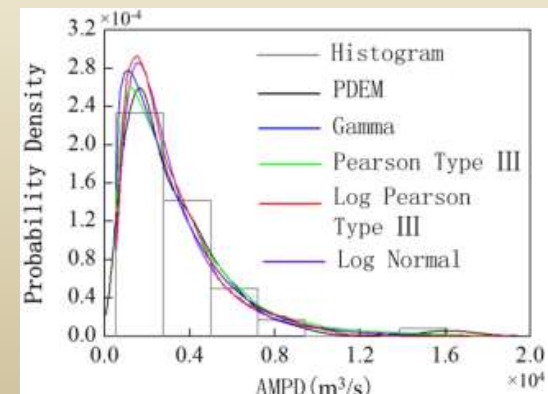
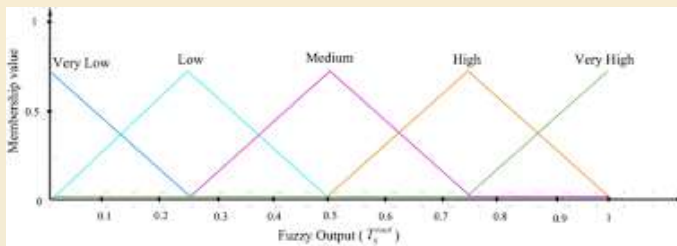


Ασαφή λογική & Πιθανότητες και Στατιστική --- εισαγωγή



Δρ Μ.Σπηλιώτη

Αναπληρωτής Καθηγητής ΔΠΘ



Βασικές πηγές

- Τσακίρης Γ., 2013. Υδατικοί Πόροι Ι, Τεχνική Υδρολογία. Εκδόσεις Συμμετρία.
- Μπέλλος Β., 2010. Τεχνική Υδρολογία.
- Σακκάς, 2003. Τεχνική υδρολογία.
- Μιμίκου Μ., 1994. Τεχνολογία Υδατικών Πόρων.
- Χρυσάνθου Βλ., 2018. Σημειώσεις Τεχνικής Υδρολογίας
- Μυλωνάς και Παπαδόπουλος 2017. Πιθανότητες και Στατιστική για Μηχανικούς, Εκδόσεις Τζιόλα.
- Ζιούτας Γ, 2012. Πιθανότητες και Στατιστική για Μηχανικούς. Εκδόσεις Σοφία
- H. ALFREDO, S. ANG, W. H. TANG (Μετάφραση Δ. Παναγιωτακόπουλος) (2003). Εφαρμογές Πιθανοτήτων και Στατιστικής στη Μελετη και Προγραμματισμό Τεχνικών Έργων. Εκδόσεις ΑΦΟΙ ΚΥΡΙΑΚΙΔΗ.
- Ross Th (2022) Ασαφής Λογική με Εφαρμογές στις Θετικές Επιστήμες. Εκδόσεις Πασχαλίδη.
- Μποτζώρης Γ και Παπαδόπουλος Β. Ασαφή Σύνολα Εφαρμογές στον Σχεδιασμό και τη Διαχείριση Έργων Μηχανικού
- Klir, G.J. and Yuan, B. (1995) Fuzzy Sets and Fuzzy Logic, Theory and Applications. Prentice Hall Inc., Upper Saddle River.

Βασικές έννοιες

Ιστορική αναδρομή

- Ιστορικά η επιστημονική κοινότητα δεν ασπαζόταν πάντα την έννοια της αβεβαιότητας (Klir and Yuan, 1995)
- Όρια για τη Νευτώνια μηχανική
- Ιστορικά: επικράτηση της θεωρίας των πιθανοτήτων στην ερμηνεία της αβεβαιότητας
- Εναλλακτικά ο Lukasiewicz: πλειότιμη λογική
- Zadeh: ασαφή σύνολα

Σύγκριση

Πιθανότητες

- Καλώς ορισμένα σύνολα
- Περιπτώσεις που το αποτέλεσμα μίας διαδικασίας είναι απροσδιόριστη. Επομένως, υπάρχει μία διακύμανση στις προκύπτουσες τιμές. Αν μοιράσουμε σε κλάσεις τις τιμές αυτές, κάποιες κλάσεις συνήθως είναι πιο συχνές-> ιστόγραμμα
- Η πιθανότητα σε μία περιοχή να μ'ια πολύ καλή περίπτωση παίκτη να έχει ύψος πάνω από 1.95 είναι 95%, τότε η περίπτωση να μην έχει τέτοιο ύψος είναι 5%. Τα δύο ενδεχόμενα είναι πολύ καλά ορισμένα Ross (2022).

