Στοχαστικές Διεργασίες

$5^{ο}$ Εξάμηνο – Επιλογής

Διδάσκων: Επαμεινώνδας Διαμαντόπουλος (Ε.ΔΙ.Π)

Επαναληπτικές έννοιες

Ισόνομες τυχαίες μεταβλητές

Δύο τυχαίες μεταβλητές X, Y, λέγονται **ισόνομες** όταν $F_X = F_Y$, δηλαδή

$$F_X(\kappa) = F_Y(\kappa) \text{ ή } P(X \leq \kappa) = P(Y \leq \kappa),\ \kappa \in R.$$

Στην περίπτωση όπου οι X, Y είναι διακριτές η ισονομία είναι ισοδύναμη με τη συνθήκη

$$P(X = \kappa) = P(Y = \kappa),\ \kappa \in R$$

Επαναληπτικές έννοιες για πολλές τυχαίες μεταβλητές

Κοινή Συνάρτηση Κατανομής

Ορισμός (κοινή σ.κ.)

Έστω δύο τυχαίες μεταβλητές X, Y, με κατανομές F_X, F_Y. Η **κοινή συνάρτηση κατανομής** (joint cumulative distribution function ή joint **cdf**) των X, Y είναι η συνάρτηση $F_{X, Y}$: R x R → [0, 1] που ορίζεται ως εξής:

$$F_{X, Y}(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y).$$

Αν οι δύο τ.μ. είναι ανεξάρτητες τότε

$$F_{X, Y}(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y) = P(X \leq x) \cdot P(Y \leq y) = F_X(x) \cdot F_Y(y).$$

Σημείωση: Ο ορισμός αυτός αφορά τόσο τις διακριτές όσο και τις συνεχείς τ.μ.

Παράδειγμα κοινής σ.κ. (συνεχείς μεταβλητές).

Έστω X και Y δύο ανεξάρτητες U(0,1) τυχαίες μεταβλητές. Να βρεθεί η $F_{X,Y}$.

Λύση

Οι X, Y είναι ανεξάρτητες άρα $F_{X,Y}(x, y) = F_X(x) \cdot F_Y(y)$.

Είναι

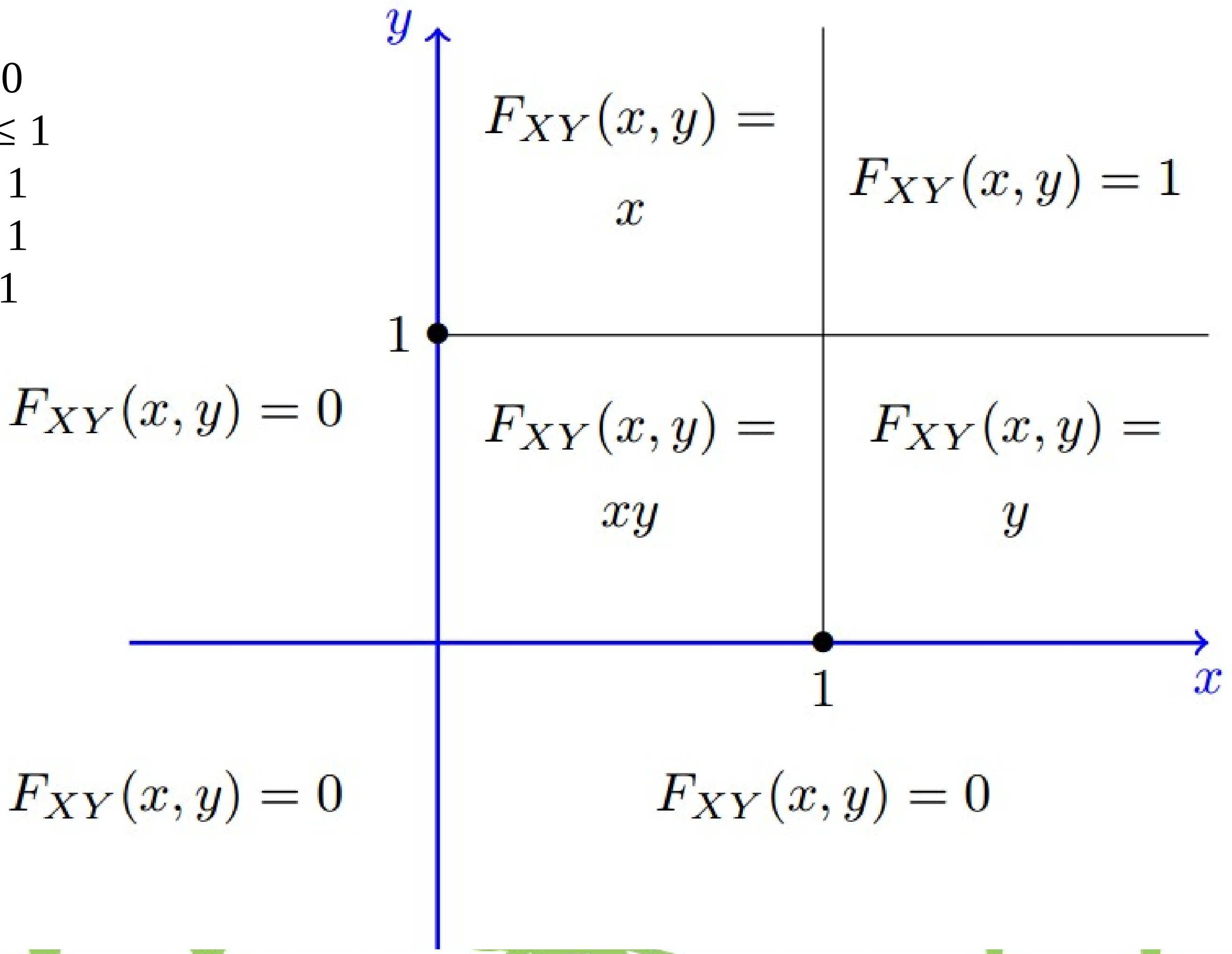
$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{αν } x < 0 \\ x, & \text{αν } 0 \le x \le 1 \\ 1, & \text{αν } x > 1 \end{cases}$$

$$F_Y(x) = \begin{cases} 0, & \text{αν } y < 0 \\ y, & \text{αν } 0 \le y \le 1 \\ 1, & \text{αν } y > 1 \end{cases}$$

Άρα:

$$F_{X,Y}(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \text{ ή } y < 0 \\ xy, & 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1 \\ x, & y > 1,\ 0 \le x \le 1 \\ y, & x > 1,\ 0 \le y \le 1 \\ 1, & x > 1,\ y > 1 \end{cases}$$

$$F_{X,Y}(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \text{ ή } y < 0 \\ xy, & 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1 \\ x, & y > 1,\ 0 \leq x \leq 1 \\ y, & x > 1,\ 0 \leq y \leq 1 \\ 1, & x > 1,\ y > 1 \end{cases}$$



Παράδειγμα κοινής σ.κ. (διακριτές μεταβλητές).

