Στοχαστικές Διεργασίες

Τμήμα ΗΜ/ΜΥ Δ.Π.Θ.

Πρόχειρες Σημειώσεις

Μέρος Ι: Μαρκοβιανές Διεργασίες

Επαμεινώνδας Διαμαντόπουλος
epdiaman@ee.duth.gr

Έκδοση: 8 Νοεμβρίου 2024

Πίνακας περιεχομένων

1. Βασικοί Ορισμοί....3
2. Στοιχεία Πιθανοτήτων για δύο τυχαίες μεταβλητές....3
3. Ανεξάρτητες και στάσιμες προσαυξήσεις Στοχαστικής Διεργασίας....6
4. Μαρκοβιανές Διαδικασίες....7
    4.1. Ασκήσεις εξοικείωσης με τους πίνακες μετάβασης....9
    4.2. Εξίσωση Chapman-Kolmogorov....10
    4.3. Αναμενόμενο πλήθος βημάτων μέχρι την πρώτη επίσκεψη....13
5. Κλάσεις καταστάσεων μίας Μαρκοβιανής Αλυσίδας....14
    5.1. Η επικοινωνία ως σχέση ισοδυναμίας....14
    5.2. Εύρεση κλάσεων επικοινωνίας....16
    5.3. Αδιαχώριστες Μαρκοβιανές αλυσίδες....18
    5.4. Επαναληπτικές και παροδικές καταστάσεις....20
    5.5. Περιοδικές καταστάσεις....22
6. Κανονική μορφή πίνακα μετάβασης....25
7. Αλυσίδες απορρόφησης....27
    7.1. Ερμηνεία των στοιχείων του πίνακα N....30
    7.2. Ερμηνεία των στοιχείων του πίνακα N·R....31
    7.3. Συμπλήρωμα Θεωρίας....33
8. Στάσιμη συμπεριφορά Μαρκοβιανής Αλυσίδας....44
9. Όριο πίνακα μετάβασης (οριακή κατανομή)....47

Παράρτημα 1: (Ισχυρά) Στάσιμες στοχαστικές διεργασίες....50
Παράρτημα 2: (Ασθενώς) Στάσιμες στοχαστικές διεργασίες....52

1. Βασικοί Ορισμοί

Ορισμός
Ως **στοχαστική διεργασία (Stochastic Process) (ή διαδικασία ή ανέλιξη)** ορίζεται να είναι μια συλλογή τυχαίων μεταβλητών που ταξινομούνται με δείκτες μέσα από κάποιο μαθηματικό σύνολο T, υποσύνολο των πραγματικών αριθμών. Τη συμβολίζουμε με {X(t), t є T} ή {X_t, t є T}. Το σύνολο μέσα στο οποίο λαμβάνουν τιμές οι X_t, συνήθως συμβολίζεται με S (states).

- Αν T υποσύνολο του N, τότε η {X(n), n є T} ονομάζεται **στοχαστική διεργασία διακριτού χρόνου** (ή τυχαία ακολουθία).
- Αν T υποσύνολο του R, τότε η {X(t), t є T} ονομάζεται **στοχαστική διεργασία συνεχούς χρόνου**.
- Αν S υποσύνολο του N, τότε η {X(t), t є T} ονομάζεται **στοχαστική διεργασία διακριτών τιμών** ή απλά **διακριτή**.
- Αν S υποσύνολο του R, τότε η {X(t), t є T} ονομάζεται **στοχαστική διεργασία συνεχών τιμών** ή απλά **συνεχής**.
- Αν το σύνολο των τιμών που λαμβάνουν οι τ.μ. είναι διανύσματα αριθμών τότε η {X(t), t є T} ονομάζεται **διανυσματική στοχαστική διεργασία**.

Άσκηση
Θεωρείστε τις παρακάτω στοχαστικές διεργασίες {X_t, t є T}
- X_n: Η θέση του ψύλλου στο παράδειγμα του 1^{ου} μαθήματος.
- X_n: Το πλήθος των παιδιών μίας οικογένειας το n – οστό έτος ενός ζεύγους.
- X_n: Το βάρος ενός βρέφους τη n – οστή ημέρα της ζωής του.
- X_t: Το πλήθος των γκολ σε έναν αγώνα στη χρονική στιγμή t από την έναρξη του αγώνα.
- X_t: Η διαφορά δυναμικού ενός πυκνωτή τη χρονική στιγμή t.

Σχολιάστε τα παραπάνω παραδείγματα ως προς το είδος του συνόλου των δεικτών καθώς και το είδος των τιμών που οι ΤΜ λαμβάνουν.

2. Στοιχεία Πιθανοτήτων για δύο τυχαίες μεταβλητές

Ορισμός (κοινή συνάρτηση κατανομής)
Έστω δύο τυχαίες μεταβλητές X, Y, με κατανομές F_X, F_Y. Η κοινή συνάρτηση κατανομής (joint cumulative distribution function ή joint cdf) των X, Y είναι η συνάρτηση
$F_{X,Y}$: R x R → [0, 1] που ορίζεται ως εξής: **$F_{X,Y}(x, y) = P(X \le x, Y \le y)$.**
Ορισμός (κοινή συνάρτηση μάζας πιθανότητας)
Έστω δύο τυχαίες μεταβλητές X, Y, με συναρτήσεις μάζας πιθανότητας f_X, f_Y. Η κοινή συνάρτηση (μάζας) πιθανότητας (joint probability mass function ή joint pmf ή joint density) των X, Y είναι η συνάρτηση $f_{X,Y}$: R x R → [0, 1], που ορίζεται ως εξής:

- Αν οι X, Y είναι διακριτές, τότε

$$f_{X,Y}(x, y) = P(X = x, Y = y).$$

- Αν οι X, Y είναι συνεχείς, τότε

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{\partial^2 F_{X,Y}(x,y)}{\partial x \partial y}$$

Ιδιότητες κοινής συνάρτησης πιθανότητας
Η κ.σ.π. ικανοποιεί τις εξής ιδιότητες

1) $0 \le f_{X,Y}(x, y) \le 1$
2) $\Sigma_x \Sigma_y f_{X,Y}(x, y) = 1$ (διακριτές ΤΜ) ή $\int_R \int_R f_{X,Y}(x, y)\, dxdy = 1$ (συνεχείς ΤΜ).

Ορισμός
Δύο τυχαίες μεταβλητές Χ, Υ, λέγονται **ισόνομες** όταν $F_X = F_Y$, ή $P(X \le \kappa) = P(Y \le \kappa)$, κ є R.

Ορισμός
Δύο τ. μ. λέγονται **(στοχαστικά) ανεξάρτητες** αν τα ενδεχόμενα {X = x} και {Y = y} είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους για κάθε x, y є R. Αν οι δύο τυχαίες μεταβλητές Χ, Υ είναι στοχαστικά ανεξάρτητες τότε τα ενδεχόμενα {X = x} και {Y = y} είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους και ισχύει

$$f_{X,Y}(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$$

Άσκηση
Σχολιάστε τη μορφή της κοινής συνάρτησης κατανομής για 2 ανεξάρτητες ΤΜ.

Άσκηση εμπέδωσης
Έστω Χ και Υ δύο ανεξάρτητες U(0,1) τυχαίες μεταβλητές. Να βρεθεί η κοινή συνάρτηση πιθανότητας $F_{X,Y}$.

Άσκηση εμπέδωσης
Να βρεθεί η κοινή συνάρτηση πιθανότητας $F_{X,Y}$ για τις τυχαίες μεταβλητές του πίνακα.

X / Y	0	1	2	3
0	1/8	1/8	0	0
1	0	2/8	2/8	0
2	0	0	1/8	1/8

Ορισμός (Περιθώρια και δεσμευμένη συνάρτηση πιθανότητας)
Από την κοινή συνάρτηση μάζας πιθανότητας είναι δυνατόν να ανακτηθεί η **περιθώρια (marginal) συνάρτηση πιθανότητας** των δύο επιμέρους τυχαίων μεταβλητών.

- $f_X(x) = \Sigma_y f_{X,Y}(x, y)$, $f_Y(x) = \Sigma_x f_{X,Y}(x, y)$ (διακριτή περίπτωση)

- $f_X(x) = \int_R f_{X,Y}(x, y)\, dy$ $f_Y(x) = \int_R f_{X,Y}(x, y)\, dx$ (συνεχής περίπτωση)

Από την κοινή συνάρτηση μάζας πιθανότητας, είναι δυνατόν να οριστεί και η **δεσμευμένη συνάρτηση μάζας πιθανότητας** (ή πυκνότητας πιθανότητας) της Χ δοθέντος του Υ = y, ως εξής:

$$f_{X|Y}(x | y) = f_{X,Y}(x, y) / f_Y(y)$$

Παρατήρηση
Δύο τυχαίες μεταβλητές X, Y, μπορεί να είναι ισόνομες αλλά όχι ανεξάρτητες.

Παράδειγμα
Σε ένα σάκο υπάρχουν 2 μπάλες, μία με τον αριθμό 0 και μία με τον αριθμό 1. Εκτελούμε πείραμα με δύο επιλογές μπάλας και ορίζουμε να είναι
X: Ο αριθμός της μπάλας στην $1^η$ επιλογή και
Y: Ο αριθμός της μπάλας στη $2^η$ επιλογή.

Αν η δειγματοληψία γίνει με επανάθεση τότε {XY} = Ω = {00, 01, 10, 11} και υπολογίζουμε P(X = 0) = P(X = 1) = P(Y = 0) = P(Y = 1) = 2/4 = 0,5.
Στην περίπτωση αυτή οι X, Y είναι ισόνομες και ανεξάρτητες.

Αν ωστόσο η δειγματοληψία γίνει χωρίς επανάθεση, τότε {XY} = Ω = {01, 10} και υπολογίζουμε P(X = 0) = P(X = 1) = P(Y = 0) = P(Y = 1) = 1/2 = 0,5.
Στην περίπτωση αυτή οι X, Y είναι ισόνομες και εξαρτημένες.

Άσκηση (Ανεξάρτητες και Ισόνομες Τυχαίες Μεταβλητές)
Ρίχνουμε ένα ζάρι πολλές φορές. Ορίζουμε τις εξής μεταβλητές:
Μεταβλητή: X_n = {ο αριθμός που δείχνει το ζάρι στη n – οστή ρίψη}
Μεταβλητή: Z_n = {το άθροισμα των αριθμών έως και τη n – οστή ρίψη}
α) Πως εκφράζεται η Z_n συναρτήσει των X_n;
β) Είναι η {Z_n, n є N} μία στοχαστική διεργασία;
γ) Είναι οι μεταβλητές X_n, n є N, ανεξάρτητες και ισόνομες;
δ) Είναι οι μεταβλητές Z_n, n є N, ανεξάρτητες και ισόνομες;

Άσκηση εξοικείωσης με τη διαφορά Τυχαίων Μεταβλητών

Έστω οι ΤΜ X και Y, που αντιπροσωπεύουν τον αριθμό Κ και Γ που παίρνουμε όταν ρίχνουμε δύο νομίσματα. Ορίζουμε τη διαφορά των X, Y ως μια νέα ΤΜ Ζ, ως: Z = X – Y.
(α) Βρείτε την κατανομή των X, Y, Z.
Υπόδειξη: Κάντε έναν πίνακα.
(β) Είναι οι X, Y ισόνομες;
(γ) Είναι οι X, Y ανεξάρτητες;
(δ) Υπολογίστε τις αναμενόμενες τιμές και τις διακυμάνσεις των X, Y, Z.
(ε) Βρείτε την πιθανότητα να έρθουν περισσότερα Κ από Γ.
(στ) Βρείτε την μέση διαφορά Κ και Γ.

3. Ανεξάρτητες και στάσιμες προσαυξήσεις Στοχαστικής Διεργασίας

Ορισμός (Independent Increments)
Λέμε ότι μία στοχαστική ανέλιξη $\{X(t), t \in T\}$ έχει **ανεξάρτητες προσαυξήσεις** όταν για κάθε n και για κάθε $t_1, t_2, \ldots, t_n \in T$, τέτοια ώστε $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$, οι προσαυξήσεις

$$X(t_2) - X(t_1),\ X(t_3) - X(t_2),\ \ldots,\ X(t_n) - X(t_{n-1})$$

είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές.

Ορισμός (Stationary Increments)
Λέμε ότι μία στοχαστική ανέλιξη $\{X(t), t \in T\}$ έχει **στάσιμες προσαυξήσεις** όταν για κάθε $\kappa > 0$ και κάθε $s > 0$,

η τ.μ. $X_{\kappa+s} - X_\kappa$ είναι ισόνομη με την $X_s - X_0$

Δηλαδή μία στοχαστική ανέλιξη $\{X(t), t \in T\}$ έχει στάσιμες προσαυξήσεις όταν η προσαύξηση μεταξύ δύο στιγμών της διεργασίας εξαρτάται μόνο από τη διαφορά των χρονικών στιγμών s και όχι από το "που" κ.

Σημείωση
Η στασιμότητα των προσαυξήσεων είναι μία πολύ ισχυρή συνθήκη. Ειδικότερα, ισχύει $E(X_{\kappa+s} - X_\kappa) = E(X_s - X_0)$ και $Var(X_{\kappa+s} - X_\kappa) = Var(X_s - X_0)$

Άσκηση (Ανεξάρτητες και στάσιμες προσαυξήσεις)
Δίνεται η στοχαστική διεργασία (τυχαίος περίπατος) $\{W_n, n \in N\}$, όπου $W_n = X_1 + \ldots + X_n$, και $X_1, X_2, \ldots$ είναι ισόνομες και ανεξάρτητες τ.μ. Να δείξετε ότι η $\{W_n, n \in N\}$ έχει ανεξάρτητες και στάσιμες προσαυξήσεις.

Σημείωση
Εάν οι X, Y, Z είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές, τότε οι X + Y, Z είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές. Μία απόδειξη είναι διαθέσιμη εδώ: https://math.stackexchange.com/questions/1791404/if-x-y-z-are-independent-random-variables-then-x-y-z-are-independent-rando

Άσκηση (Ανεξάρτητες και μη στάσιμες προσαυξήσεις)
Δίνεται η Στοχαστική Διεργασία $\{W_n, n \in N\}$, όπου $W_n = X_1 + \ldots + X_n$, και $X_1, X_2, \ldots$ είναι ανεξάρτητες και μη ισόνομες τ.μ.
Να δείξετε ότι:
(α) η $\{W_n, n \in N\}$ έχει ανεξάρτητες προσαυξήσεις
(β) η $\{W_n, n \in N\}$ δεν έχει στάσιμες προσαυξήσεις
Υπόδειξη: $Var(W_n - W_{n-1}) = Var(X_n)$.

Άσκηση (Εξαρτημένες και στάσιμες προσαυξήσεις)
Έστω N_t = {πλήθος αφίξεων στο διάστημα (0, t]}, $t \geq 0$, μία διεργασία Poisson(λ) (η οποία είναι γνωστό ότι έχει στάσιμες και ανεξάρτητες προσαυξήσεις και πως $N_0 = 0$). Ορίζουμε τη διεργασία συνεχούς χρόνου $\{W_t, t \geq 0\}$ όπου $W_t = [t]N_1 + N_t$. Να δείξετε ότι η $\{W_t, t \geq 0\}$ έχει στάσιμες και μη ανεξάρτητες προσαυξήσεις.
Υπόδειξη: Δείξτε ότι (α) $W_{t+\delta} - W_t = W_\delta - W_0$, (β) $W_2 - W_1 \neq W_1 - W_0$

Άσκηση στις στάσιμες προσαυξήσεις
Έστω $\{X_n, n \in N\}$ μία στοχαστική διεργασία με στάσιμες προσαυξήσεις. Επιπλέον γνωρίζουμε ότι $X_0 = 0$. Να δείξετε ότι: $E(X_n) = n \cdot \mu_1$, όπου $\mu_1 = E(X_1)$.

4. Μαρκοβιανές Διαδικασίες

Ορισμός
Τα ενδεχόμενα Α και Β ονομάζονται **ανεξάρτητα δεδομένου του γεγονότος Γ**, όταν

$$P(B \mid A \cap \Gamma) = P(B \mid \Gamma)$$

Άσκηση (Α, Β ανεξάρτητα | Γ, τότε δεν είναι απαραίτητα ανεξάρτητα μεταξύ τους).
Έστω οι τυχαίες μεταβλητές $X_1, X_2, X_3 \in \{0, 1, 2, 3\}$ και $Z_1 = X_1$, $Z_2 = X_1 + X_2$, $Z_3 = X_1 + X_2 + X_3$. Θεωρούμε τα γεγονότα $A = \{X_1 = 2\}$, $B = \{Z_3 = 3\}$.
(α) Δείξτε ότι τα Α και Β δεν είναι ανεξάρτητα γεγονότα.
Υπόδειξη: Υπολογίστε τις $P(B \mid A)$, $P(B)$.

(β) Αν $\Gamma = \{Z_2 = 2\} = \{X_1 + X_2 = 2\}$, δείξτε ότι τα Α και Β ανεξάρτητα γεγονότα δεδομένου του γεγονότος Γ.

Ορισμός (Μαρκοβιανή Διαδικασία)
Λέμε ότι η στοχαστική διαδικασία $\{X_t,\ t \in T\}$, με χώρο καταστάσεων S, ικανοποιεί την **Μαρκοβιανή Ιδιότητα**, όταν για κάθε $t \in T$ και $s, u > 0$, οι τ.μ. X_{t+s} και X_{t-u} είναι ανεξάρτητες δεδομένου του γεγονότος $\{X_t = x\}$, $x \in S$. Στην περίπτωση αυτή, η διεργασία λέγεται **Μαρκοβιανή Διαδικασία**.

Με απλά λόγια: Αν γνωρίζουμε το παρόν $\{X_t = x_0\}$, η εκτίμηση της πιθανότητας ενός μελλοντικού γεγονότος $\{X_{t+s} = x_2\}$, $s > 0$, δεν επηρεάζεται από οποιαδήποτε τιμή x_1 είχε πάρει η διεργασία στο παρελθόν X_{t-u}, $u > 0$.

Ορισμός (Μαρκοβιανή Αλυσίδα)
Μαρκοβιανή Αλυσίδα ονομάζεται κάθε Μαρκοβιανή διαδικασία $\{X_n,\ n \in N\}$ ή $\{X(t),\ t \geq 0\}$, που λαμβάνει αποκλειστικά διακεκριμένες τιμές $S = \{x_0, x_1, x_2, \ldots\}$, $(card(S) \leq card(N))$.

Η Μαρκοβιανή ιδιότητα παίρνει μία πιο απλή μορφή για μία μαρκοβιανή αλυσίδα.

Μαρκοβιανή αλυσίδα διακριτού χρόνου $\{X_n, n = 1, 2, \ldots\}$
Για κάθε $x_1, \ldots, x_n, x_{n+1} \in S$, είναι

$$P(X_{n+1} = x_{n+1} \mid X_n = x_n, X_{n-1} = x_{n-1}, \ldots, X_1 = x_1) = P(X_{n+1} = x_{n+1} \mid X_n = x_n)$$

Μαρκοβιανή αλυσίδα συνεχούς χρόνου $\{X(t), t \geq 0\}$
Για κάθε $x_1, \ldots, x_n, x_{n+1} \in S$, και για κάθε χρονικές στιγμές $t_1, \ldots, t_n, t_{n+1} \geq 0$, είναι

$$P(X(t_{n+1}) = x_{n+1} \mid X(t_n) = x_n, X(t_{n-1}) = x_{n-1}, \ldots, X(t_1) = x_1) = P(X(t_{n+1}) = x_{n+1} \mid X(t_n) = x_n)$$

Αποδεικνύεται ότι:

Θεώρημα (Κριτήριο)
Κάθε διεργασία με ανεξάρτητες προσαυξήσεις είναι μία Μαρκοβιανή διεργασία.

Αυτός είναι και ένας τρόπος για να δειχθεί έμμεσα πως μία διεργασία είναι Μαρκοβιανή!