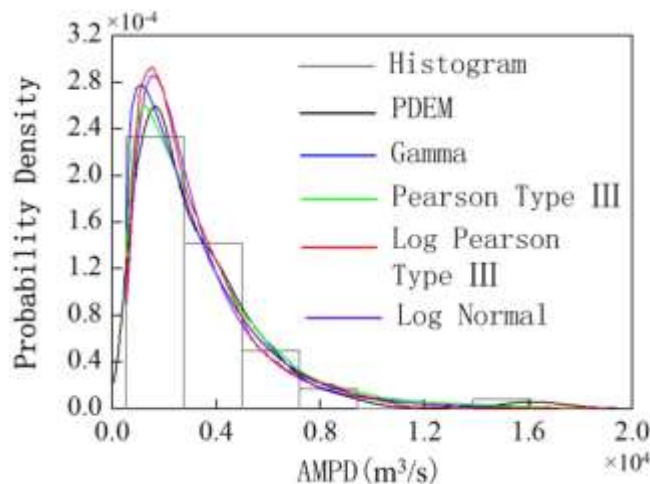
Ασαφή σύνολα

- Γκρίζα όρια, κακώς ορισμένα σύνολα
- π.χ. «γκρίζες ζώνες»
- Λεκτικές τιμές αντιστοιχούν σε ασαφή σύνολα
- Αν η πληροφορία είναι ότι ο παίκτης είναι «πολύ ψηλός» τότε αυτός είναι κοντά στο ύψος 1.95 m αλλά ενδεχομένως να είναι και με λίγο μικρότερο ύψος.
- Πολύ χρήσιμη θεώρηση στη λήψη αποφάσεων σε συμμετοχικές διαδικασίες του κοινού κλπ.

Δείγμα

Πιθανότητες

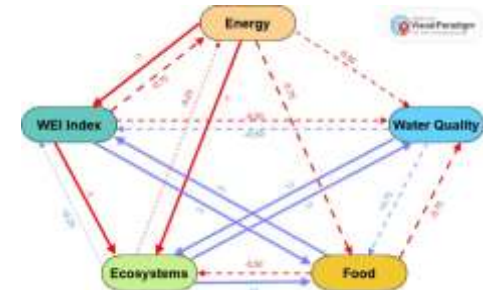
- Όταν υπάρχει ιστορικό δείγμα με σημαντικό αριθμό δεδομένων τότε μπορεί να δοκιμαστούν διάφορες **θεωρητικές κατανομές** και με **έλεγχο καταλληλότητας** να προσδιοριστεί η κατάλληλη κατανομή



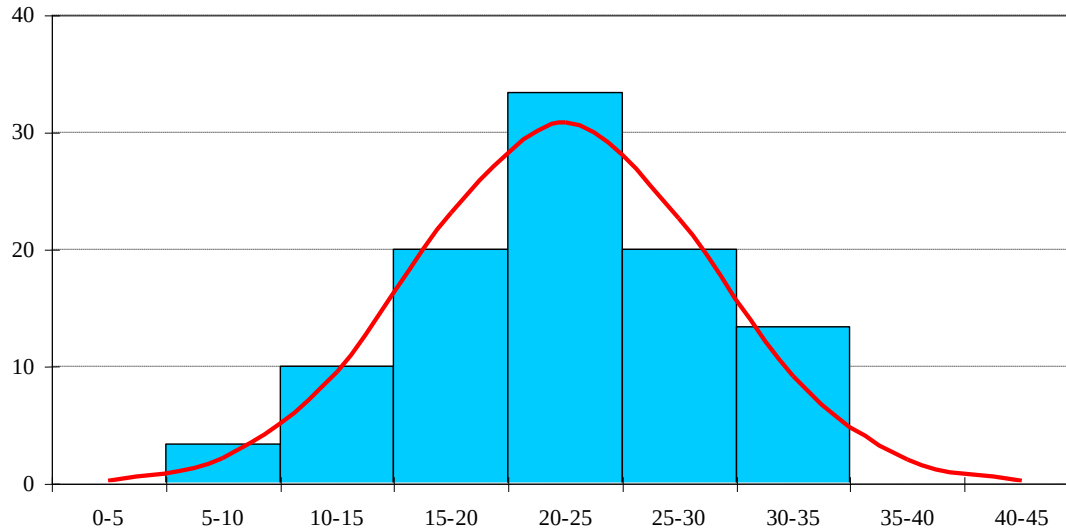
Υβριδικά μοντέλα

Ασαφή σύνολα

- Για **«ασθενή» πληροφορία** π.χ. μέγιστη, ελάχιστη και μία επικρατέστερη τιμή τότε θα πρέπει να δοκιμαστεί η ασαφής λογική
- Προτιμητέα η ασαφή λογική για ασθενή πληροφορία γενικά
- Παράδειγμα ασαφών κανόνων: ξέρουμε το αποτέλεσμα αλλά είναι ασαφής η ενεργοποίηση των κανόνων και το εξαγόμενο