Να βρεθεί η κοινή συνάρτηση κατανομής $F_{X, Y}(x, y)$

X / Y	0	1	2	3
0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	0	0
1	0	$\frac{2}{8}$	$\frac{2}{8}$	0
2	0	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

Κοινή Συνάρτηση Μάζας Πιθανότητας

Ορισμός (κοινή σ.μ.π.) - διακριτή περίπτωση

Έστω δύο **διακριτές** τυχαίες μεταβλητές X, Y. Η **κοινή συνάρτηση (μάζας) πιθανότητας** (joint probability mass function ή joint **pmf**) των X, Y είναι η συνάρτηση

$f_{X,\,Y}: R \times R \to [0, 1]$ που ορίζεται ως εξής:

$$\mathbf{f_{X,\,Y}(x, y) = P(X = x, Y = y).}$$

Ιδιότητες κοινής συνάρτησης (μάζας) πιθανότητας

1) $0 \leq f_{X,\,Y}(x, y) \leq 1$

2) $\Sigma_x \Sigma_y \, f_{X,\,Y}(x, y) = 1$ (διακριτή περίπτωση)

Κοινή Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας

Ορισμός (κοινή σ.π.π.) - συνεχής περίπτωση

Έστω δύο **συνεχείς** τυχαίες μεταβλητές X, Y. Η **κοινή συνάρτηση (πυκνότητας) πιθανότητας** (joint density) των X, Y είναι η τμηματικά συνεχής συνάρτηση
$f_{X,Y}$: R x R → [0, 1] με τις παρακάτω ιδιότητες:

Ιδιότητες κοινής συνάρτησης (πυκνότητας) πιθανότητας

1) $0 \leq f_{X,Y}(x, y) \leq 1$
2) $\int_R \int_R f_{X,Y}(x, y)\, dxdy = 1$

3) Για κάθε $A \subseteq R^2$ είναι

$$P((X, Y) \in A) = \int \int_A f_{X,Y}(x, y)\, dxdy \text{ . π.χ. } P(X \leq \alpha,\, Y \leq \beta) = \int_{-\infty}^{\alpha} \int_{-\infty}^{\beta} f_{X,Y}(x, y)\, dxdy$$

Περιθώρια και δεσμευμένη συνάρτηση πιθανότητας

Από την κοινή συνάρτηση μάζας πιθανότητας είναι δυνατόν να ανακτηθεί η **περιθώρια (marginal) συνάρτηση πιθανότητας** των δύο επιμέρους τυχαίων μεταβλητών.

$f_X(x) = \Sigma_y \, f_{X,\,Y}(x, y)$, $\quad f_Y(x) = \Sigma_x \, f_{X,\,Y}(x, y)$ (διακριτή περίπτωση)

$$f_X(x) = \int_R f_{X,Y}(x, y)\, dy \qquad f_Y(x) = \int_R f_{X,Y}(x, y)\, dx$$

(συνεχής περίπτωση)

Από την κοινή συνάρτηση μάζας πιθανότητας, είναι δυνατόν να οριστεί και η **δεσμευμένη συνάρτηση μάζας πιθανότητας** (ή πυκνότητας πιθανότητας) της Χ δοθέντος του Υ = y, ως εξής:

$$\mathbf{f_{X\,|\,Y}(x \mid y) = f_{X,\,Y}(x, y) \,/\, f_Y(y)}$$

Σημείωση: $f_{X\,|\,Y}(x|y) = P(X = x \mid Y = y) = P(X = x, Y = y) \,/\, P(Y = y) = f_{X,\,Y}(x, y) \,/\, f_Y(y)$

Ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές

Ορισμός (ανεξαρτησία τυχαίων μεταβλητών)

Δύο τ. μ. X, Y, λέγονται **(στοχαστικά) ανεξάρτητες** αν

$$\mathbf{P(X \leq x, Y \leq y) = P(X \leq x)P(Y \leq y)} \text{ ή } \mathbf{F_{X,Y}(x, y) = F_X(x)F_Y(y)}$$

Αν οι δύο τυχαίες μεταβλητές X, Y είναι στοχαστικά ανεξάρτητες τότε ισχύει

$$\mathbf{f_{X,\,Y}(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)}$$

για κάθε x, y є R.

Επιπλέον, για κάθε y є R, $\mathbf{f_{X\,|\,Y}(x|y) = f_X(x)}$

Πράγματι: $f_{X\,|\,Y}(x|y) = f_{X,\,Y}(x, y) \,/\, f_Y(y) = f_X(x) \cdot f_Y(y) \,/\, f_Y(y) = f_X(x)$

Ισόνομες τ.μ. ⇏ Ανεξάρτητες τ.μ.

Παρατήρηση
Δύο τυχαίες μεταβλητές X, Y, μπορεί να είναι *ισόνομες* αλλά όχι *ανεξάρτητες*.

Παράδειγμα
Σε ένα σάκο υπάρχουν 2 μπάλες, μία με τον αριθμό 0 και μία με τον αριθμό 1. Εκτελούμε πείραμα με δύο επιλογές μπάλας και ορίζουμε να είναι

X: Ο αριθμός της μπάλας στην 1^{η} επιλογή και **Y: Ο αριθμός της μπάλας στη 2^{η} επιλογή.**

Αν η δειγματοληψία γίνει **με επανάθεση** τότε Ω = {00, 01, 10, 11} και υπολογίζουμε
P(X = 0) = P(X = 1) = P(Y = 0) = P(Y = 1) = 2/4 = 0,5.
Στην περίπτωση αυτή οι X, Y είναι **ισόνομες και ανεξάρτητες**.

Αν ωστόσο η δειγματοληψία γίνει **χωρίς επανάθεση**, τότε Ω = {01, 10} και υπολογίζουμε
P(X = 0) = P(X = 1) = P(Y = 0) = P(Y = 1) = 1/2 = 0,5.
Στην περίπτωση αυτή οι X, Y είναι **ισόνομες και εξαρτημένες**.

Δραστηριότητα:
Περιγράψτε ένα πείραμα στο οποίο θα ορίζονται δύο μεταβλητές X, Y, *ανεξάρτητες* αλλά όχι *ισόνομες*.

Συναρτήσεις ανεξαρτήτων τ.μ. → Ανεξάρτητες τ.μ.

Αποδεικνύεται ότι, αν $X_1, X_2, \ldots, X_n$ είναι ανεξάρτητες και g, h συνεχείς συναρτήσεις τότε οι $Y = g(X_1, X_2, \ldots, X_m)$ και $Z = h(X_{m+1}, X_{m+2}, \ldots, X_n)$ είναι ομοίως ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές.

Ειδικότερα, αν $1 \leq m \leq n - 1$, τα αθροίσματα

$$\Sigma_{i = 1, \ldots, m} X_i \text{ και } \Sigma_{i = m+1, \ldots, n} X_i,$$

είναι ομοίως ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές.

Συνδιακύμανση Τυχαίων Μεταβλητών

Η συνδιακύμανση (covariance) είναι μία στατιστική ποσότητα με την οποία ποσοτικοποιείται το είδος της συμμεταβολής των δύο μεταβλητών, δηλαδή το είδος της μεταβολής στις τιμές μίας συνεχούς τυχαίας μεταβλητής καθώς μία άλλη μεταβάλλεται.

Ο υπολογισμός της έχει νόημα για ζεύγη μεταβλητών που ορίζονται στο ίδιο πείραμα, άρα οι τιμές τους προσδιορίζονται μαζί με την εξέλιξη του πειράματος.

Ορισμός

Αν X και Y είναι δύο τυχαίες μεταβλητές τότε η **συνδιακύμανση** ορίζεται ως

$$\mathbf{Cov}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \mathbf{E}[(\mathbf{X} - \mathbf{E}(\mathbf{X}))(\mathbf{Y} - \mathbf{E}(\mathbf{Y}))]$$

Συνδιακύμανση Τυχαίων Μεταβλητών

Παράδειγμα
Από ένα πείραμα ορίστηκαν δύο τυχαίες μεταβλητές, X, Y με τιμές X = 1, 2, 3 και Y = 1, 2. Η κοινή συνάρτηση μάζας πιθανότητας παρουσιάζεται στον πίνακα. Να βρεθεί η συνδιακύμανση των X, Y.