Το αντίστροφο δεν ισχύει, δηλαδή μία Μαρκοβιανή διεργασία δεν έχει απαραίτητα ανεξάρτητες προσαυξήσεις. Επιπλέον, δεν υπάρχει άμεση συσχέτιση με το χαρακτηριστικό των στάσιμων προσαυξήσεων.

Σημείωση Μία απόδειξη του κριτηρίου μπορεί να βρεθεί εδώ:
https://math.stackexchange.com/questions/35899/relation-between-independent-increments-and-markov-property

Ένα παράδειγμα Μαρκοβιανής χωρίς ανεξάρτητες προσαυξήσεις μπορεί να βρεθεί εδώ:
https://math.stackexchange.com/questions/256454/when-is-a-markov-process-independent-increment

Παράδειγμα Μαρκοβιανής αλυσίδας

Ρίχνουμε ένα ζάρι πολλές φορές. Ορίζουμε Z_n = {το άθροισμα των αριθμών έως και τη n – οστή ρίψη}. Δείξτε ότι η $\{Z_n, n \in N\}$ είναι Μαρκοβιανή Αλυσίδα.

Παράδειγμα Μη Μαρκοβιανής αλυσίδας

Έστω X_n, n = 1, 2, … μία ακολουθία ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών Bernoulli με κατανομή B(1, ½) (δηλαδή $P(X_n = 0) = P(X_n = 1) = ½$, για κάθε n = 1, 2, …). Αν

$$Y_n = (X_n + X_{n-1}) / 2,$$

ο κινούμενος μέσος όρος της $\{X_n, n = 1, 2, …\}$ τότε να δείξετε ότι η $\{Y_n, n = 2, 3, …\}$, *δεν* είναι μία διεργασία Markov.

Υπόδειξη: Υπολογίστε τις $P(Y_n = 1 \mid Y_{n-1} = ½)$, $P(Y_n = 1 \mid Y_{n-1} = ½, Y_{n-2} = 0)$.

Ιδιότητα Μαρκοβιανής αλυσίδας

(α) Δείξτε ότι $P(A_3 A_2 \mid A_1) = P(A_3 \mid A_2 A_1) \cdot P(A_2 \mid A_1)$.

(β) Αποδείξτε αναδρομικά, πως για οποιαδήποτε ενδεχόμενα $A_1, A_2, …, A_n$

$$P(A_n A_{n-1} … A_1) = P(A_1) \cdot P(A_2 \mid A_1) \cdot P(A_3 \mid A_2 A_1) \cdot … \cdot P(A_n \mid A_{n-1}… A_2 A_1)$$

(γ) Δείξτε ότι αν $\{X_n, n = 1, 2, …\}$ Μαρκοβιανή αλυσίδα, τότε

$$\mathbf{P(X_n = i_n, …, X_2 = i_2, X_1 = i_1 \mid X_0 = i_0) = P(X_n = i_n \mid X_{n-1} = i_{n-1}) \cdot … \cdot P(X_1 = i_1 \mid X_0 = i_0)} \quad \mathbf{(1)}$$

Ορισμός (πιθανότητες μετάβασης)

Αν $\{X_n, n = 1, 2, …\}$ είναι Μαρκοβιανή αλυσίδα διακριτού χρόνου (ΜΑΔΧ) που λαμβάνει ακέραιες τιμές, S το διακεκριμένο σύνολο τιμών και i, j Є S, τότε συμβολίζουμε

$$\mathbf{p^{(n)}_{ij} = P(X_{m+n} = j \mid X_m = i)}$$

Οι πιθανότητες $p^{(n)}_{ij}$ ονομάζονται **πιθανότητες μετάβασης βήματος n** (n-step transition probabilities).

Άσκηση

Ξαναγράψτε τον τύπο (1) σε όρους πιθανοτήτων μετάβασης p_{ij}.

Ορισμός (Ομογενής ΜΑΔΧ)

Η ΜΑΔΧ $\{X_n, n = 1, 2, …\}$ ονομάζεται ομογενής όταν για κάθε m = 1, 2, …, είναι

$$\mathbf{p^{(n)}_{ij} = P(X_{m+n} = j \mid X_m = i) = P(X_n = j \mid X_0 = i).}$$

Παράδειγμα

Αν $X_i \in \{0, 1\}$, X_i ~ Bernoulli(p), i ≥ 0, ανεξάρτητες μεταξύ τους και $W_n = X_1 + X_2 + … + X_n$, τότε

(α) Να δείξετε ότι η $\{W_n, n \geq 0\}$ είναι μία Μαρκοβιανή αλυσίδα.

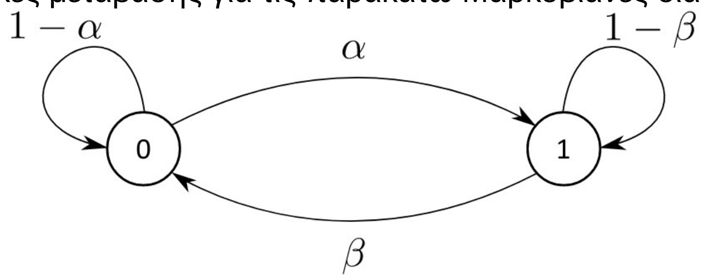
(β) Να καταγράψετε τον πίνακα μετάβασης P.

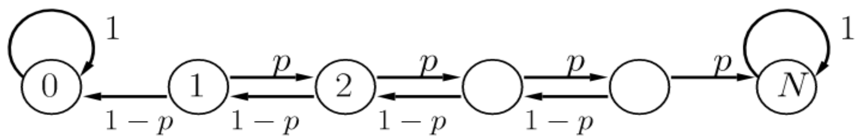
Λύση
Καθώς, σε κάθε βήμα η W_n αυξάνει κατά 1 με πιθανότητα p και μένει στάσιμη με πιθανότητα 1 – p, συνάγουμε ότι $p_{0,0} = 1 - p$, $p_{0,1} = p$, $p_{1,1} = 1 - p$, $p_{1,2} = p$ και γενικότερα $p_{i,i} = 1 - p$, $p_{i,i+1} = p$, $i \geq 0$, ενώ όλοι οι άλλοι συνδυασμοί δεικτών έχουν πιθανότητα 0. Συνεπώς, ο στοχαστικός πίνακας που της αντιστοιχεί είναι ο

$$P = \begin{bmatrix} 1-p & p & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1-p & p & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1-p & p & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

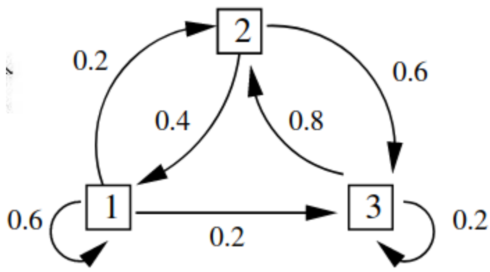
4.1. Ασκήσεις εξοικείωσης με τους πίνακες μετάβασης

Άσκηση 1
Να γραφούν οι πίνακες μετάβασης για τις παρακάτω Μαρκοβιανές διαδικασίες





Άσκηση 2
Για την παρακάτω Μαρκοβιανή Διαδικασία



(α) Συμπληρώστε στο σχήμα τις πιθανότητες που λείπουν.

(β) Να γραφεί ο πίνακας μετάβασης.

Άσκηση 3
Να γίνει το διάγραμμα καταστάσεων της Μαρκοβιανής Διεργασίας με πίνακα μετάβασης

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/4 & 0 & 1/4 \\ 1/2 & 1/4 & 0 & 1/4 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/4 & 0 & 1/4 \\ 1/2 & 1/4 & 0 & 1/4 & 0 \end{bmatrix}$$

4.2. Εξίσωση Chapman-Kolmogorov

Δύο σημαντικά ερωτήματα που αφορούν τις ομογενείς Μαρκοβιανές αλυσίδες διακριτού χρόνου είναι τα εξής:

Ερώτημα 1
Αν γνωρίζουμε τις πιθανότητες μετάβασης μεταξύ δύο διαδοχικών θέσεων της διεργασίας ($p_{ij} = P(X_1 = j \mid X_0 = i)$) τότε ποιες είναι οι πιθανότητες μετάβασης βήματος 2 ($p^{(2)}_{ij} = P(X_2 = j \mid X_0 = i)$);

Απάντηση στο Ερώτημα 1

Θεώρημα
Αν $P^{(2)} = [p_{ij}^{(2)}]$, όπου $p^{(2)}_{ij} = P(X_2 = j \mid X_0 = i)$, $i, j \in S$, είναι ο πίνακας μετάβασης 2 – βημάτων, τότε $\mathbf{P^{(2)} = P^2}$.

Απόδειξη: Για κάθε m Є N:

$$\begin{aligned} p_{ij}^{(2)} &= P(X_2 = j \mid X_0 = i) = \sum_{\kappa \in S} P(X_2 = j, X_1 = k \mid X_0 = i) \\ &= \sum_{\kappa \in S} P(X_2 = j \mid X_1 = k, X_0 = i) \cdot P(X_1 = k \mid X_0 = i) \\ &= \sum_{\kappa \in S} P(X_2 = j \mid X_1 = k) \cdot P(X_1 = k \mid X_0 = i) \\ &= \sum_{\kappa \in S} p_{kj} \cdot p_{ik} \\ &= \sum_{\kappa \in S} p_{ik} \cdot p_{kj} \\ &= (P^2)_{ij} \text{ (το στοιχείο (i, j) του } P^2\text{)}, \end{aligned}$$

Όμοια αποδεικνύεται ότι $P^{(n)} = P^n$, ($P^0 = I$).

Εξίσωση Chapman-Kolmogorov
Η γενική σχέση η οποία ισχύει μεταξύ πιθανοτήτων μετάβασης είναι η εξής:

$$p_{ij}^{(m+n)} = \sum_{\kappa \in S} p_{ik}^{(m)} p_{kj}^{(n)},$$

Η σχέση αυτή είναι γνωστή ως **εξίσωση Chapman-Kolmogorov.**

Άσκηση
Δίνεται η Μαρκοβιανή αλυσίδα $\{X_n, n \geq 0\}$ με χώρο καταστάσεων $S = \{0, 1\}$ και στοχαστικό πίνακα

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

(α) Σχεδιάστε το διάγραμμα καταστάσεων της διαδικασίας όπου θα παρουσιάζονται και οι αντίστοιχες πιθανότητες μετάβασης.

(β) Να υπολογιστούν οι πιθανότητες μετάβασης
(i) $P(X_1 = 1 \mid X_0 = 0)$, (ii) $P(X_2 = 0 \mid X_0 = 1)$, (iii) $P(X_3 = 0 \mid X_0 = 0)$.

Ερώτημα 2
Αν γνωρίζουμε την κατανομή της X_0, τότε ποια είναι η κατανομή πιθανότητας της X_n, $n > 1$;

Απάντηση στο Ερώτημα 2
Έστω $\{X_n, n \geq 0\}$ μία Μαρκοβιανή αλυσίδα, με πεπερασμένο χώρο καταστάσεων $S = \{1, 2, \ldots, N\}$ και $\pi_i = P(X_0 = i)$. Αξιοποιώντας τον πίνακα

$$\pi = \begin{bmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \\ \vdots \\ \pi_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P(X_0 = 1) \\ P(X_0 = 2) \\ \vdots \\ P(X_0 = N) \end{bmatrix}$$

που περιγράφει την κατανομή της X_0, μπορούμε να υπολογίσουμε την κατανομή πιθανότητας της X_1. Πράγματι, για κάθε $j = 1, 2, \ldots, N$, είναι

$$\begin{aligned} P(X_1 = j) &= \sum_{i = 1, \ldots, N} P(X_1 = j, X_0 = i) \\ &= \sum_{i = 1, \ldots, N} P(X_1 = j \mid X_0 = i) \cdot P(X_0 = i) \\ &= \sum_{i = 1, \ldots, N} p_{ij} \cdot \pi_i \\ &= \sum_{i = 1, \ldots, N} \pi_i \cdot p_{ij} \\ &= (\pi^T P)_j, \end{aligned}$$

δηλαδή $\mathbf{X_1 \sim \pi^T P}$, όπου P ο στοχαστικός πίνακας της αλυσίδας.
Ανάλογα αποδεικνύεται ότι $\mathbf{X_2 \sim \pi^T P^2}$ και γενικότερα ότι $\mathbf{X_n \sim \pi^T P^n}$, $n = 1, 2, \ldots, N$.

Άσκηση
Η οικογενειακή κατάσταση για ένα οποιοδήποτε έτος της ενήλικης ζωής προσεγγίζεται από την Μαρκοβιανή αλυσίδα $\{X_n, n \geq 0\}$, όπου οι τ.μ. λαμβάνουν τις τιμές 1 (Ελεύθερος), 2 (Συγκατοίκηση) και 3 (Έγγαμος/η). Ο πίνακας μετάβασης από έτος σε έτος είναι ο επόμενος:

$$P = \begin{bmatrix} 0.60 & 0.35 & 0.05 \\ 0.20 & 0.70 & 0.10 \\ 0.10 & 0.05 & 0.85 \end{bmatrix}$$

(α) Σχεδιάστε το διάγραμμα καταστάσεων της διαδικασίας όπου θα παρουσιάζονται και οι αντίστοιχες πιθανότητες μετάβασης.

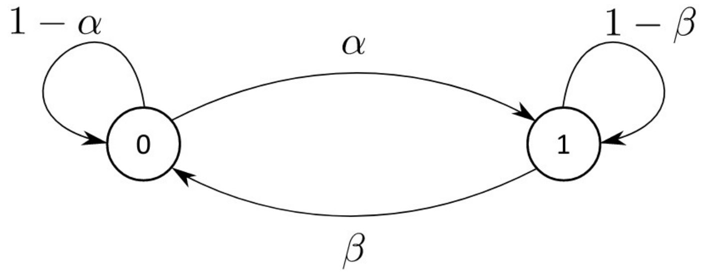
(β) Υπολογίστε την πιθανότητα, ένας έγγαμος ενήλικος να πάρει διαζύγιο μία χρονιά και την επόμενη να ξαναπαντρευτεί.

(γ) Γνωρίζοντας ότι ένας ενήλικος είναι ελεύθερος, υπολογίστε την πιθανότητα να παραμείνει ελεύθερος για δύο ακόμα χρόνια.

(δ) Αν στην ηλικία των 18 οι πιθανότητες των τριών ενδεχομένων είναι 1: 0,95, 2: 0,04, 3: 0,01, να βρεθεί η κατανομή πιθανοτήτων μετά από 1 έτος, στην ηλικία των 19.

Άσκηση

Θεωρούμε τη στοχαστική ανέλιξη $\{X_n, n \geq 0\}$ του σχήματος που περιγράφει ένα κωδικοποιημένο δυαδικό σήμα



(α) Είναι η $\{X_n, n \geq 0\}$ μία Μαρκοβιανή αλυσίδα;

(β) Αν γνωρίζουμε ότι το δυαδικό σήμα ξεκινάει με 0, τότε ποια είναι η πιθανότητα να πάρει την τιμή 1, στα 3 επόμενα βήματα;

(γ) Αν γνωρίζουμε ότι το δυαδικό σήμα ξεκινάει με 0 ή 1 με ίδια πιθανότητα, τότε ποια είναι η πιθανότητα να πάρει την τιμή 1 στα 3 επόμενα βήματα;

Υποδείξεις

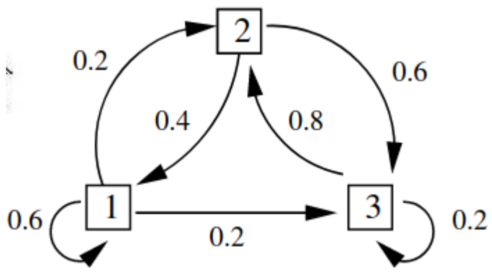
(α) Προφανές

(β) Εφαρμόστε τον τύπο (1)

(γ) Νόμος ολικής πιθανότητας σε συνδυασμό με τον τύπο (1).

Άσκηση

Ένας ψύλλος βρίσκεται στο δίκτυο του σχήματος και πηδάει μεταξύ των θέσεων 1, 2, 3 σύμφωνα με τις πιθανότητες που αναφέρονται σε αυτό.



Έστω X_n, η θέση του (1, 2 ή 3) τη χρονική στιγμή n.

(α) Συμπληρώστε στο σχήμα τις πιθανότητες μετάβασης που λείπουν.

(β) Καταγράψτε τον στοχαστικό πίνακα που περιγράφει την Μαρκοβιανή αλυσίδα.

(γ) Υπολογίστε την πιθανότητα $P(X_2 = 3 \mid X_0 = 1)$.

(δ) Υποθέτοντας πως ο ψύλλος εισάγεται με ίση πιθανότητα σε μία από τις θέσεις του δικτύου, υπολογίστε την κατανομή πιθανότητας της X_1.

(ε) Υποθέτοντας πως ο ψύλλος τοποθετείται στην θέση 1, υπολογίστε την κατανομή πιθανότητας της X_2.

4.3. Αναμενόμενο πλήθος βημάτων μέχρι την πρώτη επίσκεψη

Έστω ότι το σύστημα βρίσκεται στην κατάσταση i. Αν T_i είναι ο χρόνος (πλήθος βημάτων) μέχρι την πρώτη επίσκεψη στη i, τότε

$$f_{ii}^{(n)} = P(X_n = i, X_{n-1} \neq i, X_{n-2} \neq i, \dots, X_1 \neq i \mid X_0 = i) = P(T_i = n \mid X_0 = i)$$

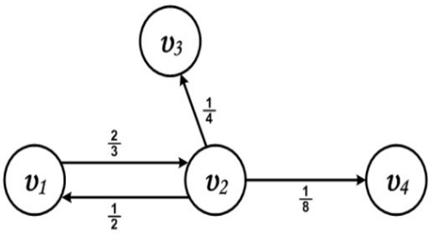
και ο αναμενόμενος χρόνος μέχρι την πρώτη επίσκεψη είναι:

$$\mathbf{E(T_i \mid X_0 = i) = \Sigma_{n\geq 1} n \cdot P(T_i = n \mid X_0 = i) = \Sigma_{n\geq 1} n \cdot f_{ii}^{(n)}.}$$

Επιπλέον, $\mathbf{f_{ii} = P(T_i < +\infty \mid X_0 = i)}$ και $\mathbf{1 - f_{ii} = P(T_i = +\infty \mid X_0 = i).}$

Άσκηση

Για τη διεργασία του σχήματος:



(α) Συμπληρώστε στο σχήμα τις πιθανότητες διατήρησης του συστήματος στην ίδια κατάσταση που λείπουν.
(β) Να βρείτε τον πίνακα μετάβασης P.
(γ) Αν το σύστημα βρίσκεται στην κατάσταση $υ_1$:

($γ_1$) να βρείτε την πιθανότητα να ακολουθήσει τη διαδρομή $υ_1 \to υ_2 \to υ_2 \to υ_1$.
($γ_2$) να βρείτε την πιθανότητα μετά από δύο βήματα να βρίσκεται ξανά στην $υ_1$.
($γ_3$) Να βρείτε τον αναμενόμενο πλήθος βημάτων έως ότου το σύστημα βρεθεί στην $υ_2$ για πρώτη φορά.

(δ) Αν το σύστημα ξεκινήσει από την $υ_2$, να βρείτε την πιθανότητα να βρεθεί κάποια στιγμή στην $υ_1$.
(ε) Γνωρίζουμε πως αρχικά, το σύστημα βρίσκεται στις θέσεις $υ_1$, $υ_2$, $υ_3$, $υ_4$ με πιθανότητα π = (1/4, 1/2, 1/8, 1/8). Να βρείτε την κατανομή πιθανότητας της επόμενης θέσης του συστήματος.

Υπόδειξη για το ($γ_3$): Αν X = πλήθος επαναλήψεων μέχρι την πρώτη επιτυχία και p = πιθανότητα επιτυχίας σε κάθε βήμα, τότε X ~ Geometric(p) και E(X) = 1/p.