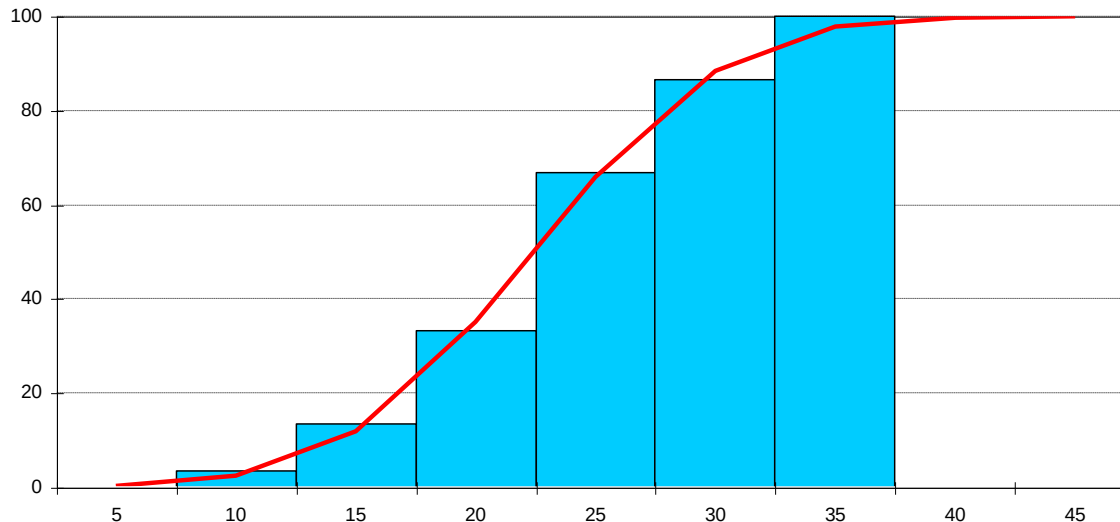


Διάγραμμα συνάρτησης πυκνότητας
πιθανότητας (συνάρτηση κατανομής)



Η συνάρτηση πυκνότητας
πιθανότητας ισούται με την
πρώτη παράγωγο της
αθροιστικής πιθανότητας

Διάγραμμα αθροιστικής πιθανότητας

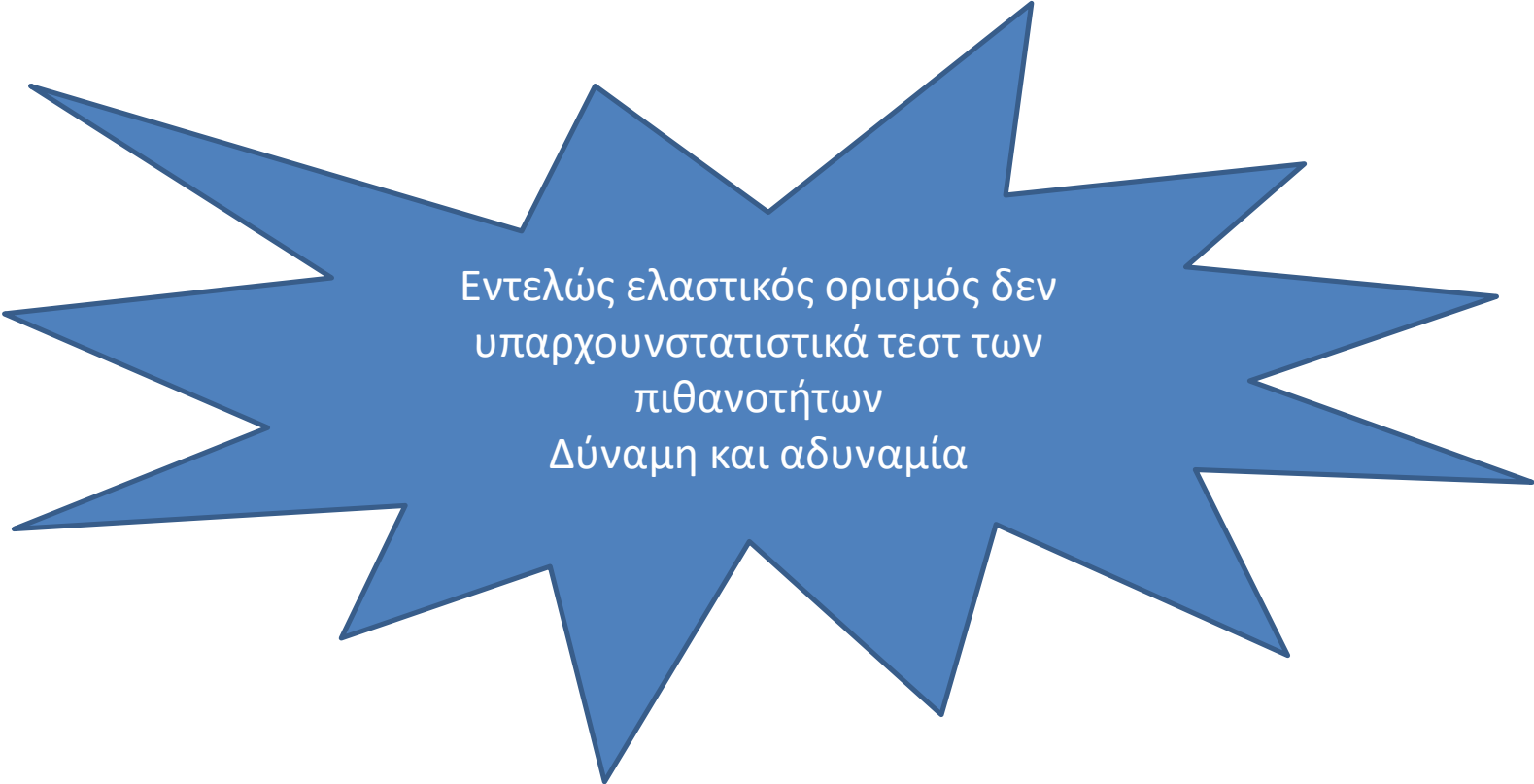


Η αθροιστική πιθανότητα
δηλώνει την πιθανότητα όπου
μια τυχαία μεταβλητή είναι
ίση ή μικρότερη από κάποια
δοθείσα τιμή