$f_{X, Y}(x, y)$		$f_X(x)$			Σύνολο
		1	2	3	
$f_X(y)$	1	0,25	0,2	0	0,4
	2	0,05	0,2	0,3	0,6
Σύνολο		0,3	0,4	0,3	1

Λύση

Υπολογίζουμε,

$E(X) = \Sigma_x x \cdot f_X(x) = 1 \cdot 0{,}3 + 2 \cdot 0{,}4 + 3 \cdot 0.3 = 2,$

$E(Y) = \Sigma_y y \cdot f_Y(y) = 1 \cdot 0{,}4 + 2 \cdot 0{,}6 = 1{,}6,$

$E(XY) = \Sigma_x \Sigma_y x \cdot y \cdot f_{X, Y}(x, y) = 1 \cdot 1 \cdot 0{,}25 + 1 \cdot 2 \cdot 0{,}05 + 2 \cdot 1 \cdot 0{,}2 + 2 \cdot 2 \cdot 0{,}2 + 3 \cdot 1 \cdot 0 + 3 \cdot 2 \cdot 0{,}3 =$

$= 0{,}25 + 0{,}1 + 0{,}4 + 0{,}8 + 0 + 1{,}8 = 3{,}35$

Υπολογίζουμε $Cov(X, Y) = E(XY) – E(X)E(Y) = 3{,}35 – 3{,}2 = 0{,}15$.

Συντελεστής Συσχέτισης Pearson

Ο συντελεστής συσχέτισης του Pearson είναι το κατάλληλο στατιστικό για την ανίχνευση της γραμμικής σχέσης δύο ποσοτικών μεταβλητών, για συνεχείς ή αριθμητικές διακριτές μεταβλητές

$$\rho_{X,Y} = \mathrm{corr}(X,Y) = \frac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{\mathrm{E}[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)]}{\sigma_X \sigma_Y}$$

Ισοδύναμα:

$$\rho_{X,Y} = \frac{\mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y)}{\sqrt{\mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}(X)^2} \cdot \sqrt{\mathrm{E}(Y^2) - \mathrm{E}(Y)^2}}$$

Συντελεστής Συσχέτισης Pearson

Αν δύο μεταβλητές είναι ανεξάρτητες, τότε cov(X, Y) = 0 και $\rho_{X, Y} = 0$ επίσης. Το αντίθετο δεν ισχύει, δηλαδή μπορεί δύο μεταβλητές να είναι γραμμικά ασυσχέτιστες ($\rho_{X, Y} = 0$) και να είναι εξαρτημένες.

Παράδειγμα

Έστω, X = -1, 0, 1 με $f_X(-1) = f_X(0) = f_X(1) = 1/3$ και Y = 1, αν X = 0 και Y = 0, αν X = -1, 1. Τότε προφανώς οι X, Y είναι εξαρτημένες αλλά $\rho_{X, Y} = 0$ (γιατί;)

Κανονική κατανομή

Μονομεταβλητή κανονική κατανομή

Λήμμα

Έστω $f: R \to R$, συνεχής και θετική, που ικανοποιεί την συνθήκη

$$f(x + y) = f(x)f(y),\ x, y \in R.$$

Τότε, υπάρχει $k \in R$, τέτοιο ώστε $f(x) = e^{kx}$.

Απόδειξη

1ο βήμα: Για $y = 0$, $f(x) = f(x)f(0)$, ή $f(0) = 1$ (αφού f θετική).

2ο βήμα: $f(2) = f(1 + 1) = f(1)^2$, $f(3) = f(2 + 1) = f(2)f(1) = f(1)^3$

Γενικά: $f(n) = f(1)^n$ (επαγωγή)

3ο βήμα: $f(n – n) = f(n)f(-n) \leftrightarrow 1 = f(n)f(-n) \leftrightarrow f(-n) = 1/f(n) = f(1)^{-n}$

4ο βήμα: $f(1) = f(1/q + \ldots + 1/q) = f(1/q)^q \leftrightarrow f(1/q) = f(1)^{1/q}$

5ο βήμα: $f(p/q) = f(1/q + \ldots + 1/q) = f(1/q)^p = f(1)^{p/q}$

6ο βήμα: Πυκνότητα ρητών στο R + συνέχεια της f $\to$ επέκταση στο R.

7ο βήμα: Συμπεραίνουμε $f(x) = f(1)^x = e^{x\ln f(1)} = e^{kx}$, για $k = \ln f(1)$

Μονομεταβλητή κανονική κατανομή

Πόρισμα

Έστω f: R → R, συνεχής και θετική, που ικανοποιεί την συνθήκη

$$\lambda f(x + y) = f(x)f(y),\ x,\ y \in R.$$

Τότε, υπάρχει k є R, τέτοιο ώστε $f(x) = \lambda\, e^{kx}$.

Απόδειξη

Θέτουμε $\varphi(x) = f(x)/\lambda$ ή $f(x) = \lambda\varphi(x)$.

$\lambda f(x + y) = f(x)f(y) \leftrightarrow \lambda[\lambda\varphi(x + y)] = [\lambda\varphi(x)][\lambda\varphi(y)]$

$\leftrightarrow\ \varphi(x + y) = \varphi(x)\varphi(y)$

$\leftrightarrow\ \varphi(x) = e^{kx}$

$\leftrightarrow\ f(x) = \lambda e^{kx}.$

Μονομεταβλητή κανονική κατανομή

Θεώρημα

Έστω X, Y i.i.d. συνεχείς τ.μ. με σ.π.π. $f_X = f_Y = f: R \to [0, 1]$. Αν ισχύει:

- η κοινή σ.π.π. $f_{X,Y}$ κυκλικά συμμετρική συνάρτηση γύρω από τη μέση τιμή μ (η τιμή f(x, y) εξαρτάται μόνο από την ευκλείδεια απόσταση του (x, y) από την αρχή).

- f παραγωγίσιμη στο R.

- f συμμετρική ως προς τη μέση τιμή μ, f(μ - x) = f(μ + x).

- $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$.

Τότε,

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]$$

Μονομεταβλητή κανονική κατανομή

Απόδειξη (1 / 2)

Για λόγους απλότητας θεωρούμε $\mu = 0$.

Είναι X, Y ανεξάρτητες άρα $f_{X,Y}(x, y) = f_X(x)f_Y(y) = f(x)f(y)$ (1)

Επιπλέον, $f_{X,Y}$ κυκλικά συμμετρική γύρω από τη μέση τιμή: $f_{X,Y}(x, y) = g(x^2 + y^2)$ (2)

Σημείωση: Αν $\mu \neq 0$, θα είναι $f_{X,Y}(x, y) = g((x - \mu)^2 + (y - \mu)^2)$

Από (1) και (2) $f(x)f(y) = g(x^2 + y^2)$ (3)

Για $y = 0$, η (3) $\rightarrow$ $f(x) = \lambda g(x^2)$.

Για $x = 0$, η (3) $\rightarrow$ $f(y) = \lambda g(y^2)$. ($\lambda = g(0)^{0..5}$).

Η (3) γράφεται $g(x^2)g(y^2) = 1/\lambda^2\, g(x^2 + y^2)$ από όπου συμπεραίνουμε (Πόρισμα Λήμματος) ότι $g(x^2) = 1/\lambda^2 \exp(-k\, x^2)$ και

$$f(x) = \lambda g(x^2) = \frac{1}{\lambda} e^{-k x^2}.$$

Μονομεταβλητή κανονική κατανομή

Απόδειξη (2 / 2)

Βρήκαμε $f(x) = \frac{1}{\lambda} e^{-kx^2}$. Η f είναι συνάρτηση κατανομής, άρα πρέπει

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{\lambda}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-kx^2}dx = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{\lambda}\sqrt{\frac{\pi}{k}} = 1 \Leftrightarrow \lambda = \sqrt{\frac{\pi}{k}}.$$

Τώρα είναι $f(x) = \sqrt{\frac{k}{\pi}} e^{-kx^2}$.