5. Κλάσεις καταστάσεων μίας Μαρκοβιανής Αλυσίδας

5.1. Η επικοινωνία ως σχέση ισοδυναμίας

Μία κατάσταση i καλείται **προσιτή (accessible)** από την κατάσταση j εάν για κάποιο ακέραιο $n \geq 0$ ισχύει $p^{(n)}_{ji} > 0$.

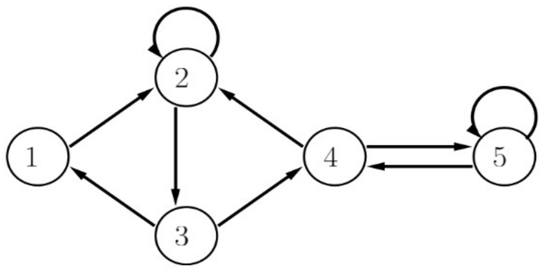
Κάθε κατάσταση είναι προσιτή από τον εαυτό της καθώς $p^{(0)}_{ii} = 1$, $i \in S$.

Δύο καταστάσεις που είναι προσιτές μεταξύ τους λέμε ότι **επικοινωνούν (communicate)**. Δηλαδή, οι καταστάσεις i και j επικοινωνούν αν υπάρχουν $n, m \geq 0$ τέτοια ώστε

$$p^{(n)}_{ij} > 0 \text{ και } p^{(m)}_{ji} > 0.$$

Αν οι i, j επικοινωνούν, γράφουμε $\mathbf{i \leftrightarrow j}$. Φανερά, αν $\mathbf{i \leftrightarrow j}$ και $\mathbf{j \leftrightarrow k}$ τότε $\mathbf{i \leftrightarrow k}$. Κάθε κατάσταση επικοινωνεί με τον εαυτό της καθώς $p^{(0)}_{ii} = 1$, $i \in S$.

Παράδειγμα 1
Όλες οι καταστάσεις της αλυσίδας του σχήματος επικοινωνούν μεταξύ τους.



Έστω i, j, k τρεις καταστάσεις μίας Μαρκοβιανής αλυσίδας.
Τότε, για τη σχέση της επικοινωνίας ($\leftrightarrow$) ισχύει:

- $i \leftrightarrow i$ (ανακλαστική)
- $i \leftrightarrow j \Longleftrightarrow j \leftrightarrow i$ (συμμετρική)
- $i \leftrightarrow j$ και $j \leftrightarrow k \Longleftrightarrow i \leftrightarrow k$ (μεταβατική)

Συμπεραίνουμε ότι:

Η σχέση επικοινωνίας ($\leftrightarrow$) είναι μία σχέση ισοδυναμίας.

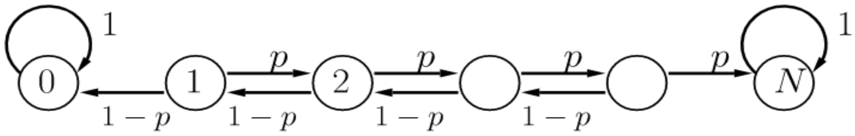
Καθώς κάθε σχέση ισοδυναμίας προσδιορίζει μία διαμέριση ενός συνόλου, προκύπτει πως το σύνολο καταστάσεων S μπορεί να διαχωριστεί σε υποσύνολα $\{C_i, i = 1, ..,N\}$ που αποτελούνται από ισοδύναμα στοιχεία ως προς τη σχέση της επικοινωνίας ($\leftrightarrow$). Η διαμέριση του S σε κλάσεις ισοδυναμίας ονομάζεται σύνολο πηλίκο και συμβολίζεται $S/\leftrightarrow$.

Σημείωση: Μία απόδειξη για το γεγονός πως κάθε σχέση ισοδυναμίας σε ένα σύνολο προσδιορίζει μία διαμέριση στο σύνολο μπορεί να βρεθεί εδώ:
https://math.libretexts.org/Courses/Monroe_Community_College/MTH_220_Discrete_Math/6%3A_Relations/6.3%3A_Equivalence_Relations_and_Partitions (Theorem 6.3.3)

Ορισμός
Μία κατάσταση i ε S ονομάζεται **απορροφητική (absorbing)** όταν το σύστημα δεν μπορεί να αλλάξει κατάσταση όταν βρεθεί εκεί ($p_{ii} = 1$).

Φανερά, για κάθε κατάσταση i που δεν είναι κατάσταση απορρόφησης υπάρχει τουλάχιστον μία κατάσταση j τέτοια ώστε i → j.

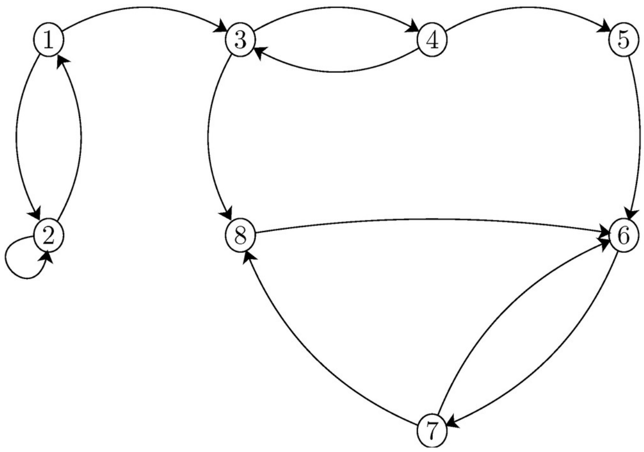
Παράδειγμα
Οι καταστάσεις 0, N είναι απορροφητικές. Ειδικότερα, οι 0, N, είναι προσιτές από τις {1, 2, …, N – 1} αλλά δεν επικοινωνούν με αυτές. Οι καταστάσεις {1, 2, …, N – 1} επικοινωνούν μεταξύ τους.



Άρα, η ανάλυση του S σε κλάσεις ως προς τη σχέση της επικοινωνίας είναι:

S = {0} U {1, 2, …, N-1} U {N},

Άσκηση
Να βρεθούν οι κλάσεις ισοδυναμίας της παρακάτω Μαρκοβιανής αλυσίδας



Παράδειγμα
Αν $\{X_n, n \geq 0\}$ Μαρκοβιανή αλυσίδα με χώρο καταστάσεων S = {0, 1} και πίνακα μετάβασης

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Τότε η κατάσταση 0 οδηγεί ντετερμινιστικά στην 1 και η 1 είναι κατάσταση απορρόφησης.
Οι μοναδικές κλάσεις ισοδυναμίας είναι οι {0} και {1}.
Δηλαδή:
Το σύνολο καταστάσεων S = {0, 1} είναι κλειστό αλλά όχι κλάση ισοδυναμίας. Το σύνολο {0} είναι κλάση ισοδυναμίας αλλά όχι κλειστό.
Η κλάση {0} είναι μεταβατική.
Η κλάση {1} είναι απορροφητική.
Συνοψίζοντας, η ανάλυση του S σε κλάσεις ως προς τη σχέση της επικοινωνίας είναι:

S = {0} U {1}.

Παράδειγμα
Δίνεται η αλυσίδα με πίνακα μετάβασης

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

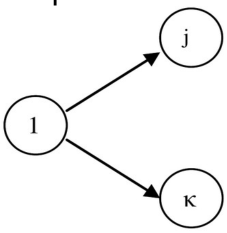
Παρατηρούμε ότι:

- $1 \rightarrow 2$
- $2 \rightarrow 3$
- $3 \rightarrow 1$ και $3 \rightarrow 4$
- $4 \rightarrow 5$
- Η 5 είναι απορροφητική κατάσταση.

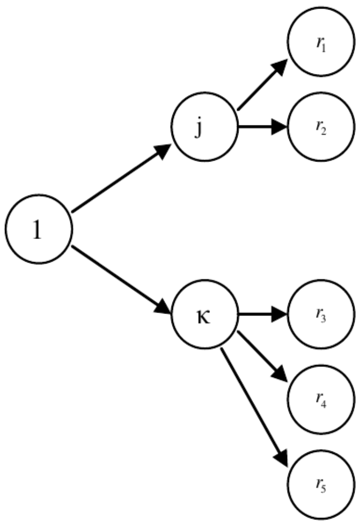
5.2. Εύρεση κλάσεων επικοινωνίας

Η εύρεση των κλάσεων επικοινωνίας, μπορεί να γίνει με την παρακάτω διαδικασία.

Ξεκινώντας από την κατάσταση 1 σημειώνουμε σε ένα διάγραμμα ροής όλες τις καταστάσεις που είναι προσιτές από αυτήν.



Συνεχίζουμε το διάγραμμα ροής για μία από τις καταστάσεις του τελευταίου βήματος. Η διαδικασία συνεχίζεται μέχρις ότου εμφανιστούν όλες οι καταστάσεις. Εάν υπάρχουν καταστάσεις που δεν έχουν εμφανιστεί στο διάγραμμα ροής, ξεκινάμε με κάποια από αυτές ένα καινούριο διάγραμμα μέχρι να εξαντληθούν όλες.



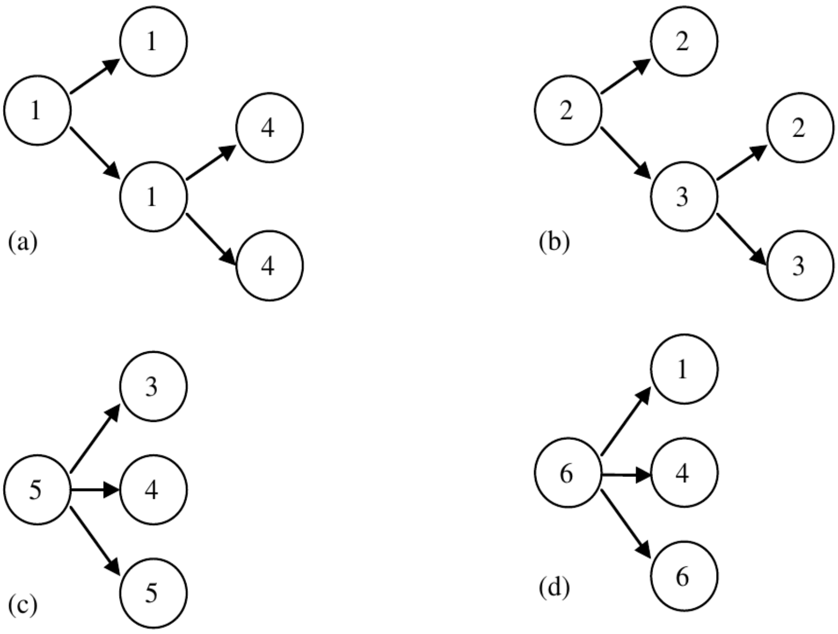
Παράδειγμα

Δίνεται η Μαρκοβιανή αλυσίδα $\{X_n, n \geq 0\}$ με χώρο καταστάσεων $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ και πίνακα μετάβασης:

$$P = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 & 0 & 0.9 & 0 & 0 \\ 0 & 0.6 & 0.4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.7 & 0.3 & 0 & 0 & 0 \\ 0.8 & 0 & 0 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 & 0.4 & 0.4 & 0 \\ 0.3 & 0 & 0 & 0.4 & 0 & 0.3 \end{bmatrix}$$

Να βρεθούν οι κλάσεις επικοινωνίας της $\{X_n, n \geq 0\}$.

Λύση



- Από το τμήμα (a) του διαγράμματος ροής των καταστάσεων της Μαρκοβιανής αλυσίδας προκύπτει, ότι το σύνολο {1, 4} αποτελεί μία κλάση επικοινωνίας ($1 \leftrightarrow 4$).

- Από το τμήμα (b) προκύπτει ότι οι καταστάσεις {2, 3} αποτελούν μία κλάση επικοινωνίας ($2 \leftrightarrow 3$).

- Από το (c) έχουμε ότι η {5} αποτελεί μόνη της μία κλάση επικοινωνίας (η 3 είναι προσβάσιμη από την 5 αλλά η 5 δεν είναι προσβάσιμη από την 3).

- Από το (d) έχουμε ότι η {6} αποτελεί μόνη της μία κλάση επικοινωνίας ($6 \rightarrow 1$ αλλά το αντίστροφο δεν ισχύει).

Άρα, η ανάλυση του S σε κλάσεις καταστάσεων που επικοινωνούν μεταξύ τους είναι η εξής:

$$\mathbf{S = \{1, 4\} \cup \{2, 3\} \cup \{5\} \cup \{6\}}$$

Άσκηση

Για τη Μαρκοβιανή Αλυσίδα με πίνακα μετάβασης P να διαχωριστούν οι καταστάσεις σε κλάσεις ισοδυναμίας ως προς τη σχέση της επικοινωνίας.

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Άσκηση 3

Για τη Μαρκοβιανή αλυσίδα με πίνακα μετάβασης P:

(α) Να γίνει το διάγραμμα καταστάσεων.
(β) Να διαχωριστεί ο χώρος καταστάσεων σε κλάσεις ισοδυναμίας ως προς τη σχέση της επικοινωνίας.

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 \end{bmatrix}$$

5.3. Αδιαχώριστες Μαρκοβιανές αλυσίδες

Ορισμός

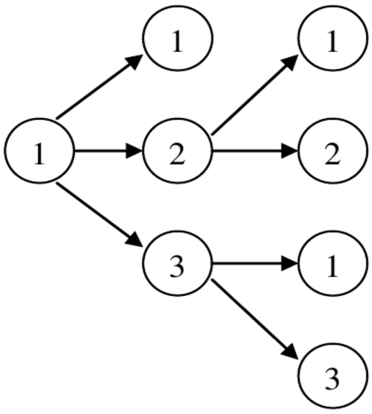
Μια Μαρκοβιανή αλυσίδα καλείται **αδιαχώριστη (indecomposable ή irreducible)** ή **μη διαχωρίσιμη** αν όλες οι καταστάσεις της επικοινωνούν η μία από την άλλη.

Φανερά, μία αδιαχώριστη Μαρκοβιανή αλυσίδα δεν μπορεί να περιέχει απορροφητικές καταστάσεις.

Παράδειγμα

Να δείξετε ότι η Μαρκοβιανή αλυσίδα $\{X_n, n \geq 0\}$ με πίνακα μετάβασης P είναι αδιαχώριστη, όπου $P = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.2 & 0.5 \\ 0.1 & 0.9 & 0 \\ 0.2 & 0 & 0.8 \end{bmatrix}$

Το διάγραμμα ροής των καταστάσεων είναι:



Καθώς οι καταστάσεις {1, 2, 3} αποτελούν μία κλάση επικοινωνίας, συμπεραίνουμε ότι η Μαρκοβιανή αλυσίδα είναι αδιαχώριστη.

Άσκηση

Να δείξτε ότι οι Μαρκοβιανές αλυσίδες με πίνακες μετάβασης

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0.9 & 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 & 0.8 \\ 0 & 0 & 0.7 & 0.3 \end{bmatrix}, \quad P_2 = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.1 & 0.4 & 0.4 \\ 0.5 & 0.1 & 0.1 & 0.3 \\ 0.2 & 0.4 & 0.2 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

δεν είναι αδιαχώριστες

Άσκηση

Να δείξετε ότι η Μαρκοβιανή αλυσίδα $\{X_n, n \geq 0\}$ με πίνακα μετάβασης P_3 είναι αδιαχώριστη, όπου

$$P_3 = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0 & 0.8 & 0 & 0.2 \\ 0.7 & 0 & 0.1 & 0 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0.9 & 0 \\ 0.9 & 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0 \end{pmatrix}$$

Άσκηση

Να δείξετε ότι η Μαρκοβιανή αλυσίδα $\{X_n, n \geq 0\}$, S = {1, 2, 3, 4, 5, 6}, με πίνακα μετάβασης P δεν είναι αδιαχώριστη, όπου

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{3}{4} & 0 \end{pmatrix}$$

5.4. Επαναληπτικές και παροδικές καταστάσεις

Ορίζουμε $f_{ii}^{(n)} = P(X_n = i, X_{n-1} \neq i, X_{n-2} \neq i, \ldots, X_1 \neq i \mid X_0 = i)$ και

$$f_{ii} = P(\text{υπάρχει } n \in N \text{ ώστε } X_n = i \mid X_0 = i) = P(\cup_{n\geq 1}\{X_n = i\} \mid X_0 = i) = \Sigma_{n\geq 1} f_{ii}^{(n)}$$

Ορισμός
Η κατάσταση i є S λέγεται **επαναληπτική (recurrent)** όταν **f_{ii} = 1,** δηλαδή όταν η αλυσίδα, αν βρεθεί σε αυτήν, επιστρέφει κάποια στιγμή στο μέλλον.

Η κατάσταση i є S λέγεται **μεταβατική ή παροδική (transient)** όταν **f_{ii} < 1.**

Αποδεικνύεται ότι:

Θεώρημα
- Αν η κατάσταση i є S είναι **επαναληπτική** και $i \leftrightarrow j$, τότε και η κατάσταση j είναι **επαναληπτική**.
- Αν η κατάσταση i є S είναι **παροδική** και $i \leftrightarrow j$,, τότε και η κατάσταση j είναι **παροδική**.

Το τελευταίο θεώρημα υποδεικνύει ότι **οι έννοιες της επαναληπτικότητας και της περιοδικότητας είναι ουσιαστικά ιδιότητες των κλάσεων ισοδυναμίας** ως προς τη σχέση της επικοινωνίας.

Σημείωση: Μία απόδειξη για το θεώρημα είναι διαθέσιμη εδώ:
https://www.uni-ulm.de/fileadmin/website_uni_ulm/mawi.inst.110/lehre/ws13/Stochastik_II/Skript_2B.pdf
(Theorem 2.7.6)

Ορισμός
Μία κλάση ισοδύναμων καταστάσεων ως προς τη σχέση της επικοινωνίας λέγεται **επαναληπτική** όταν περιέχει τουλάχιστον μία επαναληπτική κατάσταση.

Ορισμός
Μία *αδιαχώριστη* Μαρκοβιανή αλυσίδα ονομάζεται **επαναληπτική** όταν περιέχει τουλάχιστον μία επαναληπτική κατάσταση.

Μία *αδιαχώριστη* Μαρκοβιανή αλυσίδα ονομάζεται **παροδική** όταν όλες οι καταστάσεις της είναι παροδικές.

Παράδειγμα
Αν $\{X_n, n \geq 0\}$ Μαρκοβιανή αλυσίδα με χώρο καταστάσεων S = {1, 2, 3, 4, 5} και πίνακα μετάβασης

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/4 & 0 & 1/4 \\ 1/2 & 1/4 & 0 & 1/4 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/4 & 0 & 1/4 \\ 1/2 & 1/4 & 0 & 1/4 & 0 \end{bmatrix}$$

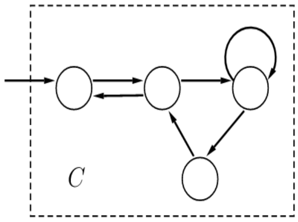
Οι καταστάσεις 2, 3, 4, 5 επικοινωνούν μεταξύ τους και είναι μεταβατικές αφού η απορροφητική κατάσταση 1 είναι προσιτή από αυτές. Το σύνολο {2, 3, 4, 5} είναι αδιαχώριστο, αλλά όχι κλειστό.

Αποδεικνύεται ότι:

Θεώρημα
Η κατάσταση i ϵ S είναι **επαναληπτική** αν και μόνο αν $\Sigma_{n \geq 1} p_{ii}^{(n)} = +\infty$.
Η κατάσταση i ϵ S είναι **παροδική** αν και μόνο αν $\Sigma_{n \geq 1} p_{ii}^{(n)} < +\infty$.

Σημείωση: Μία απόδειξη για το θεώρημα είναι διαθέσιμη εδώ: https://www.uni-ulm.de/fileadmin/website_uni_ulm/mawi.inst.110/lehre/ws13/Stochastik_II/Skript_2B.pdf (Theorem 2.7.5) ή εδώ: https://www.sjsu.edu/faculty/guangliang.chen/Math263/lec3classification.pdf (σελ. 16).