Ο μηχανικός παίρνει αποφάσεις σε περιβάλλον αβεβαιότητας

- Εγγενής αβεβαιότητα στον υδρολογικό κύκλο(input)
- Στην εξέλιξη / κατανομή της ζήτησης νερού
- Στην ερμηνεία γενικά πολύπλοκων μοντέλων και στις απλοποιήσεις που γίνονται
- Στη μετάφραση ασαφούς πληροφορίας από ειδικούς ή τους χρήστες νερού
- Στη σύνθεση των κριτηρίων
- Γκρίζα περιοχή στη σύγκριση και γενικότερα στα όρια των κατηγοριών

Ορισμός 2.2.1: Έστω X ένα γενικό σύνολο. Ονομάζεται ασαφές υποσύνολο του X ή ασαφές σύνολο (fuzzy set) κάθε απεικόνιση που χαρακτηρίζεται από τα στοιχεία μίας περιοχής διαστήματος ή γενικού συνόλου X στο διάστημα $[0, 1]$, δηλ. $A: X \rightarrow [0, 1]$



Εντελώς ελαστικός ορισμός δεν
υπάρχουν στατιστικά τεστ των
πιθανοτήτων
Δύναμη και αδυναμία

Συνάρτηση συμμετοχής

Κάθε ασαφές σύνολο A στο X μπορεί να παρασταθεί από το διατεταγμένο ζεύγος

$$A = \{\mu_A(x) / x \in X\}, \quad (2.1)$$

όπου $\mu_A(x)$ η συνάρτηση συμμετοχής (ή χαρακτηριστική συνάρτηση) που καταδεικνύει σε ποιο βαθμό ένα στοιχείο του γενικού συνόλου X ανήκει στο ασαφές σύνολο A .

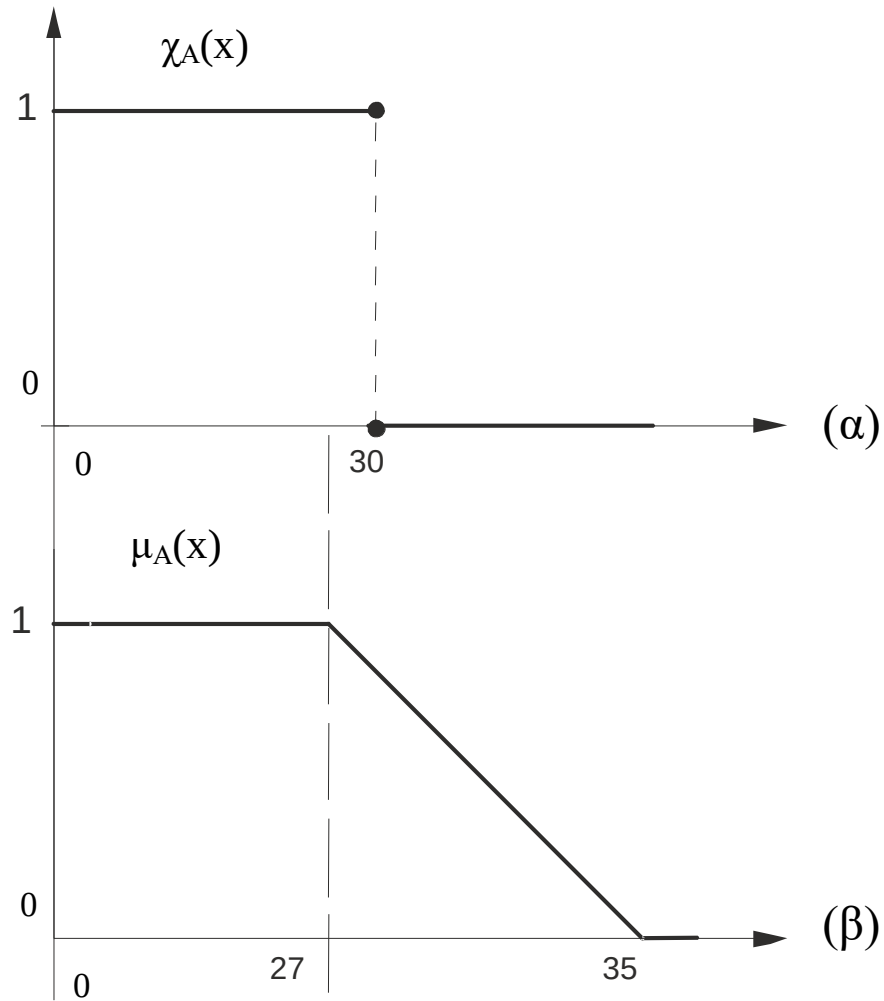
Η συνάρτηση συμμετοχής έχει τις τιμές μηδέν για την περίπτωση όπου το στοιχείο δεν ανήκει στο ασαφές σύνολο A και μονάδα για την περίπτωση όπου το στοιχείο ανήκει πλήρως στο ασαφές σύνολο A . Για τις ενδιάμεσες τιμές της συνάρτησης συμμετοχής, το στοιχείο ανήκει σε κάποιο βαθμό στο ασαφές σύνολο.