Όμως, η f είναι συνάρτηση κατανομής, άρα $\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx = \sqrt{\frac{k}{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-kx^2}dx$

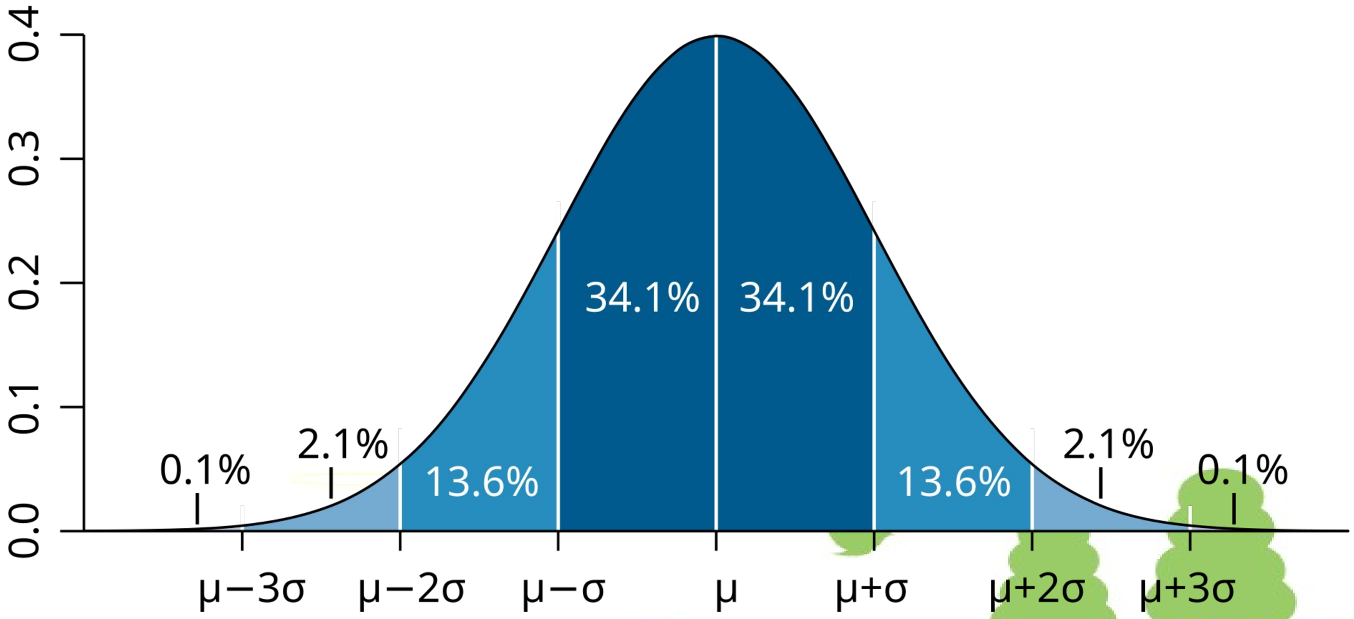
Υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα και βρίσκουμε $\sigma^2 = 1/(2k)$ ή $k = 1/(2\sigma^2)$. Αντικαθιστούμε:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

Μονομεταβλητή κανονική κατανομή

Έστω X συνεχής τ.μ. Λέμε ότι η X ακολουθεί την κανονική κατανομή όταν

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]$$



Σημείωση
Σχετικά με την προέλευση του τύπου, πολλές χρήσιμες πληροφορίες είναι διαθέσιμες εδώ:
https://math.stackexchange.com/questions/384893/how-was-the-normal-distribution-derived
https://web.archive.org/web/20171118080241/http://courses.ncssm.edu:80/math/Talks/PDFS/normal.pdf

Διμεταβλητή κανονική κατανομή

Ορισμός

Έστω X, Y δύο συνεχείς τ.μ. Λέμε ότι οι X, Y έχουν διμεταβλητή κανονική κατανομή όταν η μεταβλητή αX + bY είναι κανονική για κάθε x, y є R.

Αν οι X, Y έχουν διμεταβλητή κανονική κατανομή, τότε φανερά:

- η X έχει κανονική κατανομή.

- η Y έχει κανονική κατανομή.

Άσκηση

Έστω $X \sim N(1, 1)$, $Y \sim N(0, 4)$, ανεξάρτητες τ.μ. με διμεταβλητή κανονική κατανομή.

Να βρεθεί η $P(2X + Y < 3)$

Διμεταβλητή κανονική κατανομή

Έστω X, Y δύο συνεχείς τ.μ, $\mu = \begin{pmatrix} \mu_X \\ \mu_Y \end{pmatrix}$, $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, και $\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{XX}^2 & \sigma_{XY}^2 \\ \sigma_{YX}^2 & \sigma_{YY}^2 \end{pmatrix}$ ο πίνακας των συνδιακυμάνσεων.

Αποδεικνύεται ότι οι X, Y έχουν διμεταβλητή κανονική κατανομή όταν

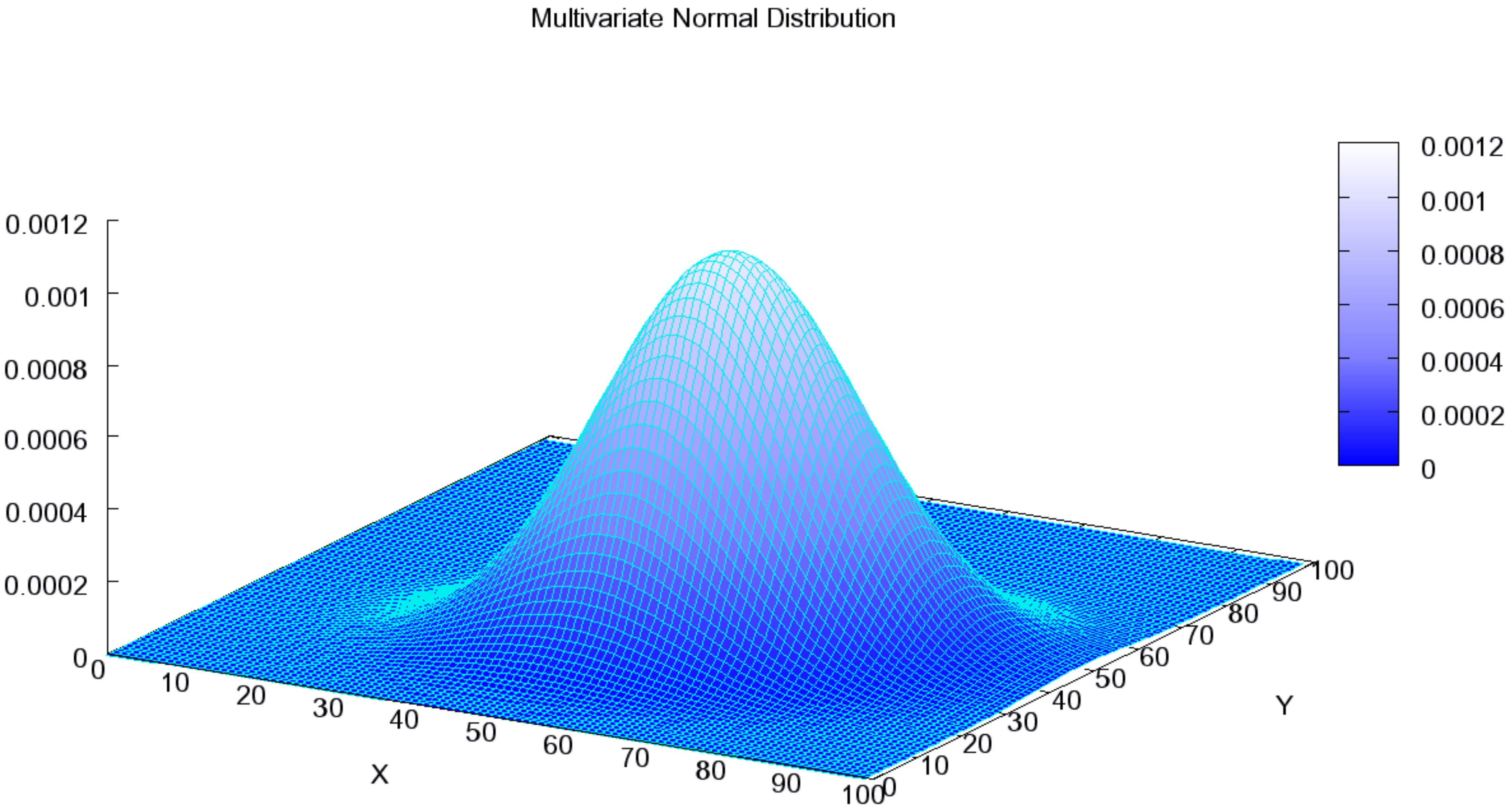
$$f_{X,Y}(\vec{x}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^2 \det(\Sigma)}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\vec{x}-\mu)^T \Sigma^{-1} (\vec{x}-\mu)\right) \quad \text{ή}$$