Ορισμός
Μία κλάση καταστάσεων ονομάζεται **κλειστή (closed)** όταν το σύστημα δεν μπορεί να απομακρυνθεί από αυτήν σε περίπτωση που βρεθεί μέσα της.



Θεώρημα
Κάθε επαναληπτική κλάση είναι κλειστή.

Πράγματι, αν το σύστημα βρεθεί σε μία κατάσταση μίας επαναληπτικής κλάσης ισοδυναμίας ως προς τη σχέση της επικοινωνίας, τότε οποιαδήποτε μετακίνησή του σε άλλη κατάσταση θα είναι εξ ορισμού σε κατάσταση που θα επικοινωνεί με την πρώτη, δηλαδή πάλι σε κατάσταση της κλάσης. Συνεπώς, δεν θα μπορέσει ποτέ να βγει από αυτήν.

Θεώρημα
Κάθε πεπερασμένη κλειστή κλάση ισοδύναμων καταστάσεων είναι επαναληπτική.

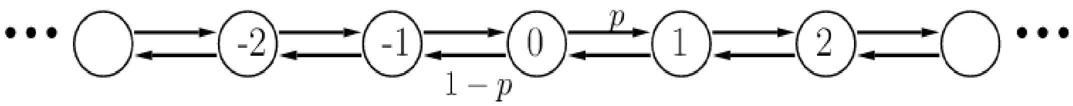
Σημείωση: Μία απόδειξη είναι διαθέσιμη εδώ:
https://www.uni-ulm.de/fileadmin/website_uni_ulm/mawi.inst.110/lehre/ws13/Stochastik_II/Skript_2B.pdf (Theorem 2.7.10)

Συμπεραίνουμε ότι σε μία πεπερασμένη Μαρκοβιανή αλυσίδα, ισχύει ότι:
- **Μία κλάση ισοδυναμίας είναι επαναληπτική αν και μόνον αν είναι κλειστή.**

- **Μία κλάση ισοδυναμίας είναι παροδική αν και μόνον αν δεν είναι κλειστή.**

Σημείωση: Μία απόδειξη είναι διαθέσιμη εδώ:
https://www.uni-ulm.de/fileadmin/website_uni_ulm/mawi.inst.110/lehre/ws13/Stochastik_II/Skript_2B.pdf
(Theorem 2.7.9 και Theorem 2.7.10.)

Άσκηση
Δίνεται η Μαρκοβιανή αλυσίδα



με $p_{i,i+1} = p$ και $p_{i,i-1} = 1 - p$. Όλες οι καταστάσεις επικοινωνούν μεταξύ τους άρα όλες τους είναι είτε επαναληπτικές είτε παροδικές. Βρείτε τι από τα δύο ισχύει συναρτήσει της πιθανότητας p.
Υπόδειξη: Αρκεί να υπολογίσετε το $\Sigma_{n\geq 0} p_{00}^{(n)}$ και να βρείτε αν είναι πεπερασμένο ή άπειρο.

5.5. Περιοδικές καταστάσεις

Ορισμός
Περίοδος π(i) μιας κατάστασης i είναι ο μέγιστος κοινός διαιρέτης (ΜΚΔ) όλων των $n \geq 1$, για τους οποίους $p_{ii}^{(n)} > 0$.

Δηλαδή, η κατάσταση i έχει περίοδο d εάν οι παρακάτω δύο συνθήκες ισχύουν
(i) $p_{ii}^{(n)} = 0$ για κάθε n εκτός εάν n = md για κάποιο θετικό ακέραιο m.
(ii) d είναι ο μέγιστος ακέραιος με την ιδιότητα (i).

- Αν για την κατάσταση i είναι π(i) > 1, τότε η κατάσταση i λέγεται **περιοδική**.

- Αν για την κατάσταση i είναι π(i) = 1, τότε η κατάσταση i λέγεται **απεριοδική**.

Ισχύει το εξής:

Θεώρημα
Εάν $i \leftrightarrow j$ τότε και π(i) = π(j).

Μία απόδειξη είναι διαθέσιμη εδώ: https://math.stackexchange.com/questions/112057/show-that-two-states-in-the-same-communicating-class-of-a-markov-chain-must-have

Ορισμός
- Μία **κλάση** ισοδύναμων καταστάσεων λέγεται **απεριοδική**, αν όλα τα στοιχεία της είναι απεριοδικά.
- Μία **Μαρκοβιανή αλυσίδα** λέγεται **απεριοδική**, αν όλα τα στοιχεία της είναι απεριοδικά.
- Μία **Μαρκοβιανή αλυσίδα** λέγεται **περιοδική με περίοδο d**, αν όλα τα στοιχεία της είναι περιοδικά με περίοδο d.

Για να βρούμε αν μία αδιαχώριστη αλυσίδα είναι απεριοδική, αρκεί να βρούμε $p_{ii}^{(n)} > 0$ και $p_{ii}^{(m)} > 0$, με n, m πρώτους μεταξύ τους (ΜΚΔ(m, n) = 1).

Παράδειγμα

Έστω η αλυσίδα με S = {1, 2, 3, 4} και $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Παρατηρούμε ότι, ξεκινώντας από οποιανδήποτε κατάσταση, για να επιστρέψουμε στην ίδια, πρέπει να περάσουμε από όλες τις υπόλοιπες καταστάσεις σε έναν κύκλο, κάνοντας ακριβώς 4 βήματα για να επιστρέψουμε στην κατάσταση 1.

Επομένως, π(1) = π(2) = π(3) = π(4) = 4.

Συμπέρασμα: Η αλυσίδα είναι περιοδική με περίοδο 4.

Παράδειγμα

Έστω η αλυσίδα με S = {1, 2, 3, 4, 5} και $P = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Παρατηρούμε ότι:

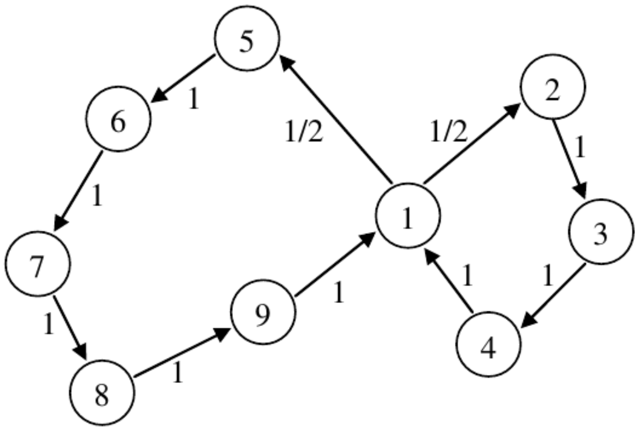
- Ξεκινώντας από τις καταστάσεις 1 ή 2 ή 3, επιστρέφουμε στην ίδια ύστερα από ακριβώς 2 βήματα, άρα π(1) = π(2) = π(3) = 2.

- Ξεκινώντας από την κατάσταση 4, υπάρχει η δυνατότητα να επιστρέψουμε στην ίδια
  - σε 1 βήμα
  - σε 2 βήματα (μέσω της 5).

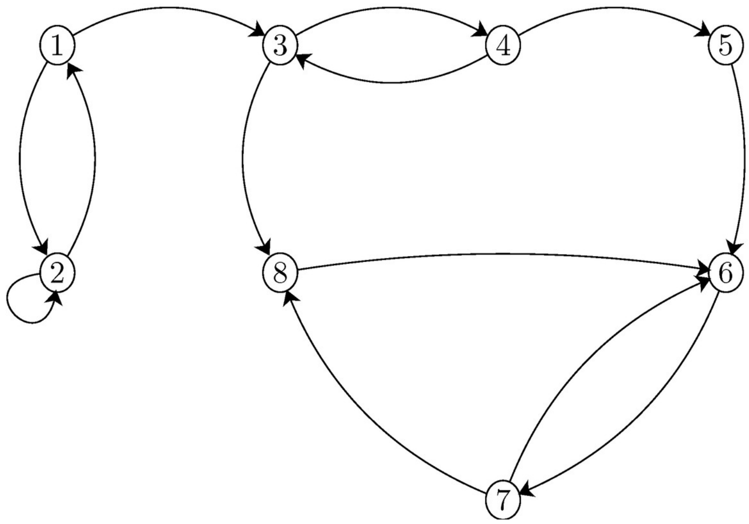
  Άρα π(4) = ΜΚΔ(1, 2) = 1..

- Ξεκινώντας από την κατάσταση 5, επιστρέφουμε στην ίδια ύστερα από ακριβώς 2 βήματα, άρα π(5) = 2.

Άσκηση
Να βρεθεί η περίοδος των καταστάσεων της παρακάτω αλυσίδας



Άσκηση
Στην αλυσίδα του σχήματος, βρείτε αν οι κλάσεις {1, 2}, {3, 4}, {6, 7, 8} είναι περιοδικές ή απεριοδικές.



> **Ορισμός**
> Μία Μαρκοβιανή αλυσίδα που είναι **αδιαχώριστη**, **επαναληπτική** και **απεριοδική** ονομάζεται **εργοδική**.

Άσκηση

Να δείξετε ότι η αλυσίδα με πίνακα μετάβασης $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ είναι εργοδική.

6. Κανονική μορφή πίνακα μετάβασης

Παρατηρούμε ότι ένα στοιχείο p_{ij} του πίνακα μετάβασης P μπορεί να αντιστοιχεί σε μόνο ένα από τα παρακάτω γεγονότα:

(α) Μετάβαση μεταξύ δύο καταστάσεων της ίδιας κλάσης επικοινωνίας.

(β) Μετάβαση μεταξύ δύο διαφορετικών κλάσεων επικοινωνίας.

Ορισμός
Λέμε ότι ο πίνακας μετάβασης βρίσκεται σε **κανονική μορφή** όταν οι γραμμές και οι στήλες του έχουν τοποθετηθεί με τρόπο ώστε να τηρούνται οι εξής κανόνες:

(α) Εμφανίζονται πρώτα οι κλάσεις των μεταβατικών καταστάσεων.

(β) Εμφανίζονται μετά οι κλάσεις των απορροφητικών καταστάσεων.

Παράδειγμα
Στην περίπτωση του πίνακα μετάβασης P, οι μεταβατικές κλάσεις επικοινωνίας είναι οι {1, 4} και {2, 3} και οι απορροφητικές καταστάσεις είναι οι {5} και η {6}. Μεταξύ των {5} και {6} καμία δεν είναι προσιτή από την άλλη κατά συνέπεια η σειρά τους δεν παίζει κανένα ρόλο. Συμπεραίνουμε ότι η κανονική μορφή του πίνακα P είναι η εξής:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0.1 & 0 & 0 & 0.9 & 0 & 0 \\ 0 & 0.6 & 0.4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.7 & 0.3 & 0 & 0 & 0 \\ 0.8 & 0 & 0 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 & 0.4 & 0.4 & 0 \\ 0.3 & 0 & 0 & 0.4 & 0 & 0.3 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.9 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.8 & 0.2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.6 & 0.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.7 & 0.3 & 0 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0 & 0.2 & 0.4 & 0 \\ 0.3 & 0.4 & 0 & 0 & 0 & 0.3 \end{pmatrix}$$

Έστω μία Μαρκοβιανή αλυσίδα που έχει k παροδικές κλάσεις καταστάσεων και s επαναληπτικές. Τότε είναι φανερό ότι η γενική μορφή της κανονικής μορφής του πίνακα μετάβασης P της Μαρκοβιανής αλυσίδας θα είναι

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{P_1} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{P_2} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{P_\kappa} & \mathbf{0} \\ \mathbf{R_1} & \mathbf{R_2} & \cdots & \mathbf{R_\kappa} & \mathbf{Q} \end{pmatrix} \qquad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \mathbf{Q}_1 & & & \\ & \mathbf{Q}_2 & & \mathbf{0} \\ \mathbf{T} & & \ddots & \\ & & & \mathbf{Q}_s \end{pmatrix}$$

όπου $P_1, P_2, \ldots, P_k$ είναι στοχαστικοί πίνακες οι οποίοι αντιστοιχούν στις μεταβάσεις μεταξύ των στοιχείων των k παροδικών κλάσεων επικοινωνίας, οι $Q_1, Q_2, \ldots, Q_s$ αντιστοιχούν στις παροδικές καταστάσεις και οι $R_1, R_2, \ldots, R_k$ αντιστοιχούν στις μεταβάσεις από τις παροδικές στις απορροφητικές κλάσεις καταστάσεων.

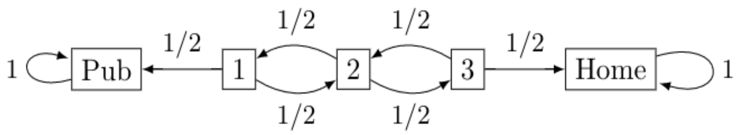
Η σημαντικότητα της κανονικής μορφής οφείλεται στην ευκολία με την οποία μπορεί να υπολογιστεί η δύναμη του πίνακα P, καθώς ισχύει:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{P_1} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{P_2} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{P_\kappa} & \mathbf{0} \\ \mathbf{R_1} & \mathbf{R_2} & \dots & \mathbf{R_\kappa} & \mathbf{Q} \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{P^n} = \begin{pmatrix} \mathbf{P_1^n} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{P_2^n} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{P_\kappa} & \mathbf{0} \\ \mathbf{R_1^{(n)}} & \mathbf{R_2^{(n)}} & \dots & \mathbf{R_\kappa^{(n)}} & \mathbf{Q^n} \end{pmatrix}$$

Οι πίνακες $R_i^{(n)}$ είναι πολύπλοκοι και εκφράζουν τις μεταβάσεις από τις παροδικές στην i - κλάση απορροφητικών καταστάσεων. Αν ωστόσο ο P δεν έχει παροδικές καταστάσεις, τότε η μελέτη της ασυμπτωτικής του συμπεριφοράς ανάγεται στην εύρεση του ορίου των P_i^n, δηλαδή στη μελέτη μίας Μαρκοβιανής αλυσίδας της οποίας όλες οι καταστάσεις της αποτελούν μία κλάση ισοδυναμίας.

Άσκηση 1

Να γραφεί στην κανονική μορφή ο πίνακας μετάβασης της αλυσίδας



Άσκηση 2

Να γραφεί στην κανονική μορφή ο πίνακας μετάβασης

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/4 & 0 & 1/4 \\ 1/2 & 1/4 & 0 & 1/4 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/4 & 0 & 1/4 \\ 1/2 & 1/4 & 0 & 1/4 & 0 \end{bmatrix}$$

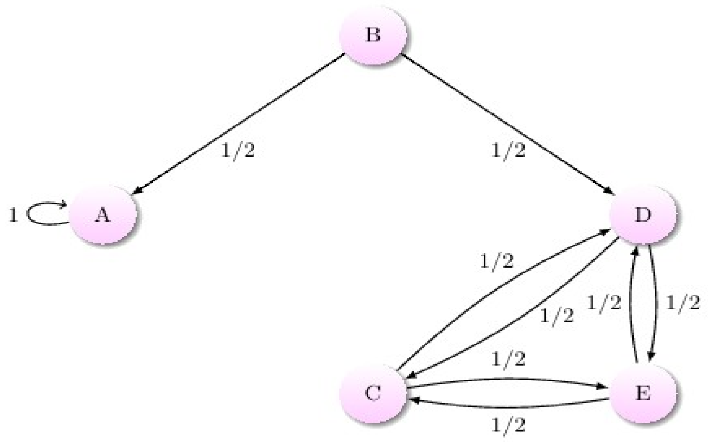
7. Αλυσίδες απορρόφησης

Υπενθυμίζεται ότι μία κατάσταση ονομάζεται **κατάσταση απορρόφησης (absorbing state)** όταν η Μαρκοβιανή αλυσίδα, αν βρεθεί σε αυτήν, δεν μπορεί να αλλάξει την κατάστασή της σε επόμενο βήμα.

Η κατάσταση i είναι κατάσταση απορρόφησης αν $p_{ii} = 1$ (και $p_{ij} = 0$, $i \neq j$).

Ορισμός
Στην περίπτωση όπου το σύνολο των καταστάσεων οδηγούν σε καταστάσεις απορρόφησης σε πεπερασμένο πλήθος βημάτων, τότε η αλυσίδα ονομάζεται **αλυσίδα απορρόφησης (absorbing Markov chain)**.

Σε μία αλυσίδα απορρόφησης, κάθε κατάσταση είναι είτε κατάσταση απορρόφησης (absorbing state) είτε **κατάσταση μετάβασης (transient state)**.

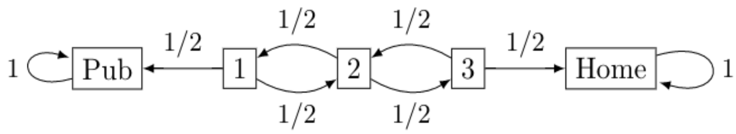


Στο σχήμα περιγράφονται οι πιθανές καταστάσεις μίας Μαρκοβιανής διεργασίες.

- Η κατάσταση Α είναι απορροφητική καθώς αν βρεθεί στην κατάσταση αυτή η διεργασία παραμένει για πάντα.

- Οι καταστάσεις B, C, D, E είναι μεταβατικές καθώς επιτρέπουν την μετακίνηση σε άλλη κατάσταση με θετική πιθανότητα.

Παράδειγμα
Στο σχήμα περιγράφεται η κίνηση ενός μεθυσμένου μεταξύ της Pub και του σπιτιού του (θέσεις 4 και 5 στον πίνακα μετάβασης) οι οποίες είναι απορροφητικές καταστάσεις καθώς αν βρεθεί στις δύο αυτές θέσεις, δεν μπορεί να φύγει.



$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Άσκηση
Ποιοι από τους παρακάτω πίνακες μετάβασης περιγράφουν αλυσίδες απορρόφησης;

$$A = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.7 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0.2 & 0.3 & 0.5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.3 & 0.4 & 0.2 \\ 0 & 0.2 & 0.1 & 0.7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \Delta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0 & 0.3 & 0.7 \\ 0 & 0 & 0 & 0.6 & 0.4 \end{bmatrix}$$

Σε κάθε αλυσίδα απορρόφησης υπάρχει θετική πιθανότητα πρόσβασης από κάθε μεταβατική κατάσταση προς κάποια κατάσταση απορρόφησης. Συνεπώς, ανεξάρτητα από την αρχική κατάσταση, κάθε αλυσίδα απορρόφησης στο τέλος *με βεβαιότητα* καταλήγει σε μία κατάσταση απορρόφησης.

Αναδεικνύονται ορισμένα ενδιαφέροντα ερωτήματα:

Ερώτημα 1: Πόσες φορές αναμένεται να βρεθεί η αλυσίδα σε κάποια μεταβατική κατάσταση πριν φτάσει σε κατάσταση απορρόφησης;

Ερώτημα 2: Με ποια πιθανότητα θα βρεθεί σε κάθε μία από τις θέσεις απορρόφησης;

Έστω ότι η αλυσίδα απορρόφησης περιέχει r καταστάσεις απορρόφησης και s καταστάσεις μετάβασης. Καθώς για κάθε κατάσταση απορρόφησης i είναι $p_{ii} = 1$ και $p_{ij} = 0$, $i \neq j$ συνάγουμε ότι ο πίνακας μετάβασης P μίας αλυσίδας απορρόφησης μπορεί να γραφεί (ύστερα από κατάλληλη αναδιάταξη των γραμμών και των στηλών του) ως:

$$P = \begin{bmatrix} Q & R \\ 0 & I \end{bmatrix} \text{ ή } P = \begin{bmatrix} I & 0 \\ R & Q \end{bmatrix}$$

όπου **Q** είναι ένας *τετραγωνικός* πίνακας s x s, **R** είναι ένας μη μηδενικός πίνακας s x r, **0** είναι ένας r x s μηδενικός πίνακας και **I** είναι ο r x r μοναδιαίος πίνακας.