Συμβατικά σύνολα και συνάρτηση συμμετοχής

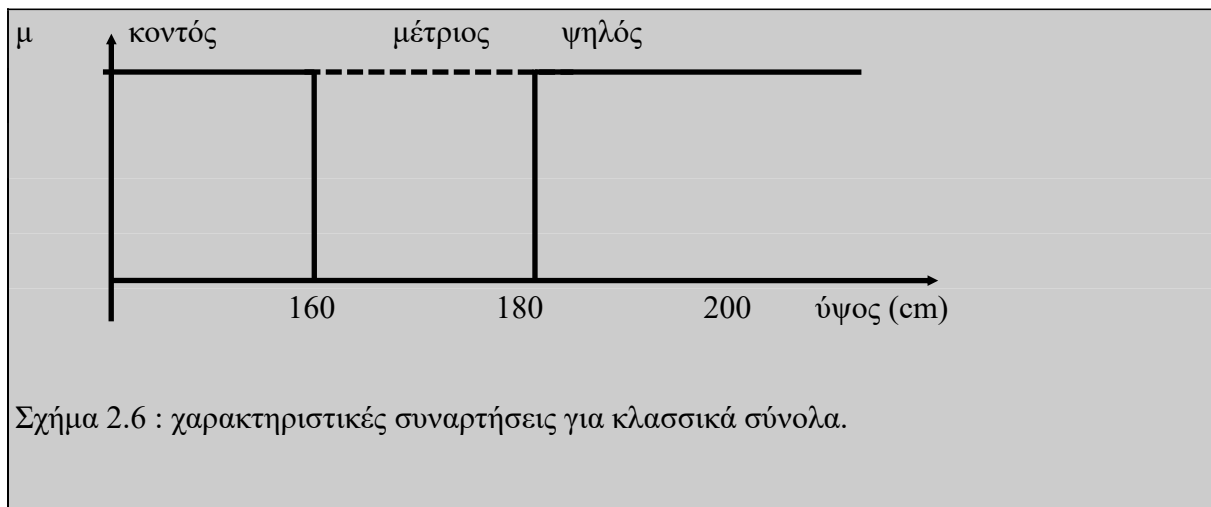
Για τα συμβατικά σύνολα μπορεί να αντιστοιχηθεί μία συνάρτηση συμμετοχής που δέχεται μόνο τις τιμές μηδέν και μονάδα. Συνεπώς, ένα συμβατικό σύνολο A έχει την παρακάτω συνάρτηση συμμετοχής:

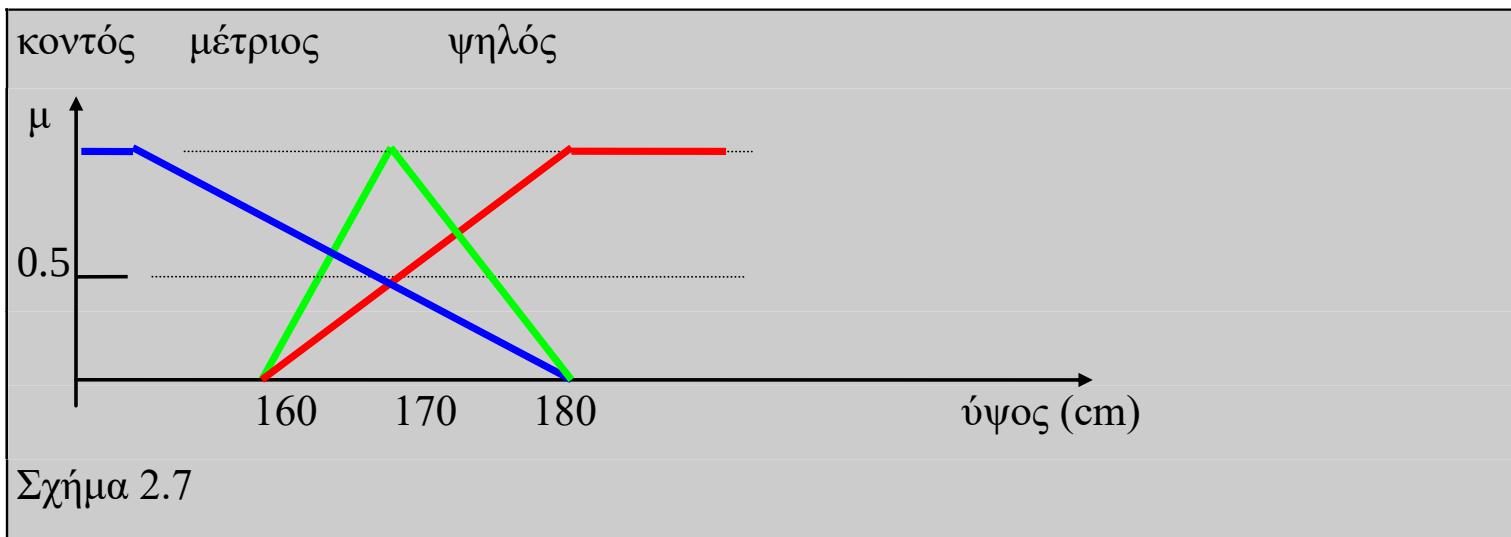
$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{αν } x \in A \\ 0 & \text{αν } x \notin A \end{cases} \quad (2.2)$$

Είναι προφανές ότι τα συμβατικά σύνολα μπορούν να κατανοηθούν ως μία ειδική περίπτωση των ασαφών συνόλων.