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-\rho_{XY}^2}} \exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho_{XY}^2)}\left(\left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right)^2 - 2\rho_{XY}\left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right)\left(\frac{y-\mu_Y}{\sigma_Y}\right) + \left(\frac{y-\mu_Y}{\sigma_Y}\right)^2\right)\right]$$

Γράφουμε (X, Y) ~ N(**μ**, **Σ**)

Σημείωση
Μία εξαιρετική περιγραφή της απόστασης Mahalanobis που χρησιμοποιείται στη πολυμεταβλητή κανονική κατανομή είναι διαθέσιμη εδώ: https://stats.stackexchange.com/a/62147/27608

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-\rho_{XY}^2}} \exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho_{XY}^2)}\left(\left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right)^2 - 2\rho_{XY}\left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right)\left(\frac{y-\mu_Y}{\sigma_Y}\right) + \left(\frac{y-\mu_Y}{\sigma_Y}\right)^2\right)\right]$$



Πολυμεταβλητή κανονική κατανομή

Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_n$ συνεχείς τ.μ. και Σ ο πίνακας των συνδιακυμάνσεων.

Λέμε ότι οι $X_1, X_2, \ldots, X_n$ έχουν πολυμεταβλητή κανονική κατανομή όταν

$$f_{X,Y}(\vec{x}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det(\Sigma)}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\vec{x}-\mu)^T \Sigma^{-1}(\vec{x}-\mu)\right)$$

Πολυμεταβλητή κανονική κατανομή

Οι X_1, X_2, X_3, …, X_n, ακολουθούν πολυμεταβλητή κανονική κατανομή αν και μόνο αν κάθε γραμμικός συνδυασμός τους ακολουθεί κανονική κατανομή.

Απόδειξη: https://math.stackexchange.com/a/2994943/664787

Αν X, Y ακολουθούν πολυμεταβλητή κανονική κατανομή τότε ισχύει:

$$\rho(X, Y) = 0 \text{ (ασυσχέτιστες)} \rightarrow X, Y \text{ ανεξάρτητες.}$$

Πράγματι, αν $\rho(X, Y) = 0$, τότε ο πίνακας Σ είναι διαγώνιος και $f_{X,Y} = f_X f_Y$. Περισσότερα εδώ: https://math.stackexchange.com/a/803370/664787

Αντίστροφα, αν οι X_1, X_2, X_3, …, X_n, ακολουθούν μονομεταβλητή κανονική κατανομή τότε ακολουθούν πολυμεταβλητή κανονική κατανομή μόνο όταν είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους.

Περιεχόμενα Μαθήματος

Περιεχόμενα Μαθήματος

Παραδείγματα φυσικών συστημάτων που εξελίσσονται στο χρόνο

Ορισμός Στοχαστικής Διεργασίας (ή Ανέλιξης) (Stochastic process)

Χαρακτηρισμός στοχαστικών διεργασιών ως προς το σύνολο δεικτών και το σύνολο τιμών

Γραφική παράστασης στοχαστικής διεργασίας

Τάση, διακύμανση και συνδιακύμανση διεργασίας

Συνάρτηση (αυτο)συσχέτισης διεργασίας

Πείραμα και παρατήρηση

Πείραμα 1: Ζάρι που ρίχνεται και κερδίζουμε κάθε φορά την ένδειξη σε ευρώ.

Μεταβλητή: X_n = {το κέρδος της n – οστής ρίψης}

Μεταβλητή: Z_n = {το συνολικό κέρδος έως και τη n – οστή ρίψη}

Πείραμα 2: Παρατηρούμε τους πελάτες ενός καταστήματος στη διάρκεια της ημέρας.

Μεταβλητή X_t = {το πλήθος πελατών στο διάστημα [0, t)}

Μεταβλητή Y_t = {ο τζίρος του καταστήματος στο διάστημα [0, t)}

Πείραμα 3: (Τυχαίος περίπατος)

Αντικείμενο βρίσκεται στη θέση 0 και κινείται με τυχαίο τρόπο αριστερά (-1) ή δεξιά (+1).

Μεταβλητή: Y_n = {η θέση του αντικειμένου τη χρονική στιγμή n}

Παρατηρούμε ότι σε όλες τις παραπάνω περιπτώσεις ορίζονται με φυσικό τρόπο οικογένειες τυχαίων μεταβλητών της μορφής $\{X_n, n \in N\}$ ή $\{X_t, t \in [0, +\infty)\}$

Πείραμα και παρατήρηση

Πείραμα 4: Καταγράφουμε την ταχύτητα του αέρα σε μία τουρμπίνα αεροπλάνου.
Μεταβλητή: X_n = {η ταχύτητα του αέρα τη χρονική στιγμή t}

Πείραμα 5: Καταγράφουμε κάθε μεσημέρι τη θερμοκρασία της αίθουσας.
Μεταβλητή: X_n = {η θερμοκρασία στην n – οστή ημέρα}

Πείραμα 6: Παρατηρούμε ένα ζεύγος από την ημέρα του γάμου του
Μεταβλητή: X_n = {Το πλήθος των παιδιών το n – οστό έτος ενός ζεύγους.}

Πείραμα 7: Παρατηρούμε ένα βρέφος από την ημέρα γέννησής του
Μεταβλητή: X_n = {το βάρος ενός βρέφους τη n – οστή ημέρα της ζωής του}

Πείραμα 8 (θερμικός θόρυβος): Θεωρούμε μία αντίσταση σ' ένα ηλεκτρικό κύκλωμα. Λόγω των τυχαίων κινήσεων των ηλεκτρονίων μέσω της αντίστασης, υπάρχουν μικρές τυχαίες μεταβολές τη διαφορά δυναμικού στα άκρα της αντίστασης.
Μεταβλητή: X_t = {η διαφορά δυναμικού τη χρονική στιγμή t}.