Ο **Q** περιέχει τις πιθανότητες μετάβασης του συστήματος μεταξύ των s μεταβατικών καταστάσεων ενώ ο **R** περιέχει τις πιθανότητες μετάβασης του συστήματος από τις s μεταβατικές προς τις r απορροφητικές καταστάσεις.

Παράδειγμα

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow P = \begin{pmatrix} Q & R \\ \mathbf{0} & I_r \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Παρατήρηση
Η αναδιάταξη των γραμμών και των στηλών του πίνακα μετάβασης P είναι εξίσου αποτελεσματική σε οποιαδήποτε από τις μορφές

$$\mathrm{P} = \begin{bmatrix} \mathrm{Q} & \mathrm{R} \\ 0 & \mathrm{I} \end{bmatrix} \text{ ή } \mathrm{P} = \begin{bmatrix} \mathrm{I} & 0 \\ \mathrm{R} & \mathrm{Q} \end{bmatrix}$$

Έστω ότι ο πίνακας μετάβασης μίας αλυσίδας απορρόφησης είναι ο $\mathrm{P} = \begin{bmatrix} \mathrm{I} & 0 \\ \mathrm{R} & \mathrm{Q} \end{bmatrix}$

Τότε:

$$P^2 = \begin{bmatrix} I & 0 \\ R & Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ R & Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ R+QR & Q^2 \end{bmatrix}$$

και γενικότερα:

$$P^3 = \begin{bmatrix} I & 0 \\ R+QR & Q^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ R & Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ R+QR+Q^2R & Q^3 \end{bmatrix}$$

$$P^t = \begin{bmatrix} I & 0 \\ (I+Q+Q^2+\ldots+Q^{t-1})R & Q^t \end{bmatrix}$$

Μία αλυσίδα απορρόφησης, στο τέλος αναπόφευκτα θα βρεθεί σε μία κατάσταση απορρόφησης. Συνεπώς, καθώς ο πίνακας **Q** περιέχει τις πιθανότητες μετάβασης του συστήματος από μία μεταβατική κατάσταση σε μία άλλη γίνεται αντιληπτό ότι:

$$\lim_{t \to \infty} \mathbf{Q}^t = \mathbf{0}.$$

Πράγματι, από τον ορισμό μίας αλυσίδας απορρόφησης, *υπάρχει* μια διαδρομή από οποιαδήποτε μη απορροφητική κατάσταση s σε κάποια απορροφητική κατάσταση r. Επομένως, κάθε φορά που η διαδικασία ξεκινά από το s, υπάρχει μια *θετική πιθανότητα* να ακολουθήσει η διεργασία αυτό το μονοπάτι. Δηλαδή, μπορεί να υπολογιστεί ένα $0 < p < 1$, τέτοιο ώστε η πιθανότητα να μην φτάσει η διεργασία στην απορροφητική κατάσταση s μετά από m βήματα, m ∊ N, να είναι το πολύ p. Μετά από k · m βήματα, η πιθανότητα να μην φτάσει στην r είναι το πολύ p^k, και καθώς $k \to \infty$, και p < 1, συμπεραίνουμε ότι $p^k \to 0$.

Καθώς $\lim_{t \to \infty} \mathbf{Q}^t = \mathbf{0}$, συμπεραίνουμε ότι:

$$P^t = \begin{bmatrix} I & 0 \\ (I + Q + Q^2 + \ldots + Q^{t-1})R & Q^t \end{bmatrix} \Longrightarrow P^\infty = \begin{bmatrix} I & 0 \\ NR & 0 \end{bmatrix}$$

όπου:

$$N = I + Q + Q^2 + \ldots = (I - Q)^{-1}$$

Ο **Q** περιέχει τις πιθανότητες μετάβασης του συστήματος από μία μεταβατική κατάσταση s_1 σε μία άλλη s_2, συνεπώς ο πίνακας $\mathbf{Q}^n$ περιέχει τις πιθανότητες μετάβασης μεταξύ του συνόλου των μεταβατικών καταστάσεων σε n βήματα. Δηλαδή:

$$[\mathbf{Q}^K]_{ij} = \mathbf{P}(X_\kappa = j \mid X_0 = i)$$

Αν η διάσταση του πίνακα **Q** είναι s x s, τότε ο πίνακας **N** είναι ένας τετραγωνικός s x s πίνακας με γραμμές και στήλες που αντιστοιχούν στις μεταβατικές καταστάσεις καθώς έχει δημιουργηθεί ως συνδυασμός δυνάμεων του πίνακα **Q.**

Ο πίνακας **N** ονομάζεται **βασικός πίνακας** της απορροφητικής Μαρκοβιανής αλυσίδας. Τα στοιχεία του **N** είναι το άθροισμα των πιθανοτήτων να μεταβεί το σύστημα από μία μεταβατική κατάσταση σε κάποια άλλη σε 0, 1, 2, ... βήματα.

7.1. Ερμηνεία των στοιχείων του πίνακα N

Η σειρά i του πίνακα **N**, i = 1, …, s αντιστοιχεί στην i μεταβατική κατάσταση. Έστω τώρα i και j δύο μεταβατικές καταστάσεις και έστω ότι το σύστημα βρίσκεται αρχικά στην κατάσταση i. Έστω επίσης Y_K μία τ.μ. τέτοια ώστε

$$Y_\kappa = \begin{cases} 1, \text{ αν } X_\kappa = j \mid X_0 = i \\ 0, \text{ αν } X_\kappa \neq j \mid X_0 = i \end{cases}$$

Η Y_κ δηλώνει το γεγονός της επίσκεψης στην j από τη i σε κ ακριβώς βήματα. Άρα, η αναμενόμενη τιμή της Y_K εκφράζει το αναμενόμενο πλήθος επισκέψεων από την i στην j σε κ ακριβώς βήματα. Είναι $P(X_\kappa = j \mid X_0 = i) = [Q^K]_{ij}$, άρα $Y_K \sim \text{Bernoulli}([Q^K]_{ij})$. Υπολογίζουμε:

$$E(Y_K) = 1 \cdot [Q^K]_{ij} + 0 \cdot (1 - [Q^K]_{ij}) = [Q^K]_{ij}.$$

Βρήκαμε, ότι:

Το **αναμενόμενο πλήθος επισκέψεων** από την i στην j μεταβατική κατάσταση **σε κ ακριβώς βήματα** είναι το στοιχείο του πίνακα Q^K, της i γραμμής και j στήλης.

Το άθροισμα $Z_n = Y_0 + Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n \in [0, n]$, εκφράζει το άθροισμα των επισκέψεων από τη i στη j σε 0, 1, …, n βήματα.

Η αναμενόμενη τιμή της τ.μ. Z_n είναι το αναμενόμενο πλήθος επισκέψεων της διεργασίας στην κατάσταση j από την κατάσταση i, στα πρώτα n βήματα. Υπολογίζουμε:

$$
\begin{aligned}
E(Z_n) &= E(Y_0 + Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n) \\
&= [Q^0]_{ij} + [Q^1]_{ij} + [Q^2]_{ij} + \dots + [Q^n]_{ij} \\
&= [\, Q^0 + Q^1 + Q^2 + \dots + Q^n]_{ij}
\end{aligned}
$$

Καθώς $n \to \infty$ προκύπτει ότι $\mathbf{E(Y_0 + Y_1 + Y_2 + \dots) = N_{ij}}$

Βρήκαμε, ότι:

Αν ι και j είναι δύο μεταβατικές καταστάσεις, τότε το στοιχείο N_{ij} είναι **ο αναμενόμενος αριθμός επισκέψεων** στην κατάσταση j που θα συμβούν πριν περάσει σε κάποια απορροφητική κατάσταση, αν ξεκινήσει η αλυσίδα από την κατάσταση i.

Συνήθως, αυτό που ενδιαφέρει τον ερευνητή είναι το συνολικό πλήθος επισκέψεων σε κάθε μεταβατική κατάσταση πριν την απορρόφηση.

Το άθροισμα της i γραμμής του βασικού πίνακα N, είναι **ο αναμενόμενος αριθμός επισκέψεων** σε οποιαδήποτε μεταβατική κατάσταση, που θα συμβούν πριν την απορρόφηση, αν η αλυσίδα ξεκινήσει από την κατάσταση i.

7.2. Ερμηνεία των στοιχείων του πίνακα N·R

Ο πίνακας **R** περιέχει τις πιθανότητες μετάβασης του συστήματος από μία κατάσταση μετάβασης (s) σε μία κατάσταση απορρόφησης (r). Έστω i = 1, …, s, μία μεταβατική θέση και j = 1, 2, …, r μία απορροφητική θέση. Αν T το σύνολο των μεταβατικών καταστάσεων, μπορούμε να υπολογίσουμε τις πιθανότητες μετάβασης από την μεταβατική κατάσταση i στην απορροφητική j σε 1, 2, … βήματα:

- Μετάβαση $i \to j$ σε 1 βήμα: $[R]_{ij}$
- Μετάβαση $i \to j$ σε 2 βήματα. Για να συμβεί αυτό, στο 1ο βήμα θα πρέπει το σύστημα να παραμείνει σε κάποια μεταβατική κατάσταση και στο 2ο βήμα να πάει στις απορροφητικές. Η πιθανότητα είναι $\Sigma_{\kappa\epsilon T}\, [Q]_{iK} \cdot [R]_{Kj}$

  ….

- Μετάβαση $i \to j$ σε n βήματα. Για να συμβεί αυτό, στο 1ο, 2ο, …, (n-1) βήμα πρέπει το σύστημα να κινείται μεταξύ των μεταβατικών καταστάσεων και στο n βήμα να πάει στις απορροφητικές. Η πιθανότητα όλων των συνδυασμών είναι
  $\Sigma_{\kappa\epsilon T}\, [Q^{n-1}]_{iK} \cdot [R]_{Kj}$

Η μετάβαση από τη i στην j θα συμβεί σε κάποιο βήμα και τα ενδεχόμενα αυτά είναι ξένα μεταξύ τους. Άρα, αν B_{ij} η πιθανότητα το σύστημα που ξεκίνησε από τη μεταβατική θέση i, i = 1, …, s, να βρεθεί κάποια στιγμή στην απορροφητική θέση j, j = 1, 2, …, r, είναι:

$$B_{ij} = \Sigma_n \Sigma_\kappa [Q^n]_{i\kappa} \cdot R_{\kappa j} = \Sigma_\kappa (\Sigma_n [Q^n]_{i\kappa}) \cdot R_{\kappa j} = \Sigma_\kappa N_{i\kappa} \cdot R_{\kappa j} = (N \cdot R)_{ij}$$

Δηλαδή, προκύπτει ότι:

Ο πίνακας **N · R** περιέχει τις πιθανότητες μετάβασης από μία μεταβατική σε μία απορροφητική κατάσταση. Ο πίνακας **N · R** ονομάζεται και **πίνακας λύσεων** της αλυσίδας.

Συνοψίζοντας:

Ερώτημα 1: Πόσες φορές αναμένεται να βρεθεί η αλυσίδα σε κάποια μεταβατική κατάσταση πριν φτάσει σε κάποια κατάσταση απορρόφησης;

Απάντηση
Τα στοιχεία του βασικού πίνακα **N = (I – Q)$^{-1}$** είναι **ο αναμενόμενος αριθμός περιόδων** που απαιτούνται για την άφιξη σε κάποια απορροφητική κατάσταση. Αν η διεργασία ξεκινήσει από την i μεταβατική κατάσταση, το άθροισμα της i γραμμής του **N** αποδίδει το αναμενόμενο συνολικό πλήθος βημάτων που απαιτούνται για την άφιξη σε οποιαδήποτε κατάσταση απορρόφησης

Ερώτημα 2: Με ποια πιθανότητα θα βρεθεί σε κάθε μία από τις θέσεις απορρόφησης;

Απάντηση
Ο *πίνακας λύσεων* **N · R** περιέχει τις πιθανότητες μετάβασης από μία μεταβατική σε μία απορροφητική κατάσταση.

Σημείωση: Διαγωνιοποίηση vs Κανονική Μορφή για τον υπολογισμό του P^n.
Η μέθοδος της διαγωνιοποίησης ενός πίνακα μπορεί να χρησιμοποιηθεί έναντι της αναγωγής στην κανονική μορφή. Ωστόσο, είναι πιθανό ένας πίνακας να μην μπορεί να διαγωνιοποιηθεί οπότε είναι υποχρεωτικό να ακολουθήσουμε τη διαδικασία, όπως περιγράφηκε στην ενότητα αυτή.

Άσκηση
Επαληθεύστε πως οι πίνακες

$$P_1 = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad P_2 = \frac{1}{12}\begin{bmatrix} 5 & 5 & 2 \\ 3 & 3 & 6 \\ 4 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

δεν είναι διαγωνιοποιήσιμοι.
Ενδεικτικός Κώδικας Octave

```
P = 1/5 *[2, 2, 1;1, 2, 1;2, 1,3]
[V, lambda] = eig(P)
```

7.3. Συμπλήρωμα Θεωρίας

Θεώρημα (Αναμενόμενες επισκέψεις από μία κατάσταση i σε μία άλλη κατάσταση j σε οποιαδήποτε αλυσίδα)

Έστω $\{X_n, n \in N\}$ μία Μαρκοβιανή αλυσίδα με χώρο καταστάσεων $S = A \cup B$, $|A \cap B| = 0$ και P ο πίνακας μετάβασης μεταξύ των καταστάσεων του υποσυνόλου A, τέτοιος ώστε $\lim_{n \to \infty} P^n = O$. Τότε, ο πίνακας $(I - P)^{-1}$, περιέχει ως στοιχεία το αναμενόμενο πλήθος μετακινήσεων του συστήματος μεταξύ των διαφορετικών καταστάσεων του A, πριν την μεταφορά στις καταστάσεις του συνόλου B.

Απόδειξη

Ο πίνακας μετάβασης P μίας Μαρκοβιανής αλυσίδας περιέχει τις πιθανότητες μετάβασης ενός βήματος (π.χ. από το στάδιο 0 στο στάδιο 1) ενώ ο πίνακας P^n περιέχει τις πιθανότητες μετάβασης n βημάτων (π.χ. από το στάδιο 0 στο στάδιο n).

Αν στο στάδιο 0 η αλυσίδα βρίσκεται στην κατάσταση i, τότε, το αναμενόμενο πλήθος επισκέψεων στην κατάσταση j θα είναι μετά από:

0 βήματα : $N_j = 1 \cdot P(X_0 = j \mid X_0 = i) = \delta_{ij} = \{0 \text{ αν } i \neq j \text{ και } 1 \text{ αν } i = j\} = [I]_{ij}$

1 βήματα : $N_j = 1 \cdot P(X_0 = j \mid X_0 = i) + 1 \cdot P(X_1 = j \mid X_0 = i) = \delta_{ij} + p_{ij} = [I + P]_{ij}$

2 βήματα: $N_j = 1 \cdot P(X_0 = j \mid X_0 = i) + 1 \cdot P(X_1 = j \mid X_0 = i) + 1 \cdot P(X_2 = j \mid X_0 = i)$
$= \delta_{ij} + p_{ij} + p_{ij}^{(2)} = [I]_{ij} + [P]_{ij} + [P^2]_{ij} = [I + P + P^2]_{ij}$:

...

n βήματα:
$N_j = 1 \cdot P(X_0 = j \mid X_0 = i) + 1 \cdot P(X_1 = j \mid X_0 = i) + 1 \cdot P(X_2 = j \mid X_0 = i) + \ldots + 1 \cdot P(X_n = j \mid X_0 = i)$
$= [I + P + P^2 + \ldots + P^n]_{ij}$

Βρήκαμε ότι: Αν στο στάδιο 0 η αλυσίδα βρίσκεται στην κατάσταση i, τότε, το **αναμενόμενο πλήθος επισκέψεων** στην κατάσταση j **μετά από n βήματα** είναι:

$$N_j = [I + P + P^2 + \ldots + P^n]_{ij}$$

Δηλαδή, τα στοιχεία του πίνακα $I + P + P^2 + \ldots + P^n$ αντιπροσωπεύουν το αναμενόμενο πλήθος επισκέψεων από κάθε αρχική κατάσταση i στο βήμα 0 σε οποιαδήποτε κατάσταση j στο βήμα n. Αν επιπλέον $\boldsymbol{\lim_{n \to \infty} P^n = O}$, τότε
$\lim_{n \to \infty} (I + P + P^2 + \ldots + P^n) = (I - P)^{-1}$
και έχουμε ότι:

Το συνολικό αναμενόμενο πλήθος επισκέψεων στην κατάσταση j από την κατάσταση i είναι ίσο με

$$\mathbf{N_j = \lim_{n \to \infty} [I + P + P^2 + \ldots + P^n]_{ij} = [(I - P)^{-1}]_{ij}}$$

Παράδειγμα

Δίνεται Μαρκοβιανή Αλυσίδα με S = {1, 2, 3, 4, 5} και πίνακα μετάβασης

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.2 & 0.8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.9 & 0.1 \\ 0.6 & 0 & 0 & 0 & 0.4 \\ 0.2 & 0.8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.9 & 0.1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Έστω ότι $X_0 = 3$. Να βρεθεί το αναμενόμενο πλήθος επισκέψεων στην κατάσταση 2 πριν τη μετάβαση του συστήματος στην κατάσταση 1.

Λύση

Ο πίνακας μετάβασης μεταξύ των καταστάσεων 2, 3, 4, 5 είναι ο

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.9 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0 & 0.4 \\ 0.8 & 0 & 0 & 0 \\ 0.9 & 0.1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Υπολογίζουμε τον πίνακα $N = (I - Q)^{-1}$ και βρίσκουμε:

$$N = \frac{5}{447}\begin{bmatrix} 480 & 5 & 432 & 50 \\ 180 & 95 & 162 & 56 \\ 384 & 4 & 435 & 40 \\ 450 & 14 & 405 & 140 \end{bmatrix}$$

Συμπεραίνουμε, ότι το αναμενόμενο πλήθος επισκέψεων από την κατάσταση 3 στην κατάσταση 2 πριν την άφιξη στην κατάσταση 1, είναι 5·180/447 = 2,01.

Παράδειγμα
Σε ένα διάσημο πείραμα, ο Asch (1951) εξέτασε τον βαθμό στον οποίο οι άνθρωποι αποδέχονται την κοινωνική πίεση για συμμόρφωση. Φαινομενικά, το πείραμα αφορούσε την οπτική αντίληψη. Ένα άτομο οδηγούταν σε ένα δωμάτιο και καθόταν με κάποιους άλλους συμμετέχοντες. Ο πειραματιστής τους παρουσίαζε μια απλή οπτική εργασία - να καθορίσουν ποια από τις τρεις γραμμές είχε το ίδιο μήκος με μια γραμμή αναφοράς. Στη συνέχεια, ζητούνταν από κάθε συμμετέχοντα να δώσει την απάντησή του, με το υποκείμενο να απαντά τελευταίος. Η εργασία σχεδιάστηκε έτσι ώστε η σωστή απάντηση να είναι προφανής. Ωστόσο, εν αγνοία του συμμετέχοντα, όλα τα άλλα άτομα ήταν συνεργάτες του πειραματιστή και είχαν λάβει οδηγίες να δώσουν την ίδια εσφαλμένη απάντηση. Έτσι, όταν τελικά ερχόταν η σειρά του υποκειμένου να απαντήσει, το υποκείμενο έπρεπε να επιλέξει αν θα δώσει τη σωστή απάντηση (αγνοώντας την πίεση συμμόρφωσης με την ομάδα) ή τη λανθασμένη απάντηση (υποχώρηση σε αυτήν την πίεση).