Σχ.2.2 Κλασσική (α) και ασαφής προσέγγιση (β) για το σύνολο των νέων ανθρώπων





Βασικές έννοιες

Πιθανότητες

- Ιδεατό
- Τυχαία μεταβλητή
- Συνεχείς και διακριτές κατανομές
- Ταίριασμα μεταξύ **στατιστικού δείγματος** και **θεωρητικής κατανομής πιθανότητας**

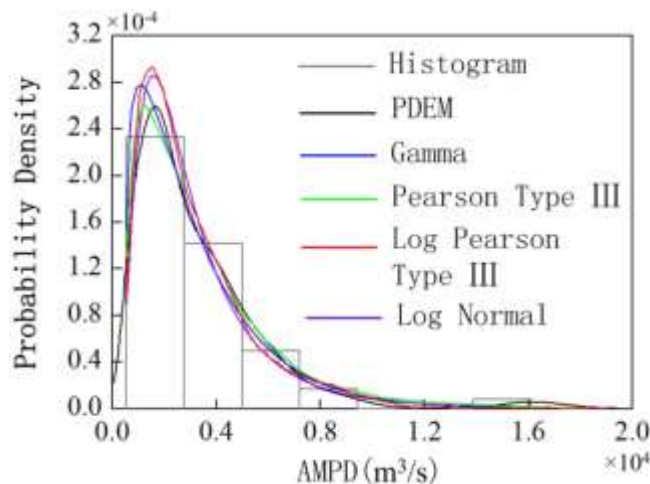
Πιθανότητες

- Η τύχη είναι άμεσα συνδεδεμένη με τα υδρολογικά φαινόμενα (πλημμύρες, ξηρασίες) με αποτέλεσμα να περιγράφονται σε μικρό ή μεγάλο βαθμό από τη θεωρία των πιθανοτήτων
- Η τεχνική υδρολογία στηρίζεται σε μετρήσεις φυσικών μεταβλητών που η επεξεργασία τους προϋποθέτει τη χρήση στατιστικών μεθόδων (έλεγχος των σφαλμάτων των μετρήσεων, συμπλήρωση ελλείψεων ιστορικών δειγμάτων και κυρίως επέκταση χρονοσειρών) και το συνταίριασμα τους με τις πιθανότητες (κόσμος του ιδεατού)
- Η λήψη αποφάσεων για το σχεδιασμό και τη βέλτιστη λειτουργία των υδραυλικών έργων και των υδατικών συστημάτων γενικότερα, γίνεται πάντοτε υπό καθεστώς αβεβαιότητας, η οποία μπορεί να ποσοτικοποιηθεί με την θεωρία των πιθανοτήτων

Αβεβαιότητα στις πληροφορίες από τον πραγματικό κόσμο και ερμηνεία με πιθανότητες

Αβεβαιότητα εξ αιτίας **τύχης**

- Περιπτώσεις που το αποτέλεσμα μίας διαδικασίας είναι απροσδιόριστη. Επομένως, υπάρχει μία διακύμανση στις προκύπτουσες τιμές. Αν μοιράσουμε σε κλάσεις τις τιμές αυτές, κάποιες κλάσεις συνήθως είναι πιο συχνές-> ιστόγραμμα



Αβεβαιότητα εξ αιτίας **ελλιπών μοντέλων** και εκτιμητικών σφαλμάτων

- Ανακρίβεια των μοντέλων (απλοποιήσεις της πραγματικότητας) παράγουν αβεβαιότητα π.χ. διάσταση μεταξύ παρατηρούμενων τιμών και των τιμών του μοντέλου
- Σε κάποιες περιπτώσεις η στατιστική συνυπολογίζει πόσο σωστά είναι αυτά τα μοντέλα και ποια η αβεβαιότητα στην εκτίμηση των τιμών.

Εμπειρική κατανομή πιθανότητας

Εμπειρική Πιθανότητα

Ας υποθέσουμε ότι ένα στοιχαστικό πείραμα, με δοκιμαστικό χώρο Ω μπορεί να εκτελεσθεί n ή n_s (ίδιες) συνθήκες ανεξάρτητες φορές. Έστω ότι σε n εκτελέσεις του πειράματος, το ενδεχόμενο A έλαβε χώρα $n_n(A)$ φορές. Τότε η πιθανότητα του ενδεχομένου A θα είναι:

$$P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n_n(A)}{n}$$

Η εμπειρική αυτή πιθανότητα, είναι:

(1) μη αρνητική: $P(A) \geq 0$

(2) καν/μη: $P(\Omega) = 1$

(3) Πρόσθετική: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$,

για ομοιβαίως αποκλειόμενα ενδεχόμενα A και B .