Πείραμα και παρατήρηση

Πείραμα 9 (κίνηση Brown): Ένα σωματίδιο μικροσκοπικού μεγέθους εμβαπτίζεται σ' ένα υγρό, οπότε υπόκειται σ' ένα μεγάλο αριθμό τυχαίων και ανεξάρτητων ωθήσεων που οφείλονται σε συγκρούσεις με μόρια. Η θέση του τη χρονική στιγμή t δεν είναι δυνατόν να βρεθεί ντετερμινιστικά.

Μεταβλητή: $X_t = \{x(t), y(t), z(t)\}$ το διάνυσμα που παριστάνει τη θέση του σωματιδίου τη χρονική στιγμή t.

Φυσικό σύστημα ⇌ Σύνολο μεταβλητών

Στην προσπάθεια κατανόησης και πρόβλεψης των φυσικών συστημάτων, μία συνήθης επιστημονική πρακτική είναι η έκφραση των μεταβαλλόμενων ποσοτήτων με ένα **σύνολο μεταβλητών**, το οποίο μπορεί να είναι

διακεκριμένο $\{X(n), n \in N\} = \{X(0), X(1), X(2), \ldots\}$ ή και

συνεχές $\{X(t), t \geq 0\}$.

Αυτές οι μεταβλητές μπορούν να λαμβάνουν διακριτές τιμές, τιμές στο R ή ακόμα και διανύσματα (δηλαδή στοιχεία του R^n).

Ντετερμινιστικό vs Στοχαστικό σύστημα

Τα φυσικά συστήματα μπορούν να χωριστούν σε **ντετερμινιστικά** και **στοχαστικά** ανάλογα με τη μορφή της χρονικής εξέλιξης τους.

Ένα σύστημα που περιγράφεται από μία σύνολο μεταβλητών {X(n), n Є N} ή {X(t), t ≥ 0}, ονομάζεται **ντετερμινιστικό**, αν η μελλοντική κατάσταση του συστήματος τη χρονική στιγμή (n ή t), καθορίζεται πλήρως από τις αρχικές τιμές του συστήματος, X(0). Σε μια τέτοια περίπτωση δεν υπάρχει τυχαιότητα στην εξέλιξη του συστήματος.

Αντίθετα, ονομάζεται **στοχαστικό** αν για δεδομένες αρχικές τιμές του συστήματος, υπάρχουν περισσότερες από μία πιθανές μελλοντικές καταστάσεις.

Ορισμός στοχαστικής διεργασίας

Ως **στοχαστική διεργασία** (Stochastic Process) ορίζεται να είναι μια συλλογή τυχαίων μεταβλητών που ταξινομούνται με δείκτες μέσα από κάποιο μαθηματικό σύνολο T, υποσύνολο των πραγματικών αριθμών. Τη συμβολίζουμε με

$$\{X(t), t \in T\} \quad ή \quad \{X_t, t \in T\}$$

Οι δείκτες $t \in T$ μπορεί να αντιπροσωπεύουν τη χρονική στιγμή του συμβάντος (όπως στο παράδειγμα με το ζάρι, το θερμικό θόρυβο ή την κίνηση Brown) ή και όχι (όπως στο παράδειγμα των σεισμών).

Όλες οι τυχαίες μεταβλητές που ανήκουν στην συλλογή λαμβάνουν τιμές στο ίδιο σύνολο S, το οποίο μπορεί να είναι οι ακέραιοι, οι πραγματικοί ή ακόμα και ένα ν – διάστατο διάνυσμα.

Περιγραφή μίας στοχαστικής διεργασίας

Για τον πλήρη ορισμό μίας στοχαστικής ανέλιξης {X(t), t є T}, απαιτούνται τα εξής:

1. Το σύνολο T των δεικτών της

2. Ο χώρος καταστάσεων S (δηλαδή η γνώση του συνόλου των τιμών που λαμβάνουν οι τ.μ.)

3. Η γνώση της από κοινού κατανομής

$$F_{t1,\, t2,\, \ldots,\, tn}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = P(X(t_1) \leq x_1, X(t_2) \leq x_2, \ldots, X(t_n) \leq x_n)$$

για οποιαδήποτε $t_1, t_2, \ldots, t_n$ є T και για κάθε $x_1, \ldots, x_n$ є S.

Σημείωση: Αξιοσημείωτο είναι ότι στην περίπτωση όπου οι {X(t), t є T} είναι ανεξάρτητες τότε η από κοινού κατανομή καθίσταται πλήρως γνωστή ως γινόμενο των επιμέρους κατανομών.

Στοχαστική διεργασία (ή ανέλιξη)

Ερωτήσεις σχετικά με το Πείραμα 1

Πείραμα 1: Ζάρι που ρίχνεται και κερδίζουμε κάθε φορά την ένδειξη σε ευρώ.
Μεταβλητή: X_n = {το κέρδος της n – οστής ρίψης}
Μεταβλητή: Z_n = {το συνολικό κέρδος έως και τη n – οστή ρίψη}

1. Πως εκφράζεται η Z_n συναρτήσει των X_n;

2. Είναι η $\{Z_n, n \in N\}$ μία στοχαστική ανέλιξη;

3. Είναι οι μεταβλητές X_n, $n \in N$, ανεξάρτητες και ισόνομες;

4. Είναι οι μεταβλητές Z_n, $n \in N$, ανεξάρτητες και ισόνομες;

Δραστηριότητα
Σχεδιάστε τη γραφική παράσταση που να δείχνει μία πιθανή εξέλιξη της Z_n.

Χαρακτηρισμός στοχαστικών διεργασιών

Μια στοχαστική διεργασία {X(t), t є T} μπορεί να χαρακτηριστεί

α) ως προς το σύνολο των δεικτών

β) ως προς το σύνολο που ανήκουν οι τιμές που λαμβάνουν οι τ.μ.

γ) ως προς τη σχέση μεταξύ των τ.μ. που περιέχει.

Χαρακτηρισμός στοχαστικών διεργασιών

Ως προς το σύνολο των δεικτών

- Αν T υποσύνολο του N, τότε η {X(n), n є T} ονομάζεται **στοχαστική διεργασία διακριτού χρόνου** (ή τυχαία ακολουθία).
- Αν T υποσύνολο του R, τότε η {X(t), t є T} ονομάζεται **στοχαστική διεργασία συνεχούς χρόνου**.

Παραδείγματα

(α) ΣΔ διακριτού χρόνου: Το άθροισμα των ρίψεων ενός ζαριού

(β) ΣΔ συνεχούς χρόνου: ο θερμικός θόρυβος.

Χαρακτηρισμός στοχαστικών διεργασιών

Ως προς το σύνολο που ανήκουν οι τιμές που λαμβάνουν οι τ.μ.

- Αν οι τιμές που λαμβάνουν οι τ.μ. είναι φυσικοί αριθμοί τότε η {X(t), t є T} ονομάζεται **στοχαστική διαδικασία διακριτών τιμών** ή απλά **διακριτή**.
- Αν το σύνολο των τιμών που λαμβάνουν οι τ.μ. είναι διάστημα πραγματικών αριθμών τότε η {X(t), t є T} ονομάζεται **στοχαστική διαδικασία συνεχών τιμών** ή απλά **συνεχής**.
- Αν το σύνολο των τιμών που λαμβάνουν οι τ.μ. είναι διανύσματα αριθμών τότε η {X(t), t є T} ονομάζεται **διανυσματική στοχαστική διαδικασία**.