Μετά την καταγραφή των απαντήσεων, ο πειραματιστής συνέχιζε με άλλη δοκιμασία όπου υπήρχε μία εξίσου προφανής επιλογή με τους συνεργάτες του να απαντούν πάλι εσκεμμένα λάθος και να αφήνουν πάλι το συμμετέχοντα να επιλέξει αν θα έλεγε τη σωστή απάντηση και όχι αυτήν που είχαν πει όλοι οι άλλοι.
Σε μια εκδοχή αυτού του πειράματος, αυτή η διαδικασία επαναλήφθηκε συνολικά 35 φορές. Έτσι, για κάθε υποκείμενο, τα δεδομένα μπορεί να αποτελούνται από μια σειρά απαντήσεων όπως π.χ

αααααβαβββαββββββββββββββββββββββββ

όπου το α δηλώνει τη σωστή απάντηση (αγνόηση των υπολοίπων) και το β τη λανθασμένη απάντηση (κοινωνική συμμόρφωση).

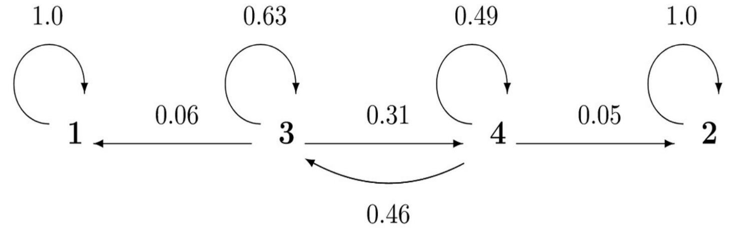
Αυτό το πείραμα επαναλήφθηκε με άλλα άτομα, καθένα από τα οποία δημιούργησε τη δική του ακολουθία απόκρισης. Βρέθηκε πως οι περισσότεροι ερωτώμενοι αρχικά αμφιταλαντεύονται μεταξύ των α και β, αλλά τελικά επέλεγαν μια σταθερή απάντηση (είτε το α είτε το β) χωρίς μεταβολή από επανάληψη σε επανάληψη της δοκιμασίας.

Για την μοντελοποίηση της συμπεριφοράς των ερωτώμενων, ο Cohen (1958) πρότεινε ένα μοντέλο αλυσίδας Markov με 4 καταστάσεις:
Κατάσταση 1: σταθερός αντικομφορμιστής (δεν επηρεάζεται από τους άλλους)
Κατάσταση 2: σταθερός κομφορμιστής (επιλέγει την άποψη των άλλων, αν και λανθασμένη)
Κατάσταση 3: προσωρινός αντικομφορμιστής (δεν επηρεάζεται από τους άλλους, προσωρινά)
Κατάσταση 4: προσωρινός κομφορμιστής (προσωρινά επιλέγει την άποψη των άλλων)
Τα υποκείμενα στην κατάσταση 1 ή 3 δίνουν σωστή απάντηση (α) αγνοώντας τους υπόλοιπους, ενώ τα άτομα στην κατάσταση 2 ή 4 δίνουν λανθασμένη απάντηση (β) υποκύπτοντας στην κοινωνική πίεση που τους ασκείται από τους υπόλοιπους.
Στο μοντέλο του Cohen[1], οι καταστάσεις 1 και 2 απορροφούν, ενώ οι μεταβάσεις μπορούν να συμβούν από την κατάσταση 3 στην 1 ή 4 και από την κατάσταση 4 στην 3 ή 2.
[1] Cohen, B. P. (1958). A Probability Model for Conformity. Sociometry, 21(1), 69–81. https://doi.org/10.2307/2786059

Χρησιμοποιώντας τα πειραματικά δεδομένα, ο Cohen υπολόγισε τον πίνακα μετάβασης της διεργασίας.

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0.06 & 0 & 0.63 & 0.31 \\ 0 & 0.05 & 0.46 & 0.49 \end{bmatrix}$$

Μακροπρόθεσμα, κάθε υποκείμενο γίνεται τελικά είτε μόνιμος μη κομφορμιστής (κατάσταση 1) είτε μόνιμος κομφορμιστής (κατάσταση 2).



Η θεωρία Μαρκοβιανών αλυσίδων μπορεί να μας ενημερώσει για τις πιθανότητες υιοθέτησης μίας από τις δύο απορροφητικές καταστάσεις, ανάλογα με την αρχική στάση ενός υποκειμένου.

Εάν η αλυσίδα ξεκινήσει στην $1^{η}$ μεταβατική κατάσταση (κατάσταση 3), περιμένουμε ότι η αλυσίδα θα περάσει 11,06 περιόδους σε αυτήν την κατάσταση και 6,72 περιόδους στη $2^{η}$ μεταβατική κατάσταση (κατάσταση 4) πριν να αφιχθεί στην $1^{η}$ ή τη $2^{η}$ απορροφητική κατάσταση αντίστοιχα.

Αντίστοιχα, εάν η αλυσίδα ξεκινήσει στη $2^{η}$ μεταβατική κατάσταση (κατάσταση 4), μπορούμε να περιμένουμε ότι θα περάσει 9,98 περιόδους στην $1^{η}$ μεταβατική κατάσταση και 8,03 περιόδους στη $2^{η}$ μεταβατική κατάσταση πριν να αφιχθεί στην $1^{η}$ ή τη $2^{η}$ απορροφητική κατάσταση

Κώδικας Gnu Octave (ή Matlab)

```
>> P = [1 0 0 0; 0 1 0 0; 0.06 0 0.63 0.31; 0 0.05 0.46 0.49]    % Ο πίνακας μετάβασης της διεργασίας
>> R = P(3:4, 1:2)  % Ο πίνακας R που περιέχει τις πιθανότητες μετάβασης από τις μεταβατικές στις απορροφητικές.
>> Q = P(3:4, 3:4)  % Ο πίνακας Q που περιέχει τις πιθανότητες μετάβασης μεταξύ των μεταβατικών καταστάσεων.
>> N = inv(eye(2) – Q)         % Ο βασικός πίνακας της διεργασίας

>> sum(N, 2)     % Αναμενόμενο πλήθος μεταβάσεων πριν την άφιξη σε οποιαδήποτε απορροφητική κατάσταση.
>> N * R   % πιθανότητες μετάβασης από τις μεταβατικές στις απορροφητικές καταστάσεις
```

Εάν η αλυσίδα ξεκινήσει στην $1^{η}$ μεταβατική κατάσταση (κατάσταση 3), περιμένουμε ότι η αλυσίδα θα αφιχθεί σε κάποια από τις δύο απορροφητικές καταστάσεις ύστερα από 17,8 περιόδους.

Αντίστοιχα, εάν η αλυσίδα ξεκινήσει στη 2η μεταβατική κατάσταση (κατάσταση 4), η άφιξη σε κάποια απορροφητική κατάσταση θα συμβεί ύστερα από 18 περιόδους.

Εάν το υποκείμενο ήταν αρχικά προσωρινός αντικομφορμιστής (κατάσταση 3), τότε με 66,38% πιθανότητα καταλήγει μόνιμος αντικομφορμιστής ενώ με 33,62% πιθανότητα καταλήγει μόνιμος κομφορμιστής.

Εάν αρχικά ήταν προσωρινά κομφορμιστής (κατάσταση 4), έχει 59,87% πιθανότητες να καταλήξει μόνιμος αντικομφορμιστής και 40,13% πιθανότητα να καταλήξει μόνιμος κομφορμιστής.

Παράδειγμα
Ένας τζογαδόρος έχει 3.000 € και αποφασίζει να παίξει 1.000 € τη φορά σε ένα τραπέζι Black Jack σε ένα καζίνο. Έχει αποφασίσει πως θα συνεχίζει να παίζει έως ότου χρεοκοπήσει ή έως ότου κερδίσει 5.000 €. Η πιθανότητα να κερδίσει στο Black Jack είναι 0,40. Να βρεθεί ο πίνακας μετάβασης και η πιθανότητα ότι ο τζογαδόρος θα χρεοκοπήσει
(α) έχοντας το αρχικό ποσό των 3.000 €
(β) με την υπόθεση ότι έχει βρεθεί να έχει 2.000 €.

Λύση
Πίνακας μετάβασης P =

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc} 0 & 1K & 2K & 3K & 4K & 5K \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1K \\ 2K \\ 3K \\ 4K \\ 5K \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ .60 & 0 & .40 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & .60 & 0 & .40 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & .60 & 0 & .40 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & .60 & 0 & .40 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Κανονική μορφή P =

$$\begin{array}{ccc} & \begin{array}{cc|cccc} 0 & 5K & 1K & 2K & 3K & 4K \end{array} & \\ \begin{array}{c} 0 \\ 5K \\ 1K \\ 2K \\ 3K \\ 4K \end{array} & \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline .60 & 0 & 0 & .40 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & .60 & 0 & .40 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & .60 & 0 & .40 \\ 0 & .40 & 0 & 0 & .60 & 0 \end{array}\right] & \end{array}$$

R **Q**

Βασικός πίνακας **N** = (**I** – **Q**)$^{-1}$ = $\begin{array}{c|cccc} & 1K & 2K & 3K & 4K \\ \hline 1K & 1.54 & .90 & .47 & .19 \\ 2K & 1.35 & 2.25 & 1.18 & .47 \\ 3K & 1.07 & 1.78 & 2.25 & .90 \\ 4K & .64 & 1.07 & 1.35 & 1.54 \end{array}$

Πίνακας λύσεων **N** · **R** $\begin{bmatrix} 1.54 & .90 & .47 & .19 \\ 1.35 & 2.25 & 1.18 & .47 \\ 1.07 & 1.78 & 2.25 & .90 \\ .64 & 1.07 & 1.35 & 1.54 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} .6 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & .4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} .92 & .08 \\ \boxed{.81 \quad .19} \\ \boxed{.64 \quad .36} \\ .38 & .62 \end{bmatrix}$ =

Ο πίνακας **N** · **R** περιέχει τις πιθανότητες της απορρόφησης στην κατάσταση 0 € ή στην κατάσταση 5.000 € ξεκινώντας από οποιαδήποτε από τις τέσσερις μεταβατικές καταστάσεις (1K, 2K, 3K, 4K).
Εάν ο παίκτης έχει 3.000 €, τότε η πιθανότητα οικονομικής καταστροφής του(3.000 € → 0 €) είναι 64% και η πιθανότητα να φτάσει τα 5.000 € (3.000 € → 5.000 €) είναι 36%.
Εάν ο παίκτης έχει 2.000 €, τότε η πιθανότητα οικονομικής καταστροφής του(2.000 € → 0 €) είναι 81% και η πιθανότητα να φτάσει τα 5.000 € (2.000 € → 5.000 €) είναι 19%.

Παράδειγμα
Οι σπουδές ενός φοιτητή στο πανεπιστήμιο μπορούν να περιγραφούν σαν μια Μαρκοβιανή αλυσίδα με 6 καταστάσεις όπου η κάθε κατάσταση περιγράφεται παρακάτω:
Κατάσταση 1: ο φοιτητής εγκαταλείπει το πανεπιστήμιο.
Κατάσταση 2: ο φοιτητής παίρνει το πτυχίο του.
Κατάσταση 3: ο φοιτητής σπουδάζει στο 4^{ο} έτος.
Κατάσταση 4: ο φοιτητής σπουδάζει στο 3^{ο} έτος.
Κατάσταση 5: ο φοιτητής σπουδάζει στο 2^{ο} έτος.
Κατάσταση 6: ο φοιτητής σπουδάζει στο 1^{ο} έτος.
Ένας φοιτητής, κάθε χρονιά είτε συνεχίζει τις σπουδές του στο επόμενο έτος, είτε επαναλαμβάνει τα μαθήματα του ίδιου έτους, είτε εγκαταλείπει τις σπουδές του.
Αν p είναι η πιθανότητα εγκατάλειψης των σπουδών σε κάθε έτος, q η πιθανότητα επανάληψης του ίδιου έτους και r η πιθανότητα παρακολούθησης του επόμενου έτους τότε ο πίνακας μετάβασης της διεργασίας είναι:

$$P = \begin{array}{c|cccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & p & r & q & 0 & 0 & 0 \\ 4 & p & 0 & r & q & 0 & 0 \\ 5 & p & 0 & 0 & r & q & 0 \\ 6 & p & 0 & 0 & 0 & r & q \end{array}$$

R Q

Ο βασικός πίνακας N και ο πίνακας N · R που περιέχει τις πιθανότητες μετάβασης της διεργασίας είναι:

$$N=\frac{1}{(p+r)}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\ t&1&0&0\\ t^2&t&1&0\\ t^3&t^2&t&1\end{pmatrix}\qquad \begin{pmatrix}1-t&t\\ 1-t^2&t^2\\ 1-t^3&t^3\\ 1-t^4&t^4\end{pmatrix}$$

όπου t = r / (p + r).
Εάν θέσουμε
p = 20%: πιθανότητα εγκατάλειψης των σπουδών σε κάθε έτος,
q = 10%: η πιθανότητα επανάληψης του ίδιου έτους,
r = 70%: η πιθανότητα παρακολούθησης του επόμενου έτους,
τότε t = r / (p + r) = 7/9 = 0,7777… και

$$N=\begin{pmatrix}1.11&0&0&0\\ 0.86&1.11&0&0\\ 0.67&0.86&1.11&0\\ 0.52&0.67&0.86&1.11\end{pmatrix},\quad N\cdot R=\begin{array}{c}\\ 3\\ 4\\ 5\\ 6\end{array}\!\!\begin{array}{c}\begin{array}{cc}\quad 1 & \qquad 2\end{array}\\ \begin{pmatrix}0.22&0.78\\ 0.40&0.60\\ 0.53&0.47\\ 0.63&0.37\end{pmatrix}\end{array}$$

Ενδεικτικά:

- Η πιθανότητα ένας 2ετής (κατάσταση 5) να πάρει πτυχίο (κατάσταση 2) μετά από πεπερασμένο πλήθος ετών είναι 47%.
- Η πιθανότητα ένας 2ετής (κατάσταση 5) να εγκαταλείψει τις σπουδές του(κατάσταση 1) μετά από πεπερασμένο πλήθος ετών είναι 53%.

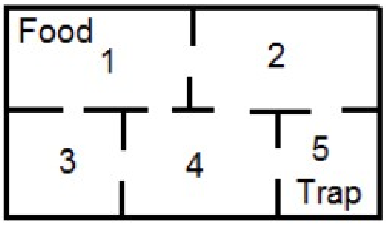
Κώδικας Gnu Octave (ή Matlab)

```
>> p =0.2; q = 0.1; r = 0.7
>> P = [1 0 0 0 0 0;0 1 0 0 0 0; p r q 0 0 0; p 0 r q 0 0; p 0 0 r q 0;p 0 0 0 r q]
>> R = P(3:6, 1:2)  % Ο πίνακας R που περιέχει τις πιθανότητες μετάβασης από τις μεταβατικές στις απορροφητικές.
>> Q = P(3:6, 3:6)  % Ο πίνακας Q που περιέχει τις πιθανότητες μετάβασης μεταξύ των μεταβατικών καταστάσεων.
>> N = inv(eye(4) – Q)  %  Ο βασικός πίνακας της διεργασίας
>> sum(N, 2)  % Αναμενόμενο πλήθος ετών πριν την αποφοίτηση ή την εγκατάλειψη των σπουδών.
>> N * R   % ποσοστά0 0αποφοίτησης ή εγκατάλειψης σπουδών από οποιοδήποτε έτος0.
```

Κώδικας Python

```
import numpy as np
p = 0.2; q = 0.1; r = 0.7
P = np.array([[1, 0, 0, 0, 0, 0], [0, 1, 0, 0, 0, 0], [p, r, q, 0, 0, 0],
              [p, 0, r, q, 0, 0], [p, 0, 0, r, q, 0],  [p, 0, 0, 0, r, q]])
R = P[2:6,0:2]
Q = P[2:6,2:6]
N = np.linalg.inv(np.identity(4) - Q)
print(np.dot(N, R))
```

Παράδειγμα
Ένα ποντίκι τοποθετείται στον λαβύρινθο που φαίνεται παρακάτω και μετακινείται από δωμάτιο σε δωμάτιο τυχαία. Από οποιοδήποτε δωμάτιο, το ποντίκι θα επιλέξει μια πόρτα στο επόμενο δωμάτιο με ίσες πιθανότητες. Μόλις το ποντίκι φτάσει στο δωμάτιο 1, βρίσκει φαγητό και δεν φεύγει ποτέ από αυτό το δωμάτιο. Και όταν φτάσει στο δωμάτιο 5, παγιδεύεται και δεν μπορεί να φύγει από αυτό το δωμάτιο. Ποια είναι η πιθανότητα το ποντίκι να καταλήξει στο δωμάτιο 5, αν είχε αρχικά τοποθετηθεί στο δωμάτιο 3;



Κώδικας Gnu Octave (ή Matlab)

```
>> P = [1 0 0 0 0; 1/3 0 0 1/3 1/3; 1/2 0 0 1/2 0;1/4 1/4 1/4 0 1/4;0 0 0 0 1]
>> P2 = [1 0 0 0 0; 0 1 0 0 0; 1/2 0 0 1/2 0;1/4 1/4 1/4 0 1/4;1/3 1/3 0 1/3 0]
>> R = P2(3:5, 1:2)
>> Q = P2(3:5, 3:5)
>> N = inv(eye(3) – Q)  %  Ο βασικός πίνακας της διεργασίας
>> sum(N, 2)  % Αναμενόμενο πλήθος κινήσεων πριν την άφιξη στην τροφή ή την
παγίδα.
>> N * R   % πιθανότητα άφιξης στην τροφή ή στην παγίδα.
ans =
  0.78947   0.21053
  0.57895   0.42105
  0.52632   0.47368
```

Η πιθανότητα το ποντίκι να καταλήξει στο δωμάτιο 5, αν είχε αρχικά τοποθετηθεί στο δωμάτιο 3 είναι **21,1%**.

Παράδειγμα
Δύο ισοδύναμοι τενίστες, ο Andre και ο Vilay ο καθένας με 2 € στην τσέπη, αποφασίζουν να στοιχηματίσουν από 1 €, για κάθε παιχνίδι που παίζουν. Συνεχίζουν να παίζουν μέχρι να χρεοκοπήσει ένας από αυτούς.
(α) Γράψτε τον πίνακα μετάβασης για τον Andre.
(β) Προσδιορίστε τις απορροφητικές καταστάσεις.
(γ) Γράψτε τον πίνακα λύσης.
(δ) Αν ο Andre έχει 1 €, ποια είναι η πιθανότητα να τα χάσει όλα τελικά;

Κώδικας Gnu Octave (ή Matlab)
```
>> P = [1 0 0 0 0; 1/2 0 1/2 0 0; 0 1/2 0 1/2 0; 0 0 1/2 0 1/2; 0 0 0 0 1]
>> P2 = [1 0 0 0 0; 0 1 0 0 0; 1/2 0 0 1/2 0;0 0 1/2 0 1/2;0 1/2 0 1/2 0]
>> R = P2(3:5, 1:2)
>> Q = P2(3:5, 3:5)
>> N = inv(eye(3) – Q)  %  Ο βασικός πίνακας της διεργασίας
>> sum(N, 2)  % Αναμενόμενο πλήθος κινήσεων πριν την άφιξη στην τροφή ή την
παγίδα.
>> N * R   % πιθανότητα άφιξης στην τροφή ή στην παγίδα.
ans =
  0.75000   0.25000
  0.50000   0.50000
  0.25000   0.75000
```

Αν ο Antre έχει 1 €, η πιθανότητα να τα χάσει όλα τελικά είναι **75%**.