ΕΜΠΕΙΡΙΚΗ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ

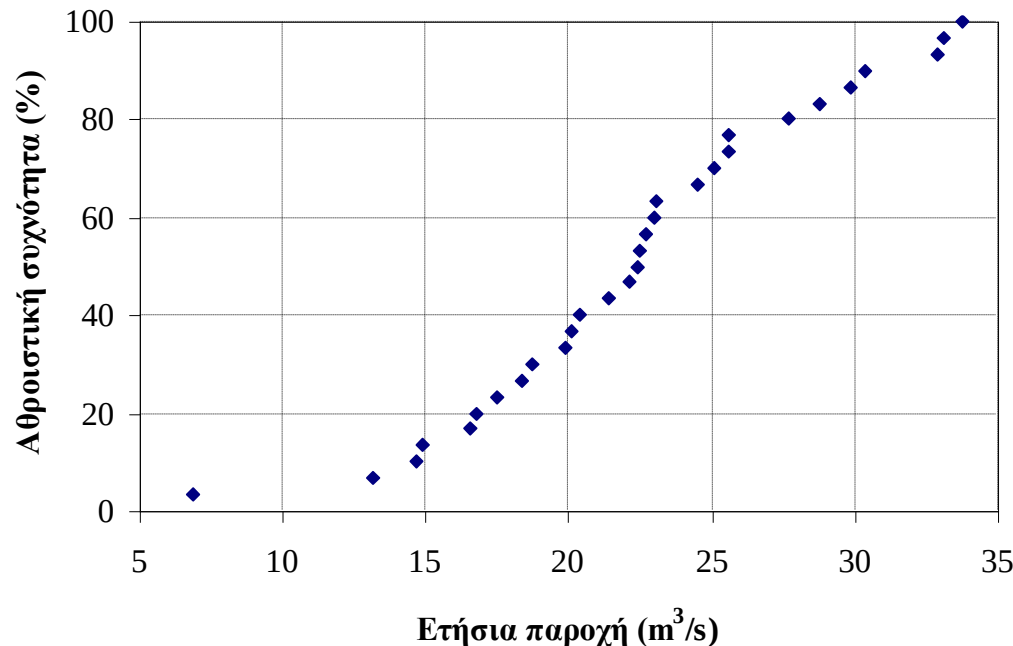
Η πιθανότητα να λάβει μια τιμή η μεταβλητή βάσει των πραγματικών μετρήσεων (των τιμών του δείγματος) . Τα δεδομένα τοποθετούνται με φθίνουσα σειρά και η εμπειρική πιθανότητα υπολογίζεται από τη σχέση:

$$F_X(x) = 1 - \frac{m}{N+1} \quad \text{Weibull (1939)}$$

όπου m =αύξων αριθμός (δεδομένα κατά φθίνουσα σειρά)

N = μέγεθος δείγματος

ΕΜΠΕΙΡΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ



Υδρολογία, χρήση
ανοικτών σειρών,
παρανομαστής $N+1$

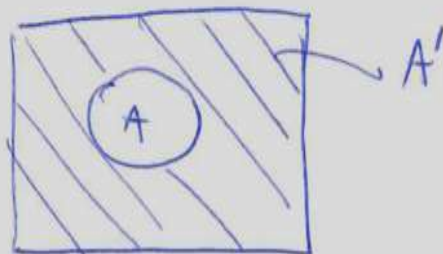
Βασικές έννοιες πιθανοτήτων

Συμπλήρωμα

Συμπλήρωμα:

Αν A' συμπλήρωμα ενός ενδεχομένου A ,
ως προς το χώρο Ω , τότε

$$P(A') = 1 - P(A)$$



Ξένα ενδεχόμενα και η πιθανότητα της **ένωσης** και της **τομή τους**

Αν δύο οποιαδήποτε γεγονότα είναι ξένα τότε
τους $(A_1 \cap A_2 = \emptyset)$ ή $\left(\begin{array}{l} \text{η συνθήκη να είναι ψευής} \\ \text{η συνθήκη να είναι αληθής} \end{array} = \emptyset \right)$

ήχουν

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) \quad \left(\begin{array}{l} \text{ένωση} \\ \text{"ή"} \end{array} \right)$$

προφανώς $P(A_1 \cap A_2) = 0$.

Τομή ανεξάρτητων ενδεχομένων

Τομή (και)

Για A και B στοχαστικά ανεξάρτητα ενδεχόμενα.
(η πραγματοποίηση του A ενδεχομένου, δεν επηρεάζει την
πραγματοποίηση του B ενδεχομένου) τότε:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.3

Δύο αυτόματοι βροχογράφοι A και B λειτουργούν ανεξάρτητα. Αν το ποσοστό του χρόνου λειτουργίας του A είναι 0.85 και του B 0.7, ποες είναι οι πιθανότητες σε δεδομένη χρονική στιγμή:

1. να λειτουργούν και οι δύο
2. να μη λειτουργεί καμία.