Παραδείγματα
(α) διακριτή ΣΔ: Το άθροισμα των ρίψεων ενός ζαριού
(β) συνεχής ΣΔ: το χρονικό διάστημα μεταξύ δύο σεισμών
(γ) διανυσματική ΣΔ: Η κίνηση Brown

Τάση, διακύμανση και συνδιακύμανση διεργασίας

Αν για κάθε t є T υπάρχει ως πεπερασμένος αριθμός η E(X(t)) τότε η συνάρτηση

$$m(t) = E(X(t))$$

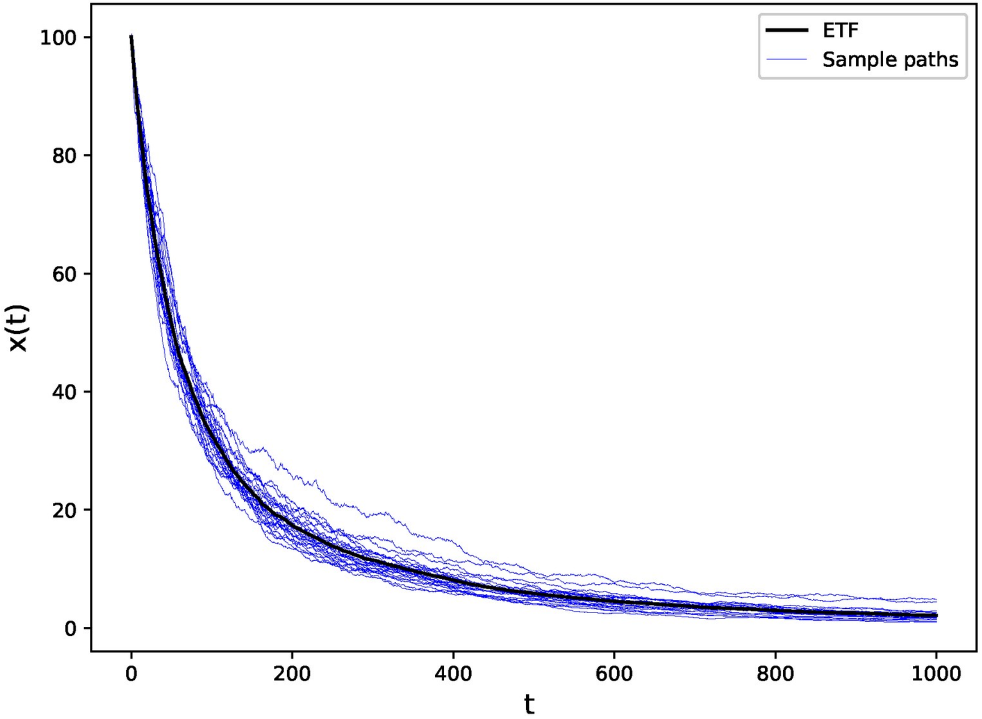
ονομάζεται συνάρτηση τάσης (trend function) της διεργασίας {X(t), t є T}.
Ειδικότερα,

$$m(t) = E(X(t)) = \sum_{\kappa \in S}^{\infty} \kappa f_t(\kappa) = \sum_{\kappa \in S}^{\infty} \kappa P(X(t) = \kappa), \quad t \in T.$$

$$m(t) = E(X(t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_t(x)\, dx, \quad t \in T.$$

Τάση, διακύμανση και συνδιακύμανση διεργασίας

Διάγραμμα που παρουσιάζει πολλές *πειραματικές* εκδοχές μίας στοχαστικής διεργασίας. Με μαύρο χρώμα σημειώνεται η εκτίμηση για τη **συνάρτηση τάσης** της διεργασίας.



Πηγή: Nafidi A, Makroz I, Gutiérrez Sánchez R. A Stochastic Lomax Diffusion Process: Statistical Inference and Application. Mathematics. 2021; 9(1):100. https://doi.org/10.3390/math9010100

Τάση, διακύμανση και συνδιακύμανση διεργασίας

Η **συνάρτηση συνδιακύμανσης** (covariance function) C(s, t) εκφράζει τη συνδιακύμανση των X_t, X_s, t, s є T,

$$C(s, t) = Cov(X(t), X(s)) = E[(X(t) – m(t))(X(s) – m(s))], \ t, s \in T.$$

Ειδικότερα, ορίζεται η **συνάρτηση διακύμανσης** ως:

$$Var(X(t)) = C(t, t) = E[(X(t) - m(t)]^2, \ t \in T,$$

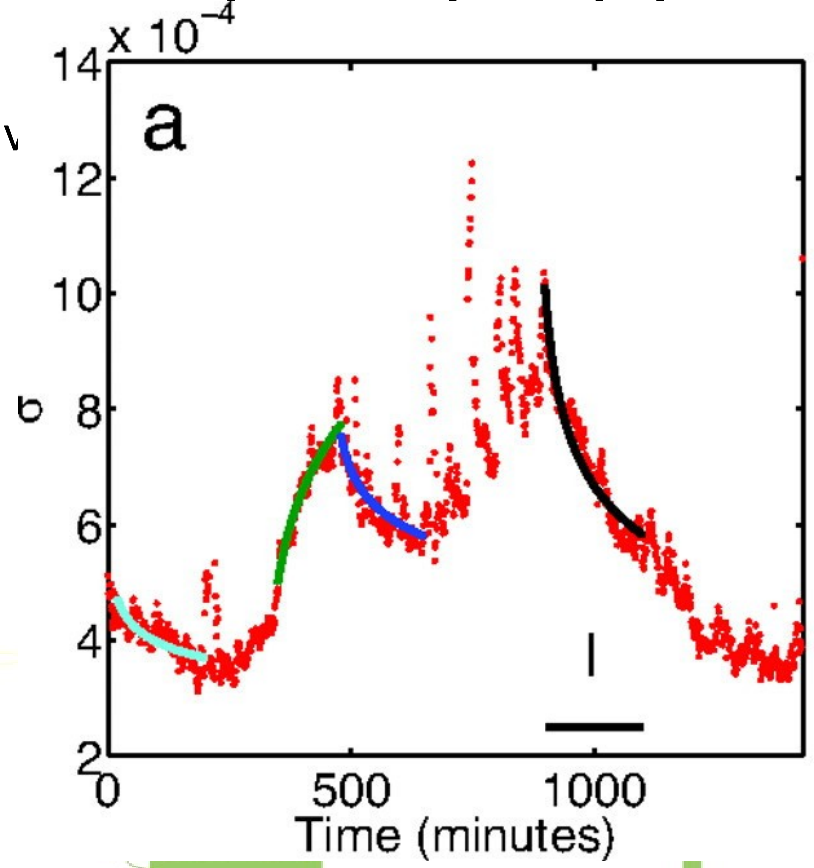
ενώ η **συνάρτηση τυπικής απόκλισης** είναι η

$$\sigma(t) = \sqrt{Var(X(t))} = \sqrt{E[(X(t) - m(t))]^2}, \quad t \in T.$$

Δείξτε ότι C(s, t) = E[X(t)X(s)] – m(t)m(s), t, s є T.

Τάση, διακύμανση και συνδιακύμανση διεργασίας

Διάγραμμα που παρουσιάζει την τυπική απόκλιση (σ) της χρονοσειράς που εκφράζει την ισοτιμία ευρώ – δολαρίου σε ημερήσια βάση (1440 λεπτά) μεταξύ 1999 και 2004([1]).



[1]. Kevin E. Bassler, Joseph L. McCauley, Gemunu H. Gunaratne (2007). Nonstationary increments, scaling distributions, and variable diffusion processes in financial markets. Proceedings of the National Academy of Sciences Oct 2007, 104 (44) 17287-17290; DOI: 10.1073/pnas.0708664104

Συνάρτηση (αυτο)συσχέτισης διεργασίας

Για κάθε t, s ϵ T, η **συνάρτηση συσχέτισης** (correlation function) ορίζεται ως εξής:

$$\rho(t,s) = \frac{\mathrm{Cov}(X(t),\, X(s))}{\sqrt{\mathrm{Var}(X(t))} \cdot \sqrt{\mathrm{Var}(X(t))}}.$$

Η συνάρτηση ρ(t, s) ονομάζεται και **συνάρτηση αυτοσυσχέτισης** (autocorrelation function) της διεργασίας {X(t), t ϵ T}.