Παράδειγμα (εκδοχή β)
Δύο ισοδύναμοι τενίστες, ο Andre και ο Vilay ο καθένας με 2 € στην τσέπη, αποφασίζουν να στοιχηματίσουν από 1 €, για κάθε παιχνίδι που παίζουν. Συνεχίζουν να παίζουν μέχρι να χρεοκοπήσει ένας από αυτούς.
Η πιθανότητα νίκης για τον Andre είναι 0,4 και για τον Vilay 0,6.
(α) Γράψτε τον πίνακα μετάβασης για τον Andre.
(β) Προσδιορίστε τις απορροφητικές καταστάσεις.
(γ) Γράψτε τον πίνακα λύσης.
(δ) Αν ο Andre έχει 1 €, ποια είναι η πιθανότητα να τα χάσει όλα τελικά;

Παράδειγμα (εκδοχή γ)
Αρχικά ο Andre έχει 3 € και ο Vilay έχει 2 €. Αποφασίζουν να στοιχηματίσουν από 1 €, για κάθε παιχνίδι που παίζουν. Συνεχίζουν να παίζουν μέχρι να χρεοκοπήσει ένας από αυτούς.
Η πιθανότητα νίκης για τον Andre είναι 0,4 και για τον Vilay 0,6.
(α) Γράψτε τον πίνακα μετάβασης για τον Andre.
(β) Προσδιορίστε τις απορροφητικές καταστάσεις.
(γ) Γράψτε τον πίνακα λύσης.
(δ) Αν ο Andre έχει41 €, ποια είναι η πιθανότητα να τα χάσει όλα τελικά;

Παράδειγμα
Για ένα νόμισμα γνωρίζουμε πως φέρνει κορώνα (Κ) με πιθανότητα 0,6 και γράμματα (Γ) με πιθανότητα 0,4. Το νόμισμα ρίχνεται 100 φορές. Αν λ το μήκος της μεγαλύτερης ακολουθίας συνεχόμενων Κ στις 100 ρίψεις, να υπολογιστεί η πιθανότητα ότι το λ υπερβαίνει το 5, δηλαδή P(λ > 5).

Λύση
Θεωρούμε τη Μαρκοβιανή διαδικασία $\{W_n\}$ όπου η W_n μετράει το πλήθος των συνεχόμενων επιτυχιών (Κ) και παίρνει τις τιμές 0, 1, 2.., 5. Τις καταστάσεις 0, 1, ..., 4 τις θεωρούμε μεταβατικές και την κατάσταση 5 ως απορροφητική και αναζητούμε την πιθανότητα η αλυσίδα να απορροφηθεί στην κατάσταση 5 στις 100 επαναλήψεις του πειράματος (δηλαδή την πιθανότητα να υπάρξει τουλάχιστον μία σειρά από 5 επιτυχίες στις 100 επαναλήψεις). Η πιθανότητα επιτυχίας σε ένα πείραμα και άρα και η πιθανότητα να έχω μία παραπάνω επιτυχία είναι 0,6 ενώ 1-0,6 = 0,4 είναι η πιθανότητα να επιστρέψει στην 1η κατάσταση (0 επιτυχίες).

Ο 6 x 6 πίνακας μετάβασης της διαδικασίας είναι ο

$$P = \begin{bmatrix} 0{,}4 & 0{,}6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}4 & 0 & 0{,}6 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}4 & 0 & 0 & 0{,}6 & 0 & 0 \\ 0{,}4 & 0 & 0 & 0 & 0{,}6 & 0 \\ 0{,}4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ο πίνακας P^{100} περιέχει τις πιθανότητες μετάβασης μεταξύ όλων των καταστάσεων ($1^η$: 0 επιτυχίες έως 6η: 5 επιτυχίες) σε 100 βήματα. Εμάς, μας ενδιαφέρει η πιθανότητα μετάβασης στην απορροφητική κατάσταση 5 σε 100 βήματα, ξεκινώντας από την 1η κατάσταση (0 επιτυχίες). Αυτό υπολογίζεται από το γινόμενο

$$[1, 0, 0, ..., 0] \cdot P^{100}.$$

Ο κώδικας του Octave που το υπολογίζει είναι ο εξής:

```
N = 100
P = [0.4, 0.6, 0, 0, 0, 0; 0.4, 0, 0.6, 0, 0, 0;  0.4, 0, 0, 0.6, 0, 0;  0.4, 0, 0, 0, 0.6, 0;  0.4, 0, 0, 0, 0, 0.6;  0, 0, 0, 0, 0, 1]
[1, 0, 0, 0, 0, 0]*P^N
```

```
ans =
   1.0043e-02   6.2616e-03   3.9041e-03   2.4342e-03   1.5177e-03   9.7584e-01
```

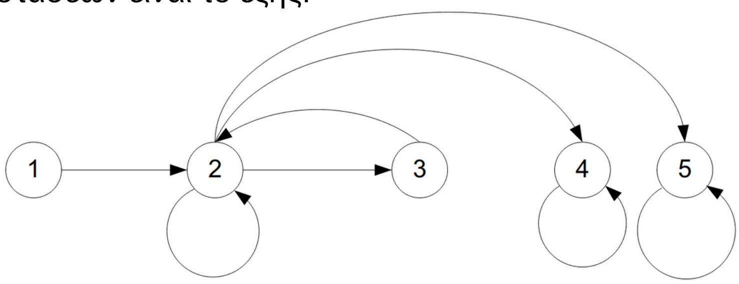
Αποτέλεσμα
Στις 100 ρίψεις θα υπάρχουν 5 συνεχόμενες κορώνες (Κ) με πιθανότητα 97,6%.

Σημείωση: Εναλλακτικά, υπάρχει τύπος που αναπτύχθηκε από τον de Moivre το 1738 και οδηγεί στο ίδιο αποτέλεσμα. Ο τύπος όπως και μία απόδειξη αυτού είναι διαθέσιμη εδώ:
https://math.stackexchange.com/a/59749/664787

Παράδειγμα
Σε πρόσφατη μελέτη (Feri Afrinaldi. 2020) μελετήθηκαν φάσεις της ζωής ενός πλαστικού αντικειμένου. Σύμφωνα με τη μελέτη αυτές είναι οι εξής:

1 = Παραγωγή, 2 = Χρήση, 3 = Ανακύκλωση, 4 = Απόρριψη, 5 = Αποτέφρωση.

Το διάγραμμα καταστάσεων είναι το εξής:



Μελετώντας τα ιστορικά στοιχεία παραγωγής και ανακύκλωσης καταγράφηκε ο πίνακας μετάβασης να είναι ο εξής:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & | & 0 & 0 \\ 0 & 0.29 & 0.07 & | & 0.55 & 0.09 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & 0 \\ - & - & - & | & - & - \\ 0 & 0 & 0 & | & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ο βασικός πίνακας N της αλυσίδας υπολογίστηκε να είναι είναι:

$$(\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1.56 & 0.11 \\ 0 & 1.56 & 0.11 \\ 0 & 1.56 & 1.11 \end{pmatrix}$$

Ο βασικός πίνακας N περιέχει το μέσο πλήθος επισκέψεων στις καταστάσεις 1, 2, 3 πριν την απορρόφησή του συστήματος στις καταστάσεις 4, 5. Ενδεικτικά, 1 τόνος πλαστικού που βρίσκεται στην κατάσταση 1 (production), αναμένεται να ανακυκλωθεί 0.11 φορές και να χρησιμοποιηθεί 1.56 φορές πριν την απόρριψη ή αποτέφρωσή του (δεν είναι δόκιμο να διαβάσουμε τον πίνακα στη 2η και 3η σειρά, καθώς η αρχική κατάσταση του συστήματος δεν μπορεί παρά να είναι η 1η).

Καθώς, το έτος 2015 παράχθηκαν 407 Mt πλαστικού, συμπεραίνεται ότι μέχρι την τελική απόρριψη ή αποτέφρωσή τους, στη συνολική τους διάρκεια ζωής, θα ανακυκλωθούν 42.84 Mt και θα χρησιμοποιηθούν 635.49 Mt.

Feri Afrinaldi. (2020). Exploring product lifecycle using Markov chain, Procedia Manufacturing, 43, 391-398, https://doi.org/10.1016/j.promfg.2020.02.196.

8. Στάσιμη συμπεριφορά Μαρκοβιανής Αλυσίδας

Ορισμός
Έστω $\{X_n, n \in N\}$ μια Μαρκοβιανή Αλυσίδα Διακριτού Χρόνου με πίνακα μετάβασης P και χώρο καταστάσεων S = {0, 1, 2, ...}. Ένα διάνυσμα $\pi = [\pi_0, \pi_1, \pi_2, ...]$, όπου $\pi_i \in [0,1]$ και $\sum_{i \in S} \pi_i = 1$, λέγεται ότι είναι **στάσιμη κατανομή** για τη $\{X_n, n \in N\}$ όταν

$$\boldsymbol{\pi P = \pi}$$

Η επίλυση του συστήματος των εξισώσεων

$$\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi} \cdot \mathbf{P}$$

$$\sum_{j \in S} \pi_j = 1$$

μπορεί να οδηγήσει στον εντοπισμό της στάσιμης κατανομής Η στάσιμη κατανομή **π** είναι αυτή στην οποία αν βρεθεί το σύστημα τότε παραμένει σε αυτήν στο διηνεκές.

Δεν φτάνουν όλες οι αλυσίδες Markov σε στάσιμη συμπεριφορά. Ωστόσο, αποδεικνύεται ότι κάθε αλυσίδα Markov με πεπερασμένο πλήθος καταστάσεων της οποίας ο πίνακας μετάβασης P δεν περιέχει μηδενικές πιθανότητες (δηλαδή $p_{ij} > 0$, για κάθε i, j ϵ S) έχει στάσιμη συμπεριφορά. Ειδικότερα, αρκεί η υπόθεση πως θα υπάρχει κάποιο n ϵ N, τέτοιο ώστε $p^{(n)}_{ij} > 0$, για κάθε i, j ϵ S. Οι αλυσίδες αυτού του τύπου ονομάζονται **αδιαχώριστες**.

Μία απόδειξη για τον παραπάνω ισχυρισμό μπορεί να βρεθεί εδώ:
https://math.uchicago.edu/~may/REU2017/REUPapers/Freedman.pdf (Θεώρημα 3.3 σελ. 6)

Στην περίπτωση όπου υπάρχει στάσιμη κατανομή $\pi = (\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_K)$, αποδεικνύεται ότι ο λόγος

$$\mathbf{E_j = 1/\pi_j}$$

είναι το μέσο πλήθος βημάτων που απαιτούνται για να επανέλθει το σύστημα στην κατάσταση j αν υποτεθεί ότι ξεκίνησε από αυτήν.

Σημείωση: Αν κατά μέσο όρο, η αλυσίδα βρίσκεται στην κατάσταση j μία φορά κάθε E_j βήματα, πρέπει να είναι $\pi_j = 1 / E_j$, δηλαδή $E_j = 1/\pi_j$.

Παράδειγμα 1
Έστω 0 ≤ α, β ≤ 1 και $\{X_n, n \geq 0\}$ μια Αλυσίδα Markov με καταστάσεις S = {0, 1} και πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης

$$\begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{pmatrix}$$

Να βρεθεί η στάσιμη κατανομή (αν υπάρχει).

Λύση

Είναι $\pi = \pi \cdot P$ ή $[\pi_0, \pi_1] = [(1-\alpha)\pi_0 + b\pi_1, \alpha\pi_0 + (1-b)\pi_1]$. Επιπλέον, $\pi_0 + \pi_1 = 1$.

Λύνουμε το σύστημα και βρίσκουμε $[\pi_0, \pi_1] = [b/(\alpha + b), \alpha/(\alpha + b)]$.

Παρατήρηση
Προσέξτε πως η στάσιμη κατανομή είναι η ίδια με αυτήν που αποδείξαμε ως οριακή σε προηγούμενο πρόβλημα.

Παράδειγμα 2

Έστω S = {0, 1} και $P = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix}$

Αν $\pi = (\pi_0, \pi_1)$ η οριακή (στάσιμη) κατανομή πιθανοτήτων τότε

$$\left.\begin{array}{r} \pi = \pi \cdot P \\ \pi_0 + \pi_1 = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} \pi_0 = 0{,}5\pi_0 + 0{,}4\pi_1 \\ \pi_1 = 0{,}5\pi_0 + 0{,}6\pi_1 \\ \pi_0 + \pi_1 = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \pi_0 = \dfrac{4}{9} \\ \pi_1 = \dfrac{5}{9} \end{array}\right\}$$

Δηλαδή, το σύστημα, ανεξάρτητα από την αρχική του κατάσταση, οριακά θα λαμβάνει την κατάσταση 0 με πιθανότητα 4/9 και την κατάσταση 1 με πιθανότητα 5/9.

Επιπλέον: Αν το σύστημα βρεθεί στην κατάσταση 1 τότε θα ξαναβρεθεί σε αυτήν μετά από 9/5 = 1,8 βήματα ενώ μεταξύ δύο επισκέψεων στην κατάσταση 0 μεσολαβούν 9/4 = 2,25 βήματα.

Παράδειγμα 3

Έστω S = {0, 1, 2} και $P = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/6 & 1/3 & 1/2 \end{bmatrix}$

(α) Να βρεθεί η στάσιμη κατανομή

(β) Να βρεθεί το μέσο πλήθος βημάτων που απαιτούνται μεταξύ δύο επισκέψεων στις καταστάσεις της αλυσίδας.

Λύση

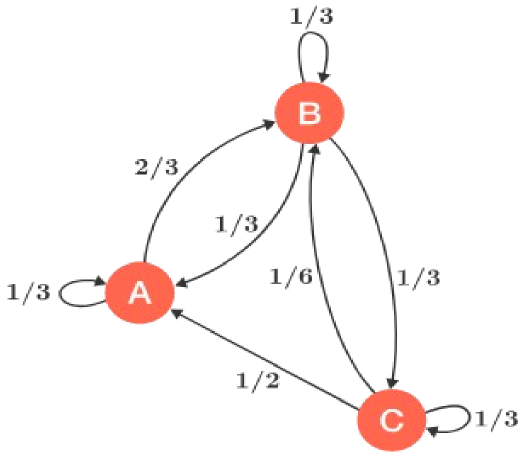
Αν $\pi = (\pi_0, \pi_1, \pi_2)$ η οριακή στάσιμη κατανομή πιθανοτήτων τότε $\pi_0 + \pi_1 + \pi_2 = 1$ και

$$
\begin{aligned}
\pi_0 &= \frac{\pi_0}{3} + \frac{\pi_1}{4} + \frac{\pi_2}{6} \\
\pi_1 &= \frac{\pi_0}{3} + \frac{\pi_1}{2} + \frac{\pi_2}{3} \\
\pi_2 &= \frac{\pi_0}{3} + \frac{\pi_1}{4} + \frac{\pi_2}{2}
\end{aligned}
$$

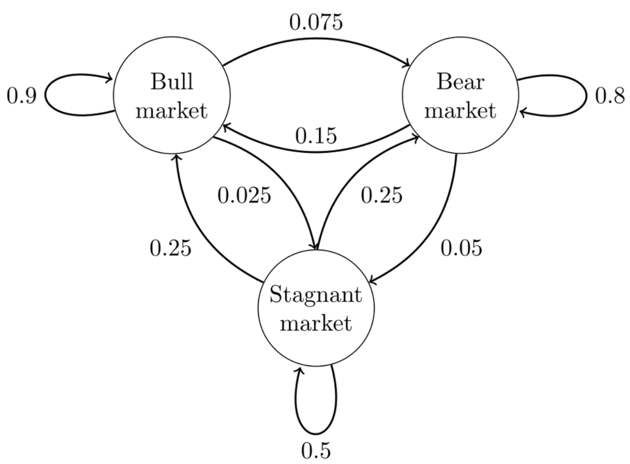
Από την λύση του παραπάνω συστήματος προκύπτει (π_0, π_1, π_2) = (6/25, 2/5, 9/25).
Μεταξύ δύο επισκέψεων στην κατάσταση 0 μεσολαβούν 25/6 = 4,25 βήματα.
Μεταξύ δύο επισκέψεων στην κατάσταση 1 μεσολαβούν 5/2 = 2,5 βήματα.
Μεταξύ δύο επισκέψεων στην κατάσταση 2 μεσολαβούν 25/9 = 2,78 βήματα.

Άσκηση

Να βρεθεί η στάσιμη κατανομή πιθανοτήτων της αλυσίδας που περιγράφεται από το διάγραμμα:



Άσκηση
Στο διάγραμμα φαίνονται οι πιθανότητες μετάβασης ενός χρηματιστηρίου από την κατάσταση σημαντικής αύξησης (>20%) των τιμών (bull market) στην κατάσταση στασιμότητας (stagnant market) και στην κατάσταση σημαντικής μείωσης των τιμών (bear market). Να βρεθεί η στάσιμη κατανομή πιθανοτήτων της αλυσίδας.



9. Όριο πίνακα μετάβασης (οριακή κατανομή)

Ορισμός
Έστω $\{X_n, n \in N\}$ μια Μαρκοβιανή Αλυσίδα Διακριτού Χρόνου με πίνακα μετάβασης P και χώρο καταστάσεων S = {0, 1, 2, ...}. Ένα διάνυσμα $\pi = [\pi_0, \pi_1, \pi_2, ...]$, όπου $\pi_i \in [0,1]$ και $\sum_{i \in S} \pi_i = 1$, λέγεται ότι είναι **οριακή κατανομή** για τη $\{X_n, n \in N\}$ όταν

$$\boldsymbol{\pi_j = \lim_{n\to\infty} P(X_n = j \mid X_0 = i)}$$

Ισοδύναμα:

- η οριακή κατανομή υπάρχει όταν υπάρχει το όριο $\lim_{n\to\infty} P^n$ και είναι πίνακας που έχει τα ίδια στοιχεία σε κάθε γραμμή.
- η οριακή κατανομή της ΜΑΔΧ υπάρχει όταν τελικά η πιθανότητα μετάβασης σε μία κατάσταση $j \in S$, είναι σταθερή και ανεξάρτητη από την αρχική κατάσταση $i \in S$.

Θεώρημα
Αν μία ΜΑΔΧ έχει οριακή κατανομή, τότε αυτή θα είναι και στάσιμη κατατομή.

Απόδειξη
Από την εξίσωση Chapman – Kolmogorov είναι $p_{ij}^{(n+1)} = \Sigma_{\kappa \in S}\, p_{ik}^{(n)}\, p_{kj}$. Παίρνουμε όριο καθώς $n \to \infty$ και έχουμε:

$$\begin{aligned}\pi_j &= \lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} \\ &= \lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n+1)} \\ &= \lim_{n\to\infty} \Sigma_{k \in S}\, p_{ik}^{(n)} p_{kj} \\ &= \Sigma_{k \in S} \lim_{n\to\infty} p_{ik}^{(n)}\, p_{kj} \\ &= \Sigma_{k \in S}\, \pi_k\, p_{kj}\end{aligned}$$

Συμπεραίνουμε, ότι

$$\pi = [\pi_i]_{i \in S} = \pi P.$$

Όταν υπάρχει το $P^\infty = \lim_{n\to\infty} P^{(n)}$, τότε υπάρχει οριακή (στάσιμη) συμπεριφορά και υπολογίζεται εύκολα, καθώς $\pi_j = \lim_{n \to \infty} [P(X_n = j)] = \pi_0 P^\infty$. Ωστόσο, είναι δυνατό να υπάρχει στάσιμη συμπεριφορά, χωρίς να υπάρχει το όριο $\lim_{n\to\infty} P^{(n)}$.

Ένα παράδειγμα είναι η αλυσίδα με πίνακα μετάβασης $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ για την οποία δεν υπάρχει το $\lim_{n\to\infty} P^{(n)}$ αλλά φανερά $\pi = [½, ½]$.

Αποδεικνύεται ότι για κάθε ομογενής Μαρκοβιανή αλυσίδα με πεπερασμένο χώρο καταστάσεων το διάνυσμα

$$\pi = (\pi_0, \pi_1, \pi_2, \dots \pi_\kappa), \quad \pi_j = \lim_{n \to \infty} P(X_n = j), \quad j = 1, 2, \dots, \kappa,$$

υπάρχει χωρίς ωστόσο να είναι απαραίτητα μοναδικό. Αν επιπλέον, η αλυσίδα είναι αδιαχώριστη και απεριοδική, τότε αποδεικνύεται πως είναι μοναδικό.

Σημειώσεις
1. Μία απόδειξη για την ύπαρξη είναι διαθέσιμη εδώ:
https://math.uchicago.edu/~may/REU2017/REUPapers/Freedman.pdf
ή εδώ: http://homepages.math.uic.edu/~furman/preprints/whatis-published.pdf
ή εδώ: https://mpaldridge.github.io/math2750/S10-stationary-distributions.html#exist-unique (Theorem 10.4).

