμη κατανομή (αν υπάρχει).

Βαθμολογία: 2μ

Θέμα 2

Μία Μαρκοβιανή Αλυσίδα έχει χώρο καταστάσεων $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Από τις καταστάσεις της αλυσίδας οι 1, 2, 3 είναι μεταβατικές και οι 4, 5 απορροφητικές. Γνωρίζουμε ότι η κανονική μορφή του πίνακα μετάβασης είναι η εξής:

$$P = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0{,}4 & 0 & 0{,}6 & 0 \\ 0{,}4 & 0 & 0{,}6 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}4 & 0 & 0 & 0{,}6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

α) Αν $P = \begin{bmatrix} Q & R \\ O & I \end{bmatrix}$ καταγράψτε τους πίνακες Q και R.

β) Με υπολογιστή βρήκαμε ότι $N = (I - Q)^{-1} = \begin{bmatrix} 1{,}3 & 0{,}7 & 0{,}4 \\ 0{,}7 & 1{,}7 & 1 \\ 0{,}3 & 1{,}7 & 1{,}4 \end{bmatrix}$ και $N \cdot R = \begin{bmatrix} 0{,}76 & 0{,}24 \\ 0{,}4 & 0{,}6 \\ 0{,}16 & 0{,}84 \end{bmatrix}$

Αν η αλυσίδα βρίσκεται στην κατάσταση 3, τότε (i) ποια είναι η πιθανότητα τελικής απορρόφησης στην κατάσταση 4 και (ii) ποιο είναι το αναμενόμενο πλήθος βημάτων μέχρι να συμβεί αυτό το γεγονός;

Βαθμολογία: (α) 0,3 (β) (i) 0.7μ, (ii) 1μ

Θέμα 3

Έστω $\{Z_0 = 1, Z_1, Z_2, \ldots\}$ μια διαδικασία διακλάδωσης. Το πλήθος απογόνων κάθε ατόμου, προσδιορίζεται από την τ.μ. Y για την οποία γνωρίζουμε ότι μπορεί να πάρει τις τιμές 0, 1 και 3 με αντίστοιχες πιθανότητες 1/6, 1/2 και 1/3. Να βρεθούν

(α) το αναμενόμενο πλήθος απογόνων, η διακύμανση και η τυπική απόκλιση του πλήθους στην $5^η$ γενιά.

(β) η πιθανότητα να εξαλειφθεί ο πληθυσμός την $3^η$ γενιά.

(γ) η πιθανότητα να μην εξαλειφθεί ποτέ ο πληθυσμός.

Βαθμολογία: (α) 1,2 (β) (i) 1μ, (ii) 0,8μ

Θέμα 4

Σε ένα ιατρείο οι αφίξεις των ασθενών είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους και συμβαίνουν με ρυθμό λ αφίξεις ανά ώρα. Επιπλέον, γνωρίζουμε ότι η πιθανότητα να μην αφιχθεί κάποιος ασθενής σε μία ώρα είναι $e^{-2} \approx 0{,}135$.

(α) Να δείξετε ότι $\lambda = 2$.

(β) Για $\lambda = 2$, να βρείτε την πιθανότητα η πρώτη άφιξη μετά τις 12:00 να καθυστερήσει περισσότερο από 20 λεπτά.

Ο ιατρός εξετάζει τους ασθενείς με ρυθμό 1 ασθενή κάθε 10 λεπτά.

(γ) Ποια είναι η πιθανότητα να μην υπάρχει κανένας ασθενής στο ιατρείο;

(δ) Ποιο είναι το αναμενόμενο πλήθος ασθενών που περιμένουν να εξεταστούν;

(ε) Ποια είναι η πιθανότητα να περιμένουν 2 ή παραπάνω ασθενείς στην ουρά για να εξεταστούν;

Βαθμολογία: (α) 0,6μ, (β) 0,6μ, (γ) 0,6μ (δ) 0,6μ (ε) 0,6μ.

Τυπολόγιο

Αν X ~ Poisson(λ) τότε $P(X = \kappa) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^{\kappa}}{\kappa!}, \ \kappa = 0, 1, 2, \ldots$

Αν X ~ Exp(λ) τότε $P(X \le x) = 1 - e^{-\lambda x}, \ x \ge 0.$

Αν X(t) = {ο αριθμός των πελατών στο σύστημα μίας ουράς M/M/1 τη στιγμή t}, και $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$,
τότε:

$P(X(t) = 0) = g_0 = 1 - \rho,$

$P(X(t) = n) = g_n = \rho^n g_0 = \rho^n (1 - \rho),$

$P(X(t) \ge n) = \rho^n$

$L_S = \rho / (1 - \rho) = \lambda / (\mu - \lambda),$

$L_Q = \rho L_S,$

$L_{QQ} = L_Q / \rho^2$

$L_S = L_Q + \lambda/\mu = L_Q + \rho,$

$W_S = L_S / \lambda = 1 / (\mu - \lambda),$

$W_Q = L_Q / \lambda = \rho L_S / \lambda = L_S / \mu$

P(Χρόνος παραμονής στο σύστημα > t) = e^{-t / W_S}

P(Χρόνος παραμονής στην ουρά > t) = e^{-t / W_Q}

Οι παραπάνω τύποι ισχύουν και έχουν νόημα μόνο στην περίπτωση της ευστάθειας.