Προσαυξήσεις διεργασίας

Αν {X(t), t є T} στοχαστική διεργασία, τότε για κάθε t, s є T, η διαφορά

$$\mathbf{X(t) - X(s)}$$

ονομάζεται **προσαύξηση** της διεργασίας.

Κάθε μία προσαύξηση είναι μία νέα τυχαία μεταβλητή.

Χαρακτηρισμός στοχαστικών διεργασιών

Ως προς τη σχέση των τ.μ. που την αποτελούν, μία διεργασία μπορεί να χαρακτηριστεί:

- Διεργασία με ανεξάρτητες προσαυξήσεις (Process with independent increments)
- Διεργασία με στάσιμες προσαυξήσεις (Process with stationary increments)
- (Ισχυρά) στάσιμη (Strongly ή strictly ή απλά stationary process)
- Μαρκοβιανή (Markov process αν $T = [0, +\infty)$ ή Markov Chain αν $T = N$)
- Ασθενώς στάσιμη (Weakly stationary process)
- Γκαουσιανή (Gaussian process)
- Ανανεωτική (Renewal process)
- Διαδικασία διακλάδωσης (Branching process)

Διεργασία με ανεξάρτητες προσαυξήσεις

Μία κατηγορία στοχαστικών διεργασιών που θα μελετήσουμε είναι οι στοχαστικές διεργασίες με ανεξάρτητες προσαυξήσεις.

Λέμε ότι μία στοχαστική ανέλιξη $\{X(t), t \in T\}$ έχει **ανεξάρτητες προσαυξήσεις (independent increments)** όταν για κάθε n και για κάθε $t_1, t_2, \ldots, t_n \in T$, τέτοια ώστε $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$, οι προσαυξήσεις

$$X(t_2) - X(t_1),\ X(t_3) - X(t_2),\ \ldots,\ X(t_n) - X(t_{n-1})$$

είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές.

Διεργασία με στάσιμες προσαυξήσεις

Ένας επιπλέον χαρακτηρισμός που μπορεί να αποδοθεί σε μία διεργασία είναι ο χαρακτηρισμός των στάσιμων προσαυξήσεων.

Λέμε ότι μία στοχαστική ανέλιξη $\{X(t), t \in T\}$ έχει **στάσιμες προσαυξήσεις (stationary increments)** όταν για κάθε $\kappa > 0$ και κάθε $s > 0$,

$$\text{η τ.μ. } X_{\kappa+s} - X_{\kappa} \text{ είναι ισόνομη με την } X_s - X_0$$

(δηλαδή η προσαύξηση μεταξύ δύο στιγμών της διεργασίας εξαρτάται μόνο από τη διαφορά των χρονικών στιγμών s και όχι από το “που” κ).

Σημείωση: Η στασιμότητα των προσαυξήσεων είναι μία πολύ ισχυρή συνθήκη. Ειδικότερα, ισχύει $E(X_{\kappa+s} - X_{\kappa}) = E(X_s - X_0)$ και $Var(X_{\kappa+s} - X_{\kappa}) = Var(X_s - X_0)$

Στάσιμες και ανεξάρτητες προσαυξήσεις

Μία διεργασία μπορεί να έχει και στάσιμες και ανεξάρτητες προσαυξήσεις. Ένα παράδειγμα είναι ο τυχαίος περίπατος $\{W_n, n \in N\}$, όπου $W_n = X_1 + \ldots + X_n$ και $X_1, X_2, \ldots$ είναι ισόνομες και ανεξάρτητες τ.μ.

Απόδειξη. Είναι $W_\kappa - W_\lambda = \Sigma_{i = \lambda + 1,\ldots,\kappa} X_i$, για κάθε κ, λ ϵ N, με κ > λ. Από την ανεξαρτησία των $X_1, X_2, \ldots$, συμπεραίνουμε ότι:

- Για κάθε $0 \leq n_1 < n_2 < \ldots < n_s$, τα αθροίσματα ΣX_i, με $i = n_{\kappa-1}+1, \ldots, n_\kappa$, $\kappa = 1, \ldots, s$, είναι ομοίως ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές
- Δύο προσαυξήσεις της W_n (δηλ. αθροίσματα των $X_1, X_2, \ldots$, με ίδιο πλήθος μεταβλητών) έχουν την ίδια κατανομή.

Από τα παραπάνω άμεσα συνάγεται ότι οι προσαυξήσεις της $\{W_n, n \in N\}$ είναι στάσιμες και ανεξάρτητες.

Στάσιμες και ανεξάρτητες προσαυξήσεις

Μία διεργασία μπορεί να έχει ανεξάρτητες προσαυξήσεις χωρίς να έχει στάσιμες προσαυξήσεις.

Παράδειγμα: Έστω $W_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$, όπου οι X_n είναι ανεξάρτητες μη ισόνομες τ.μ.

Να δείξετε ότι:

- η $\{W_n, n \in N\}$ έχει ανεξάρτητες προσαυξήσεις
- η $\{W_n, n \in N\}$ δεν έχει στάσιμες προσαυξήσεις

Υπόδειξη: $Var(W_n - W_{n-1}) = Var(X_n)$.

Δραστηριότητα

Έστω $\{X_n, n \in N\}$ μία στοχαστική διεργασία με στάσιμες προσαυξήσεις. Επιπλέον γνωρίζουμε ότι $X_0 = 0$.

Να δείξετε ότι: $E(X_n) = n \cdot \mu_1$, όπου $\mu_1 = E(X_1)$.

Υποδείξεις

- Εκφράστε το X_n ως άθροισμα προσαυξήσεων.
- Θυμηθείτε ότι για κάθε δύο τ.μ. X, Y είναι $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$
- Καθώς οι τ.μ. $X_t - X_s$ και X_{t-s} είναι ισόνομες θα είναι $E(X_t - X_s) = E(X_{t-s})$

Στάσιμες και ανεξάρτητες προσαυξήσεις

Μία διεργασία μπορεί να έχει στάσιμες προσαυξήσεις χωρίς να έχει ανεξάρτητες προσαυξήσεις.

Παράδειγμα: Έστω $\{N_t, t \geq 0\}$ μία διεργασία Poisson (η οποία είναι γνωστό ότι έχει στάσιμες και ανεξάρτητες προσαυξήσεις και πως $N_0 = 0$). Ορίζουμε τη διεργασία συνεχούς χρόνου $\{f_t, t \geq 0\}$ όπου $f_t = [t]N_1 + N_t$.

Άσκηση: Να δείξετε ότι η $\{f_t, t \geq 0\}$ έχει στάσιμες και μη ανεξάρτητες προσαυξήσεις.

Λύση: Στάσιμες προσαυξήσεις: $f_{t+\delta} – f_t = [t + \delta]N_1 + N_{t+\delta} - ([t]N_1 + N_t) = [\delta]N_1 + N_\delta = f_\delta - f_0$

Δεν έχει ανεξάρτητες προσαυξήσεις καθώς (για παράδειγμα):

$f_2 – f_1 = 2N_1 + N_2 - (N_1 + N_1) = N_2$ και $f_1 – f_0 = 2N_1$

Σημείωση: $N_2 = \{\#$ συμβάντα στο $[0, 2]\}$, $N_1 = \{\#$ συμβάντα στο $[0, 1]\}$