Λύση:

1. Η πιθανότητα να λειτουργούν και οι δύο βροχογράφοι είναι:

$$P(A \cap B) = P(A) * P(B) = 0.85 * 0.70 = 0.595.$$

2. Η πιθανότητα να μη λειτουργεί καμία συσκευή είναι:

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{A}) * P(\bar{B}) = 0.15 * 0.3 = \underline{\underline{0.045}}, \text{ όπου}$$

η πιθανότητα μη λειτουργίας του βροχογράφου A είναι:

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0.85 = 0.15$$

και η πιθανότητα μη λειτουργίας του βροχογράφου B είναι:

$$P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0.70 = 0.30.$$

Μιμίκου και
Μπαλτάς, 2012

Πιθανότητα της ένωσης δύο γεγονότων

For the advantage of drawing $\Sigma_{i=0}^n f(x_i)$

$$P(A \cup B) = \underbrace{P(A)}_{\text{Zusatz}} + \underbrace{P(B)}_{\text{Zusatz}} - P(A \cap B)$$

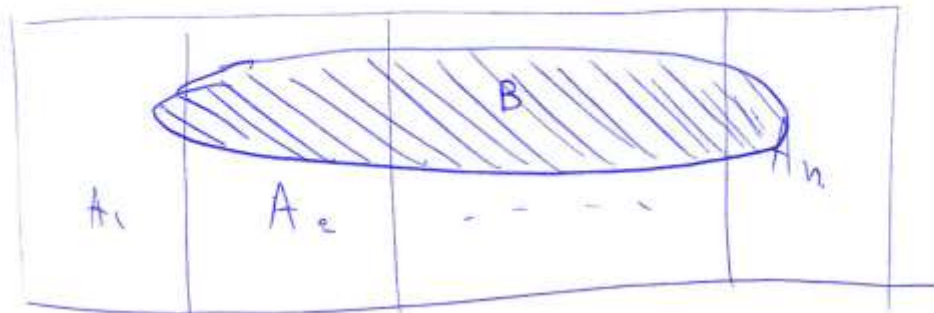
Δεσμευμένη πιθανότητα:

$$P(A/B) = \frac{\text{πιθανότητα να συμβεί το } A \text{ με δεδομένο ότι έχει συμβεί το } B}{\text{συμβεί το } B} =$$

$$= \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \text{Δεσμευμένη πιθανότητα}$$

$$P(B) = P(B/A_1)P(A_1) + P(B/A_2)P(A_2) + \dots + P(B/A_n)P(A_n)$$

$$A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \Omega, A_i \cap A_j = \emptyset$$



**Θεώρημα
Bayes**

$$P(E|B) = \frac{P(B|E)P(E)}{\sum_i P(B|A_i)P(A_i)}$$

Ανεξαρτησία Ενδεχόμενα

Αν δύο γεγονότα A, B λήγονται ανεξαρτητά.

$$P(A|B) = P(A) \text{ και } P(B|A) = P(B)$$



Για δύο ανεξάρτητα ενδεχόμενα (όχι τίνα).

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$



A, B ανεξάρτητα ενδεχόμενα.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) =$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B)$$



για A, B ανεξάρτητα
ενδεχόμενα.

ΠΕΡΙΟΔΟΣ ΕΠΑΝΑΦΟΡΑΣ - ΔΙΑΚΙΝΔΥΝΕΥΣΗ

□ Περίοδος επαναφοράς, T μιας δεδομένης τιμής x της τυχαίας μεταβλητής X είναι ο μέσος αριθμός χρονικών διαστημάτων (εν προκειμένω υδρολογικών ετών) που μεσολαβεί μεταξύ 2 διαδοχικών εμφανίσεων της τυχαίας μεταβλητής με μέγεθος μεγαλύτερο ή ίσο της δεδομένης τιμής x .

$$P(X \geq x) = \frac{1}{T}$$

$$T = \frac{1}{P(X \geq x)} = \frac{1}{1 - P(X \leq x)}$$

□ Διακινδύνευση είναι η πιθανότητα R να πραγματοποιηθεί μέσα σε n έτη τιμή που αντιστοιχεί σε περίοδο επαναφοράς T .

Πιθανότητα υπέρβασης σε n έτη
(Διακινδύνευση):

$$R = 1 - (1 - 1/T)^n$$

Risk

Έστω η 50 χρόνων πλημμύρα. ($p = \frac{1}{50} = 0.02$)

Ποια η πιθανότητα ότι μία τουλάχιστον αλ θα συμβεί στα
επόμενα 30 χρόνια μία τουλάχιστον πλημμύρα με $T > 50$ χρόνια?

$$\text{Risk} = 1 - (1 - 0.02)^{30} = 0.455$$

Μία πλημμύρα

στα 30 χρόνια.

$$1 - 0.02 = \text{καμία πιθανότητα.}$$

$$(1 - 0.02) \cdot \cdot \cdot \cdot (1 - 0.02) = \text{καμία πιθανότητα σε 30 χρόνια}$$

$$1 - (1 - 0.02)^{30} = \text{προβλεπόμενη μία πιθανότητα σε 30 χρόνια} = \underline{\text{καμία πιθανότητα σε 30 χρόνια}}$$

Ar η κατασκευή έχει ως κόστος τα 100 χιλιάδες,
2022

$$\text{Risk} = 1 - \left(1 - \frac{1}{100}\right)^{30} = 0.26$$

Παράδειγμα: Πιθανότητα εμφάνισης μιας αιχμής πλημμύρας με παροχή $Q \geq x$, όπου x η αιχμή πλημμύρας με περίοδο επαναφοράς $T = 50$ έτη, κατά τη διάρκεια μιας περιόδου τριών ετών ($n = 3$):

$$p_3 = 1 - \left(1 - \frac{1}{50}\right)^3 = 0.059 \approx 6\%$$