Ενδεικτικές λύσεις των θεμάτων της εξέτασης

Θέμα 1

Είναι $\pi = \pi \cdot P$ ή $[\pi_0, \pi_1] = [0{,}4\ \pi_0 + 0{,}8\ \pi_1,\ 0{,}6\ \pi_0 + 0{,}2\ \pi_1]$. Επιπλέον, $\pi_0 + \pi_1 = 1$.

Λύνουμε το σύστημα και βρίσκουμε $[\pi_0, \pi_1] = [4/7, 3/7]$.

Θέμα 2

(α) Είναι $Q = \begin{bmatrix} 0 & 0{,}4 & 0 \\ 0{,}4 & 0 & 0{,}6 \\ 0 & 0{,}4 & 0 \end{bmatrix}$ και $R = \begin{bmatrix} 0{,}6 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0{,}6 \end{bmatrix}$.

(β) (i) Αν η αλυσίδα βρίσκεται στην κατάσταση 3, τότε η πιθανότητα τελικής απορρόφησης στην κατάσταση 4 είναι 0,16 = 16%.

(ii) Το αναμενόμενο πλήθος βημάτων μέχρι να συμβεί αυτό το γεγονός είναι 0,3 + 1,7 + 1,4 = 3,4.

Θέμα 3

(α) Υπολογίζουμε

$\mu = E(Y) = 0 \cdot 1/6 + 1 \cdot 1/2 + 3 \cdot 1/3 = 3/2$

$Var(Y) = E[(Y - \mu)^2] = (0 - 3/2)^2 \cdot 1/6 + (1 - 3/2)^2 \cdot 1/2 + (3 - 3/2)^2 \cdot 1/3 = 5/4$.

$E(Z_5) = \mu^5 = (3/2)^5 = 7{,}59$

$Var(Z_5) = \sigma^2 \cdot \mu^4 (1 - \mu^5) / (1 - \mu) = 5/4 \cdot (3/2)^4 \cdot (1 - (3/2)^5) / (1 - 3/2) = 83{,}45$

Τυπική απόκλιση: $[Var(Z_5)]^{1/2} = 2.400^{1/2} = 9{,}13$ άτομα.

(β) Είναι $G(s) = s^0 \cdot 1/6 + s^1 \cdot 1/2 + s^3 \cdot 1/3 = 1/6 \cdot (1 + 3s + 2s^3)$. Άρα,

$$\begin{aligned} P(Z_3 = 0, Z_2 > 0) &= P(Z_3 = 0) - P(Z_2 = 0) \\ &= G_3(0) - G_2(0) \\ &= G(G(G(0))) - G(G(0)) \\ &= 0{,}2977 - 0{,}2515 \\ &= 0{,}0462 \\ &= 4{,}62\%. \end{aligned}$$

(είναι $G(0) = 1/6$, $G(G(0)) = G(1/6) = 0{,}2515$ και $G(G(G(0))) = G(0{,}2515) = 0{,}2977$)

(γ) Είναι $\mu = 3/2 > 1$ άρα η πιθανότητα εξάλειψης είναι μικρότερη της μονάδας. Για να την υπολογίσουμε επακριβώς λύνουμε την εξίσωση $G(s) = s$ δηλαδή την εξίσωση

$1/6 \cdot (1 + 3s + 2s^3) = s$, η οποία έχει ρίζες 1, $(-1 - 3^{0.5})/2$, $(-1 + 3^{0.5})/2$. Από αυτές η μικρότερη θετική ρίζα είναι η ζητούμενη λύση, δηλαδή $\gamma = (-1 + 3^{0.5})/2 = 0{,}366 = 36{,}6\%$.

Άρα, η πιθανότητα να μην εξαλειφθεί ο πληθυσμός είναι 1 – 0,366 = 0,634 = 63,4%.

Θέμα 4
Η προσέλευση των ασθενών στο ιατρείο περιγράφεται από μία διεργασία Poisson με ρυθμό λ.
Αν N(t) = {πλήθος ασθενών στο διάστημα (0, t]}, τότε N(t) ~ Poisson(λt).

(α) N(1) ~ Poisson(λ) και $P(N(1) = 0) = e^{-\lambda}$ ή $e^{-2} = e^{-\lambda}$ ή λ = 2.

(β) Γνωρίζουμε ότι αν X_1: ο χρόνος που περνάει μέχρι να συμβεί το 1^o γεγονός, τότε X_1 ~ Exp(λ) = Exp(2). Είναι:

$$P(X_1 > 1/3) = e^{-2/3} = 0{,}513 = 51{,}3\%$$

Ο ιατρός φροντίζει τους ασθενείς με ρυθμό 1 ασθενή κάθε 10 λεπτά, άρα μ = 6 ασθενείς / ώρα.

Είναι ρ = λ / μ = 1 / 3.

(γ) $P(X(t) = 0) = g_0 = 1 - \rho = 2/3 = 0{,}667 = 66{,}7\%$.

(δ) $L_Q = \rho^2 / (1 - \rho) = 1/9 / (1 - 1/3) = 1 / 6 = 0{,}167$ ασθενείς.

(ε) $P(X(t) \geq 3) = \rho^3 = (1/3)^3 = 1 / 27 = 0{,}037 = 3{,}7\%$.