Ειδικότερα, αν δεν υπάρχουν μηδενικές καταχωρήσεις είναι συνέπεια του Θεωρήματος Perron-Frobenius.

2. Αν υπάρχει παραπάνω από μία οριακή κατανομή τότε κάθε γραμμικός τους συνδυασμός είναι επίσης οριακή κατανομή, δηλαδή τελικά είναι άπειρες σε πλήθος.

3. Κάθε απορροφητική αλυσίδα έχει παραπάνω από μία οριακή κατανομή.

Παράδειγμα
Έστω $0 \le \alpha, \beta \le 1$ και $\{X_n, n \ge 0\}$ μια Αλυσίδα Markov με καταστάσεις $S = \{0, 1\}$ και πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης $P = \begin{bmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ b & 1-b \end{bmatrix}$

(α) Να αποδειχθεί ότι: $P^n = \frac{1}{\alpha + b}\left(\begin{bmatrix} b & \alpha \\ b & \alpha \end{bmatrix} + (1-\alpha-b)^n \begin{bmatrix} \alpha & -\alpha \\ -b & b \end{bmatrix}\right)$

(β) Βρείτε το $\lim_{n\to\infty} P^{(n)}$

(γ) Αν $\pi = (p \ \ 1-p)^T$, να βρεθεί η οριακή κατανομή της αλυσίδας.

Λύση
(α) Η απόδειξη μπορεί να γίνει με επαγωγή:

1ο βήμα: Επαληθεύουμε πως ο ισχυρισμός ισχύει για δείκτη n = 1.

$$P^1 = \begin{bmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ b & 1-b \end{bmatrix} = \frac{1}{\alpha + b}\left(\begin{bmatrix} b & \alpha \\ b & \alpha \end{bmatrix} + (1-\alpha-b) \begin{bmatrix} \alpha & -\alpha \\ -b & b \end{bmatrix}\right)$$

2ο βήμα: Υποθέτουμε πως ο ισχυρισμός ισχύει για το δείκτη n ε N.

$$P^n = \frac{1}{\alpha + b}\left(\begin{bmatrix} b & \alpha \\ b & \alpha \end{bmatrix} + (1-\alpha-b)^n \begin{bmatrix} \alpha & -\alpha \\ -b & b \end{bmatrix}\right)$$

3ο βήμα: Αποδεικνύουμε πως αν ισχύει για το δείκτη n τότε ισχύει και για το δείκτη n + 1.

$$P^{n+1} = P^n P = \frac{1}{\alpha + b}\left(\begin{bmatrix} b & \alpha \\ b & \alpha \end{bmatrix} + (1-\alpha-b)^n \begin{bmatrix} \alpha & -\alpha \\ -b & b \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ b & 1-b \end{bmatrix}$$
$$= \frac{1}{\alpha + b}\left(\begin{bmatrix} b & \alpha \\ b & \alpha \end{bmatrix} + (1-\alpha-b)^{n+1} \begin{bmatrix} \alpha & -\alpha \\ -b & b \end{bmatrix}\right)$$

Εναλλακτική απόδειξη
Παρατηρούμε ότι $P = \begin{bmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ b & 1-b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \alpha & -\alpha \\ -b & b \end{bmatrix} = I - A$, όπου $A = \begin{bmatrix} \alpha & -\alpha \\ -b & b \end{bmatrix}$.
Για τον πίνακα A βρίσκουμε ότι: $A^n = (\alpha + b)^{n-1} A$, $n \ge 1$.

Άρα,

$$P^n = (I - A)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} I^{n-k} (-1)^k A^k$$ (διώνυμο του Νεύτωνα)

$$= I + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k A^k$$ (απομόνωση του όρου k = 0)

$$= I + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k (\alpha + b)^{k-1} A$$ (αντικατάσταση $A^k = (\alpha + b)^{k-1}A$, για $k \geq 1$)

$$= I - \frac{1}{\alpha + b} A + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k (\alpha + b)^{k-1} A$$ (προσθαφαίρεση του όρου k = 0)

$$= I - \frac{1}{\alpha + b} A + \frac{1}{\alpha + b} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k (\alpha + b)^k A$$ (πολλαπλασιασμός και διαίρεση με το (α + b))

$$= I - \frac{1}{\alpha + b} A + \frac{1}{\alpha + b} (1 - \alpha - b)^n A$$ (διώνυμο του Νεύτωνα)

$$= \frac{1}{\alpha + b} [(\alpha + b) I - A + (1 - \alpha - b)^n A]$$ (αλγεβρική τακτοποίηση)

$$= \frac{1}{\alpha + b} \left(\begin{bmatrix} b & \alpha \\ b & \alpha \end{bmatrix} + (1 - \alpha - b)^n \begin{bmatrix} \alpha & -\alpha \\ -b & b \end{bmatrix} \right)$$

(β) Για $0 \leq \alpha, \beta \leq 1$, είναι $0 \leq \alpha + \beta \leq 2$ ή $|1 - \alpha - \beta| \leq 1$ και

$$\lim_{n \to \infty} P^n = \frac{1}{\alpha + b} \begin{bmatrix} b & \alpha \\ b & \alpha \end{bmatrix}$$

(γ) $\lim_{n \to \infty} \pi^{(n)} = \lim_{n \to \infty} [\pi P^{(n)}] = \pi \lim_{n \to \infty} P^{(n)} = [\beta/(\alpha + \beta) \;\; \alpha/(\alpha+\beta)]$.

Άσκηση

Έστω η ΜΑΔΧ με πίνακα μετάβασης

$$P = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0.4 & 0.6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.3 & 0.7 \\ 0 & 0 & 0.2 & 0.8 \end{bmatrix}$$

Δείξτε ότι η ΜΑΔΧ δεν έχει οριακή κατανομή.

Άσκηση

Έστω μια Αλυσίδα Markov με δύο καταστάσεις και πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης

$$P = \begin{bmatrix} p_{00} & p_{01} \\ p_{10} & p_{11} \end{bmatrix}$$

Επιπλέον, υποθέτουμε ότι $|p_{00} + p_{11} - 1| < 1$.

(α) Αποδείξτε ότι

$$P^n = \frac{1}{2 - p_{00} - p_{11}} \left(\begin{bmatrix} 1-p_{11} & 1-p_{00} \\ 1-p_{11} & 1-p_{00} \end{bmatrix} + (p_{00} + p_{11} - 1)^n \begin{bmatrix} 1-p_{00} & -(1-p_{00}) \\ -(1-p_{11}) & 1-p_{11} \end{bmatrix} \right)$$

(β) Βρείτε το $\lim_{n \to \infty} P^{(n)}$

Παράρτημα 1: (Ισχυρά) Στάσιμες στοχαστικές διεργασίες

Ορισμός

Λέμε ότι μία στοχαστική ανέλιξη είναι **ισχυρά στάσιμη** όταν για κάθε n και για κάθε t_1, t_2, …, t_n є T, και για κάθε τ > 0, τ.ω. t_1 + τ, t_2 + τ, …,. t_n + τ є T, τα διανύσματα

$$[X(t_1), X(t_2), \ldots, X(t_n)] \text{ και } [X(t_1 + \tau), X(t_2 + \tau), \ldots, X(t_n + \tau)]$$

έχουν την **ίδια κοινή κατανομή πιθανότητας**, δηλαδή

$$F_{t1,\, t2,\, \ldots,\, tn} = F_{t1 + \tau,\, t2 + \tau,\, \ldots,\, tn + \tau}$$

Άμεση συνέπεια: για κάθε t, τ, τα X(t) και X(t + τ) είναι ισόνομα (όχι απαραίτητα ανεξάρτητα). Από την ισότητα $F_{t1,\, t2,\, \ldots,\, tn} = F_{t1 + \tau,\, t2 + \tau,\, \ldots,\, tn + \tau}$, θέτοντας n = 1, έχουμε $F_{t1} = F_{t1 + \tau}$, τ > 0, δηλαδή η κατανομή πιθανότητας των $\{X_t\}$, t Є T, δεν εξαρτάται από το δείκτη t, ή

$$F_t(x) = F(x),\ t \in T.$$

Από την παραπάνω ισότητα προκύπτει ότι

$$m(t) = E(X(t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} t dF(t) = m = \text{σταθερά}$$

και

$$Var(X(t)) = E(X(t)^2) - E(X(t))^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 dF(t) - m^2 = \text{σταθερά}$$

δηλαδή τόσο **η τάση (trend)** όσο και **η διακύμανση (variance)** είναι σταθερές για κάθε $\{X_t\}$, t Є T.

Από την ισότητα $F_{t1,\, t2,\, \ldots,\, tn} = F_{t1 + \tau,\, t2 + \tau,\, \ldots,\, tn + \tau}$, θέτοντας n = 2, t_1 = 0, t_2 = t – s, και τ = s, όπου s < t, παίρνουμε

$$F_{0,\, t-s} = F_{s,\, t},$$

δηλαδή η κοινή κατανομή $F_{s,\, t}$ των X_t, X_s, εξαρτάται αποκλειστικά από τη διαφορά δ = t – s, και όχι από τις συγκεκριμένες τιμές των t, s. Καθώς η E[X(t)X(s)] προσδιορίζεται πλήρως από την $F_{s,\, t}$, συνάγουμε ότι και **η συνάρτηση της συνδιακύμανσης**

$$C(s, t) = Cov(X(t), X(s)) = E[X(t)X(s)] - m(t)m(s) = E[X(t)X(s)] - m^2,$$

εξαρτάται αποκλειστικά από τη διαφορά δ = t – s. Ιδιαίτερα, βρίσκουμε ότι

$$C(s, t) = C(s, s + \delta) = C(0, \delta)$$

Καθώς

$$\rho(t,s) = \frac{Cov(X(t),X(s))}{\sqrt{Var(X(t))}\cdot\sqrt{Var(X(t))}} = \frac{C(t,s)}{\sqrt{Var(X(0))}\cdot\sqrt{Var(X(0))}} = \frac{C(0,\delta)}{VarX(0)},$$

συνάγεται ότι και **ο συντελεστής συσχέτισης** των X_t, X_s, εξαρτάται αποκλειστικά από τη διαφορά δ = t – s, και όχι από τις συγκεκριμένες τιμές των t, s.

Συνοψίζοντας

Σε κάθε ισχυρά στάσιμη στοχαστική διεργασία

(α) Η αναμενόμενη τιμή E(X(t)) είναι σταθερή στο χρόνο.

(β) Η διακύμανση Var(X(t)) είναι σταθερή στο χρόνο.

(γ) Η συνδιακύμανση Cov(X(t), X(s)), εξαρτάται αποκλειστικά από τη διαφορά |s – t|.

(δ) Ο συντελεστής συσχέτισης ρ(X(t), X(s)), εξαρτάται αποκλειστικά από τη διαφορά |s – t|.

Παράρτημα 2: (Ασθενώς) Στάσιμες στοχαστικές διεργασίες

Ορισμός

Μία στοχαστική διεργασία λέμε ότι είναι **διεργασία δεύτερης τάξης** αν για κάθε $t \geq 0$, ισχύει

$$E(X^2(t)) < +\infty.$$

Για τις διεργασίες δεύτερης τάξης, είναι βέβαιο πως θα υπάρχουν και θα ορίζονται για κάθε $t \geq 0$, ως πραγματικοί αριθμοί οι

- $E(X(t)) \leq [E(X^2(t))]^{0,5} < +\infty$, (διότι $var(X(t)) = E(X^2(t)) - E(X(t))^2 \geq 0 \leftrightarrow E(X(t)) \leq [E(X^2(t))]^{0,5}$)

και

- $Var(X(t)) = E(X^2(t)) - E(X(t))^2 < +\infty$.

Ορισμός

Μία στοχαστική διεργασία λέμε ότι είναι **ασθενώς στάσιμη**, όταν

- $E(X^2(t)) < +\infty$.

- $m(t) = E(X(t)) = m \in R$

- Η συνδιακύμανση των $X(t_1)$ και $X(t_2)$ εξαρτάται μόνο από την απόσταση των t_1, t_2 και όχι από την θέση τους στον πραγματικό άξονα, δηλαδή

$$Cov(X(t_1), X(t_2)) = Cov(X(t_1+ h), X(t_2+ h)),\ t_1, t_2, h \geq 0.$$

Σημείωση: Παρατηρούμε ότι $VarX(t) = Cov(X(t), X(t))$ = σταθερό για κάθε $t \geq 0$.

Δηλαδή, μια στοχαστική διαδικασία είναι ασθενώς στάσιμη αν

(α) έχει την ίδια μέση τιμή, μ, σε όλα τα χρονικά σημεία.

(β) έχει την ίδια διακύμανση σε όλα τα χρονικά σημεία.

(γ) η συνδιακύμανση μεταξύ των τιμών σε οποιαδήποτε δύο χρονικά σημεία, $t_1+ h$, $t_2+ h$, εξαρτώνται μόνο από το $t_2 - t_1$, τη διαφορά μεταξύ των δύο στιγμών, και όχι από τη θέση των σημείων στον άξονα του χρόνου.

Παρατήρηση: Ασθενώς στάσιμη ≠ Ισχυρά στάσιμη

Μία ασθενώς στάσιμη διεργασία δεν είναι απαραίτητα ισχυρά στάσιμη.

Παράδειγμα

Έστω ότι X ~ N(0, 1) κατανομή. Θεωρούμε την τυχαία μεταβλητή $Z = X^2$.

Τότε $Z \sim \chi^2_1$ (χι τετράγωνο κατανομή με 1 βαθμό ελευθερίας), συνεπώς για τις ροπές της θα ισχύει:

$$E(Z^n) = 1 \cdot (1 + 2) \cdot \ldots \cdot (1 + 2n - 2) = 2^n \, \Gamma(n + ½) / \Gamma(½)$$

Συμπεραίνουμε ότι **E(Z) = 1** και $\mathbf{E(Z^2)} = 1 \cdot (1 + 2) = 3$.

Έστω τώρα ότι {U(t), t є N} μία οικογένεια *ανεξάρτητων* τυχαίων μεταβλητών που στο σύνολό τους ακολουθούν την N(0, 1) κατανομή. Θεωρούμε τη διεργασία {X(t), t є N}, με X(t) = U(t), αν t άρτιος

και $X(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(U^2(t) - 1\right)$, αν t περιττός.

Παρατηρούμε ότι

- $E(X^2(t)) < +\infty$,
- $E(X(t)) = 0$,
- $Var(X(t)) = 1$ και
- $Cov(X(t_1), X(t_2)) = 0$,

δηλαδή η {X(t), t є N} είναι ασθενώς στάσιμη. Ωστόσο δεν είναι ισχυρά στάσιμη, γιατί δύο διαδοχικές μεταβλητές της δεν έχουν την ίδια κατανομή.

Πιο συγκεκριμένα, παρατηρούμε ότι

- Για άρτιο t: $P(X(t) \le 0) = P(U(t) \le 0) = 0{,}5$ ενώ
- Για περιττό t: $P(X(t) \le 0) = P(U^2(t) - 1 \le 0) = P(|U(t)| \le 1) = P(-1 \le U(t) \le 1) = 0{,}683 \neq 0{,}5$

Παρατήρηση: Ισχυρά στάσιμη ≠ Ασθενώς στάσιμη

Μία ισχυρά στάσιμη διεργασία, δεν είναι πάντα ασθενώς στάσιμη καθώς είναι πιθανό να μην ικανοποιεί την απαραίτητη συνθήκη δεύτερης τάξης $E(X^2(t)) < +\infty$.

Παράδειγμα

Θεωρούμε τη διεργασία {X(t), t 0є0 N0}, όπου X(t) ~ Cauchy(0, 1). Η {X(t), t 0є0 N0} είναι ισχυρά στάσιμη καθώς όλες οι μεταβλητές που την αποτελούν είναι ισόνομες και ανεξάρτητες μεταξύ τους, αλλά δεν είναι ασθενώς στάσιμη καθώς δεν είναι διεργασία δεύτερης τάξης. Πράγματι, η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας μίας Cauchy(0, 1) είναι η

$$f(x) = 1/[\pi(1 + x^2)]$$

και είναι εύκολο να δειχθεί ότι το ολοκλήρωμα στο (-∞, +∞) της $x^2 f(x)$ δεν είναι πεπερασμένο, δηλαδή $E(X^2(t)) = +\infty$.

Σημείωση

Η έννοια της “κεντρικής τάσης” είναι γενικότερη της έννοιας της αναμενόμενης 0τιμής μίας κατανομής. Μία διεργασία {X(t), t 0є N0}, που είναι ισχυρά στάσιμη αλλά 0έχει $E(X^2(t)) = +\infty$ εξακολουθεί να έχει σταθερή “κεντρική τάση” αν και αυτή δεν μπορεί να προσδιοριστεί από τα συνηθισμένα μέτρα κεντρικής τάσης όπως η αναμενόμενη τιμή.

Στην περίπτωση αυτή η κεντρική τάση *μπορεί να εκτιμηθεί από άλλα μέτρα* που στοχεύουν σε αυτήν όπως **η διάμεσος της κατανομής** ή **η επικρατούσα τιμή** της.

Παράδειγμα

Αν X(t) ~ Cauchy(0, 1) με $f(x) = 1/[\pi(1 + x^2)]$ τότε η αναμενόμενη τιμή δεν ορίζεται καλώς, καθώς

$$E(X(t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\alpha} \frac{x}{1+x^2}\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{\alpha}^{+\infty} \frac{x}{1+x^2}\,dx = -\infty + \infty.$$

(Υπενθυμίζεται πως για να ορίζεται καλώς το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{1+x^2}\,dx$ πρέπει και αρκεί τουλάχιστον ένα από τα δύο ολοκληρώματα $\int_{-\infty}^{\alpha} \frac{x}{1+x^2}\,dx$ και $\int_{\alpha}^{+\infty} \frac{x}{1+x^2}\,dx$ να υπάρχουν ως πεπερασμένοι πραγματικοί αριθμοί. Ιδιαίτερα, το γενικευμένο ολοκλήρωμα <u>δεν ορίζεται </u>ως

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{1+x^2}\,dx = \lim_{\alpha \to +\infty} \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{x}{1+x^2}\,dx$$)

Ωστόσο

- Διάμεσος δ = 0 και
- Επικρατούσα τιμή M = 0.

Σημείωση:

Αν X είναι συνεχής τ.μ. τότε η διάμεσος της X είναι ο αριθμός δ για τον οποίο $F_X(\delta) = 0{,}5$, ενώ η επικρατούσα τιμή M_X, είναι ο αριθμός στον οποίο η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας f_X αποκτά τη μέγιστη τιμή της.

Παρατήρηση: Ισχυρά στάσιμη και $E(X^2(t)) < +\infty$ → Ασθενώς στάσιμη

Θεώρημα

Μία ισχυρά στάσιμη διεργασία για την οποία ισχύει $E(X^2(t)) < +\infty$, είναι και ασθενώς στάσιμη.

Απόδειξη

Πράγματι, αν η διεργασία $\{X(t), t \in N\}$, είναι ισχυρά στάσιμη τότε οι τυχαίες μεταβλητές

$$X(0), X(1), X(2), \ldots$$

Θα έχουν ίδια κατανομή, άρα $E(X(t)) = m$ = σταθερό και $E(X^2(t)) = w$ = σταθερό.

Επιπλέον, κάθε ζεύγος τυχαίων μεταβλητών $(X(t_1), X(t_2))$ και $(X(t_1+ h), X(t_2+ h))$ θα έχει ομοίως ίδια κοινή κατανομή. Καθώς, $E(X^2(t_1)), E(X^2(t_2)) < +\infty$ θα είναι

$$Cov(X(t_1), X(t_2)) = Cov(X(t_1+ h), X(t_2+ h)) < +\infty,$$

καθώς $Cov(X(t_1), X(t_2)) = E(X^2(t_1)) - [E(X(t_1))]^2$.